

ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 2 (T.1)
2020



Salzburg, Austria

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2020) ISSUE 2 (T.1), 156 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

Olga Bermant-Polyakova, PhD, Israel

Tatyana Fedotova, PhD, Professor, Ukraine

Alla Gabidullina, PhD, Professor, Ukraine

Pavel Gorev, PhD, Associate Professor, Russia

Mariya Greb, PhD, Associate Professor, Ukraine

Natalya Korableva, PhD, Associate Professor, Ukraine

Nikolay Kotryahov, PhD, Professor, Russia

Kanat Lakbaev, PhD, Associate Professor, Kazakhstan

Galina Nekrasova, PhD, Professor, Russia

Aleksander Nosov, PhD, Professor, Russia

Gennadiy Senkevich, PhD, Associate Professor, Ukraine

Samvel Sukiasyan, PhD, Professor, Armenia

Eugene Vechtomov, PhD, Professor, Russia

Elena Visotskaya, PhD, Professor, Ukraine

EDITORIAL ADDRESS

SEEBURGSTRASSE 7,
5201 SEEKIRCHEN AM WALLERSEE,
SALZBURG, AUSTRIA
PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.

Editorial opinion can differ from opinion of authors.

If reprinted, the reference to the journal is required.

© All Rights Reserved

Printed in Austria, 2020



CONTENTS

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ,
СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

Ахметова Фания Харисовна, Головина Анастасия Михайловна
5-14

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
В ОБЛАСТИ ЭКОНОМИКИ

Ахметова Фания Харисовна, Абдуллина Эльвира Ирековна
14-22

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА НА ТЕМУ
«ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ»

Безверхний Николай Владимирович, Грибов Александр Фёдорович
23-28

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Безверхний Николай Владимирович, Грибов Александр Фёдорович
29-37

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ:
НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ РАЗРАБОТКИ СХЕМ НОРМАЛЬНЫХ АЛГОРИФМОВ МАРКОВА

Белоусов Алексей Иванович
38-49

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ
ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Бирюков Олег Николаевич
49-55

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА
БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Велищанский Михаил Александрович, Кавинов Алексей Владимирович
56-66

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ZOOM

Вергазова Ольга Бухтияровна, Хасанов Наиль Алфатович
67-71

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ХАОС И СИНХРОНИЗАЦИЮ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
НА ПРИМЕРЕ ОДНОМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Грибов Александр Фёдорович, Безверхний Николай Владимирович,
Краснов Игорь Константинович
72-82

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ:
АВТОМАТИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ВХОДНЫХ ФАЙЛОВ И ИХ ОБРАБОТКА

Довбыш Сергей Александрович

82-95

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ
«ПРИВЕДЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ»

Ефремова Светлана Николаевна, Ласковая Татьяна Алексеевна

96-102

О МЕТОДИКЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ ФУРЬЕ»

Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович

102-117

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ
Кавинов Алексей Владимирович, Велищанский Михаил Александрович

117-124

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

Косова Анна Владимировна

125-133

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ»

Попова Елена Михайловна

134-140

О ПЕРВОМ РУССКОЯЗЫЧНОМ УЧЕБНИКЕ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
Птицына Инга Вячеславовна, Подзорова Марина Ивановна, Птицына Елена Владимировна

141-150

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ПО ТЕМЕ «СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Хасанов Наиль Алфатович, Вергазова Ольга Бухтияровна

150-155

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

Аннотация

В статье продемонстрированы практические приемы построения графиков различного уровня сложности. Предложены способы построения графиков дробно-линейных функций, содержащих знак модуля. Причем рассмотрены как однозначные, так и многозначные функции со знаком модуля слева. Цель работы - систематизировать и углубить знания обучающихся, проиллюстрировать методику и разобрать по шагам алгоритм построения графиков таких функций. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям первого курса.

Ключевые слова

дробно-линейная функция, многозначная функция, знак модуля, гипербола, график функции

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Введение

Продолжим цикл статей, посвященных методам построения графиков различных однозначных и многозначных функций, содержащих знак модуля.

В некоторых случаях, особенно при решении комплексных задач, наилучшим способом является графическое решение. Главным его преимуществом является наглядность и простота восприятия представляемой информации.

Ранее в статьях [1-7] были изложены принципы построения графиков линейных и квадратичных функций. В них были рассмотрены общие схемы построения, а также методы разбиения функции на отдельные уравнения и разбиения координатной плоскости на несколько областей. Кроме того, в [8] было показано применение среды MathCAD в учебном процессе на примерах исследования некоторых вопросов поведения функций и продемонстрирована методика построения графиков с использованием этого пакета прикладных программ.

Методология и результаты исследования

В этой работе перейдем к рассмотрению **дробно-линейных** однозначных и многозначных функций, содержащих знак модуля. Рассмотрим методы построения графиков таких функций.

Определение. Дробно-линейной функцией будем называть функцию вида:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ где } a, b, c \neq 0, d - \text{некоторые константы.}$$

В дробно-линейной функции можно выделить целую часть. Для того, чтобы это сделать нужно числитель $ax+b$ поделить «столбиком» на знаменатель $cx+d$. Частное от деления - это и будет целая часть, обозначим ее через p , а остаток - через q .

В числитель дробной части запишем остаток q , а знаменатель оставим тем же.

Таким образом функцию $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ можно представить в виде $y = p + \frac{q}{cx+d}$.

Как известно, графиком данной функции является **гипербола** с вертикальной асимптотой $x = -\frac{d}{c}$.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{x+3}{x-2}$.

Выделим целую часть: $y = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$. Для построения графика данной функции перейдем к новой системе координат $X_1O_1Y_1$. Так как вертикальной асимптотой данной функции является прямая $x=2$, а целая часть равна единице, то началом O_1 новой системы координат $X_1O_1Y_1$ является $O_1(2,1)$. А уже в новой системе координат $X_1O_1Y_1$ строим график функции $y_1 = \frac{5}{x_1}$. Это и будет график функции

$$y = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}.$$

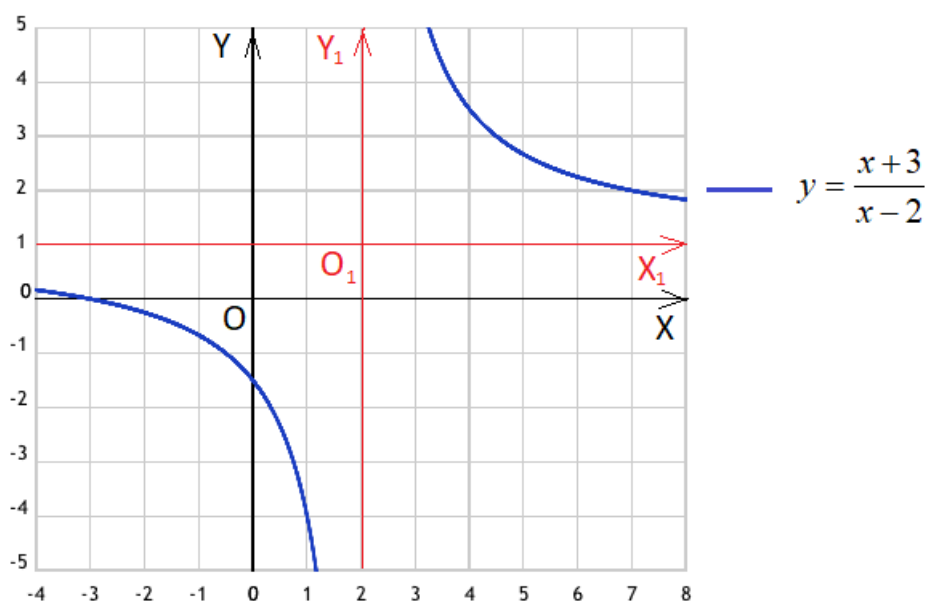


Рис. 1. График функции $y = \frac{x+3}{x-2}$

Построение графиков дробно-линейных функций, содержащих знак модуля

Для построения графиков дробно-линейных функций используем метод преобразования прямоугольной декартовой системы координат и свойства четности функций. Рассмотрим на конкретных примерах построение графиков функций вида:

$$y = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|, \quad y = p + \frac{q}{|cx+d|}, \quad y = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|.$$

Пример 2. Построить график функции $y = \left| \frac{3x-7}{x-3} \right|$.

1 шаг: Выделим в заданной функции целую часть, тогда получим:

$y = \left| \frac{3x-7}{x-3} \right| = \left| 2 + \frac{3}{x-3} \right|$. Вертикальной асимптотой графика является прямая $x=3$. Целая часть равна двум. Следовательно, начало O_1 новой системы координат $X_1O_1Y_1$ имеет координаты $O_1(3,2)$. И в этой новой системе строим график функции $y_1 = \frac{3}{x_1}$.

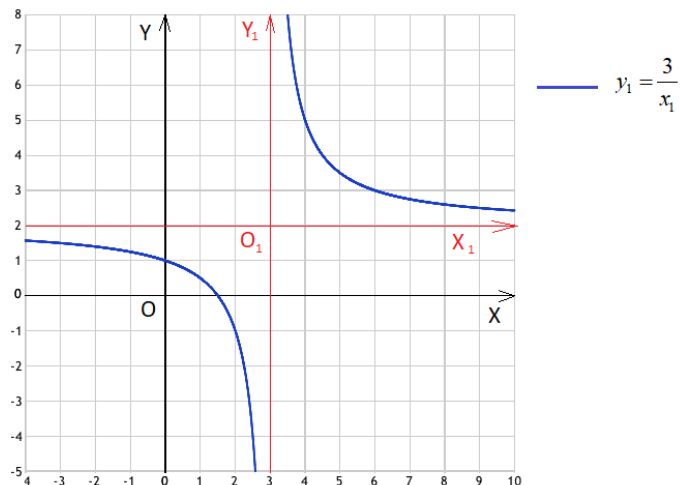


Рис. 2а. График функции $y_1 = \frac{3}{x_1}$

2 шаг: На первом шаге мы построили только график функции $y = 2 + \frac{3}{x-3}$. Для

того, чтобы построить график $y = \left| 2 + \frac{3}{x-3} \right|$ требуется отразить симметрично относительно оси Ox ту часть построенного графика, которая лежит ниже оси Ox .

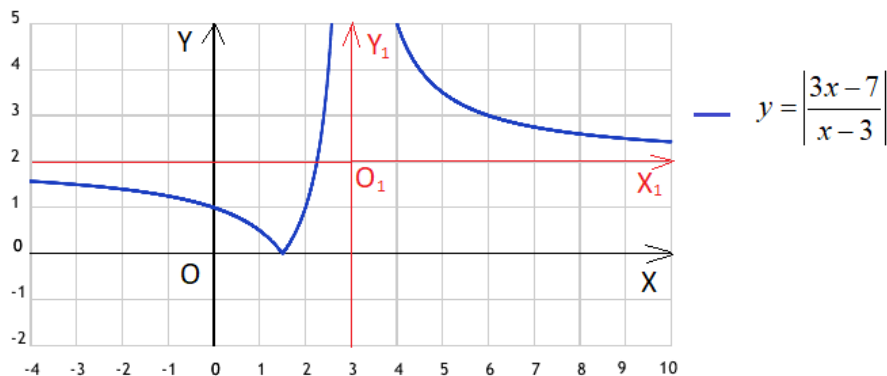


Рис. 2б. График функции $y = \left| \frac{3x-7}{x-3} \right|$

Вывод: Алгоритм построения графика дробно-линейной функции вида $y = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|$, содержащей знак модуля от всей правой части, следующий:

1 шаг: Строим график функции $y = p + \frac{q}{cx+d}$.

2 шаг: Отражаем симметрично оси Ox часть графика функции $y = p + \frac{q}{cx+d}$, лежащую ниже оси Ox .

Рассмотрим следующий вид функции на примере.

Пример 3. Построить график функции $y = 2 + \frac{3}{|x-3|}$.

Данный график вновь будем строить с помощью метода преобразования прямоугольной системы координат и свойства четности функции. Преобразование прямоугольной системы координат в этом случае аналогичное преобразованию из предыдущего примера, т.е. начало новой системы координат $X_1O_1Y_1$ - это точка $O_1(3,2)$. В этой системе координат нам нужно построить график функции $y_1 = \frac{3}{|x_1|}$.

Для этого воспользуемся свойством четности функции. Построим сначала ветку гиперболы $y_1 = \frac{3}{|x_1|}$ при $x_1 > 0$, а затем отразим ее относительно новой оси ординат O_1Y_1 .

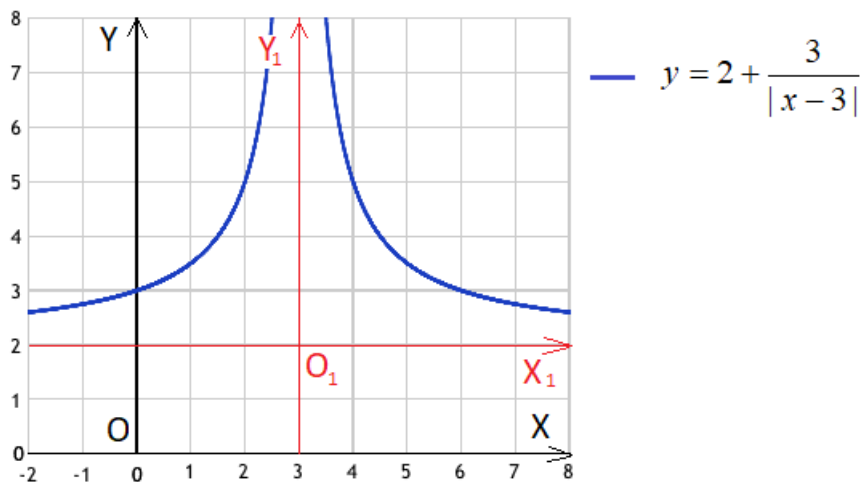


Рис. 3. График функции $y = 2 + \frac{3}{|x-3|}$

Вывод: Алгоритм построения графика функции $y = p + \frac{q}{|cx+d|}$, содержащей знак модуля в знаменателе дробной части, следующий:

1 шаг: Преобразовываем прямоугольную декартову систему координат.

2 шаг: Строим в новой системе координат график функции $y_1 = \frac{q}{|x_1|}$ при $x_1 > 0$.

3 шаг: Зеркально отражаем построенный на втором шаге график относительно новой оси ординат O_1Y_1 .

Перейдем теперь к построению графика следующего вида функции: $y = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|$. Знак модуля взят уже и от знаменателя дробной части, и от всей функции, стоящей справа.

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 4. Построить график функции $y = \left| 5 - \frac{3}{|x+1|} \right|$.

Построение этого графика вновь начнем с преобразования прямоугольной декартовой системы координат. Началом новой системы координат $X_1O_1Y_1$ является точка $O_1(-1,5)$. Наносим эту систему координат. В ней строим график функции $y_1 = \left| -\frac{3}{|x_1|} \right|$. Вначале показываем график функции $y_1 = -\frac{3}{|x_1|}$ по известному нам алгоритму. Затем отражаем полученный график симметрично новой оси абсцисс O_1Y_1 .

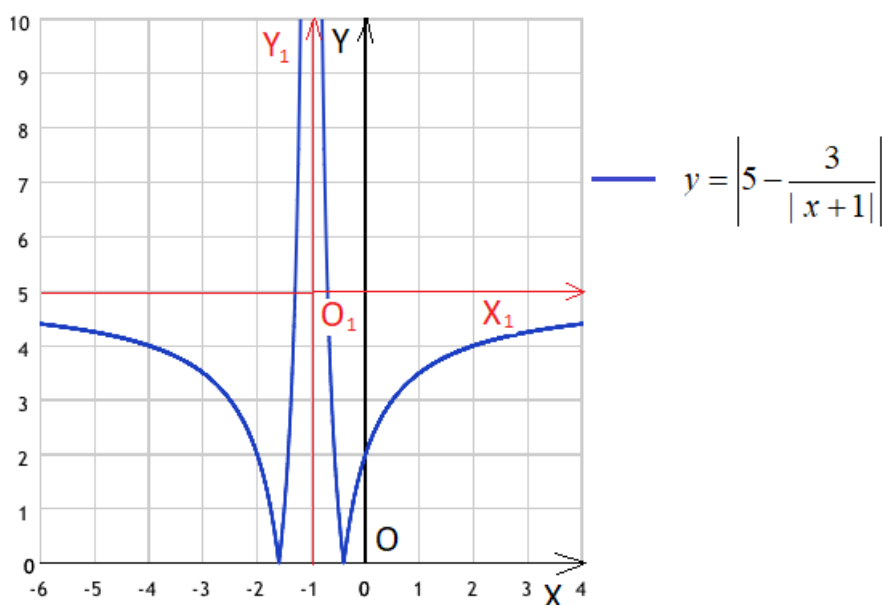


Рис. 4. График функции $y = \left| 5 - \frac{3}{|x+1|} \right|$

Замечание. Заметим, что при построении графиков функций вида $y = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|$ возможны следующие случаи:

1 случай: $p \geq 0, q > 0$. Задача сводится к построению графика функции $y_1 = \left| \frac{q}{|x_1|} \right|$ в новой системе координат. Вид данной функции можно упростить по свойству модуля $y_1 = \frac{q}{|x_1|}$. Алгоритм построения данной функции был описан при рассмотрении предыдущего примера.

2 случай: $p \geq 0, q < 0$. Такая задача уже была разобрана в примере 4 с функцией вида $y = \left| 5 - \frac{3}{|x+1|} \right|$. Данный случай, как мы уже успели в этом убедиться, вновь сводится к построению графика функции $y_1 = \frac{q}{|x_1|}$ в новой системе координат.

3 случай: $p < 0, q > 0$. После перехода к новой системе координат, вновь приходим к построению графика функции $y_1 = \frac{q}{|x_1|}$.

4 случай: $p < 0, q < 0$. После преобразования прямоугольной декартовой системы координат задача сводится к построению графика $y_1 = \frac{q}{|x_1|}$.

Вывод: Методика построения графика дробно-линейной функции $y = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|$, содержащей знак модуля и от знаменателя дробной части, и от всей функции, стоящей справа, сводится к следующему алгоритму:

1 шаг: Преобразовываем прямоугольную декартовую систему координат.

2 шаг: Применяем свойства четности функции и свойства модуля.

3 шаг: Строим график функции вида $y = \frac{q}{|x|}$.

Методы построения графиков многозначных дробно-линейных функций

Выше мы разобрали алгоритмы построения графиков функций вида:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|, \quad y = p + \frac{q}{|cx+d|}, \quad y = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|.$$

Для построения графиков этих же функций, но со знаком модуля в левой части, т.е. **многозначных дробно-линейных функций** необходимо:

1 шаг: Построить график одной из функций:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|, \quad y = p + \frac{q}{|cx+d|}, \quad y = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|,$$

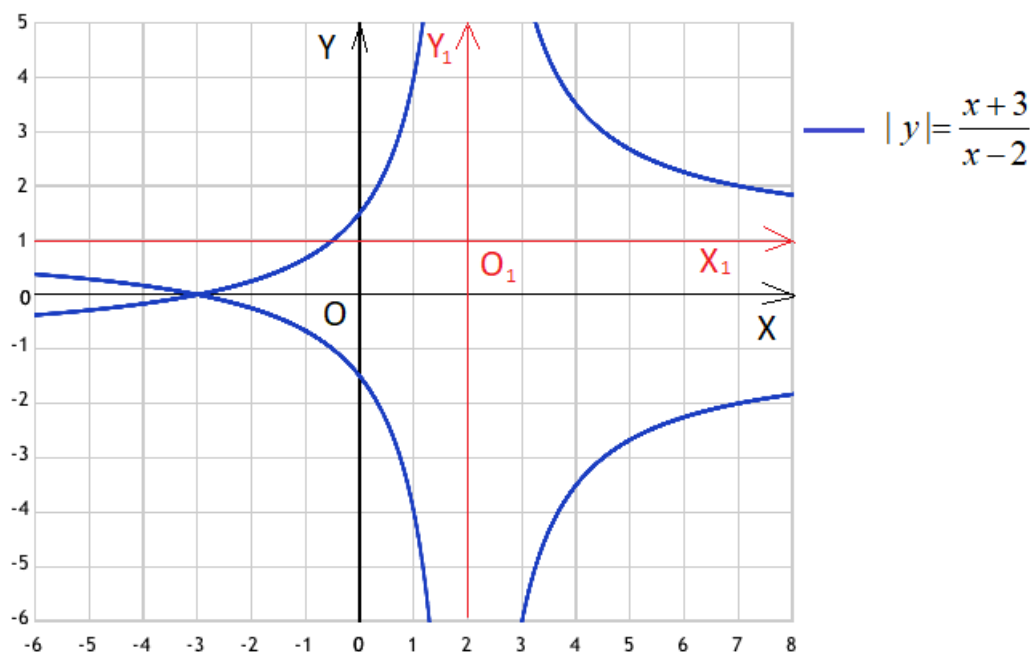
алгоритмы построения которых нам известны.

2 шаг: Отобразить построенный график относительно оси абсцисс.

Рассмотрим построение графиков многозначных функций перечисленных видов на конкретных четырех примерах.

Пример 5. Построить геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих уравнению $|y| = \frac{x+3}{x-2}$.

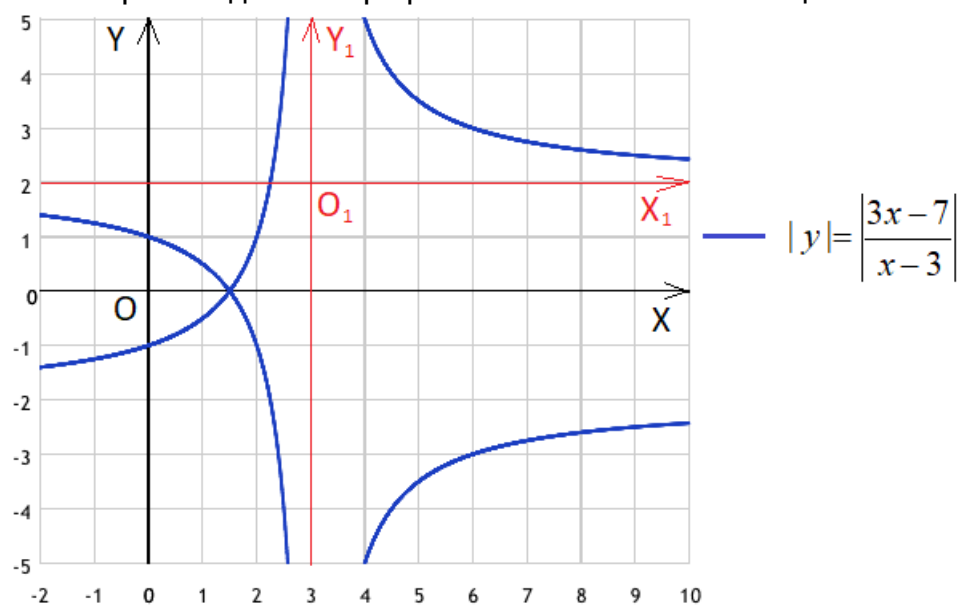
График функции $y = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$ изображен на рисунке 1 (см. пример 1, рис.1). Остается отразить данный график относительно оси абсцисс.

Рис. 5. График функции $|y| = \frac{x+3}{x-2}$

Рассмотрим теперь пример построения ГМТ, удовлетворяющих второму уравнению $|y| = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|$. Согласно алгоритму, первым шагом является построение графика функции $y = \left| p + \frac{q}{cx+d} \right|$. А вторым шагом - отражение этого графика относительно оси абсцисс. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 6. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y| = \left| \frac{3x-7}{x-3} \right|$.

График функции $y = \left| \frac{3x-7}{x-3} \right| = \left| 2 + \frac{3}{x-3} \right|$ изображен на рисунке 26 (см. пример 2, рис. 26). Остается отразить данный график относительно оси абсцисс.

Рис. 6. График функции $|y| = \left| \frac{3x-7}{x-3} \right|$

Займемся теперь построением ГМТ, удовлетворяющих третьему уравнению $|y| = p + \frac{q}{|cx+d|}$. Для этого вновь нужно построить сначала график функции $y = p + \frac{q}{|cx+d|}$, а затем отразить его относительно оси абсцисс.

Пример 7. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y| = 2 + \frac{3}{|x-3|}$.

Строим вначале график функции $y = 2 + \frac{3}{|x-3|}$ по уже известной нам схеме. Данный график изображен на рисунке 3 (см. пример 3, рис. 3). Остается только отразить данный график относительно оси абсцисс. В итоге получим:

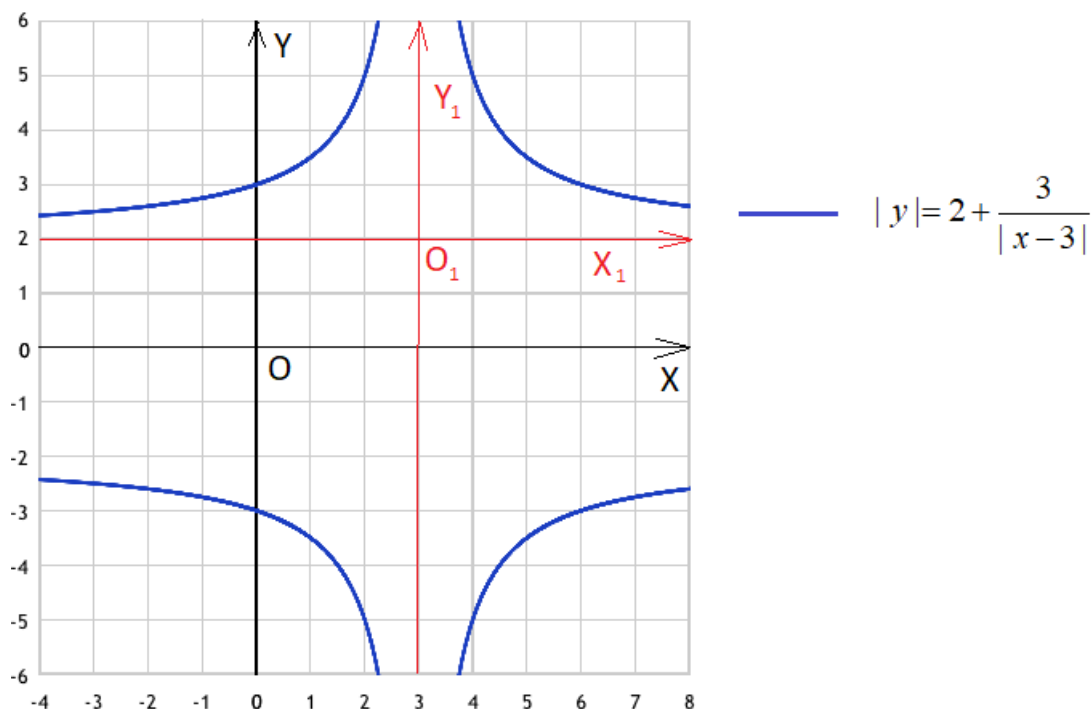


Рис. 7. График функции $|y| = 2 + \frac{3}{|x-3|}$

Перейдем теперь к построению ГМТ, удовлетворяющих четвертому уравнению $|y| = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|$. Схема построения графика прежняя: вновь нужно построить сначала график функции $y = \left| p + \frac{q}{|cx+d|} \right|$, а затем отразить его относительно оси абсцисс.

Пример 8. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y| = \left| 5 - \frac{3}{|x+1|} \right|$.

Следуем алгоритму. График функции $y = \left| 5 - \frac{3}{|x+1|} \right|$ изображен на рисунке 4 (см. пример 4, рис. 4). Отразим теперь данный график относительно оси абсцисс.

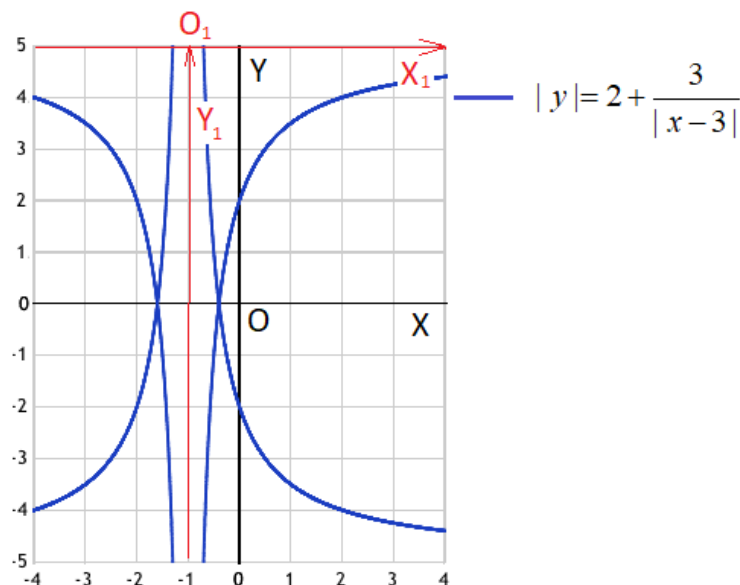


Рис. 8. График функции $|y| = \left| 5 - \frac{3}{|x+1|} \right|$

Заключение

На примерах задач были проиллюстрированы по шагам алгоритмы построения графиков однозначных и многозначных дробно-линейных функций, содержащих знак модуля в разных частях правой части. Описаны все тонкости при выполнении заданий такого рода. Сделаны определенные выводы по каждому этапу построения. Авторы надеются, что активное использование методики построения графиков различного уровня сложности позволит сформировать навыки и профессиональные компетенции у студентов технических специальностей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Ахметова Ф.Х., Головина А.М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/170117.htm>.
2. Ахметова Ф.Х., Головина А.М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V6. – С. 49–54. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/170138.htm>.
3. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Метод разбиения функции на отдельные уравнения при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V9. – С. 76–81. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/186090.htm>.
4. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – С. 6–11. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/186105.htm>.
5. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Метод разбиения плоскости на несколько областей при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V12. – С. 1–6. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/186118.htm>.
6. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков квадратичных функций, содержащих знак модуля. Modern European Researches. – 2019. – №2(1). – С. 4–10. <https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53202>
7. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков функций, заданных в виде произведения некоторых квадратичных функций, содержащих знак модуля. Modern European Researches. – 2019. – №5. – С. 4 -11. <https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53202>
8. Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V9. – С. 77–87. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/171024.htm>.

Faniya H. Akhmetova

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

dobrich2@mail.ru

Anastasiya M. Golovina

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nastya_gm@mail.ru

Methods of graphing for linear fractional functions containing the modulus sign

Abstract. The article demonstrates practical techniques for constructing graphs of various levels of complexity. The authors suggest methods for constructing graphs of linear fractional functions containing the modulus sign. Moreover, both single-valued and multi-valued functions with the modulus sign on the left are considered. The purpose of the work is to systematize and deepen students' knowledge, illustrate the methodology and analyze the steps for constructing graphs of such functions. The content of the article will be useful for students, as well as for teachers working with first-year students.

Key words: linear fractional function, multivalued function, modulus sign, hyperbole, function graph.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ ЭКОНОМИКИ

Аннотация

В настоящее время математические методы исследования находят все большее применение в анализе экономических явлений. Это способствует совершенствованию экономического анализа, его углублению и повышению точности и наглядности. Целью работы является исследование взаимосвязи между математикой и экономикой на примере поиска оптимального решения задач теории международной торговли. В статье на примере решения экономической задачи продемонстрирована актуальность применения математических методов, а именно: аналитического, графического, геометрического. Таким образом, знание математических методов становится одним из важных элементов в области экономики.

Ключевые слова

математика, экономика, математические методы, теория международной торговли, аналитическая модель, графический метод, геометрический метод

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

dobrich2@mail.ru

Абдуллина Эльвира Ирековна,

кандидат экономических наук, доцент

Набережночелнинский институт (филиал) ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)

федеральный университет, г. Набережные Челны

abdullina_ei@mail.ru

Введение

Математические методы являются одними из наиболее важных инструментов анализа экономических явлений и процессов. Без применения математических методов невозможно эффективное развитие экономики, поскольку использование математических моделей и анализ поведения экономических субъектов дают возможность прогнозировать динамику и дальнейшие действия субъекта на определенных временных интервалах.

Применение математических методов в экономике имеет довольно длительную историю. Так уже с середины XIX в. представители буржуазной политической экономии начинают использовать в своих исследованиях сложный математический аппарат. В результате чего, уже в последнее тридцатилетие XIX в. складывается самостоятельное математическое направление. Таким образом, в неоклассическом направлении политической экономии (теория предельной полезности) возникла математическая школа.

Родоначальником математической школы является известный французский ученый, математик, экономист, философ, историк Антуан Огюстен Курно (1801 - 1877). В 1838 г. вышла его знаменитая книга «Исследование математических принципов теории богатства». Именно Курно является создателем математической теории спроса: он впервые провел анализ связи спроса и цены при различных рыночных ситуациях. Данный анализ предоставил возможность сформулировать закон спроса и подвести экономическую науку к понятию эластичности спроса. Он смог математически доказать, что наибольшую выручку от продаж не всегда обеспечивает самая высокая цена.

Таким образом, представители математической школы, используя математические методы, стремились охватить весь экономический процесс в целом, дать общую картину взаимосвязи всех экономических явлений.

И в настоящее время математические методы исследования находят огромное применение в анализе экономических явлений. Это способствует более полному изучению влияния отдельных факторов на интегрированные экономические показатели, повышается точность проведения экономических расчетов, решаются многомерные аналитические задачи, которые не находят решения традиционными методами.

Методология и результаты исследования

В процессе использования математических методов решения задач в области экономики изучаются математические модели.

Под математической моделью в экономике принято понимать математическое описание экономического процесса или объекта, осуществляемое в целях их исследования. Другими словами, это математическая запись решаемой экономической задачи.

Рассмотрим классификацию математических моделей по способу логико-математического описания моделируемых экономических систем [1]:

1. **Аналитическая модель** - формула, отражающая математические зависимости в экономике и показывающая, что результаты (выходы) находятся в функциональной зависимости от затрат (входов). В самом общем виде ее можно записать таким образом:

$$U = f(x),$$

где X - совокупность (вектор) выходов;

f - зависимость, которая записана в виде функции.

В оптимизационных моделях определяется такой вектор переменных X , при котором критерий, характеризующий качество функционирования системы (обычно

это скаляр, а не вектор), получает наибольшее или наименьшее значение (либо вообще достигает какого-то необходимого уровня). Это записывается, например, для случая максимизации следующим образом:

$$U = f(x, y) \longrightarrow \max,$$

где U - вектор переменных, не поддающихся управлению, но влияющих на U ;

f - функция, задающая отношения между всеми указанными величинами.

2. Стохастическая или вероятностная модель - это модель, содержащая случайные элементы. При задании на входе модели некоторой совокупности значений, на ее выходе могут получаться различающиеся между собой результаты в зависимости от действия случайного фактора.

3. Детерминированная модель - выражает аналитическое представление закономерности, операции и т.д., при которой для данной совокупности входных значений на выходе системы может быть получен единственный результат.

4. Дискретная модель - это экономико-математическая модель, в которой все переменные и параметры являются дискретными величинами. Может отображать как дискретные системы, так и непрерывные системы, которые для этого приводятся к дискретному виду с помощью представления непрерывных величин в качестве дискретных (шкалы, балльные оценки).

5. Линейная модель - это модель, которая отображает состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными. Соответственно она может формулироваться в виде одного линейного уравнения или системы линейных уравнений. Причем в некоторых случаях нелинейность взаимозависимостей может приводиться к линейной форме путем математических преобразований переменных. Например, в нелинейных соотношениях

$$y = \alpha \cdot e^{\beta x}, y = \alpha \cdot x^{\beta}, y = \alpha + \frac{\beta}{x}.$$

В первом и втором случаях логарифмирование обеих частей уравнений обеспечивает линейную связь: $\ln y = \ln \alpha + \beta x$; $\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x$, а в третьем - ли-

нейно зависимую связь величин: y и $\frac{1}{x}$.

Так же выделяют математические модели, которые описывают влияние отдельных факторов на экономические показатели [2]:

1. Аддитивные модели. Результирующий показатель равен сумме нескольких факторов.

$$F = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n$$

2. Мультипликативные модели. Результирующий показатель представляет собой произведение нескольких факторов.

$$F = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots x_n$$

3. Кратные модели. Результирующий показатель равен отношению факторов.

$$F = \frac{x_1}{x_2}$$

4. Смешанные (комбинированные) модели. Сочетание в различных комбинациях предыдущих моделей.

$$F = \frac{x_1}{x_2}(x_3 + x_4);$$

$$F = \frac{x_1}{x_2 + x_3} \text{ и т.п.}$$

Перейдем к рассмотрению примеров применения математических методов решения задач в области экономики, а именно теории международной торговли.

Рассмотрим условный пример, показывающий каким образом устанавливаются мировые цены, определяются объемы взаимной торговли, а также интересы всех участников рынка.

Пусть две страны - Аргентина и Бразилия - производят один и тот же продукт - зерно. Функции внутреннего предложения зерна в Бразилии Q_{S_B} и в Аргентине Q_{S_A} представлены линейными уравнениями:

$$Q_{S_B} = 0,6 \cdot P - 70;$$

$$Q_{S_A} = P - 60,$$

где Q_{S_B} - объем внутреннего предложения зерна в Бразилии;

Q_{S_A} - объем внутреннего предложения зерна в Аргентине;

P - цена на зерно (внутренняя цена).

Данные функции предложения отражают соотношение между объемами производства и уровнем цен, определяются предельными издержками. Их динамика, в свою очередь, зависит от обеспеченности стран факторами производства, используемой технологии и т.д.

Функции внутреннего спроса зерна в Бразилии Q_{D_B} и в Аргентине Q_{D_A} представлены линейными уравнениями:

$$Q_{D_B} = 170 - 0,6P;$$

$$Q_{D_A} = 180 - P,$$

где Q_{D_B} - объем внутреннего спроса на зерно в Бразилии;

Q_{D_A} - объем внутреннего спроса на зерно в Аргентине;

P - цена на зерно (внутренняя цена).

Функции спроса показывают соотношение между объемом спроса и уровнем цен, определяются вкусами и предпочтениями потребителей при данном уровне дохода.

Используя аналитический метод, определим условия торговли на внутренних рынках Бразилии и Аргентины (равновесные цены и равновесные объемы), направления экспорта/импорта, мировые объемы спроса и предложения, а также мировую цену.

Автаркическая равновесная цена на зерно должна быть определена из условия равенства объемов спроса и предложения.

Бразилия:

$$Q_{D_B} = Q_{S_B};$$

$$170 - 0,6P = 0,6P - 70;$$

$$-0,6P - 0,6P = -70 - 170;$$

$$1,2P = 240;$$

$P_B = 200 \$$ - равновесная цена на зерно в Бразилии (в \$ за 1 тонну).

Подставив найденную цену в функцию спроса или предложения (Q_{D_B} или Q_{S_B}), определим соответствующий ей равновесный объем:

$$Q_B = 170 - 0,6 \cdot 200;$$

$Q_B = 50$ - равновесный объем зерна в Бразилии (тыс. тонн).

Аргентина:

$$Q_{D_A} = Q_{S_A};$$

$$180 - P = P - 60;$$

$$-P - P = -60 - 180;$$

$$2P = 240;$$

$P_A = 120 \$$ - равновесная цена на зерно в Аргентине (в \$ за 1 тонну).

Для определения равновесного объема продукта подставим значение равновесной цены в любую из функций Q_{D_A} или Q_{S_A} .

$$Q_A = 180 - 120;$$

$Q_A = 60$ - равновесный объем зерна в Аргентине (тыс. тонн).

Сравнительный анализ рассчитанных цен показал, что цена на зерно в Бразилии ($P_B = 200 \$$) выше, чем в Аргентине ($P_A = 120 \$$), поэтому производителям Аргентины более выгодно ориентировать свою продукцию на экспорт, а бразильским потребителям выгодно покупать более дешевое импортное зерно. Таким образом, разница во внутренних ценах каждой страны создает условия для экспорта и импорта. Однако важным критерием в данной ситуации выступает то, на каком уровне установится мировая цена.

Располагая данными внутреннего спроса и предложения в Бразилии и Аргентине, можно определить объемы спроса на импортное зерно, предложения зерна на экспорт, а также уровень равновесной мировой цены P_W . Необходимо подчеркнуть, что в условиях свободной торговли внутренние цены изменяются до уровня мировой цены.

Производителям Аргентины выгодно увеличивать объемы производства зерна и ориентировать его на экспорт, если мировая цена P_W будет выше $P_A = 120 \$$, т.е. $P_W > 120 \$$. Однако при росте предложения зерна будет расти внутренняя цена, следовательно, согласно закону спроса, потребители будут сокращать объем спроса на рынке зерна. Таким образом, мировой объем предложения Q_{S_W} будет определяться разницей между предложением Q_{S_A} и спросом Q_{D_A} на внутреннем рынке страны.

$$Q_{S_W} = Q_{S_A} - Q_{D_A};$$

$$Q_{S_W} = P - 60 - 180 + P;$$

$Q_{S_W} = 2P - 240$ - функция предложения зерна на мировом рынке.

Потребителям Бразилии выгодно приобретать импортное зерно в тех условиях, если мировая цена установится на уровне ниже внутренней цены $P_B = 200 \$$, т.е.

$P_w < 200 \$$. Чем ниже будет установлен уровень мировой цены, тем больший спрос будут предъявлять бразильские потребители на зерно. Однако производители Бразилии при данном уровне цены вынуждены будут сокращать объем предложения. Таким образом, мировой объем спроса Q_{D_w} будет определяться разницей между спросом Q_{D_B} и предложением Q_{S_B} на внутреннем рынке страны.

$$Q_{D_w} = Q_{D_B} - Q_{S_B} ;$$

$$Q_{D_w} = 170 - 0,6P - 0,6P + 70 ;$$

$$Q_{D_w} = 240 - 1,2P \text{ - функция спроса на зерно на мировом рынке.}$$

Определив мировой объем предложения Q_{S_w} и мировой объем спроса Q_{D_w} , можно рассчитать равновесную мировую цену P_w и равновесный объем экспорта/импорта Q_w .

Мировую равновесную цену определим из условия:

$$Q_{D_w} = Q_{S_w} ;$$

$$240 - 1,2P = 2P - 240 ;$$

$$-1,2P - 2P = -240 - 240 ;$$

$$3,2P = 480 ;$$

$$P_w = 150 \$ \text{ (в \$ за 1 тонну).}$$

Определение размера экспорта/импорта осуществим по формуле $Q_{D_w} = 240 - 1,2P$, подставив в полученную функцию значение мировой равновесной цены:

$$Q_w = 240 - 1,2 \cdot 150 ;$$

$$Q_w = 60 \text{ (тыс. тонн).}$$

Таким образом, используя аналитический метод, мы определили условия торговли на внутренних рынках Бразилии и Аргентины (равновесные цены и равновесные объемы), направления экспорта/импорта, мировые объемы спроса и предложения, а также мировую цену.

Так же наравне с аналитическим методом часто применяется **графический** метод решения задач, который дает особые преимущества и позволяет выявлять закономерности, трудно поддающиеся количественному описанию. Построение графиков часто облегчает нахождение решений сложных задач, а иногда является единственным средством их решения [3].

Возвращаясь к нашему примеру, на основании данных выше линейных функций, построим кривые спроса и предложения на зерно в Бразилии и Аргентине. Координаты точек пересечения этих графиков дают нам искомые значения неизвестных Q и P .

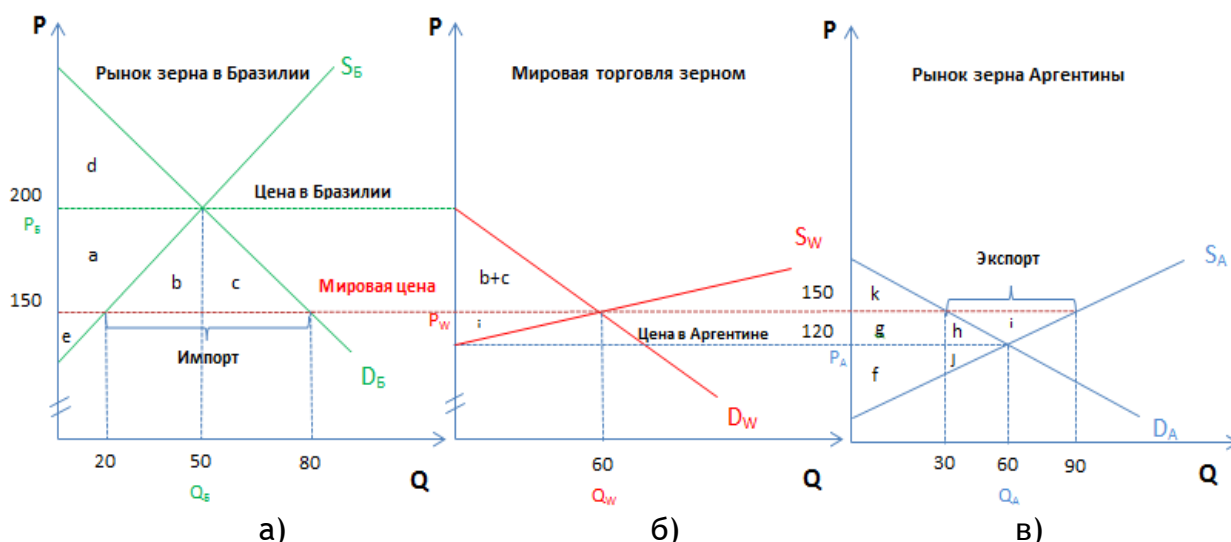


Рис.1. Баланс спроса и предложения на мировом рынке:
а) рынок Бразилии; б) мировой рынок; в) рынок Аргентины

Предположим, что в условиях автаркии (при отсутствии внешней торговли) D_B и S_B формируют соответственно спрос и предложение за зерно в Бразилии, а D_A и S_A - в Аргентине.

Анализируя график, можно сделать вывод, что равновесие на рынке Бразилии устанавливается при цене $P_B = 200$ \$, $Q_B = 50$ тыс. тонн, а в Аргентине - при цене $P_A = 120$ \$, $Q_A = 60$ тыс. тонн.

Величины P_W и Q_W определяют соответственно объем продаж и равновесную цену на мировом рынке в условиях свободной торговли.

Поскольку в рассматриваемой модели равновесная цена в Аргентине ниже, чем равновесная цена в Бразилии, выгодным становится экспорт данного товара из Аргентины в Бразилию. Торговля между этими странами будет осуществляться по мировой цене, находящейся между внутренними ценами равновесия $P_B(200) > P_W(150) > P_A(120)$, существующими в странах до начала торговли.

Графическая модель спроса и предложения, описанная выше, показывает, что хотя свободная торговля является взаимовыгодной для стран в целом, однако внутри этих стран одни группы населения выигрывают, а другие проигрывают. Используя геометрические методы, определим интересы участников стран от внешней торговли.

Рассмотрим пример торговли и интересов потребителей/производителей.

1. Торговля и интересы потребителей.

В условиях автаркии потребители в Бразилии приобретали 50 тыс. тонн зерна по цене 200 \$ за тонну, потребители в Аргентине - 60 тыс. тонн зерна по цене 120 \$ за тонну. Покупая зерно по данным внутренним ценам, потребители получали выигрыш - излишек потребителя, выражающийся графически в виде площади прямоугольного треугольника (площадь между кривой спроса и линией рыночной цены). Для потребителей Бразилии - это площадь треугольника S_d (рис.1, а), а для потребителей Аргентины - площадь треугольника S_{ghk} (рис.1, в).

После установления торговых отношений Бразилия импортирует зерно и цена на внутреннем рынке снижается с 200 \$ до 150 \$ за 1 тонну. За счет снижения цены

потребители увеличивают объем спроса с 50 тыс. до 80 тыс. тонн, и совокупный выигрыш составляет площадь фигуры S_{abcd} , из которого чистый выигрыш, полученный в результате внешней торговли составит площадь S_{abc} .

Используя формулу трапеции, определим чистый выигрыш покупателей Бразилии:

$$S_{abc} = \frac{1}{2} (50 + 80) \cdot 50 = 3250 \$ \text{ за 1 тыс. тонн.}$$

Обратная ситуация складывается в стране-экспортере. Внутренняя цена в Аргентине повысилась со 120 долл. до 150 долл. за тонну. Согласно закону спроса, объем покупок будет сокращаться, а значит, потребительский излишек составит только площадь треугольника S_k .

Определим чистые потери потребителей Аргентины:

$$S_{gh} = \frac{1}{2} (30 + 60) \cdot 30 = 1350 \$ \text{ за 1 тыс. тонн.}$$

2. Торговля и интересы производителей.

До установления внешнеторговых отношений производители обеих стран получали выигрыш в виде излишка производителя. Для бразильских производителей этот выигрыш соответствовал площади прямоугольного треугольника S_{ae} (рис.1,а), а для производителей в Аргентине - площади S_{fi} (рис.1,в).

После установления торговых отношений производители в Аргентине становятся экспортерами и за счет роста цены со 120 \$ до 150 \$ за 1 тонну увеличивают объемы производства. В этих условиях совокупный выигрыш составляет площадь фигуры S_{fghi} . Таким образом, определим чистый выигрыш производителей Аргентины от развития торговли:

$$S_{ghi} = \frac{1}{2} (90 + 60) \cdot 30 = 2250 \$ \text{ за 1 тыс. тонн.}$$

Что касается бразильских производителей, то они в силу меньшей конкурентоспособности вынуждены сокращать производство. Их совокупный выигрыш составляет только площадь фигуры S_c , то есть они несут потери в размере площади S_a .

Определим потери бразильских производителей:

$$S_a = \frac{1}{2} (50 + 20) \cdot 50 = 1750 \$ \text{ за 1 тыс. тонн.}$$

3. Чистый выигрыш страны от международной торговли.

Учитывая влияние внешней торговли на интересы производителей и потребителей, можно оценить изменение благосостояния в Бразилии (стране-импортере) и Аргентине (стране-экспортере) в целом.

Для определения чистого выигрыша Бразилии необходимо суммировать чистый выигрыш потребителей S_{abc} и чистые потери производителей S_a . Совокупный эффект для страны в целом будет равен $(a+b+c)-a = b+c$:

$$S_{bc} = \frac{1}{2} (80 - 20) \cdot 50 = 1500 \$ \text{ за 1 тыс. тонн.}$$

В Аргентине производители имеют чистый выигрыш в размере S_{ghi} , а потребители, напротив, теряют S_{gh} . Таким образом, чистый эффект для страны-экспортера составит $(g+h+i)-(g+h) = i$:

$$S_i = \frac{1}{2} (90 - 30) \cdot 30 = 900 \text{ \$ за 1 тыс. тонн.}$$

Для того, чтобы наглядно отразить распределение выигрыша от международной торговли, удобнее использовать графическое представление спроса D_w и предложения S_w на мировом рынке (рис. 1, б). На графике представлен равновесный объем экспорта/импорта и уровни цен до и после установления торговых отношений. Можно определить, что на графике чистый выигрыш страны-импортера равен площади между кривой спроса на импорт D_w и линией мировой цены, а чистый выигрыш страны-экспортера - площади между линией мировой цены и кривой экспортного предложения S_w [4].

Итак, нам удалось показать, что графические средства дают особые преимущества и позволяют выявить экономические закономерности, которые сложно обнаружить с помощью аналитических процедур.

Заключение

Ни одна область научного знания, а следовательно, ни одна дисциплина не может существовать по отдельности. В статье мы показали, что две самостоятельные науки - математика и экономика имеют место, но вместе с тем тесно взаимосвязаны между собой. Следовательно, владея математическими методами и моделями, можно прийти к более наглядному и глубокому пониманию многих экономических явлений.

Таким образом, продемонстрировав применение математических методов при решении задач в области экономики, мы показали значимость математических методов, как одних из составных инструментов при решении экономических вопросов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Панкратов Е.Л. Введение в экономико-математическое моделирование /Е.Л. Панкратов, Е.А. Булаева, П.Б. Болдыревский. Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 113 с.
2. Жуковская С.Л. Экономический анализ [Электронный ресурс]: в 3 ч. учеб. пособие / С.Л. Жуковская, Е.Б. Никитина; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2018. – Ч. 1. Методология экономического анализа - 2 М–; 123 с. – Режим доступа: <http://elis.psu.ru/ident/978-5-7944-3162-9>
3. Ахметова А.Х., Головина А.М. Методы построения графиков функций, заданных в виде произведения некоторых квадратичных функций, содержащих знак модуля /Modern European Researches. – 2019. – №5 (Т.1). – С.4 - 11. – URL: <https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53202>
4. Теория международной торговли: учебно-методическое пособие по дисциплине «Мировая экономика» / А.Н. Макаров, Э.И. Абдуллина. – Набережные Челны: Изд.-полигр. центр Набережночелнинского института К(П)ФУ, 2019. – 110с. – URL: https://kpfu.ru//staff_files/F_733756954/Teoriya_mezhdnarnodnoj_torgovli_.pdf

Faniya H. Akhmetova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

dobrich2@mail.ru

Elvira I. Abdullina,

Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Kazan Federal University (Naberezhnye Chelny Branch), Naberezhnye Chelny

abdullina_ei@mail.ru

The use of mathematical methods for solving problems in the field of economics

Abstract. Currently, mathematical research methods are used more and more often for the analysis of economic phenomena. This contributes to the improvement of economic analysis, its deepening and increases its accuracy and clearness. The aim of the work is to study the relationship between mathematics and economics by the example of finding the optimal solution to the problems of the theory of international trade. Using the example of solving an economic problem, the article demonstrates the relevance of using mathematical methods, namely: analytical, graphic, geometric ones. Thus, knowledge of mathematical methods becomes one of the important elements in the field of economics.

Key words: mathematics, economics, mathematical methods, theory of international trade, analytical model, graphical method, geometric method.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА НА ТЕМУ «ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ»

Аннотация

В данной статье представлен комплекс задач для элективного курса «Задачи на построение с помощью линейки». В современной школе широкое распространение получили элективные курсы. Они дают возможность освоения таких разделов элементарной математики, которые слабо или вообще не представлены в программе. Здесь приводится набор задач с решениями, указаниями и подсказками. Приведённого материала вполне достаточно для проведения полноценного занятия по данной теме. Цель работы - познакомить читателя с методами решения задач на построение с использованием одной линейки. Содержание статьи полезно учителям и школьникам.

Ключевые слова

построение на плоскости, замечательное свойство трапеции, теорема Фалеса

АВТОР

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Грибов Александр Фёдорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Введение

Решение задачи на построение, как известно, должно состоять из трёх частей [1]. Первая - сам алгоритм построения. Вторая - исследование, в ходе которого необходимо выяснить, когда решение существует, сколько решений имеет задача. Третья - анализ, в ходе которого доказывают равенство построенной фигуры и заданной в условии задачи. В этой работе мы опустили две последних части, уделив внимание наиболее интересной - первой. Кроме того, читателю предоставляется возможность самостоятельно ознакомиться с правилами работы с линейкой при решении задач на построение и сравнить их с правилами, использующими циркуль и линейку.

Задачи и методы решения

В теории геометрических построений «инструментами» являются специально сформулированные соглашения. Если для некоторого множества точек эти условия выполнены, то точки множества считаются построенными. Таким образом, средства построения - абстракции, а сами построения - логические операции, ссылки на те или иные аксиомы и их следствия.

При решении задачи на построение с помощью линейки единственным «инструментом» является следующее правило: для любых двух данных точек можно считать известной и построенной проходящую через них прямую. Так и говорят: проведём прямую через две заданные точки [2], [3]. В статье разбираются вспомогательные подзадачи или «инструменты», позволяющие выполнять более сложные построения. Их можно использовать как составляющие этапы решения более сложных задач, что и продемонстрировано ниже. Приступим к решению задач.

Задача № 1.

Условие. На плоскости нарисована окружность, в которой проведен диаметр. Как с помощью линейки провести через точку, не лежащую на окружности и на прямой, содержащей диаметр, перпендикуляр к данному диаметру?

Подсказка. Воспользуйтесь тем, что в треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим концы диаметра через A и B , а заданную точку - через M . Пусть C и D - точки пересечения прямых AM и BM с окружностью. Поскольку углы ACB и ADB вписаны в окружность и опираются на диаметр, они равны 90° . Это означает, что AD и BC - высоты треугольника ABC . Построим точку пересечения H этих прямых. H - точка пересечения высот треугольника ABC .

Поскольку три высоты треугольника пересекаются в одной точке, прямая MH - высота треугольника ABC , т.е. прямая MH и является прямой, которую требовалось построить (рис.1). На рисунке 2 рассмотрен второй случай, когда перпендикуляр к диаметру не пересекает окружность. Если же прямая MB имеет единственную общую точку с окружностью, то она является касательной и автоматически перпендикулярна рассматриваемому диаметру.

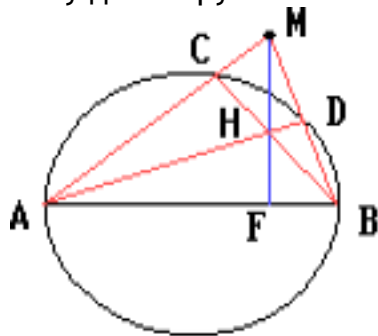


Рис. 1.

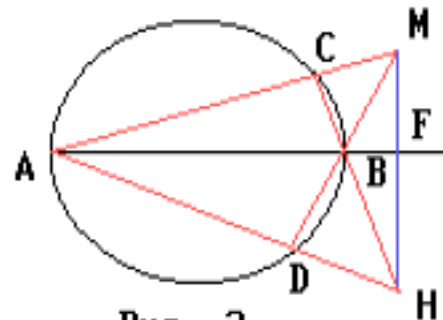


Рис. 2.

Задача № 2. (Замечательное свойство трапеции.)

Условие. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью линейки разделите пополам данный отрезок AB прямой l .

Подсказка. Примените замечательное свойство трапеции.

Решение. Возьмём точку M так, чтобы точки M и A лежали по разные стороны от прямой l_1 . Пусть отрезки MA и MB пересекают прямую l_1 в точках A_1 и B_1 . Обозначим через P точку пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 трапеции AA_1B_1B . Тогда прямая MP делит отрезок AB пополам (замечательное свойство трапеции) (рис. 3).

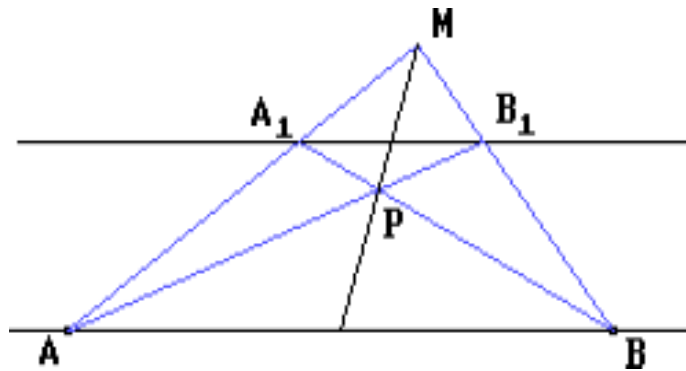


Рис.3

Задача № 3. (Диаметр, основные свойства.)

Условие. Дана окружность и две неравные параллельные хорды. Используя только линейку, разделите эти хорды пополам.

Подсказка. Пусть AB и CD — данные хорды, прямые AD и BC пересекаются в точке M , а прямые AC и BD — в точке N . Докажите, что прямая MN делит каждую из данных хорд пополам.

Решение. Пусть AB и CD — данные хорды; прямые AD и BC пересекаются в точке M , а прямые AC и BD — в точке N .

Перовое решение получаем, используя предыдущую задачу и замечательное свойство трапеции.

Рассмотрим другой подход. Докажем, что диаметр окружности, перпендикулярный к хордам AB , CD , проходит через точки M и N .

Действительно, при симметрии относительно этого диаметра, точка A переходит в точку B , а точка C — в точку D , поэтому прямая AC переходит в прямую BD . Следовательно, точка N пересечения этих прямых переходит в себя, то есть лежит на оси симметрии. Аналогично для точки M .

Отсюда вытекает следующее построение. Находим точку пересечения M прямых AD и BC , затем — точку N пересечения прямых AC и BD . Затем проводим искомую прямую MN .

Задача №4. (Теорема Пифагора (прямая и обратная), правильные многоугольники, вписанный угол).

Условие. На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи линейки постройте отрезок, длина которого равна квадратному корню из 7.

Решение. Пусть дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной, равной 1. Легко вычислить, что диагональ AC этого шестиугольника равна $\sqrt{3}$. Возьмем точку G пересечения прямых CD и EF . Треугольник DEG — правильный, поэтому отрезок DG имеет длину 1. Если вокруг шестиугольника описать окружность, то угол ACD будет опираться на диаметр AD , следовательно, угол ACD равен 90° . Итак, в прямоугольном треугольнике ACG : $AC = \sqrt{3}$, $CG = 2$, отсюда по теореме Пифагора находим $AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$.

Задача № 5. (Замечательное свойство трапеции, теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках.)

Условие. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. С помощью линейки разделите этот отрезок на три равные части.

Решение. Первый способ. Будем считать известным, как с помощью линейки через данную точку провести прямую, параллельную двум данным прямым (алгоритм построения такой прямой приведён в следующей задаче). Пусть l_1 и l_2 – данные параллельные прямые, отрезок AB лежит на прямой l_1 . Отметим точку M в той полуплоскости относительно прямой l_2 , которая не содержит точек A и B . Тогда отрезки MA и MB пересекают прямую l_2 в некоторых точках C и D соответственно.

Через точку N пересечения отрезков AD и BC проведём прямую MN . Эта прямая пересекает l_1 и l_2 соответственно в точках F и E – серединах оснований AB и CD трапеции $ACDB$.

Через точку P пересечения прямых AE и BC проведём прямую, параллельную прямым l_1 и l_2 . Пусть проведённая прямая пересекает отрезки AC , AD и BD в точках G , Q и L соответственно.

Поскольку AE – медиана треугольника ACD и $GQ \parallel CD$, точка P – середина GQ . В то же время, отрезки GP и QL равны. Это следует из подобия треугольников CND и PNQ и того, что NE – медиана в треугольнике CND . Значит, $GP = PQ = QL$. Проведём прямые MP и MQ . Пусть X и Y – точки их пересечения с прямой l_1 . Тогда $AX=XY=YB$.

Второй способ. Покажем, как разделить такой отрезок на k равных частей. Будем считать известным, как с помощью линейки разделить пополам отрезок, лежащий на одной из двух данных параллельных прямых – замечательное свойство трапеции.

Тогда для каждого натурального n можно разделить такой отрезок на 2^n равных частей. Пусть l_1 и l_2 – данные параллельные прямые, отрезок AB лежит на прямой l_1 . Разделим произвольный отрезок CT , лежащий на прямой l_2 на 2^n равных частей, где $2^n > k$. Пусть D – правый конец k -го из получившихся отрезков, считая от точки C . Тогда отрезок CD прямой l_2 разделён на k равных отрезков. Если прямые AC и BD пересекаются в точке H , то прямые, проходящие через эту точку и концы полученных отрезков, делят отрезок AB на k равных частей. Если окажется, что $AC \parallel BD$, то через полученные точки деления, проведём прямые, параллельные AC и BD .

Задача № 6. (Замечательное свойство трапеции, теорема Ферма и теорема о пропорциональных отрезках.)

Условие. Даны две параллельные прямые l и l_1 . С помощью линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную прямым l и l_1 .

Подсказка. Примените замечательное свойство трапеции.

Решение. Пусть сначала точка M и прямая l лежат по разные стороны от прямой l_1 . Возьмем на прямой l две точки A и B . Пусть A_1 и B_1 – точки пересечения MA и MB с прямой l_1 , P – точка пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 трапеции AA_1B_1B , K и Q – точки пересечения прямой MP с A_1B_1 и AB соответственно. Если T – точка пересечения прямых AK и QB_1 , то прямая TM – искомая.

Действительно, треугольник $КТВ_1$ подобен треугольнику $АТQ$, а треугольник A_1MK – треугольнику AMQ , причём коэффициент подобия один и тот же, поскольку $A_1K = KB_1$. Следовательно, $\frac{TB_1}{TQ} = \frac{KB_1}{AQ} = \frac{KA_1}{AQ} = \frac{MK}{MQ}$.

Поэтому $MT \parallel KB_1 \parallel l$. (рис.4)

Если точка M лежит внутри полосы между прямыми l и l_1 , то через произвольную точку M_1 , лежащую вне этой полосы, проведём прямую l_2 , параллельную прямым l_1 и l (указанным выше способом), а затем через точку M проведём прямую, параллельную прямым l_1 и l_2 .

Если точка M лежит внутри полосы между прямыми l и l_1 , то через произвольную точку M_1 , лежащую вне этой полосы, проведём прямую l_2 , параллельную прямым l_1 и l (указанным выше способом), а затем через точку M проведём прямую, параллельную прямым l_1 и l_2 .

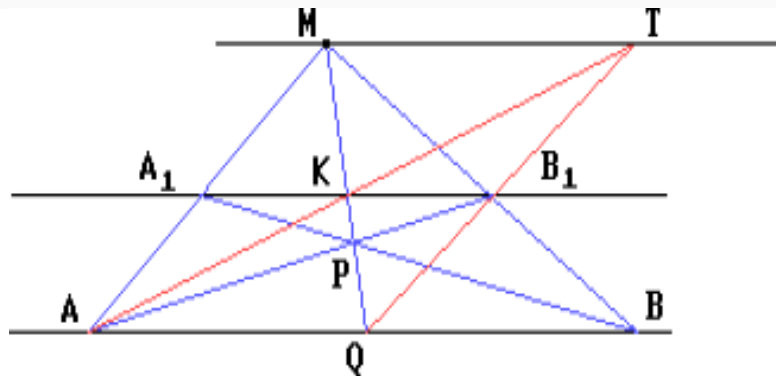


Рис.4

Задача № 7. (Замечательное свойство трапеции, теорема Фалеса о пропорциональных отрезках, вспомогательные подобные треугольники.)

Условие. Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок с помощью линейки.

Решение. Пусть AB — данный отрезок, а C и D — произвольные точки на второй данной прямой. Согласно предыдущей задаче можно построить точку M — середину отрезка CD . Пусть P — точка пересечения прямых AM и BD , E — точка пересечения прямых PC и AB . Докажем, что BE — искомый отрезок. Поскольку треугольники PMS и PAE , PMD и PAB подобны, легко получаем равенство $AE=AB$.

Задача № 8.

Условие. Докажите, что если на плоскости даны какая-нибудь окружность S и ее центр O и прямая l , то с помощью линейки можно:

- из любой точки провести прямую, параллельную данной прямой, и опустить на данную прямую перпендикуляр;
- на данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку;
- построить отрезок длиной ab/c , где a , b , c — длины данных отрезков.

Решение. а) Пусть A — данная точка, l — данная прямая. Рассмотрим сначала случай, когда точка O не лежит на прямой l . Проведем через точку O две произвольные прямые, пересекающие прямую l в точках B и C . Согласно задаче № 1 в треугольнике OBC можно опустить высоты на стороны OB и OC . Пусть H — точка их пересечения. Тогда можно провести прямую OH , которая перпендикулярна l .

Согласно задаче № 1 можно опустить перпендикуляр из точки A на OH . Это и есть искомая прямая, проходящая через A и параллельная l . Чтобы из A опустить перпендикуляр на l , нужно восставить из O перпендикуляр l' к OH , используя задачу № 6, а затем из A опустить перпендикуляр на l' . В случае, когда точка O лежит на прямой l , согласно задаче № 1 можно сразу опустить из точки A перпендикуляр на прямую l .

б) Пусть l — данная прямая, A — лежащая на ней данная точка и BC — данный отрезок. Проведем через точку O прямые OD и OE , параллельные прямой l и BC соответственно (D и E — точки пересечения этих прямых с окружностью S). Через точку C проведем прямую, параллельную OB , до пересечения с прямой OE в точке F , через F — прямую, параллельную ED , до пересечения с OD в точке G и, наконец, через G — прямую, параллельную OA , до пересечения с l в точке H . Тогда $AH = OG = OF = BC$, т. е. AH — требуемый отрезок.

в) Возьмем две произвольные прямые, пересекающиеся в точке P . Отложим на одной из них отрезок $PA = a$, а на другой — отрезки $PB = b$ и $PC = c$. Пусть D — точка пересечения прямой PA с прямой, проходящей через B и параллельной AC . Ясно, что отрезок $PD = ab/c$.

Заключение

В работе приведены основные методы решения планиметрических задач на построение с помощью линейки. Приведённый набор задач и идей является базовым материалом, необходимым, а в некоторых случаях и достаточным, для дальнейшего изучения темы, разработки уроков, подготовки к олимпиадам различного уровня.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кокстер Г. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
2. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986.
3. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. М.: Наука, 1967

Nikolai V. Bezverkhny,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nbezv@mail.ru

Alexander F. Gribov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

alexandr-gribov@list.ru

Tasks for the elective course on the topic: "Constructions with a ruler"

Abstract. This article presents a set of tasks for the elective course "Constructions with a Ruler". Elective courses are widespread in a modern school. They make it possible to learn such sections of elementary mathematics that are inadequately or not represented at all in the program. Here is a set of tasks with solutions, directions and tips. The material provided is enough to conduct an adequate lesson on this topic. The purpose of the work is to let the reader know the methods of solving construction tasks using only a ruler. The content of the article is useful to teachers and students.

Key words: construction on a plane, a remarkable trapezoid property, Thales theorem.

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Аннотация

В данной статье представлен комплекс планиметрических задач на максимум и минимум. В современной школе широкое распространение получили элективные курсы. Они дают возможность освоения таких разделов элементарной математики, которые слабо или вообще не представлены в программе. Тем не менее, многие разделы элементарной математики необходимы для формирования специалиста-математика и даже инженера. К сожалению, в ВУЗах изучение элементарной математики невозможно из-за перегруженности программы. Поэтому единственная возможность для изучения многих тем - элективные курсы, кружки, олимпиады и математические бои. Мы рассматриваем набор экстремальных задач с решениями на расстояния между точками, периметры. Приведённого материала вполне достаточно для построения занятия по данной теме. Материал может быть взят за основу при создании элективного курса по экстремальным задачам планиметрии. Цель работы - познакомить читателя с методами решения планиметрических задач на максимум и минимум. Содержание статьи полезно учителям и школьникам.

Ключевые слова

экстремум, точка Торичелли, симметрия относительно прямой

АВТОР

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Грибов Александр Фёдорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Введение

Жизнь часто нас ставит перед необходимостью принятия наилучшего или оптимального решения. Подобные проблемы возникают в экономике, технике, физике. И не всегда оптимальное решение находится просто - обычно обилие вариантов ставит нас в тупик, и мы не знаем, как поступить. Тогда полезно прибегнуть к математике.

В математике исследование задач на максимум и минимум началось, по крайней мере, две с половиной тысячи лет назад. Решением конкретных задач занимались величайшие математики античности - Евклид, Архимед, Аполлоний. Но долгое время к экстремальным задачам не было единых подходов. Цели добивались с помощью тонких индивидуальных догадок. И лишь ко второй половине XVII века - в период создания дифференциального и интегрального исчисления - сформировались первые общие принципы решения подобных задач.

Общие методы были разработаны Ферма, Ньютоном, Лейбницем и другими. В итоге сформировались основные разделы специального направления математики – теории экстремальных задач: математическое программирование, выпуклое программирование, вариационное исчисление и теория оптимального управления.

Школьники узнают о максимумах и минимумах на уроках геометрии, алгебры, физики. В старших классах они учатся решать экстремальные задачи, применяя производную.

Данная работа посвящена решению геометрических задач на максимум и минимум без использования производной. Такое решение требует определенной смекалки и зачастую выглядит трудным и искусственным. Но, пожалуй, именно это и доставляет большее удовлетворение. Чтобы найти элементарное решение необходимо умение оперировать известными математическими фактами. Данный поиск формирует у учащихся умение ориентироваться в нестандартной ситуации, развивает математическую инициативу и логические навыки, способствует развитию функционального мышления учеников.

Данная статья посвящена теме, которая затрагивает различные разделы школьного курса геометрии: геометрические построения, движение плоскости, вычисление периметров плоских фигур.

Предлагаемый материал может быть использован для преподавания геометрии на различных уровнях: в специальных математических классах, для проведения факультативных занятий, внеклассной работы по математике, элективного курса.

1. Задачи о точках и расстояниях

Приведенные в этом разделе задачи связаны с поиском наибольших и наименьших расстояний. При решении большинства из указанных задач используется неравенство треугольника.

Одной из классических задач на минимум считается задача Герона. Ее можно встретить почти в каждом учебнике геометрии.

Задача 1. Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Найти на l такую точку D, чтобы сумма расстояний от A до D и от B до D была наименьшей.

Решение. Пусть B₁ – точка, симметричная B относительно прямой l. Прямая AB₁ пересечет прямую l в точке D, которая и будет искомой (рис.1).

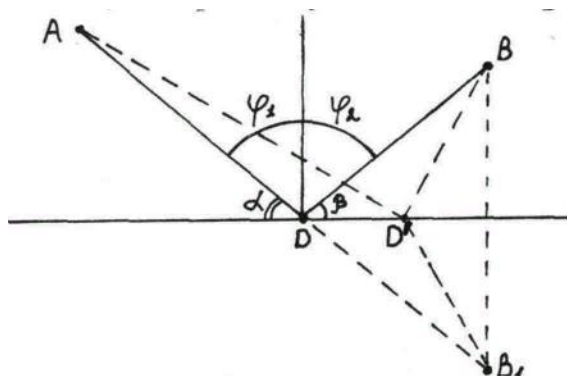


Рис.1.

Действительно, для любой точки D', отличной от D, справедливо неравенство:

$$|AD'| + |D'B| = |AD'| + |D'B_1| > |AB_1| = |AD| + |DB|.$$

Данное неравенство получается благодаря свойствам симметрии, из которых следуют равенства $|DB| = |DB_1|$, $|D'B| = |D'B_1|$ и неравенству треугольника $|AD'| + |D'B_1| > |AB_1|$.

Замечание: искомая точка D обладает тем свойством, что угол α равен углу β (рис.1), а также угол φ_1 равен φ_2 или, как говорят, угол падения равен углу отражения.

Следующие четыре задачи могут предлагаться при знакомстве с понятиями окружность, радиус, касательная к окружности.

Задача 2. На окружности найти точку, наименее удаленную от данной точки, лежащей внутри круга.

Решение.

Пусть M - данная точка. Проведем прямую OM, пересекающую окружность в точках N и P.

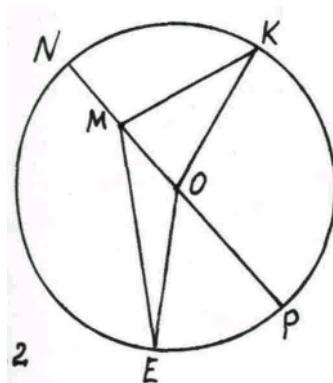


Рис. 2.

Докажем, что точка N - искомая. Пусть K - произвольная точка окружности.

$OK < OM + MK$ (неравенство треугольника). Так как $OK = ON$, как радиусы окружности, то $ON < OM + MK$, $OM + MN < OM + MK$, т.е. $MN < MK$.

Задача 3. На окружности найти точку, наиболее удаленную от данной точки, лежащей внутри круга.

Решение.

Покажем, что точка P - искомая (рис.2).

Пусть E - произвольная точка окружности. Тогда $ME < MO + OE$ (неравенство треугольника). Т.к. $OE = OP$, как радиусы окружности, то

$ME < MO + OP = MP$, т.е. $ME < MP$.

Задача 4. Радиусы двух окружностей S_1 и S_2 равны r_1 и r_2 , а расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно d . Чему равно наименьшее расстояние между точками окружностей? Чему равно наибольшее расстояние между точками окружностей?

Решение.

Обозначим точки пересечения окружностей S_1 и S_2 с их линией центров O_1O_2 через A_1 , B_1 и A_2 , B_2 , причем пусть точка O_2 принадлежит лучу O_1B_1 , а точка O_1 — лучу O_2B_2 (рис.3, а—б; если окружности S_1 и S_2 концентрические, то в качестве линии цен-

тров можно выбрать любую из проходящих через общий центр S_1 и S_2 прямых и обозначить через A_1 любую из точек ее пересечения с окружностью S_1 , а через A_2 —любую из точек ее пересечения с окружностью S_2).

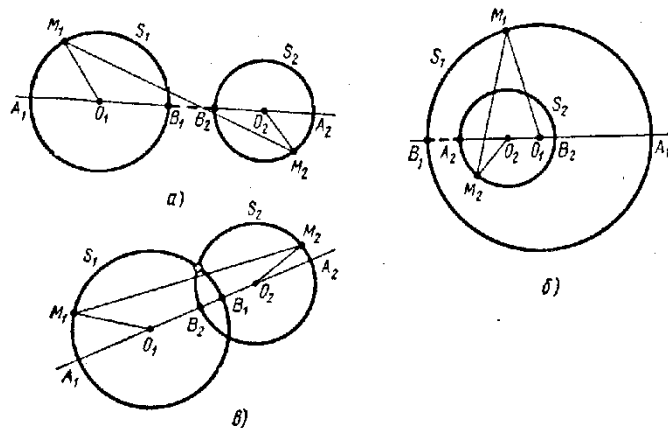


Рис. 3.

Обозначим через M_1 и M_2 произвольные точки окружностей S_1 и S_2 . Рассмотрим четырехугольник $O_1O_2M_2M_1$

$$M_1M_2 \leq M_1O_1 + O_1O_2 + O_2M_2 \quad \text{или} \quad M_1M_2 \leq A_1O_1 + O_1O_2 + O_2A_2,$$

т.е. $M_1M_2 \leq A_1A_2$, откуда следует, что наибольшее расстояние между окружностями равно отрезку A_1A_2 , т. е. $d + r_1 + r_2$. С другой стороны, если окружности S_1 и S_2 не пересекаются, т. е. $d > r_1 + r_2$ (рис.3, а), или $d < r_1 - r_2$ (рис.3,б), то из того же четырехугольника $O_1O_2M_2M_1$ следует, что

$$O_1O_2 \leq O_1M_1 + M_1M_2 + M_2O_2 \quad \text{или}$$

$M_1M_2 \geq O_1O_2 - O_1M_1 - O_2M_2 = O_1O_2 - O_1B_1 - O_2B_2$, т. е. $M_1M_2 \geq B_1B_2$ (рис.3, а), соответственно, что $O_1M_1 \leq O_1O_2 + O_2M_2 + M_2O_1$ или

$M_1M_2 \geq O_1M_1 - O_1O_2 - O_2M_2 = O_1B_1 - O_1O_2 - O_2A_2$, т. е. $M_1M_2 \geq B_1A_2$ (рис.3,б). Таким образом, в случае рис.3,а наименьшее расстояние реализует отрезок B_1B_2 , а в в случае рис. 3,б - отрезок B_1A_2 , так что это наименьшее расстояние равно $d - r_1 - r_2$ (рис.3,а) или $r_1 - d - r_2$ (рис.3,б). Если окружности S_1 и S_2 пересекаются (рис.3, в) или касаются, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно нулю.

Задача 5. На плоскости даны две точки А и В, расстояние между которыми равно d . Постройте квадрат, на границе которого лежат эти точки, так, чтобы сумма расстояний от точки А до вершин квадрата была наименьшей из возможных. Чему равна эта сумма?

Решение.

Покажем, что искомым является квадрат AA_1BB_1 , диагональю которого является отрезок АВ; сумма расстояний от А до вершин этого квадрата равна

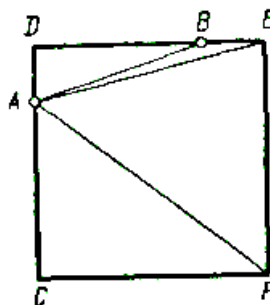


Рис. 4.

$AB + AA_1 + AB_1 = AB(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})d$. В самом деле, пусть CDEF — произвольный квадрат со стороной h , на границе которого лежат точки A и B . Очевидно, что $AC + AD = h$, $AE \geq h$, $AF \geq h$, следовательно, наибольшим среди отрезков AC , AD , AE , AF является один из отрезков AE или AF . Пусть, например, это будет отрезок AF . Так как из всех точек границы квадрата CDEF от точки A наиболее удалена одна из его вершин, то $AB \leq AF$.

Из всех пар точек квадрата CDEF наиболее удалены друг от друга вершины C и E (или D и F), поэтому $AB \leq CE = \sqrt{2}h$.

Отсюда $AC + AD = h \geq \frac{1}{\sqrt{2}}AB$ и $AE \geq h \geq \frac{1}{\sqrt{2}}AB$; поэтому, так как $AF \geq AB$,

$AC + AD + AE + AF \geq \frac{1}{\sqrt{2}}AB + \frac{1}{\sqrt{2}}AB + AB = AB(1 + \sqrt{2})$. Очевидно, что знак равенства имеет место только для квадрата AA_1BB_1 , т. е. только этот квадрат — искомый.

Задача 6. Все звенья замкнутой n -звенной ломаной (быть может, самопересекающейся, но «невырожденной» — такой, что все вершины ломаной различны и все звенья принадлежат разным прямым) равны 1.

Чему равно наименьшее возможное значение наибольшего расстояния между точками ломаной, если $n = 2, 3, 4, 5$?

Решение.

Очевидно, что при $n = 2$ расстояние равно 1.

Нетрудно видеть, что при $n = 3$ и $n = 5$ рассматриваемое расстояние может равняться 1 — примерами могут служить правильный треугольник со стороной 1 и правильная пятиугольная звезда («правильный звездчатый пятиугольник»).

Рассмотрим теперь 4-звенную ломаную $ABCD$. Так как $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ равнобедренные и имеют общее основание AC и одинаковые боковые стороны (они равны 1), то (поскольку по условию задачи точка B не совпадает с D) эти два треугольника расположены по разные стороны от их общего основания AC , т. е. четырехугольник $ABCD$ — ромб.

Наибольшего расстояния между точками ромба $R = A_1A_2A_3A_4$ со стороной 1 равен длине наибольшей диагонали; эта диагональ будет короче всего, если на наибольший угол ромба имеет наименьшую возможную величину 90° , т. е. если ромб обращается в квадрат. В этом случае наименьшее значение наибольшего расстояния между точками ромба равно $\sqrt{2}$.

Крупнейшие итальянские ученые XVII века Вивiani, Кавальери и Торичелли интересовались задачей об отыскании точки, сумма расстояний от которой до трех данных точек наименьшая. Решение этой задачи, т. е. точка, где достигается искомый минимум, называется точкой Торичелли.

Задача 7. Дан треугольник, все углы которого меньше 120° . Найти внутри него точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

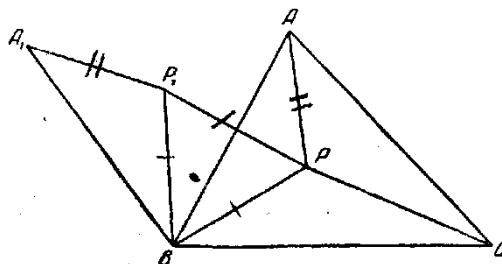


Рис. 5.

Решение.

Возьмём внутри треугольника произвольную точку P (рис.5) и найдём сумму отрезков $PA+PB+PC$. Повернём треугольник BPA на угол в 60° вокруг точки B так, чтобы он оказался вне треугольника ABC . Точка A займёт положение A_1 , не зависящее от выбора точки P . Точка P займёт положение P_1 . Треугольник BP_1P — равносторонний:

$$PP_1=PB; PA+PB+PC=A_1P_1+P_1P+PC.$$

Наименьшее значение будет для точки P , лежащей на прямой A_1C . Так как в этом случае P_1, P, C лежат на одной прямой, то угол BPC , смежный с углом равностороннего треугольника, равен 120° ; т.к. угол A_1P_1B , равный 120° , равен APB , то и угол $APB = 120^\circ$.

Итак, для отыскания точки P строим на каждой из сторон сегмент, вмещающий угол в 120° . Точка пересечения дуг сегментов—искомая точка (достаточно построить два сегмента). Точка P находится внутри треугольника, если среди углов нет угла, равного или большего 120° .

Задача Торичелли применяется в решении различных технико-экономических задач. Например, рассмотрим такую задачу: в местах P_1, P_2, P_3 добываются некоторые материалы, потребляемые на центральной станции P . Где следует построить P , чтобы стоимость доставки грузов из P_1, P_2, P_3 в пункт P была наименьшей? P — точка Торичелли для треугольника $P_1P_2P_3$.

2. Задачи о наибольших и наименьших периметрах

Задача 8. Через точку, данную внутри угла, провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшего периметра.

Решение.

Пусть внутри угла ABC дана произвольная точка M (рис.6). Построим окружность, проходящую через точку M и касающуюся сторон угла.

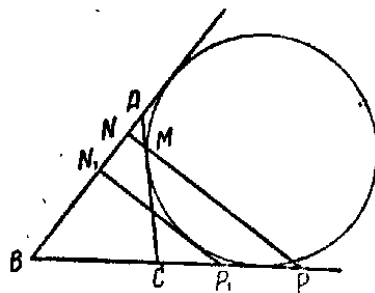


Рис. 6

Через точку M проводим касательную AMC к построенной окружности (из двух возможных окружностей выбираем вневписанную в треугольник ABC). Треугольник ABC —искомый. Действительно, проведём через M произвольную прямую NMP . Докажем, что периметр треугольника NBP больше периметра треугольника ABC . Проведём прямую N_1P_1 , параллельную NB и касающуюся окружности. Периметр треугольника NBP больше периметра треугольника N_1BP_1 , а периметр последнего равен периметру треугольника ABC .

В решении следующих задач используется метод симметрии.

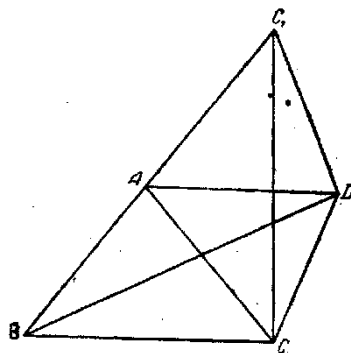


Рис. 7.

Задача 9. Доказать, что из треугольников с данной площадью и данным основанием равнобедренный имеет наименьший периметр.

Решение.

Рассмотрим два равновеликих треугольника с данным основанием BC и данной площадью (рис.7): равнобедренный ABC и косоугольный BDC.

Построим точку C_1 , симметричную C относительно AD ($AD \parallel BC_1$).

Имеем: $BA + AC = BA + AC_1 = BC_1$, $BD + DC = BD + DC_1 > BC_1$.

Следовательно, периметр треугольника BDC больше периметра треугольника ABC. Серьезную роль в математической подготовке школьника играют геометрические задачи на построение. Вот одна из этих задач, связанная с построением треугольника наименьшего периметра.

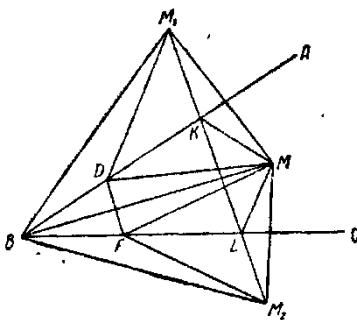


Рис. 8

Задача 10. В данный острый угол ABC вписать треугольник наименьшего периметра с вершиной в данной точке M и с двумя другими вершинами на сторонах угла.

Решение.

Построение. Построим точки M_1 и M_2 (рис.8), симметричные точке M относительно сторон угла. Прямая M_1M_2 пересечёт стороны угла в точках K и L. Треугольник MKL — искомый

Доказательство. Пусть D и F — произвольные точки на сторонах угла, не лежащие с точкой M на одной прямой. Покажем, что периметр $\triangle DMF$ больше периметра $\triangle KLM$. Периметр $\triangle KLM$ равен M_1M_2 . Периметр $\triangle DMF$ равен ломаной M_2FDM_1 , которая больше отрезка M_1M_2 .

Исследование. Задача всегда разрешима и допускает единственное решение.

Задача 11. Доказать, что из всех n-угольников, вписанных в данную окружность S, правильный n-угольник имеет наибольший периметр.

Решение.

Если вписанный в окружность S n -угольник M не является правильным, то у него наверняка есть сторона меньше стороны a вписанного в S правильного n -угольника M_0 . Можно также считать, что M имеет и сторону больше a .

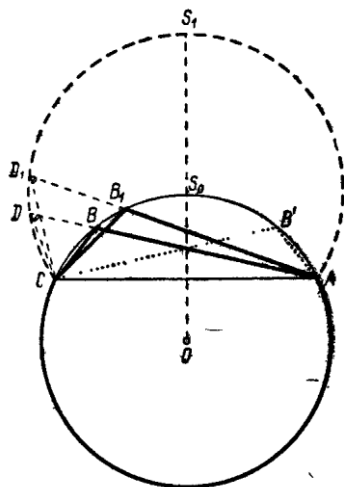


Рис. 9.

Не меняя площади вписанного в S многоугольника M , можно поменять его стороны местами так, чтобы самая большая и самая малая стороны M оказались рядом. (Действительно, перемена местами двух соседних сторон AB и BC вписанного в S многоугольника M не меняет

площади $\triangle ABC$, ограниченного этими сторонами и диагональю n -угольника, а значит, не меняет площади M ; применяя же это преобразование несколько раз, мы всегда можем сделать соседними две любые стороны M .)

Рассмотрим теперь треугольник, ограниченный наибольшей стороной AB , наименьшей стороной BC и диагональю AC многоугольника M и заменим его на $\triangle AB_1C$, где сторона $AB_1 = a$.

Отложим на продолжениях AB и AB_1 отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C$. Так как $\angle ABC$ и $\angle AB_1C$ - внешние углы равнобедренных треугольников DBC и D_1B_1C , то $\angle ADC = \angle AD_1C = \frac{1}{2} \angle ABC (= \frac{1}{2} \angle AB_1C)$;

поэтому точки D и D_1 принадлежат построенной на отрезке AC как на хорде дуге окружности, вмещающей $\frac{1}{2} \angle ABC$, и при изображенном на рис. 9 расположении сторон $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C$ хорда AD_1 будет ближе к центру S_0 этой дуги, чем хорда AD , откуда и следует, что

$$AB_1 + B_1C = AD_1 > AD = AB + BC.$$

Таким образом, при замене $\triangle ABC$ на $\triangle AB_1C$ периметр многоугольника увеличивается.

Далее, если M_1 отличен от M_0 , то мы преобразуем его описанным способом в новый многоугольник M_2 , имеющий больше равных a сторон, чем M_1 и такой, что периметр M_2 больше периметра M_1 . Производя эти преобразования несколько раз, мы придем к многоугольнику M_0 , причем в процессе преобразования многоугольников их периметры будут лишь возрастать; поэтому периметр M_0 больше периметра M .

Заключение

В работе приведены основные методы решения планиметрических задач на экстремум. Приведённый набор задач и идей является базовым материалом, необходимым, а в некоторых случаях и достаточным, для дальнейшего изучения темы, разработки уроков, элективных курсов, подготовки к олимпиадам различного уровня.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Демидович В.Б. Экстремальные задачи // Математика в школе, 2000. – №8. С.56-59.
2. Зетель С.И. Задачи на максимум и минимум. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
3. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.
4. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970.

Nikolai V.Bezverkhny,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nbezv@mail.ru

Alexander F.Gribov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

alexandr-gribov@list.ru

Maximum and minimum planimetric tasks

Abstract. This article presents a complex of maximum and minimum planimetric tasks. Elective courses are widespread in a modern school. They make it possible to learn such sections of elementary mathematics that are inadequately or not represented at all in the program. Nevertheless, many sections of elementary mathematics are necessary to form a specialist in mathematics and even an engineer. Unfortunately, it is impossible to study elementary mathematics in universities due to the overload of the program. Therefore, the only opportunity to study many topics is elective courses, circles, competitions and mathematical battles. We consider a set of extreme tasks with solutions for the distance between points, perimeters. The given material is quite enough to construct a lesson on this topic. The material can be taken as a basis for making an elective course on extreme tasks of planimetry.

The purpose of the work is to let the reader know the methods for solving maximum and minimum planimetric tasks. The content of the article is useful to teachers and students.

Key words: extremum, Toricelli point, symmetry relative to a straight line.

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ: НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ РАЗРАБОТКИ СХЕМ НОРМАЛЬНЫХ АЛГОРИФМОВ МАРКОВА

Аннотация

Актуальность рассматриваемой методической задачи обусловлена тем, что в учебных планах студентов-программистов существенное место занимает теория алгоритмов, и требуется отработка методики строгого и в то же время доступного студентам, не специализирующимся собственно в математике, изложения основ этой теории. В статье рассматриваются некоторые приемы разработки схем нормальных алгоритмов для решения вычислительных задач. На доступном уровне строгости рассматривается доказательство некоторых теорем, необходимых для решения конкретных задач. Содержание статьи будет полезно студентам программистских специальностей, а также преподавателям курсов математической логики и теории алгоритмов, курсов проектирования алгоритмов.

Ключевые слова

алгоритм, нормальный алгоритм Маркова, методические проблемы.

АВТОР

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1].

В ней рассматриваются некоторые приемы разработки схем нормальных алгоритмов Маркова [2, 3], а также рассматриваются те теоретические результаты, понимание которых необходимо для усвоения конкретных примеров. Так, доказывается на доступном для студентов-программистов уровне строгости теорема композиции. Формулируются и другие теоремы сочетания, а именно теорема объединения и теорема повторения.

Затем рассматриваются примеры. Во-первых, это примеры на применение теорем сочетания, а во-вторых, примеры, обсуждаемые на практических (семинарских) занятиях, анализируя которые, можно овладеть некими навыками разработки схем нормальных алгоритмов.

Овладение такими навыками важно ввиду востребованности теории нормальных алгоритмов в современном программировании. Речь идет, в частности, о работах над разными версиями языка РЕФАЛ [4, 5, 6], в основе которого лежит именно модель нормального алгоритма.

Следует отметить также, что исследования в этой области продолжаются. Это относится как к чисто научным публикациям [7, 8], так и к методическим [9].

Материал данной статьи основан на курсе «Логика и теория алгоритмов», который автор уже многие годы читает на программистских специальностях МГТУ им. Н.Э. Баумана. Студенты подготовлены к освоению курса курсом дискретной математики, опирающимся на базовый учебник [10], в котором для понимания теории алгоритмов особенно важны элементы теории формальных языков.

Поскольку методика изложения теории нормальных алгоритмов подробно рассмотрена в статье [11], то в данной статье мы основное внимание уделяем именно технике разработки схем нормальных алгоритмов.

В статье используется аббревиатура НА (нормальный алгоритм), а также мы часто пишем просто «алгоритм» (вместо термина «нормальный алгоритм»).

Методология и результаты исследования

Обсуждаемая в статье методика основана на теории нормальных алгоритмов, как она разработана А.А. Марковым и его школой, и которая в окончательном виде представлена в книге [12]. К этому следует добавить исследования в области языков программирования, которые основаны на модели нормальных алгоритмов.

Использованные в работе методы - методы построения доказательств (в том числе упрощенных, как в книге [13]), принятые в теории нормальных алгоритмов, а также методы решения конкретных задач путем построения схем нормальных алгоритмов. В основных чертах методика изложения теории нормальных алгоритмов для аудитории студентов-программистов представлен в работе [14].

Как было указано выше, результаты представлены в двух частях. В первой рассматриваются теоретические результаты, необходимые для дальнейшего изложения, а во второй приводятся конкретные примеры построения схем нормальных алгорифмов.

Теоремы сочетания

Начнем с некоторых важных теоретических результатов.

Рассмотрим на «инженерном» уровне строгости доказательство теоремы композиции. Напомним формулировку:

Теорема 1 (о композиции нормальных алгорифмов). Каковы бы ни были нормальные алгорифмы A и B в алфавите V , может быть построен такой нормальный алгорифм C над алфавитом V , что для любого слова $x \in V^*$ имеет место условное равенство $C(x) \approx B(A(x))$.

Доказательство. Вполне строгое доказательство теоремы композиции мы не приводим (техника строгих доказательств в теории нормальных алгорифмов вообще выходит за пределы вопросов, обсуждаемых в этой работе). Рассмотрим построение схемы алгорифма C «на уровне идеи»

Эта схема приведена ниже (см. сл. стр.).

Она, по построению, является схемой нормального алгорифма в алфавите $V \cup \bar{V} \cup \{\alpha, \beta\}$, где $\bar{V}$ - алфавит, составленный из «букв-двойников» букв алфавита V , т.е. каждой букве $\xi \in V$ сопоставляется буква $\bar{\xi} \in \bar{V}$ - «двойник» буквы ξ так, что соответствие является взаимно однозначным и пересечение $V \cap \bar{V}$ пусто. Буквы α и β считаются не принадлежащими алфавиту $V \cup \bar{V}$.

Через A^α обозначен набор формул подстановок, образованный из схемы замыкания A^* алгорифма A заменой всех «точек» (обозначающих заключительную формулу) буквой α : тем самым каждая заключительная формула вида $u \rightarrow \cdot v$ в схеме A^* заменяется простой формулой $u \rightarrow \alpha v$.

Через $\bar{B}_\alpha^\beta$ обозначен набор формул подстановок, полученный из схемы замыкания B^* алгорифма B путем замены в ней каждой буквы алфавита V ее «двойником», всех «точек» буквами β и после этого замены каждой формулы вида $\rightarrow \bar{v}$ (т.е. формулы с пустой левой частью) формулой $\alpha \rightarrow \alpha \bar{v}$. Заметим, что слово $\bar{v}$ для преобразованной заключительной формулы исходного алгорифма (с пустой левой частью) начинается буквой β .

Перед тем, как разбирать процесс работы алгорифма C с исходным словом, полезно обратить внимание учащихся на главный принцип при построении схем нормальных алгорифмов: *любая вышележащая формула в схеме «перехватывает» управление у всех нижележащих*. Работа алгорифма C с исходным словом может быть описана следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \xi \alpha \rightarrow \alpha \xi & (\xi \in V) & (1) \\ \alpha \xi \rightarrow \alpha \bar{\xi} & (\xi \in V) & (2) \\ \bar{\xi} \eta \rightarrow \bar{\xi} \bar{\eta} & (\xi, \eta \in V) & (3) \\ \bar{\xi} \beta \rightarrow \beta \bar{\xi} & (\xi \in V) & (4) \\ \beta \bar{\xi} \rightarrow \beta \xi & (\xi \in V) & (5) \\ \xi \bar{\eta} \rightarrow \xi \eta & (\xi, \eta \in V) & (6) \\ \alpha \beta \rightarrow \cdot & & (7) \\ \bar{B}_\alpha^\beta & & (8) \\ A^\alpha & & (9) \end{array} \right.$$

Поскольку в исходном слове $x \in V^*$ нет вхождений букв α и β , а также вхождений букв-«двойников», то ни одна из формул строк (1) - (8) не применима к x .

Таким образом, к слову x будет применима первая формула набора A^α , т.е. первая формула схемы алгорифма A , если она простая, и формула вида $u \rightarrow \alpha v$, если соответствующая формула в схеме алгорифма A является заключительной.

Пусть алгорифм A применим к слову x . Тогда, поскольку сам алгорифм A заменен его замыканием, а набор формул A^α построен по схеме замыкания алгорифма A , то на последнем шаге работы алгорифма A^* со словом x будет применена заключительная формула; но тогда на соответствующем шаге работы алгорифма C со словом x будет применена формула вида $u \rightarrow \alpha v$, и, таким образом, если $A: x \Rightarrow \bullet y$, то $C: x \Rightarrow y_1 \alpha y_2$, где $y_1 y_2 = y$.

Итак, посредством применения формул (9) к исходному слову x алгорифм C «эмулирует» работу алгорифма A , причем если определено слово $y = A(x)$ и только в этом случае, то на некотором шаге работы C с x будет получено слово $y_1 \alpha y_2$, где $y_1 y_2 = y$.

Появление в слове, выводимом из x по схеме алгорифма C , буквы α «переключает» схему C на применение формул строки (1), которые «передвигают» букву α в начало слова, т.е. имеет место выводимость $C: x \Rightarrow y_1 \alpha y_2 \Rightarrow \alpha y_1 y_2 = \alpha y$.

Нетрудно также видеть, что неприменимость НА A к слову x влечет и неприменимость НА C к этому слову.

Как только α оказывается первой буквой слова, формулы (1) становятся неприменимыми, и начинают «работать» формулы строк (2) и (3), в результате чего слово $y = A(x)$ будет преобразовано в слово $\bar{y}$ - «двойник» y в алфавите $\bar{V}$. Т.е. при $y = y(1)y(2)...y(m)$ выполняется $\bar{y} = \bar{y}(1)\bar{y}(2)...\bar{y}(m)$. Пустое слово, разумеется, совпадает со своим двойником.

После этого могут быть применены только формулы набора $\bar{B}_\alpha^\beta$, посредством применения которых «эмулируется» работа алгорифма B со словом $y = A(x)$, а именно, если $B: y \Rightarrow z$, то $C: \alpha \bar{y} \Rightarrow \alpha \bar{z}$, откуда следует, что $\neg!B(y)$ влечет $\neg!C(\alpha \bar{y})$ и, соответственно, $\neg!C(x)$. Если же $!B(y)$, то (ввиду перехода к замыканию B) на последнем шаге будет применена заключительная формула схемы B^* , что означает в процессе работы C с y применение на соответствующем шаге формулы вида $\bar{u} \rightarrow \beta \bar{v}$, где $\bar{u}, \bar{v}$ - слова в алфавите $\bar{V} \cup \{\alpha\}$. Это значит, что если $B: y \Rightarrow z$, то $C: \alpha \bar{y} \Rightarrow \alpha \bar{z}_1 \beta \bar{z}_2$, где $z = z_1 z_2$.

Появление буквы β на очередном шаге работы алгорифма C означает «переключение» его схемы на применение формул строки (4), которые «перегоняют» β влево до тех пор, пока оно не окажется перед первой буквой слова $\bar{z}$ и после буквы α , неизменно стоящей на первом месте во всех словах выводимых из $\alpha \bar{y}$ по схеме алгорифма C . Таким образом, имеет место выводимость $C: \alpha \bar{y} \Rightarrow \alpha \bar{z}_1 \beta \bar{z}_2 \Rightarrow \alpha \beta \bar{z}$.

После этого посредством применения формул строк (5) и (6) происходит «превращение» букв-«двойников» в буквы основного алфавита V , т.е. из слова $\alpha \beta \bar{z}$ выводится слово $\alpha \beta z$. В результате формулы строк (1) - (6) становятся неприменимыми, и применяется заключительная формула (7), т.е. в итоге получаем: $C: \alpha \bar{y} \Rightarrow \alpha \bar{z}_1 \beta \bar{z}_2 \Rightarrow \alpha \beta \bar{z} \Rightarrow \alpha \beta z \Rightarrow \bullet z = B(A(x))$.

Следовательно, если хотя бы одно из слов $A(x)$ или $B(A(x))$ не определено, т.е. $\neg!A(x)$ или $\neg!B(A(x))$, то $\neg!C(x)$, а если $!A(x)$ и $!B(A(x))$, то $C(x) = B(A(x))$, и условное равенство $C(x) \simeq B(A(x))$ доказано.

Нам будет удобно дальше обозначать НА C как $B \circ A$, то есть $B \circ A(x) \simeq B(A(x))$.

Разумеется, можно определить композицию произвольного числа нормальных алгорифмов, полагая $A_n \circ A_{n-1} \circ \dots \circ A_2 \circ A_1 = A_n \circ (A_{n-1} \circ \dots \circ A_2 \circ A_1)$, $n \geq 2$. Более того, мы можем определить неотрицательную целую степень НА следующим образом: $A^0 = Id$; $A^n = A \circ A^{n-1}$, $n \geq 1$, где Id - тождественный НА, задаваемый схемой $\{\rightarrow \cdot$ (см. [1]).

Приведем формулировки еще двух теорем сочетания: а именно теорем объединения и повторения.

Сочетание, называемое объединением, определяется таким предписанием:

- 1) к исходному слову x применить алгорифмы A и B (независимо друг от друга);
- 2) если оба слова $A(x)$ и $B(x)$ определены, то результатом считается слово $A(x)B(x)$

Теорема 2 (теорема объединения). Каковы бы ни были нормальные алгорифмы A в алфавите V_1 и B в алфавите V_2 , может быть построен нормальный алгорифм C над алфавитом $V = V_1 \cup V_2$ такой, что для любого слова $x \in V^*$ выполняется условное равенство $C(x) \simeq A(x)B(x)$.

Теорема объединения доказывается уже с учетом доказанной теоремы о композиции, т.е. доказательство состоит в том, что объединение сводят к композиции. Это доказательство мы не приводим (даже «на уровне идеи»; см. [15] и [16]).

Замечание. Объединение алгорифмов иногда называют *параллельной композицией*. Существуют также разные варианты определения этой комбинации нормальных алгорифмов. Один из них таков: алгорифмы A и B (независимо друг от друга) применяются к словам x и y соответственно, а для алгорифма C выполняется условное равенство (для любых слов $x \in V_1^*$, $y \in V_2^*$) $C(x * y) \simeq A(x) * B(y)$, где «звездочка» (*) - буква, не принадлежащая объединению алфавитов V_1 и V_2 .

Нормальный алгорифм C , построенный согласно теореме об объединении, обозначают $A \oplus B$.

Повторение НА может быть содержательно определено такой псевдопрограммной конструкцией с использованием нормальных алгорифмов A и B :

while $B(x) = \lambda$ **do** $x := A(x)$ **end**,

т.е. если слово $B(x)$ определено и пусто, то к слову x надлежит применить алгорифм A , если же слово $B(x)$ не есть пустое, то результатом всего рассматриваемого алгоритма считается само слово x . Далее, если слово $A(x)$ определено, и $B(A(x)) = \lambda$, то к слову $A(x)$ надлежит применить снова алгорифм A ; если же $B(A(x)) \neq \lambda$, то общим результатом является слово $A(x)$ и т. д.

Заданный таким образом алгоритм называют *повторением нормального алгорифма A , управляемым нормальным алгорифмом B* , или, короче, *B -повторением нормального алгорифма A* .

Можно доказать, что и повторение нормального алгорифма «программируется» в виде нормального алгорифма.

Теорема 3 (о повторении нормального алгорифма). Каковы бы ни были нормальные алгорифмы A в алфавите V_1 и B в алфавите V_2 , может быть построен нормальный алгорифм C над алфавитом $V = V_1 \cup V_2$ такой, что для любого слова $x \in V^*$, что имеет место равенство $y = C(x)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность слов $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ такая, что $m = 0$, $y = x$ и $B(x) \neq \lambda$, или $m > 0$ и $(\forall i = \overline{1, m})((x_i = A(x_{i-1})) \wedge ((\forall j = \overline{0, m-1})(B(x_j) = \lambda)) \wedge (B(x_m) \neq \lambda))$.

Нормальный алгорифм C будем обозначать ${}_B\{A\}$.

Условие повторения цикла можно изменить на противоположное. Такое повторение будем обозначать ${}_B < A >$.

Примеры

Примеры в этом разделе делятся на две части. Сначала рассматриваются некоторые примеры решения задач с использованием теорем сочетания. Затем приводятся примеры, обсуждаемые на семинарских занятиях со студентами, где демонстрируются важные приемы, используемые при разработке схем нормальных алгорифмов.

Рассмотрим решение задач на построение некоторых алгорифмов с использованием теорем сочетания.

Пример 1. Проекцирующие алгорифмы. Построим семейство алгорифмов $\Pi_i, i = 1, \dots, n$, над алфавитом $V \cup \{\$ \}$ так, что для любых слов $x_1, x_2, \dots, x_n$ в алфавите V выполняется

$$\Pi_i(x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_i, i = 1, \dots, n.$$

Построим алгорифм P_1 со схемой

$$\begin{cases} \$\eta \rightarrow \$, \eta \in V \cup \{\$ \} \\ \$ \rightarrow \\ \rightarrow \cdot \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $P_1(x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_1$.

Теперь построим алгорифм P_2 со схемой

$$\begin{cases} \eta \# \rightarrow \#, \eta \in V \\ \# \rightarrow \cdot \\ \$ \rightarrow \# \end{cases}$$

Понятно, что $P_2(x_1 \$ x_2 \$ \dots \$ x_n) = x_2 \$ \dots \$ x_n$.

Тогда $\Pi_i = P_1 \circ \underbrace{(P_2 \circ \dots \circ P_2)}_{i-1}$. Обозначая k – кратную композицию алгорифма A с са-

мым собой через A^k и полагая при этом, что $A^0 = Id$, получим $\Pi_i = P_1 \circ P_2^{i-1}$. В частности, $\Pi_1 = P_1$.

Перед тем, как рассматривать следующий пример на теоремы сочетания, построим НА Rv , который инвертирует входное слово в заданном произвольно алфавите V , то есть, если слово $x = x(1)x(2)\dots x(k), k \geq 1$, то $Rv(x) = x^R = x(k)\dots x(2)x(1)$ (при этом, разумеется, инверсия, или обращение, пустого слова есть пустое слово).

Пример 2. Инвертирующий нормальный алгорифм.

Схема алгорифма Rv приведена ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\xi\eta \rightarrow \eta\alpha\xi, \xi, \eta \in V \\ \alpha\xi \rightarrow \beta\xi, \xi \in V \\ \beta\xi\beta \rightarrow \beta\xi \\ \alpha\beta \rightarrow \cdot \\ \alpha \rightarrow \cdot \\ \rightarrow \alpha \end{array} \right.$$

В этой схеме буквы α и β не принадлежат алфавиту V .

Пусть $x = x(1)x(2)\dots x(k), k > 0$, есть непустое слово в алфавите V .

В схеме алгоритма Rv к слову x применима только самая нижняя формула. После ее применения, при условии, что $k > 1$, будет применима одна из формул верхней строки. Эти формулы применяются до тех пор, пока слово $\alpha\xi$ не окажется в конце текущего слова процесса работы:

$$x(1)x(2)\dots x(k) \mapsto \alpha x(1)x(2)\dots x(k) \mapsto x(2)\alpha x(1)\dots x(k) \mapsto \dots \mapsto x(2)\dots x(k)\alpha x(1)$$

Затем буква α «превратится» в букву β (вторая сверху строка схемы) и получится слово $x(2)\dots x(k)\beta x(1)$. К нему опять-таки применима только самая нижняя формула; после ее применения будем иметь (допуская, что $k > 2$):

$$\begin{aligned} x(2)x(3)\dots x(k)\beta x(1) &\mapsto \alpha x(2)x(3)\dots x(k)\beta x(1) \mapsto x(3)\alpha x(2)\dots x(k)\beta x(1) \\ &\mapsto \dots \mapsto x(3)\dots x(k)\alpha x(2)\beta x(1) \mapsto x(3)\dots x(k)\beta x(2)\beta x(1) \mapsto x(3)\dots x(k)\beta x(2)x(1) \end{aligned}$$

Второе вхождение буквы β исчезает благодаря применению третьей сверху формулы (точнее, конкретной формулы, определяемой этой строкой).

Так будет происходить перенос в конец слова всех по очереди букв исходного слова до тех пор, пока не получится слово $x(k)\beta x(k-1)\dots x(2)x(1)$.

Далее:

$$\begin{aligned} x(k)\beta x(k-1)\dots x(2)x(1) &\mapsto \alpha x(k)\beta x(k-1)\dots x(2)x(1) \mapsto \beta x(k)\beta x(k-1)\dots x(2)x(1) \\ &\mapsto \beta x(k)x(k-1)\dots x(2)x(1) \mapsto \alpha \beta x(k)x(k-1)\dots x(2)x(1) \mapsto \cdot x(k)x(k-1)\dots x(2)x(1) . \end{aligned}$$

Приведенный разбор процесса работы нельзя считать строгим доказательством, но можно вполне строго доказать, что алгоритм Rv перерабатывает слово x , длина которого больше 1, в его инверсию x^R .

Для пустого и однобуквенного слова соответственно имеем:

$$\lambda \mapsto \alpha \mapsto \cdot \lambda$$

и

$$a \mapsto \alpha a \mapsto \beta a \mapsto \alpha \beta a \mapsto \cdot a .$$

Итак, мы можем утверждать, что $(\forall x \in V^*)(Rv(x) = x^R)$.

Пример 3. Алгоритм распознавания равенства слов. Построим алгоритм EQ над алфавитом $V \cup \{*\}$ такой, что для любых двух слов $x, y \in V^*$ имеет место $EQ(x * y) = \lambda \Leftrightarrow x = y$.

Требуемый нормальный алгоритм можно построить, используя теоремы объединения и композиции, а именно

$$EQ(x * y) \simeq \text{Comp}(\text{Id}(x) * Rv(y)) ,$$

где Comp - алгоритм, задаваемый схемой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta * \eta \rightarrow *, \eta \in V \\ * \rightarrow \cdot \end{array} \right. .$$

Очевидно, что для любых двух слов $x, y \in V^*$ выполняется $!Comp(x * y) \wedge Comp(x * y) = \lambda \Leftrightarrow x = y$.

Пример 4. Алгоритм определения «центра» слова.

Построим алгоритм C , который любое слово x в алфавите V переводит в слово $x_1 \$ x_2$, где $|x_1| = |x_2|$ при четной длине слова x , и $|x_2| = |x_1| + 1$ в противном случае; $\$ \notin V$.

Это можно реализовать, определив алгоритм C следующим образом:

$C = B \circ_A < L \circ R >$, где схемы входящих в указанное сочетание алгоритмов, выглядят так:

$$\begin{aligned}
 R: & \begin{cases} \gamma\xi \rightarrow \xi\gamma (\xi \in V, \gamma \notin V) \\ \xi\gamma \rightarrow \bullet\beta\xi \\ \xi\beta \rightarrow \bullet\beta\xi \\ \rightarrow \gamma \end{cases} \\
 L: & \begin{cases} \alpha\beta \rightarrow \bullet\alpha\beta \\ \alpha\xi \rightarrow \bullet\xi\alpha (\xi \in V, \alpha \notin V) \\ \rightarrow \alpha \end{cases} \\
 A: & \begin{cases} \xi\alpha\beta \rightarrow \alpha\beta (\xi \in V, \alpha, \beta \notin V) \\ \alpha\beta\xi \rightarrow \alpha\beta \\ \alpha\beta \rightarrow \bullet \end{cases} \\
 B: & \begin{cases} \alpha\beta \rightarrow \bullet\$ \\ \rightarrow \bullet\$ \end{cases}
 \end{aligned}$$

Алгоритм R вводит правый «челнок» β , который при каждом повторении сдвигается влево на букву (при первом повторении это делает «челнок» γ , тут же превращающийся в β).

Алгоритм L вводит левый «челнок» α , при каждом повторении сдвигающийся на букву вправо. Верхняя формула служит для «блокировки» работы этой схемы в том случае, когда вхождение $\alpha\beta$ уже возникло.

Как только «челноки» α и β встречаются, цикл прекращается (условие выхода из цикла проверяет алгоритм A).

Алгоритм B заменяет вхождение $\alpha\beta$ на «доллар». Поскольку правый «челнок» опережает левый на шаг, то при нечетной длине входного слова правая часть разделенного «долларом» слова будет длиннее левой на одну букву.

Вторая формула в схеме алгоритма B предназначена для корректной работы алгоритма C с пустым входным словом. В этом случае алгоритм A вырабатывает пустое слово, цикл не выполняется, а алгоритм B вырабатывает в виде результата значок доллара, что и нужно (обе половинки пустого слова тоже, очевидно, пустые).

Теперь разберем несколько примеров, на которых покажем определенные приемы построения схем нормальных алгоритмов, решающих предъявленные содержательные задачи, или вычисляющие заданные вербальные функции.

Пример 5. Написать схему НА, аннулирующего всякое непустое слово в заданном произвольном алфавите V , содержащего ровно два вхождения заданного произвольного непустого слова $u = u(1)u(2)...u(k)$, $k \geq 1$. При этом, если входное слово пустое

(λ), то результатом должен быть символ @, а если входное слово непусто и не удовлетворяет условию, то результатом должно быть оно само (т. е. алгоритм должен вычислять тождественную функцию).

Схема:

$$\begin{cases} \#\#u \rightarrow \cdot u & (1) \\ \#\#\xi \rightarrow \xi\#\# / \xi \in V & (2) \\ \#\# \rightarrow \$ / \$ \notin V & (3) \\ \xi\$ \rightarrow \$ & (4) \\ \$ \rightarrow \cdot & (5) \\ \#u \rightarrow u(1)\#\#u(2)...u(k) & (6) \\ \#\xi \rightarrow \xi\# & (7) \\ \# \rightarrow \cdot & (8) \\ u \rightarrow u(1)\#u(2)...u(k) / \# \notin V & (9) \\ \xi \rightarrow \cdot\xi & (10) \\ \rightarrow \cdot @ / @ \notin V & (11) \end{cases}$$

Во всей схеме ξ - параметр, обозначающий произвольную букву алфавита V .

Если входное слово пустое, то первой подходящей формулой будет формула (11), «печатается» «собака», и процесс заканчивается. Если входное слово не пустое, и не содержит ни одного вхождения слова $u = u(1)u(2)...u(k), k \geq 1$, то сразу применяется формула, соответствующая строке (10), процесс заканчивается, и результатом будет то же входное слово. Если входное слово V содержит по крайней мере одно вхождение слова u , то на первом шаге будет применена формула (9), появится «решетка», после чего управление «перехватит» формула строки (7) (но если слово u однобуквенное, то может оказаться подходящей и формула (6)). Заметим, что в общем случае различные вхождения слова u могут пересекаться, и мы позволяем «решетке» аккуратно «перепрыгнуть» только через первую букву слова u . «Решетка» играет роль своего рода челнока и сканирует входное слово в поисках 2-го вхождения слова u . Если его нет, «решетка» добежит до конца входного слова и исчезает (формула (8)). Если же второе вхождение есть, то в определенный момент управление будет передано формуле (6), и второй челнок (двойная «решетка») отправляется искать третье вхождение слова u (строка (2)). Если оно не обнаруживается, то, добежав до конца слова, двойная «решетка» превращается в «доллар», который стирает входное слово и исчезает сам (строки (4) и (5)). Условие выполнено, входное слово аннулировано. В противном случае челнок $\#\#$ исчезает, и входное слово остается как было (формула (1)).

Если сделать специальный акцент на методике, то как раз на примере данной схемы полезно показать студентам, как, исходя из смысла задачи, писать схему нормального алгоритма. И тогда окажется, что процесс записи схемы может частично идти снизу вверх.

Мы прежде всего отрабатываем пустое слово на входе и сразу в самом низу схемы пишем формулу (11). Далее рассматривается вариант наличия по крайней мере одного вхождения интересующего нас слова. Тогда над формулой (11) пишем формулу (9), оставляя место для позднейшей вставки строки (10). Дальше объясняем всё, как написано выше и в схеме пишем сперва строку (7) - выше, а потом (8) - ниже. Строка (10) появляется в процессе разработки схемы в реальном времени в последний момент. Можно задать учащимся вопрос: чего не хватает в нашей схеме? После недолгого размышления становится понятно, что не отработано непустое слово на входе, в котором нет ни одного вхождения слова u .

Студентам можно предложить в качестве несложного упражнения модифицировать схему так, чтобы НА аннулировал слова, в которых не менее трех вхождений заданного непустого слова.

Пример 6. Написать схему НА, распознающего (в том же смысле, как и в предыдущей задаче) такие слова в алфавите V , которые содержат хотя бы одно вхождение двух, отличных друг от друга (но возможно, что одно из них входит в другое) непустых слов.

В написанной ниже схеме параметр ξ пробегает алфавит V (т. е. $\xi \in V$), буквы $\alpha, \beta, \#, \nabla, @ \notin V$, $u, v \in V^+$ - слова, вхождения которых требуется найти.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \xi \rightarrow \nabla \\ \xi \nabla \rightarrow \nabla \\ \nabla \rightarrow \cdot \\ \alpha v \rightarrow \nabla \\ \beta u \rightarrow \nabla \\ \alpha \xi \rightarrow \xi \alpha \\ \beta \xi \rightarrow \xi \beta \\ \alpha \rightarrow \cdot \\ \beta \rightarrow \cdot \\ \# u \rightarrow \alpha u \\ \# v \rightarrow \beta v \\ \# \xi \rightarrow \xi \# \\ \# \rightarrow \cdot \\ \xi \rightarrow \# \xi \\ \rightarrow \cdot @ \end{array} \right.$$

Некоторая тонкость состоит в том, что первый челнок ($\#$) выставляется сразу перед всем входным словом. Это сделано для того, чтобы не упустить вложенного вхождения.

Примеры процессов работы:

$$u = ba, v = aba$$

$$1) bbabbaba \mapsto \#bbabbaba \mapsto b \#ba bbaba \mapsto b\alpha babbaba \mapsto bb\alpha abbaba$$

$$\mapsto^3 bbabb\alpha aba \mapsto bbabb\nabla \mapsto^5 \nabla \mapsto \cdot$$

В третьем слове вывода пробелами специально выделено первое вхождение $\#u = \#ba$.

Заметим, что НА находит **первое** вхождение каждого слова.

$$2) aba \mapsto \#aba \mapsto \beta aba \mapsto a\beta ba \mapsto a\nabla \mapsto \nabla \mapsto \cdot$$

Можно заметить, что расположение формул в 5-й и 6-й строках снизу друг относительно друга не существенно.

Пример 7. Написать схему НА, вычисляющую следующую функцию:

$$A_u(x) = \begin{cases} 1\#x, & \text{если непустое слово } u \text{ входит в } x \text{ ровно 1 раз} \\ 0\#x & \text{иначе} \end{cases},$$

где входное слово x есть слово в произвольно заданном алфавите V , а $\#, 0, 1 \notin V$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi\alpha \rightarrow \alpha\xi / \alpha \in \{0,1\}, \xi \in V \\ \alpha \rightarrow \cdot\alpha\# \\ \&u \rightarrow 0u / \& \notin V \\ \&\xi \rightarrow \xi\& \\ \& \rightarrow 1 \\ \$u \rightarrow u(1)\&u(2)...u(k) / k \geq 1, \$ \notin V \\ \$\xi \rightarrow \xi\$ \\ \$ \rightarrow 0 \\ u \rightarrow u(1)\$u(2)...u(k) \\ \rightarrow \cdot 0\# \end{array} \right.$$

Если во входном слове нет требуемых вхождений, то применяется самая нижняя формула, и перед словом возникает $0\#$ (для пустого входного слова это будет результат). Иначе после первой буквы первого вхождения слова u выскакивает первый челнок ($\$$), который запускается для поиска 2-го вхождения. Если его нет, «доллар» заменяется на 0 , который по формулам самой верхней строки идет до упора влево и через решетку приставляется к входному слову слева (2-я строка сверху). При обнаружении 2-го вхождения «доллар» запускает аналогично второй челнок (амперсанд), который ищет 3-е вхождение (его можно заменить и двойным «долларом»). Если 3-е вхождение есть, амперсанд превращается в 0 и точно так же, как и выше идет к началу входного слова и присоединяется к нему через «решетку» слева. При отсутствии 3-го вхождения амперсанд, добежав до конца входного слова, превращается в 1 , которая так же, как и 0 , бежит к левому краю и слева через решетку присоединяется к входному слову.

Рассмотрим теперь некоторые арифметические нормальные алгоритмы.

Пример 8. Сложение и умножение конструктивных натуральных чисел.

Схема сложения совсем простая:

$$Add : \{ \$0 \rightarrow \cdot$$

Пара аргументов $011\dots1\$011\dots1$ перерабатывается в сумму $011\dots111\dots1 = 011\dots1$.

Схема умножения значительно сложнее.

$$Mult : \left\{ \begin{array}{ll} a1 \rightarrow 1ba & (1) \\ a \rightarrow & (2) \\ b1 \rightarrow 1b & (3) \\ 1\$0 \rightarrow \$0a & (4) \\ 00 \rightarrow 0 & (5) \\ \$0 \rightarrow 0\$ & (6) \\ \$1 \rightarrow \$ & (7) \\ \$b \rightarrow 1b & (8) \\ \$ \rightarrow \cdot & (9) \end{array} \right.$$

Нужно показать, что $Mult(m\$n) = mn$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) $m = 0, n \geq 0$

$$0\$01^n \mapsto_{(6)} 00\$1^n \mapsto_{(5)} 0\$1^n \mapsto_{(7)} \dots_{n>0} \mapsto_{(7)} 0\$ \mapsto_{(9)} \cdot 0.$$

2) $m > 0, n = 0$

$$\begin{aligned} 01^m \$0 &\mapsto_{(4)} 01^{m-1} \$0a \mapsto_{(2)} 01^{m-1} \$0 \mapsto_{(4)} 01^{m-2} \$0a \mapsto_{(4),(2)} \dots \mapsto 0 \$0 \mapsto_{(6)} 00 \$ \\ &\mapsto_{(5)} 0 \$ \mapsto_{(9)} \cdot 0 \end{aligned}$$

Итак, если хотя бы один аргумент равен нулю, то произведение равно нулю.

3) $m > 0, n > 0$

$$\begin{aligned} 01^m \$01^n &\mapsto_{(4)} 01^{m-1} \$0a1^n \mapsto_{(1)} 01^{m-1} \$01ba1^{n-1} \mapsto_{(1)} \dots \mapsto_{(1)} 01^{m-1} \$01b \dots 1b a \mapsto_{(2)} 01^{m-1} \$01b \dots 1b \\ &\mapsto_{(3)} \dots \mapsto_{(3)} 01^{m-1} \$01^n b^n \mapsto_{(4)} 01^{m-2} \$0a1^n b^n \mapsto_{(1)} 01^{m-2} \$01ba1^{n-1} b^n \mapsto_{(1)} \dots \mapsto_{(1)} 01^{m-2} \$01b \dots 1b ab^n \\ &\mapsto_{(2)} 01^{m-2} \$01b \dots 1b b^n \mapsto_{(3)} \dots \mapsto_{(3)} 01^{m-2} \$01^n b^{2n} \mapsto \dots \mapsto_{(4),(1),(2),(3)} \text{еще } m-2 \text{ раз} 0 \$01^n b^{mn} \\ &\mapsto_{(6)} 00 \$1^n b^{mn} \mapsto_{(5)} 0 \$1^n b^{mn} \mapsto_{(7)} \dots \mapsto_{(7)} 0 \$b^{mn} \mapsto_{(8)} \dots \mapsto_{(8)} 01^{mn} \$ \mapsto_{(9)} \cdot 01^{mn} = mn \end{aligned}$$

Доказано. Пример (с некоторыми изменениями) взят из книги [3].

Пример 9. Усеченное вычитание

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1 \$01 \rightarrow \$0 & (1) \\ \$01 \rightarrow \$0 & (2) \\ \$0 \rightarrow \cdot & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Легко показать, что $_ (m \$n) = \begin{cases} m - n, & \text{при } m > n \\ 0, & \text{при } m \leq n \end{cases}$

Пример 10. Распознавание нестрогого неравенства.

$$\text{MoreEq} : \begin{cases} 1 \$01 \rightarrow \$0 \\ 0 \$01 \rightarrow 0 \$a / a \notin \{0, 1\} \\ 1 \$0 \rightarrow \$0 \\ 0 \$0 \rightarrow \cdot 1 \\ a1 \rightarrow a \\ \$a \rightarrow \cdot \end{cases}$$

Также нетрудно проверить, что $\text{MoreEq}(m \$n) = \begin{cases} 1, & m \geq n \\ 0, & m < n \end{cases}$.

Заключение

В статье рассмотрены некоторые приемы разработки схем нормальных алгоритмов, решающих конкретные вычислительные задачи. Овладение такими приемами важно для студентов, обучающихся по направлениям, связанным с разработкой программных технологий.

Элемент новизны методики состоит отчасти в том, что в некоторых примерах разбирается сам процесс конструирования схемы, исходя из существа задачи. Даются достаточно подробные пояснения к принципам работы каждой схемы.

Основная цель статьи, вместе с рассмотрением техники разработки схем нормальных алгоритмов, состояла и в изложении доступного для понимания студентов-нематематиков доказательства теоремы композиции и формулировке некоторых важных результатов, понимание которых необходимо при решении задач.

Работа основана на личном опыте автора в преподавании теории алгоритмов. В качестве дальнейших методических задач можно назвать проработку курса математической логики для студентов тех же специальностей. Содержание статьи будет полезным преподавателям и студентам при подготовке к занятиям.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов теории алгоритмов: проблема применимости для нормальных алгоритмов Маркова // Modern European Researches. – 2019. - №5. – С. 17-36.
2. Марков А.А., Нагорный Н.М. Теория алгоритмов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
3. Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
4. Косовский Н.К., Косовская Т.М. Полиномиальный тезис Черча для РЕФАЛ-5-функций, нормальных алгоритмов и их обобщений // Компьютерные инструменты в образовании. – 2010. – С. 12-21
5. Косовский Н.К. Алгоритмы Маркова-Турчина и доказательства полиномиальной эффективности программ на языке РЕФАЛ-5 // Компьютерные инструменты в образовании. – 2012. - №4. – С. 41-49
6. Гурин Р.Ф., Романенко С.А. Язык программирования РЕФАЛ ПЛЮС / Учеб. пособие, Ун-т г. Переславля им. А.К. Айламазяна. – Переславль-Залесский, 2006
7. Shidik G.F., Pulungan R. Application of Markov's Normal Algorithms // Advanced Science Letters. - 2015. – vol. 21(10). - P. 3270-3274.
8. Пруцов А.В. Наиболее общая модификация нормальных алгоритмов Маркова // Cloud of Science. – 2018. - №1. - P. 74-85.
9. Игошин В.И. О значении теории алгоритмов для современного профессионального образования и методики ее преподавания // Профессиональное образование в современном мире. - 2019.- №2. – С. 2224-2241.
10. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика // Учеб. для вузов. – 5-е изд. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. – 744 с.
11. Белоусов А.И. Указ. соч.
12. Марков А.А., Нагорный Н.М. Указ. соч.
13. Кушнер Б.А. Указ. соч.
14. Белоусов А.И. Указ. соч.
15. Марков А.А., Нагорный Н.М. Указ. соч.
16. Белоусов А.И. К проблеме распараллеливания алгоритмов // Программирование. – 1978. - №5. – С. 53-61.

Alexey I. Belousov

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

al_belous@bk.ru

On the method of some sections of algorithm theory presentation: some techniques of working out schemes of normal Markov's algorithms

Abstract. The relevance of the methodological problem under consideration is due to the fact that the theory of algorithms takes an essential place in the curricula of programmer students. It is required to develop a methodology for presentation of the foundations of this theory that would be adequate and at the same time clear to students who do not specialize in mathematics. The article discusses some techniques for developing schemes of normal algorithms for solving computational problems. We consider the proof of some theorems necessary for solving specific problems at an accessible level of accuracy. The content of the article will be useful for programming majors, as well as for teachers of courses in mathematical logic and theory of algorithms, courses in designing algorithms.

Key words: algorithm, normal Markov's algorithm, methodological problems.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Аннотация

Массовый переход на дистанционное онлайн-обучение в вузах в последнее время поднимает целый ряд вопросов, связанных с этой формой обучения. Это, в частности, вопросы о том, как проводить лекционные и семинарские занятия, лабораторные работы, контрольные мероприятия, как получать обратную связь от студентов. И, конечно, одним из важнейших является вопрос, как объективно проверить и оценить знания учащихся. В данной работе рассматриваются некоторые методы повышения

объективности оценивания знаний студентов вузов в области математических дисциплин при дистанционном онлайн-обучении.

Ключевые слова

высшее образование, дистанционное онлайн-обучение, оценивание знаний

АВТОР

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Введение

Массовый переход на дистанционное онлайн-обучение в вузах в последнее время поднимает целый ряд вопросов, связанных с этой формой обучения. Это, в частности, вопросы о том, как проводить лекционные и семинарские занятия, лабораторные работы, контрольные мероприятия, как получать обратную связь от студентов. И, конечно, одним из важнейших является вопрос, как объективно проверить и оценить знания учащихся [1].

Проблема объективной оценки знаний важна и при очной форме обучения. Для её решения к современному образовательному процессу предъявляются два следующих требования:

1. существует прозрачная, заранее объявляемая студентам система начисления баллов за определённые виды работ по каждой дисциплине, и оценка по дисциплине выставляется в конце семестра, исходя из набранных баллов;

2. все основные контрольные мероприятия, включая экзамен, проводятся в аудитории с преподавателем, который следит за самостоятельностью студентов при выполнении работы.

Первое требование позволяет установить одинаковые требования ко всем студентам и тем самым преодолеть субъективность и предвзятость в отношении преподавателя к студентам. Второе требование обеспечивает контроль за деятельностью студентов и тем самым даёт справедливую оценку их знаний.

Ясно, что при дистанционном онлайн-обучении контроль за самостоятельностью студентов и, как следствие, выставление справедливой оценки знаний значительно усложняется. Может возникнуть ненормальная ситуация, при которой студенты, пытающиеся выполнять все работы честно, будут делать ошибки и получать средние баллы, а студенты, не умеющие или не желающие учиться, а потому не стесняющиеся прибегать к обману, будут все работы выполнять почти идеально и получать максимальные баллы. Подобная ситуация возникает и при очной форме обучения, но при дистанционном онлайн-обучении это явление может оказаться массовым, что напрочь отобьёт мотивацию к учёбе и самостоятельности у всех студентов. В случае невозможности выставить адекватную знаниям студента оценку справедливее будет вообще отказаться от оценок и перейти на систему «зачтено - не зачтено».

Для усиления контроля за самостоятельностью студентов некоторые вузы стали внедрять системы прокторинга - системы, позволяющие идентифицировать студентов, следить за их самостоятельностью во время контрольных работ и экзаменов через веб-камеру, а также контролировать запущенные на компьютерах студентов программы. Очевидно, системы прокторинга менее надёжны, чем непосредственный контроль преподавателя в аудитории. И, кроме того, использование подобных систем

сопряжено с целым рядом проблем. Идентификация студентов посредством систем прокторинга означает обработку их персональных и, возможно, биометрических данных, на что в соответствии с законом о персональных данных [2] требуется письменное согласие каждого студента. Любой технический сбой, скажем, в Интернет-соединении, расценивается системой как попытка её обмануть, и, как следствие, экзамен считается несданным. В результате студенты, не желающие нормально учиться, находят способ обмануть систему прокторинга, а студентам, которые пытаются учиться самостоятельно, подобные системы создают лишний стресс, связанный с возможностью независимого от них технического сбоя и незасчитанной контрольной работы или экзамена. Другими словами, подобные системы создают дополнительные проблемы нормальным студентам и не создают серьёзных препятствий для попыток эти системы обойти, в связи с чем системы прокторинга в настоящее время, по-видимому, лучше не использовать.

Методология и результаты исследования

В данной работе рассматриваются некоторые методы повышения объективности оценивания знаний студентов вузов в области математических дисциплин при дистанционном онлайн-обучении. В соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» №273-ФЗ [3] под дистанционными образовательными технологиями понимаются образовательные технологии, реализуемые в основном с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) взаимодействии обучающихся и педагогических работников.

Под оценкой знаний будем понимать сравнение достигнутого учащимися уровня знаний с эталонными представлениями, описанными в рабочей программе дисциплины. В соответствии с приказом Минобрнауки России от 15.02.2005 N 40 "О реализации положений Болонской декларации в системе высшего профессионального образования Российской Федерации" [4] в высшем образовании в России в последнее время введена балльно-рейтинговая система оценивания. Именно такую 100-балльную систему оценивания и будем рассматривать в данной статье, причём нас будет интересовать только один аспект оценивания знаний, а именно, объективность и достоверность оценки.

Кроме того, будем исходить из естественного стремления студентов получить максимальные баллы минимальными усилиями. Другими словами, если списывания, поиск готовых решений или какие-либо другие виды обмана на контрольных работах позволяют легко получить максимальные баллы, то студенты будут так делать, и не имеет смысла их в этом обвинять. Следует по возможности выстраивать процесс обучения так, чтобы выполнять контрольные работы самостоятельно студентам было невыгодно, и предлагаемые далее методы как раз и указывают, что именно следует изменить в образовательном процессе при его переходе на дистанционный формат.

Перейдём к перечислению мер для повышения объективности оценивания знаний.

1. Необходимо увеличить количество работ, за которые можно получить баллы, с одновременным уменьшением количества баллов за каждую отдельную работу.

Ясно, что если студенту предстоит написать одну большую сложную работу по программе дисциплины целого семестра и он захочет выполнить её самостоятельно, то ему придётся прибегнуть к обману всего один раз. Если же работ, за которые выставляются баллы, будет много и сроки их выполнения будут равномерно распределены в течение семестра так, чтобы нельзя было сделать всё за один день в конце семестра и получить за это хорошие баллы, то жульничать придётся постоянно, что значительно сложнее.

Увеличить количество работ можно следующим образом:

- после каждой лекции проводить тест на усвоение основных определений и формул, содержания теорем и понимание доказательств; такой тест может быть с

вариантами ответов или без них и должен быть выполнен в течение некоторого ограниченного времени после лекции (скажем, в течение суток);

- после каждого семинара задавать текущее домашнее задание на решение типовых задач; требовать присылать фотографии решения, написанные на листах бумаги своей рукой; время на выполнение текущего домашнего задания можно также ограничить (скажем, одной неделей после семинара).

В конце семестра проводится подсчёт для каждого студента процента правильных ответов на вопросы тестов по содержанию лекций и процента правильно решённых задач текущих домашних заданий по темам семинарских занятий и в соответствии с этими процентами выставляется некоторое количество баллов по дисциплине.

Безусловно, вопросы тестов и задачи текущих домашних заданий для разных студентов должны различаться. В противном случае студенты очень быстро скооперируются и подобные задания потеряют смысл.

Требование перейти от одной контрольной работы или теста «с высокими ставками» к множеству работ, за которые студенты могут получать небольшие баллы, содержится и в модели дистанционного онлайн-обучения, предложенной некоммерческой организацией Concord Consortium [5]. В их модели оценивание представляет собой непрерывный процесс. На каждом онлайн-занятии преподаватель оценивает работу каждого студента, из чего впоследствии и складывается оценка по дисциплине.

2. Необходимо разбить дисциплины на модули и составить расписание таким образом, чтобы контрольные работы по окончании изучения модулей проводились в строго определённое, одинаковое для всех студентов вуза время.

Ясно, что студенты с разных потоков и курсов могут помогать друг другу в написании контрольных. Однако, если каждый будет занят своей контрольной, то массовая помощь студентов друг другу в значительной мере станет невозможной. Существуют, конечно, ещё и бывшие студенты, готовые помогать нынешним в написании контрольных. Но таких людей не так много и одновременное написание работ позволит воспользоваться помощью лишь некоторым. Основной массе студентов придётся выполнять всё самостоятельно.

Кроме того, вуз может ещё больше усилить контроль в этой области, вычисляя популярные в среде студентов Интернет-ресурсы, используемые для написания контрольных, и блокируя работу этих ресурсов. Но это уже задача, которую следует решать на государственном уровне.

3. Необходимо увеличивать разнообразие вариантов контрольных работ. В идеале варианты вообще не должны повторяться хотя бы в течение одного учебного года.

Для этого можно одни и те же задачи по-разному формулировать, изменять буквенные обозначения или числовые данные. Разные формулировки затрудняют поиск готового решения задачи, в частности, в Интернете, тем самым побуждая студентов думать над решением самостоятельно.

В качестве примера приведём несколько разных формулировок фактически одной и той же задачи по теории вероятностей.

- Для случайных величин X и Y известно, что $MX = 2$, $DX = 4$, $MY = -1$, $DY = 1$, $\rho(X, Y) = 0,5$. Найдите математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции случайных величин $U = 3X - 2Y$ и $V = 5Y - X$.

- Найдите $M\xi$, $M\eta$ и $\rho(\xi, \eta)$ для случайных величин $\xi = 3X - 2Y$ и $\eta = 5Y - X$, если математические ожидания величин X и Y равны соответственно 2 и -1 , их дисперсии равны соответственно 4 и 1, а их коэффициент корреляции 0,5.

- Для случайного вектора (X, Y) даны его вектор математических ожиданий $(2; -1)$ и ковариационная матрица $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите вектор математических ожиданий и коэффициент корреляции координат случайного вектора (U, V) , где $U = 3X - 2Y$ и $V = 5Y - X$.

- По заданным числовым характеристикам $MX = 2$, $DX = 4$, $MY = -1$, $DY = 1$, $\rho(X, Y) = 0,5$ случайных величин X и Y найдите те же характеристики для величин $\xi = 3X - 2Y$ и $\eta = 5Y - X$, т. е. найдите $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$ и $\rho(\xi, \eta)$.

4. Теоретические вопросы в контрольных работах необходимо задавать, исходя из полной доступности для студентов всех учебников и электронных Интернет-энциклопедий во время выполнения работы.

Ясно, что при дистанционном написании контрольной работы ответ на теоретический вопрос по сути сводится к поиску нужных теоретических сведений в учебнике или Интернете. Можно, конечно, придумать оригинальные вопросы по теории, проверяющие понимание отдельных фрагментов определений и доказательств теорем. Например, спросить, где в доказательстве теоремы используется непрерывность функции, указанная в условии теоремы. Но и подобные вопросы можно использовать фактически только один раз. В дальнейшем энтузиастами из числа студентов будут составлены подробные ответы в том числе и на все такие вопросы, и это без труда можно будет найти в сети.

Хотя, как показывает практика, студенты часто неправильно отвечают даже при наличии учебника и Интернета. Так, например, при ответе на вопрос «дать определение испытаний Бернулли» студенты пишут про закон больших чисел Бернулли. Так что полностью отказываться от теоретических вопросов и при дистанционном написании контрольных работ, по-видимому, не следует. Но оценивать ответы лучше по системе «зачтено - не зачтено», т.е., скажем, размещать в контрольной несколько простых теоретических вопросов и при неправильном ответе на два и более вопроса, не засчитывать всю работу. Также можно добавлять вопросы по теории, проверяющие понимание отдельных фрагментов определений и доказательств теорем. Но чтобы такие вопросы адекватно работали на оценку, их список не следует заранее оглашать студентам и сами вопросы регулярно менять. Студентам в таком случае можно предоставить список тем по теории, но не сами вопросы.

5. Для проведения экзамена, а лучше и контрольной работы по окончании каждого модуля, необходимо предусмотреть режим общения со студентами по видеосвязи.

За модульные контрольные работы и, конечно же, за экзамен студенты получают достаточно большие баллы. Поэтому контроль за самостоятельностью студентов при выполнении этих работ также должен быть значительным. По этой причине модульные контрольные работы и экзамен предлагается проводить в два этапа. На первом этапе студентам по электронной почте рассылается задание, состоящее из нескольких задач, на решение которых выделяется один-два часа. После чего студенты должны отправить фотографии решений ответным электронным письмом. На втором этапе происходит общение преподавателя по очереди с каждым студентом в режиме видеосвязи. Преподаватель задаёт студенту вопросы по решённым задачам, проверяя тем самым, что студент понимает своё же решение. Это могут быть вопросы типа следующих: как называется используемая в решении формула, откуда в решении получается какое-либо соотношение и т. п. Далее происходит опрос студента по теории. Как показала практика, опрос по теории удобно проводить, демонстрируя студенту карточки с вопросами, требующими немедленного ответа. Эти вопросы проверяют знание студентом основных определений, формул и фактов и сформулированы таким образом, чтобы ответ нельзя было быстро найти в учебнике или Интернете. Вот примеры подобных карточек по теории вероятностей и математической статистике.

Верны ли данные формулы и для каких событий?

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A + B) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Как называется распределение с данной плотностью и чему равны его математическое ожидание и дисперсия?

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Что означает следующая запись?

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M X_i \rightarrow 0$$

Как называются следующие статистики?

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Интервальные оценки какой характеристики здесь записаны? В какой случае используется первая оценка и в каком вторая?

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \right)$$

$$\left(\bar{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1); \bar{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \right)$$

Поскольку отвечать на эти вопросы студенту приходится в режиме видеосвязи, по его ответу можно достаточно адекватно оценить его уровень теоретических знаний по дисциплине. И конечно же, заранее нужно заготовить достаточное количество таких карточек, чтобы хотя бы в рамках одного экзамена они не повторялись.

6. Следует ввести самооценку каждым студентом собственных знаний.

Наличие обратной связи со студентами чрезвычайно важно при любой форме обучения. При очной форме обратная связь проявляется на лекциях и семинарах. Преподаватель может наблюдать, какие вопросы задают студенты и как они решают задачи, и из этих наблюдений уже приблизительно представлять уровень знаний студентов и их предполагаемую оценку. При дистанционном онлайн-обучении подобная обратная связь фактически разрушается. Однако её может частично заменить самооценка студентами степени своего понимания изучаемой дисциплины. После каждой лекции или семинарского занятия, проведённого онлайн, можно опрашивать студентов, на сколько баллов они оценивают свою степень понимания пройденной темы. И эту самооценку впоследствии учитывать, выдавая студентам дифференцированные по уровням сложности задания в зависимости от той оценки, на которую они претендуют. Дело в том, что зачастую студенты сами осознают своё нежелание или невозможность решать достаточно сложные задачи по дисциплине. Они могут заявить об этом преподавателю, получить задачи попроще и оценку, соответствующую их ожи-

даниям. В результате таким студентам не приходится прибегать к обману для решения сложных задач, а преподавателю упрощается задача дифференцировать студентов по их знаниям и выставить адекватные оценки по дисциплине.

Подытоживая, отметим, что реализация всех перечисленных мер требует значительной подготовительной работы, в связи с чем целесообразным будет выделение в вузах дополнительных рабочих мест для методистов, которые будут готовить разные варианты контрольных работ и вопросов и задач для проведения экзаменов, а также помогать в проверке тестов по содержанию лекций и текущих домашних заданий по семинарам.

Заключение

Безусловно, интерес к дистанционному онлайн-обучению, а также к адекватному оцениванию знаний, полученных в дистанционном формате, в силу определённых преимуществ онлайн-обучения над очной формой в дальнейшем будет только нарастать. В данной статье перечислены меры повышения объективности оценивания знаний. Однако, сама ситуация необходимости дистанционного контроля над работой студентов кажется несколько неестественной. Поэтому в будущем и формы получения знаний, и методы их оценивания в дистанционном онлайн-обучении, по-видимому, будут меняться. Вероятно, возникнет некий симбиоз очной и дистанционной форм. Кроме того, может измениться сама роль оценки и, как следствие, может произойти отказ от балльного метода оценивания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Kim, Nari & Smith, Matthew & Maeng, Kyungeun. (2008). Assessment in Online Distance Education: A Comparison of Three Online Programs at a University. Online Journal of Distance Learning Administration. X1.
 2. Федеральный закон «О персональных данных» №152-ФЗ от 27.07.2006 г. <http://www.kremlin.ru/acts/bank/24154>
 3. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» №273-ФЗ от 29.12.2012 г. <http://kremlin.ru/acts/bank/36698>
 4. Приказ Минобрнауки России от 15.02.2005 N 40 "О реализации положений Болонской декларации в системе высшего профессионального образования Российской Федерации" <http://www.quality.edu.ru/bolonski/politika/776/>
 5. Concord Consortium (2002). E-learning model for online courses. The Concord Consortium. Retrieved March 3, 2002, <https://concord.org/wp-content/uploads/2016/12/pdf/e-learning-model.pdf>.
-

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

On assessing the University students' knowledge in online distance learning in mathematical disciplines

Abstract. The transition to online distance learning in higher education institutions has recently raised a number of issues related to this form of education. These are, in particular, questions about organizing lectures and seminars, laboratory work, test work and how to get feedback from students. Besides, one of the most important questions is how to assess students' knowledge objectively. In this article, we discuss some methods for improving the objectivity of assessing the University students' knowledge in the field of mathematical disciplines in online distance learning.

Key words: higher education, online distance learning, knowledge assessment.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

Вычисление предела - как самостоятельная задача или как промежуточное звено в рамках другой задачи «преследует» студентов технических ВУЗов на протяжении первых двух курсов. Поэтому обучение вычислению пределов является актуальной задачей при подготовке студентов технических специальностей. В статье рассматривается использование аппарата бесконечно малых функций для вычисления пределов. Данный аппарат является достаточно универсальным и эффективным способом решения указанной задачи. Приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для обоснования рассматриваемого метода. Рассматриваются различные примеры, иллюстрирующие применение бесконечно малых функций.

Ключевые слова

предел, бесконечно малая функция, эквивалентная бесконечно малая функция, порядок малости

АВТОРЫ

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Кавинов Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Введение

Понятие предела является одним из важнейших в курсе математики, читаемой в технических ВУЗах. Ведь понятие непрерывности функции, ее производной, определенного интеграла и т.п. все это базируется на понятии предела и предельного перехода. При этом, к сожалению, вычислению пределов в настоящее время не уделяется должного времени, и, как следствие, слабый навык в вычислении пределов преследует студентов и в дальнейшем - при изучении графиков, несобственных интегралов, рядов и т.п.

Следует сразу отметить, что не существует единого метода вычисления пределов, есть лишь более универсальные методы или методы узкоспециализированные, применяемые для конкретных типов пределов. Данная статья посвящена применению аппарата бесконечно малых функций к вычислению пределов.

Методология и результаты исследования

В настоящее время при вычислении пределов для раскрытия неопределенностей вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$, а так же других типов, приводимых к указанным двум, среди студентов особой популярностью пользуется метод Бернулли-Лопиталя [1-6]. Это объясняется с одной стороны практической эффективностью данного метода, а с другой - относительной простотой его применения для студентов. Ведь по сути все сводится к умению дифференцировать, что большинство студентов 1-го курса более-менее умеет еще со школы. Тем не менее, сам метод Бернулли-Лопиталя отнюдь не является универсальным, хотя и «работает» с широким кругом задач. Существует масса примеров когда указанный метод не позволяет вычислить тот или иной предел или же его применение требует очень больших вычислительных затрат, в то время как другие методы позволяют достаточно легко решить поставленную задачу. Более того, очень часто самым удачным способом раскрытия неопределенностей при вычислении пределов является комбинация (если это возможно, конечно) указанного метода Бернулли-Лопиталя с выделением главной части бесконечно малой или бесконечно большой функций или заменой их эквивалентными более простыми функциями.

Поэтому не менее важно, наряду с правилом Бернулли-Лопиталя, научить студентов и другим эффективным методам вычисления пределов. В данной работе рассматривается применение аппарата бесконечно малых функций к вычислению пределов. К сожалению, данному методу вычисления пределов и раньше уделялось не очень много времени, а сейчас этого времени еще меньше. И это притом, что он позволяет во многих случаях вычислять пределы чуть ли не устно. Даже в ставших уже классическими задачниках под редакцией А.В. Ефимова [5] или Б.П. Демидовича [6] приводятся примеры на правило Бернулли-Лопиталя, которые с использованием эквивалентных бесконечно малых функций вычисляются просто устно, т.е. применение указанного в этих задачниках правила в данных примерах просто не рационально. Что же говорить о студентах, которые пытаются использовать это правило чуть ли не в каждом пределе, не задумываясь о рациональности своих вычислений. Похожая ситуация наблюдается и за рубежом: на сайте вопросов и ответов математической тематики <https://math.stackexchange.com/>, основными посетителями которого являются жители зарубежных стран, меткой «limits» (т.е. предел) помечено 33644 вопроса, однако лишь 269 из них содержат слово «equivalence» (т.е. относятся к использованию эквивалентных бесконечно малых функций).

Прежде чем перейти к рассмотрению различных примеров, приведем некоторые известные [2-4,7] определения и теоремы, которые нам потребуются в дальнейшем.

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, если при данном стремлении аргумента предел функции равен нулю, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или просто бесконечно малыми и обычно обозначают буквами греческого алфавита $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.д.

В следующих определениях предполагается, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$, отличные от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a .

Определение 2. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow a$, что записывают $\alpha(x) = O(\beta(x))$, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Определение 3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \rightarrow a$, что обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$, если предел их отношения при $x \rightarrow a$ равен

$$\text{единице, т.е. } \alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Заметим, что свойство эквивалентности б.м. функций симметрично и транзитивно, т.е. $\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$ и $(\alpha(x) \sim \beta(x)) \wedge (\beta(x) \sim \gamma(x)) \Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x)$.

Определение 4. Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$, что записывают $\alpha(x) = o(\beta(x))$, если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

В этом случае так же говорят, что функция $\beta(x)$ является бесконечно малой более низкого порядка малости по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$. При этом (как и в случае определения 4) слово «малости» обычно опускают.

Определение 5. Функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой k -го порядка малости относительно $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$, если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k > 0$. При этом число k называют порядком малости бесконечно малой функции $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$.

Определение 6. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми бесконечно малыми при $x \rightarrow a$, если $\nexists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, т.е. не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения.

Теорема 1. Сумма конечного числа функций, бесконечно малых при $x \rightarrow a$, есть функция бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой при $x \rightarrow a$ функции и функции, ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки a , есть функция бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теорема 3. Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $f(x)$ - некоторая функция, определенная в проколотой окрестности точки a . Тогда, если существует предел при $x \rightarrow a$ произведения $\alpha(x)f(x)$ или частного $\alpha(x)/f(x)$, то данный предел не изменится, если в нем заменить функцию $\alpha(x)$ на $\beta(x)$.

Теорема 4. Сумма конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций различного порядка эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Теорема 5. Если бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными при $x \rightarrow a$, а функция $x(t)$ в некоторой проколотой окрестности точки τ отлична от a и при $t \rightarrow \tau$ стремится к a , то сложные функции $\alpha(x(t))$ и $\beta(x(t))$ эквивалентны при $t \rightarrow \tau$.

В завершении теоретической части приведем традиционно даваемую студентам таблицу основных эквивалентных бесконечно малых функций. Данная таблица при вычислении пределов так же важна, как таблица умножения. Использование данной таблицы, совместно с теоремами об эквивалентных бесконечно малых, дает нам эффективное средство для вычисления пределов.

Таблица 1. Основные эквивалентные бесконечно малые функции

при $x \rightarrow 0$	
$\sin(x) \sim x$	$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg}(x) \sim x$	$\log_b(1+x) \sim \frac{x}{\ln(b)}$
$\arcsin(x) \sim x$	$b^x - 1 \sim x \ln(b)$
$\operatorname{arctg}(x) \sim x$	$(1+x)^p - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} px, \text{ при } p \in R$

Рассмотрим теперь различные примеры, иллюстрирующие применение аппарата бесконечно малых функций к вычислению пределов.

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin(x)}$.

В данном примере имеем неопределенность вида $[0/0]$. Приведем сначала решение, базирующееся на первом замечательном пределе и теореме о замене переменной.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin(x)} = \left| \begin{array}{l} \text{замена: } \arcsin(x)=t \\ x=\sin(t) \\ \text{при } x \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = 5 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 5.$$

Рассмотрим решение данного предела при помощи правила Бернулли-Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin(x)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } (5x)' = 5, \\ (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 5.$$

Приведем теперь решение, базирующееся на теореме 3 и приведенной таблице 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin(x)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5.$$

Несмотря на кажущуюся одинаковую трудоемкость вычислений, первый способ содержит неочевидную замену и, как показывает многолетняя практика, студенты самостоятельно не могут догадаться сделать подобную замену переменной. Второй и третий способы примерно равнозначны по трудоемкости, хотя второй и требует вычисления производных. Использование же эквивалентных бесконечно малых, в данном случае, не требует проведения никаких дополнительных вычислений.

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\arcsin(x)}$.

В данном примере имеем неопределенность вида $[0/0]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\arcsin(x)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

На практике, конечно же, обе замены на эквивалентные бесконечно малые функции делают одновременно, что позволяет вычислить данный предел фактически «в

одно действие». Использование замены переменной в данном примере крайне не рационально, поскольку для числителя и знаменателя требуются различные замены.

Теорема 5 позволяет переписать таблицу 1 в следующем более универсальном виде:

Таблица 2.

при $x \rightarrow a$ (предполагается, что $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $u(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a)	
$\sin(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x),$	$1 - \cos(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{u^2(x)}{2},$
$\operatorname{tg}(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x),$	$\log_b(1 + u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{u(x)}{\ln b},$
$\arcsin(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x),$	$b^{u(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x) \ln b,$
$\operatorname{arctg}(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x),$	$(1 + u(x))^p - 1 \underset{x \rightarrow a}{\sim} pu(x), \text{ при } p \in R.$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{e^{x^2} - 1}$.

Имеем неопределенность вида $[0 / 0]$. Используя таблицу 2 и теорему 3, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{e^{x^2} - 1} &= \left| \begin{array}{c} \text{т.к.} \\ e^{x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos(x) - 1))}{x^2} = \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{т.к.} \\ \ln(1 + (\cos(x) - 1)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) - 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \left| \begin{array}{c} \text{т.к.} \\ \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2 / 2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 / 2}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что применение каких-либо других методов в данном примере затруднительно, а использование правила Бернулли-Лопиталья при вычислении данного предела потребовало бы его многократного применения.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin(x^2))}{\arcsin(3x)\sin(x/2)}$.

Для раскрытия неопределенности вида $[0 / 0]$, как и в примере 3, воспользуемся таблицей 2 и теоремой 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin(x^2))}{\arcsin(3x)\sin(x/2)} &= \left| \begin{array}{c} \text{т.к. } \sin(x/2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x/2, \\ \arcsin(3x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x, \\ \operatorname{arctg}(\sin(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x^2) \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x^2)}{3x^2} = \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{т.к.} \\ \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Применение при вычислении данного предела метода Бернулли-Лопиталья крайне не рационально, поскольку ведет к излишне громоздким вычислениям, в то

время как использование аппарата бесконечно малых функций позволяет легко вычислить данный предел.

Отметим, что использование теоремы 5 и таблицы 2 приводит нас именно к указанной в примере последовательности замены на эквивалентные бесконечно малые функции в случае с арктангенсом: $\arctg(\sin(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x^2)$ и затем $\sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$.

Учитывая транзитивность отношения эквивалентности на практике часто используют «итоговую» эквивалентность $\arctg(\sin(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. Однако при разборе данного при-

мера, для лучшего понимания студентами теоремы 5 и таблицы 2, рекомендуется использовать приведенную в примере последовательность замены на эквивалентные бесконечно малые функции.

Кроме того, следует обратить внимание на очень распространенную ошибку, допускаемую в подобных примерах. Зачастую студенты используют следующую последовательность замены на эквивалентные бесконечно малые:

$\arctg(\sin(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arctg(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. Несмотря на одинаковый итоговый ответ, данная по-

следовательность не имеет под собой никакого теоретического обоснования, поскольку в общем случае нет (и не может быть) теоремы о замене на эквивалентные бесконечно малые под знаком функции. Поэтому замену на эквивалентные бесконечно малые под знаком функции допускать нельзя, что демонстрирует следующий пример.

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Данный предел имеет неопределенность $[1^\infty]$. Посмотрим, к чему приведет замена на эквивалентную ($\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$) под знаком функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1)^{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Однако верный ответ в данном примере $e^{-\frac{1}{6}}$, который проще всего получить, используя второй замечательный предел и разложение в ряд Маклорена функции $\sin(x)$. Поэтому подобные замены на эквивалентные со стороны студентов допускать нельзя, даже если в конкретном примере ответ получился верный.

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$.

Для раскрытия имеющейся в данном примере неопределенности вида $[0/0]$, воспользуемся теоремами 2 и 3, а так же таблицей 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)} = \left| \begin{array}{c} \text{т.к.} \\ \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Отметим, что используя правило Бернулли-Лопиталья решить данный пример нельзя.

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin^2(x) \right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

Изначально в данном примере мы имеем дело с неопределенностью вида $[1^\infty]$. Поэтому сначала воспользуемся вторым замечательным пределом, а затем уже используем эквивалентные б.м. (таблица 2 и теорема 3).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin^2(x))^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin^2(x))^{\frac{\arcsin^2(x)}{\arcsin^2(x) \ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2(x)}{\ln(1+x^2)}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \\ \arcsin^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \end{array} \right| = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2}} = e. \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin(x^2)} - 1}$.

Воспользовавшись таблицей 2 и теоремой 3, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin(x^2)} - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } e^{x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2, \\ \sqrt{1 + \sin(x^2)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(x^2)}{2} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin(x^2)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2. \end{aligned}$$

Как и в случае с примером 4, с учетом транзитивности отношения эквивалентности, на практике допустимо использование сразу итоговой замены на эквивалентную бесконечно малую функцию, т.е. $\sqrt{1 + \sin(x^2)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Пример 9. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

В данном случае имеем неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Используя теорему 3 и таблицу 2, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

До сих пор все рассмотренные примеры, по большому счету, были пределом отношения двух бесконечно малых функций (поскольку произведение двух бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ есть функция бесконечно малая при $x \rightarrow a$). Однако на практике часто встречаются задачи, в которых требуется вычислить предел от отношения двух линейных комбинаций бесконечно малых функций. В некоторых ситуациях, как показывает следующий пример, достаточно разбить предел в линейную комбинацию пределов. Однако такой способ допустим лишь в некоторых случаях, и, в общем случае, его нельзя рекомендовать как универсальный для подобного типа пределов.

Пример 10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(6x) + \arcsin(\ln(1+2x))}{\sin(x)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(6x) + \arcsin(\ln(1+2x))}{\sin(x)} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(6x)}{\sin(x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\ln(1+2x))}{\sin(x)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \sin(x) \sim x, \\ \operatorname{tg}(6x) \sim 6x, \\ \arcsin(\ln(1+2x)) \sim \ln(1+2x) \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ (\ln(1+2x)) \sim 2x \end{array} \right| = \\ &= 6 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 6 + 2 = 8. \end{aligned}$$

Достаточно эффективным в подобных примерах, но отнюдь не универсальным методом, является использование теоремы 4, как показано в следующих примерах.

Пример 11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{5x^2 + 7x^3}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{5x^2 + 7x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ 5x^2 + 7x^3 \sim 5x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x) + \cos^2(x))}{5x^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot 3}{5x^2} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Пример 12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2) + \sin^2(x^{3/2}) - 4x^5}{\ln(1+5x^2) + 7x^4}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2) + \sin^2(x^{3/2}) - 4x^5}{\ln(1+5x^2) + 7x^4} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \ln(1+5x^2) + 7x^4 \sim \ln(1+5x^2), \\ \operatorname{tg}(x^2) + \sin^2(x^{3/2}) - 4x^5 \sim \operatorname{tg}(x^2) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{\ln(1+5x^2)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \operatorname{tg}(x^2) \sim x^2, \\ \ln(1+5x^2) \sim 5x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

К сожалению, использование теоремы 4 невозможно, если в линейной комбинации бесконечно малых функций присутствуют бесконечно малые одинакового порядка, что демонстрирует следующий пример.

Пример 13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\ln(1+5x^2)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\ln(1+5x^2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1+5x^2)} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \ln(1+(-x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (-x^2), \\ \ln(1+5x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{5x^2} = -\frac{1}{5}.$$

В данном примере нельзя сразу использовать замену на эквивалентные бесконечно малые в числителе, поскольку обе бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости и замена $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ и $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ привела бы к тождественно равной нулю функции в числителе. Однако, как мы видим, данный предел отнюдь не равен нулю. Это объясняется тем, что приведенные ранее теоремы ничего не говорят нам о том, чему эквивалентна линейная комбинация конечного числа бесконечно малых функций одинакового порядка малости.

Можно показать, что если $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} A(x-a)^k$ и $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} B(x-a)^k$, то $\alpha(x) + \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (A+B)(x-a)^k$ при $A+B \neq 0$. Если же $A+B=0$, то фактически мы получаем вычитание эквивалентных бесконечно малых (и попадаем под действие соответствующей теоремы) и тогда верно $\alpha(x) + \beta(x) = o(\alpha(x))$ и $\alpha(x) + \beta(x) = o(\beta(x))$. Используя данные утверждения, вычислим следующие примеры.

Пример 14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{\ln(1+x)}$.

В рассматриваемом пределе в числителе мы имеем дело с разностью двух эквивалентных бесконечно малых функций. Воспользовавшись тем, что их разность есть бесконечно малая более высокого порядка, мы можем вычислить данный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } \operatorname{tg}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \\ \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

На самом деле можно показать, что $\operatorname{tg}(x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$.

Пример 15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{\operatorname{tg}(x^2) + \arcsin^2 \frac{x}{2}}$.

В данном примере, в знаменателе мы имеем сумму двух бесконечно малых функций одинакового порядка. Поскольку в данном случае $A+B=1+\frac{1}{4} \neq 0$, мы можем заменить знаменатель на эквивалентную ему бесконечно малую.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{\operatorname{tg}(x^2) + \arcsin^2 \frac{x}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } 1 - \cos(4x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(4x)^2}{2} \\ \operatorname{tg}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \\ \arcsin^2 \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(x^2) + \arcsin^2 \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{5x^2}{4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(4x)^2}{2}}{\frac{5x^2}{4}} = \frac{32}{5}.$$

Пример 16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) + 2\sin(x) - \arcsin(x^2) + 3\sqrt{x}(e^x - 1)}{\operatorname{arctg}(\sin(\ln(1 + 2x))) + 3(e^{x^3} - 1)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) + 2\sin(x) - \arcsin(x^2) + 3\sqrt{x}(e^x - 1)}{\operatorname{arctg}(\sin(\ln(1 + 2x))) + 3(e^{x^3} - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \arcsin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2, \\ \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \sqrt{x}(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{3/2} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(x) + 2\sin(x) - \arcsin(x^2) + 3\sqrt{x}(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x \\ \left. \begin{array}{l} \operatorname{arctg}(\sin(\ln(1 + 2x))) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \\ \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(\ln(1 + 2x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \\ \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1 + 2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x, \\ (e^{x^3} - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{arctg}(\sin(\ln(1 + 2x))) + 3(e^{x^3} - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что использование правила Бернулли-Лопиталья в данном примере приведет к неоправданным вычислительным затратам и, скорее всего, закончится какой-либо вычислительной ошибкой.

Хочется так же отметить, что для эффективного использования различных методов вычисления пределов главное, чему нужно научиться - это видение типа величины, т.е. какая она: бесконечно малая или бесконечно большая, ограниченная и т.п. Если она бесконечно малая, то каков ее порядок (если его можно определить). Это не только существенно облегчит вычисление пределов, но и поможет в дальнейшем, при изучении функций, несобственных интегралов, рядов и д.р. Для приобретения требуемого навыка с бесконечно малыми величинами рекомендуется давать студентам больше устных заданий, связанных с определением эквивалентной бесконечно малой функции. К примеру, это могут быть задачи наподобие приведенных ниже:

$$x + 5x^{3/2} - x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ; 1 - \cos(\sqrt{x}) + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ; x \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ; \ln(1 + x\sqrt{\sin(x)}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ;$$

$$x(1 - \cos(x))^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ; \sqrt{1 + x^2} \arctg \sqrt[3]{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ; \ln(1 + x) - x \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ; \text{ и т.п.}$$

В завершении статьи отметим, что как уже отмечалось ранее, не существует универсального метода вычисления пределов, и аппарат бесконечно малых функций здесь не является исключением. К примеру, следующий предел не может быть вычислен с использованием эквивалентных бесконечно малых функций

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$, в то время как использование правила Бернулли-Лопиталя позволяет легко получить ответ.

Заключение

Вычисление пределов - тема практически необъятная и в рамках одной статьи невозможно рассмотреть все связанные с ней трудности, тонкости применения тех или иных методов. В данной статье было рассмотрено применение аппарата бесконечно малых функций к вычислению пределов. К сожалению, этому способу уделяют недостаточно внимания у нас и еще меньше за рубежом. А, как показали рассмотренные в статье примеры, зря: приведенные примеры показали эффективность и простоту использования рассмотренного метода на целом классе задач. В работе даны рекомендации по использованию аппарата бесконечно малых величин при вычислении пределов, отмечены характерные ошибки, допускаемые студентами при использовании данного метода.

В заключении хочется еще раз отметить, что универсального метода вычисления пределов нет и, зачастую, самые лучшие результаты дает комбинация различных методов. Поэтому студентов необходимо обучать разнообразным методам вычисления пределов, а не концентрировать внимание на каком-либо одном из них.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного аргумента. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 408 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 416 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982. – 616 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 718 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1993. – 478 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Астрель, 2003. – 472 с.
7. Морозова В.Д. Введение в анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 408 с.

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

Alexey V. Kavinov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Calculating limits using the infinitesimal function technique

Abstract. Calculating limits, either as an independent task or as an intermediate step of another task solution "haunts" students of technical Universities during the first two years. Therefore, learning to calculate limits is an urgent task in training students of technical specialties. The article deals with the use of the infinitesimal function technique for calculating limits. This technique is a fairly universal and effective way to solve this problem. Brief theoretical information necessary to justify the considered method is provided. Various examples are considered to illustrate the use of infinitesimal functions.

Key words: limit, infinitesimal function, asymptotic infinitesimal function, order of smallness.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ZOOM

Аннотация

В условиях дистанционного обучения в период карантина перед преподавателями и студентами встали такие актуальные проблемы организации и проведения лекций, семинаров и консультаций в режиме онлайн, как проблемы технического и программного обеспечения занятий, а также проблема содержания занятий: какой учебный материал вынести на самостоятельное обучение, а какой требует совместного обсуждения со студентами в условиях ограниченного времени он-лайн конференции. В данной работе рассмотрены методические особенности проведения одного из семинарских занятий по теме «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков» для студентов-первокурсников (курс «Интегралы и дифференциальные уравнения» МГТУ им. Н. Э. Баумана) с применением Zoom-конференции. Статья написана на основе опыта проведения дистанционных занятий в МГТУ им. Н. Э. Баумана и представляет интерес как для преподавателей, так и для студентов, изучающих указанную тему.

Ключевые слова

решение дифференциальных уравнений, работа студентов на семинаре, самостоятельная работа студентов, видеоконференции в сервисе Zoom

АВТОРЫ

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Введение

В условиях дистанционного обучения в университете традиционные виды занятий (лекция, семинар, консультация, лабораторная работа и др.), проводимые с привлечением видео-ресурсов, поставили множество проблем как перед преподавателями, так и перед студентами. Необходимо было организовать работу так, чтобы процесс обучения был эффективным. Нужно было в краткие сроки выбрать какой-либо видео-ресурс в интернете, учесть особенности работы с ним, помочь студентам в организации учебной работы в новых условиях.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим процессы подготовки и проведения одного из семинарских занятий по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения» для студентов-первокурсников МГТУ им. Н. Э. Баумана. Образовательная цель такого занятия-видеоконференции состоит в формировании и развитии навыков решения ОДУ высших порядков, а также в обеспечении глубокого понимания студентами основных теоретических понятий данной темы и способов решения дифференциальных уравнений.

В отличие от семинара, который проводится в университетской аудитории, семинар в режиме видеоконференции требует большей подготовительной работы как со стороны преподавателя, так и со стороны студентов.

Отметим, какая информация о предстоящем семинаре обязательно должна быть известна студенту.

1) Дата и время проведения семинара (например, согласно расписанию потока), информация для входа в Zoom-конференцию (её номер и пароль). Конечно, каждому студенту необходимо иметь учетную запись в сервисе под своими фамилией, именем и отчеством.

2) Тема семинара.

3) План семинара.

4) Перечень определений, понятий, теорем, алгоритмов решения задач, которые необходимо законспектировать, выучить для успешной работы на предстоящем семинаре.

5) Задачи, решение которых надо законспектировать заранее, или обдумать возможный ход решения.

6) Задачи для самостоятельного решения (текущее домашнее задание).

Среди множества интернет-ресурсов, позволяющих проводить видеоконференции, было решено остановиться на сервисе Zoom. Zoom представляет собой сервис для проведения видеоконференций, онлайн-встреч и организации дистанционного обучения школьников и студентов. Организовать встречу может любой пользователь, создавший учетную запись в данном сервисе. Бесплатная учетная запись, как правило, позволяет проводить видеоконференцию длительностью 30-40 минут. Существуют также платные тарифы с неограниченной продолжительностью конференций всех размеров и с количеством участников до 100 человек. Программу можно применять и для индивидуальных, и для групповых занятий. Преподаватели и студенты могут работать с помощью компьютера, планшета или телефона. К видеоконференции может подключиться студент, имеющий ссылку, или идентификатор конференции. Конечно, мероприятие следует запланировать заранее. Лучше использовать повторяющуюся ссылку, то есть для постоянных лекций и семинаров в определенное время (по расписанию студентов) создать постоянную ссылку для входа в конференцию. Информацию о содержании предстоящих лекции, семинара преподаватель, как правило, сообщает за 3-4 дня до занятия.

Укажем на основные преимущества сервиса Zoom:

1) Стабильность связи.

2) Возможность видео- и аудиосвязи с каждым участником. Организатор конференции (лектор или преподаватель, ведущий семинарские занятия) имеет возможность выключать и включать микрофон, а также выключать видео и запрашивать включение видео у всех участников. Можно также применить участие в конференции с правами только для её просмотра.

3) Возможность демонстрации экрана и её отмены при необходимости. Более того, можно демонстрировать только отдельные приложения, например, включить

демонстрацию браузера. В настройках можно разрешить участникам возможность демонстрировать экран, либо включить ограничения, чтобы делать это мог только преподаватель.

4) В платформу встроена интерактивная доска, наличие которой является очень важно при проведении занятий по математике.

5) Сервис имеет чат, в котором можно писать сообщения, передавать файлы всем или выбрать одного студента. Чат можно настроить на автоматическое сохранение или сохранять вручную при проведении конференции.

6) Zoom позволяет производить запись лекции или семинара как на компьютер, так и на Облако, при этом можно настроить автоматическое включение записи или поставить запись на паузу. [1]

Перечислим основные моменты организации и проведения семинара по теме «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков», который был одним из завершающих семинарских занятий по модулю «Дифференциальные уравнения» для студентов 1 курса Приборостроительного факультета МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Тема. «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков».

Цель семинара: обобщение знаний по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков», подготовка к рубежному контролю по модулю «Дифференциальные уравнения».

Определения, понятия, теоремы: дифференциальные уравнения высших порядков, линейные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, теорема Коши, характеристическое уравнение, решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, метод вариации произвольных постоянных. [2, 3]

План семинара.

- 1) Вопросы по решению текущего домашнего задания предыдущего занятия.
- 2) Решение задач.
- 3) Подведение итогов семинара. Обсуждение предстоящего текущего домашнего задания.

4) Вопросы студентов.

В ходе семинара в режиме видеоконференции были рассмотрены решения следующих уравнений.

1. Найти общее решение.

$$a) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^3},$$

Решение

Рассмотрим соответствующее однородное ДУ с постоянными коэффициентами

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 2k + 1 = 0$.

$$(k - 1)^2 = 0.$$

$$k_{1,2} = 1.$$

Тогда $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Применим метод Лагранжа, то есть будем искать решение в виде

$$y_{\text{общ}} = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot x e^x.$$

$$\text{Решим систему } \begin{cases} C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot x e^x = 0, \\ C_1'(x) \cdot (e^x)' + C_2'(x) \cdot (x e^x)' = \frac{e^x}{x^3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot xe^x = 0, \\ C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot (e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot x = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x) \cdot (1 + x) = \frac{1}{x^3}. \end{cases}$$

Получим, что $C_2'(x) = \frac{1}{x^3}$.

Тогда $C_2(x) = -\frac{1}{2x^2} + C_2$.

Аналогично, $C_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$C_1(x) = \frac{1}{x} + C_1$.

Особое внимание следует уделить размещению записей на доске, размеры которой ограничены. В процессе решения преподаватель отражает на доске только основные моменты хода решения уравнения. Способы решения системы (подстановка, сложение) следует только прокомментировать вслух. Следует обязательно записать на доске выражения для производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, самих функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, а также найденное общее решение дифференциального уравнения. Прежде, чем удалить записи с доски, обязательно предупредить об этом студентов и напомнить им о необходимости сохранить записи в письменном виде.

Таким образом, $y_{\text{общ}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{e^x}{2x}$.

Ответ: $y_{\text{общ}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{e^x}{2x}$.

2. $y'' \cos x + y' \sin x = \sin^2 x$.

Понизим порядок соответствующего приведенного уравнения:

$$\begin{cases} y' = z, \\ y'' = z'. \end{cases}$$

Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$z' + z \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Последнее уравнение можно решить как методом Бернулли ($z = uv$), так и методом вариации произвольной постоянной. Так как эти методы студенты изучали в предыдущей теме «Решение дифференциальных уравнений первого порядка», то далее в ходе семинара преподаватель организует работу студентов по решению уравнения тем или иным методом. Так, при решении методом Бернулли на доске следует обязательно отразить на доске найденные функции

$$v = \cos x, u = \lg x - x + C_1.$$

Тогда, $z = C_1 \cos x + \sin x - x \cos x$.

И, окончательно, $y = C_1 \sin x + C_2 - x \sin x$.

Обязательно следует подробно остановиться на том или ином моменте решения, если у студентов возникли какие-либо вопросы. Например, при вычислении неопределенного интеграла методом интегрирования по частям:

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ответ: $y = C_1 \sin x + C_2 - x \sin x$.

3. Решить уравнение

$$yy' - 2yy'(\ln y) = (y')^2,$$

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Данное уравнение не содержит независимой переменной. Понизим порядок уравнения с помощью замены

$$y' = p, y'' = pp'.$$

Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

$$ypp' - 2yp(\ln y) = (y')^2.$$

Отметим, что при $p = 0$, $y = C$, где C - постоянная величина, является решением данного уравнения.

Если $p \neq 0$, то при делении на данную величину получим уравнение:

$$p' - \frac{p}{y} = 2 \ln y.$$

Если применить метод Бернулли, то получим, что $v = y$, $u = \ln^2 y + C_1$.

Тогда, $p = y(\ln^2 y + C_1)$, то есть $y' = y(\ln^2 y + C_1)$.

Учтем начальные условия, получим $C_1 = 1$.

Таким образом, $\frac{dy}{y(\ln^2 y + 1)} = dx$, $\arctg(\ln y) = x + C_2$.

Учитывая начальные условия, получим, что $C_2 = 0$.

Значит, $\arctg(\ln y) = x$, $\ln y = \tg x$.

Ответ: $y = C$, $\ln y = \tg x$.

Для решения дифференциального уравнения в режиме видео-семинара с кратким изложением основных моментов на виртуальной доске и устными комментариями преподавателя или кого-либо из студентов требовалось 20-25 минут.

Задачи для самостоятельного решения.

1) $xy'' - 2y' = 3x(y')^2$.

2) $xy'' - y' = 4x^2 \sin 2x$.

3) $yy'' = (y')^2 + y^2 y'$, $\begin{cases} y(5) = 1 \\ y'(5) = 1 \end{cases}$

4) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$.

5) $y'' + 4y = \ctg 2x$.

6) $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$. [4]

В завершение занятия преподаватель подводит итоги семинара: что сделано, как работали те или иные студенты, дает указания по выполнению текущего домашнего задания, отвечает на вопросы студентов.

Заключение

Проведение занятий (лекций, семинаров, лабораторных работ) по любой дисциплине, в частности по математике, в режиме видеоконференции требует большой подготовительной работы не только от преподавателя, но и от обучающихся. Подготовительная работа подразумевает как методическую составляющую, так и материально-техническую подготовку - цифровая техника, программное обеспечение, интернет-сервисы, обеспечивающие возможность видео-взаимодействия преподавателя и студента. Только сочетание традиционных методов обучения с возможностями современных цифровых ресурсов обеспечивает качественное усвоение новых знаний, формирование и развитие каких-либо учебных навыков.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Платформа Zoom Cloud Meetings <https://zoomapp.ru/> Дата обращения 10.07.2020 г.
2. Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. - 4-е изд., исправл. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. - 352 с.
3. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб. Издательство «Лань». 2002. 224 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. М. Изд. «Мир и Образование». 2002. 416 с.

Olga B. Vergazova,

Candidate of Philosophy, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

olga.aika@yandex.ru

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nail_khasanov@mail.ru

Methodological features of the organization of students' work during seminars using Zoom

Abstract. In the conditions of distance learning during the quarantine period, teachers and students faced such urgent problems of organizing and conducting lectures, seminars and consultations online, as the problems of technical and software support, as well as the problem of the content of classes: what educational material should be left for independent learning, and what requires joint discussion with students in a limited time of online conference. This article discusses the methodological features of conducting one of the seminars on the topic "Solving ordinary differential equations of higher orders" for first-year students (the course "Integrals and differential equations" of Bauman Moscow State Technical University) with the use of Zoom-conference. The article is based on the experience of conducting distance classes at Bauman Moscow State Technical University and may be interesting to both teachers and students studying this topic.
Key words: solving differential equations, students' work at a seminar, students' independent work, video conferences in Zoom service.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ХАОС И СИНХРОНИЗАЦИЮ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ НА ПРИМЕРЕ ОДНОМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Аннотация

В статье на элементарном уровне, доступном для школьников старших классов и студентов нематематических (гуманитарных) специальностей, рассматриваются такие понятия современной математики, как хаос в детерминированных системах и синхронизация. Работа предназначена для первоначального самостоятельного знакомства с новой бурно развивающейся математической дисциплиной - хаотической динамикой.

Ключевые слова

одномерное отображение, траектория, неподвижная точка, хаос, показатели Ляпунова, синхронизация

АВТОРЫ

Грибов Александр Федорович,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

alexandr-gribov@list.ru

Безверхний Николай Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

nbezv@mail.ru

Краснов Игорь Константинович,

кандидат технических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

igorkrsnv@yandex.ru

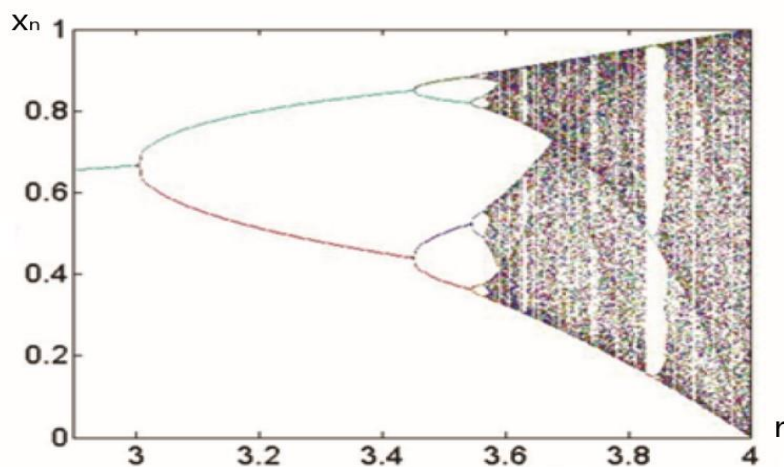
Введение

Теория хаоса говорит нам о том, что в детерминированной системе параметры и начальные условия которой не являются случайными, часто невозможно предсказать ее поведение. Это является следствием чувствительности к начальным данным и ошибкам округления, что Эдвард Лоренц назвал "Эффектом бабочки" в своей статье "Предсказание: взмах крыльев бабочки в Бразилии вызовет торнадо в штате Техас". Под взмахом крыльев подразумеваются небольшие изменения в начальных условиях, которые могут привести к непредсказуемым последствиям. Основоположителем теории считают французского математика, физика и философа Анри Пуанкаре. Русские математики Колмогоров А.Н., Арнольд В.И., Аносов Д.В. и многие другие внесли значимый вклад в развитие теории хаоса. Андронов А.А. еще до появления понятия детерминированный хаос развил качественные методы исследования динамических систем [1]. Системы, где возможен детерминированный хаос, являются более типичными, чем полностью предсказуемые системы и рассматриваются в физике, экономике, медицине и других областях науки и техники.

Интерес к проблемам синхронизации возник еще 350 лет назад, когда К. Гюйгенс заметил, что двое маятниковых часов, подвешенных на деревянной балке, самопроизвольно синхронизируются. В 2017 году российские математики разгадали проблему «танцующего моста», используя различные модели синхронизации [2].

В этой статье хаос и синхронизация рассматриваются на примере одномерного дискретного отображения, которое, несмотря на простоту, показывает многие общие свойства хаотических систем.

В работе «Элементарное введение в теорию одномерных дискретных динамических систем» [3] на примере простых нелинейных отображений показано, что такие динамические системы не обязательно приводят к простому поведению и возможно возникновение хаоса в детерминированных системах. Введено понятие траектории, неподвижной точки и ее устойчивости. Рассмотрены траектории различных периодов. На примере отображений «зуб пилы» и «тент» [4] показана чувствительность поведения системы к заданию начальных условий. Подробно, с помощью компьютерных вычислений, рассмотрено логистическое отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, динамика которого была исследована Мэем [5], Фейгенбаумом [6], Лихтенбергом, Либерманом [4] и другими авторами. Численным моделированием получен каскад бифуркаций удвоения периода. Построена бифуркационная диаграмма:



Анализ полученной бифуркационной диаграммы

Для объяснения полученных результатов, проведем анализ логистического уравнения. График логистической функции при различных значениях r показан на рис. 1.

Найдем все неподвижные точки и определим их устойчивость. Как уже отмечалось, такие точки удовлетворяют уравнению $x^* = f(x^*) = 2x^*(1 - x^*)$. Следовательно, либо $x^* = 0$ либо $x^* = 1 - \frac{1}{r}$. Вторая неподвижная точка при допустимых значениях r существует только при $r \geq 1$. Их устойчивость зависит от мультипликатора $f'(x^*) = r - 2rx^*$. Ранее было отмечено, что нуль устойчив при $r < 1$ и неустойчив при $r > 1$. Для другой неподвижной точки $f'(x^*) = 2 - r$. Следовательно, неподвижная точка $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ устойчива при $1 < r < 3$ и неустойчива при $r > 3$.

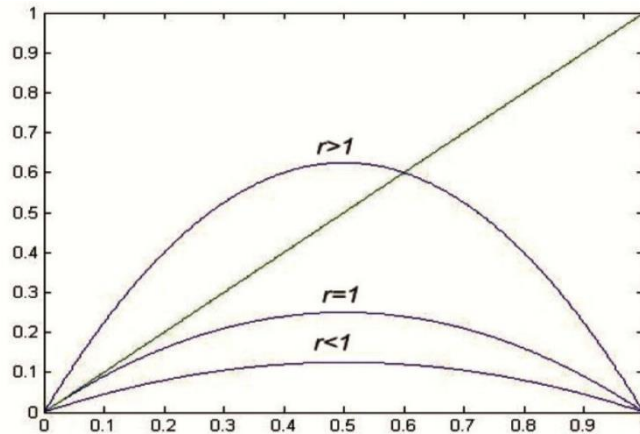


Рис. 1. График логистической функции при различных r

Покажем, что при $r > 3$ логистическое отображение имеет двукратные циклы. Двукратный цикл существует тогда и только тогда, когда существуют x_1 и x_2 такие, что $x_2 = rx_1(1 - x_1)$; $x_1 = rx_2(1 - x_2)$. Выразим $x_1 + x_2 = \frac{1+r}{r}$ и $x_1x_2 = \frac{1+r}{r^2}$ и, воспользовавшись теоремой Виета, запишем квадратное уравнение для нахождения x_1 и x_2 . $rx^2 - x(1+r) + \left(1 + \frac{1}{r}\right) = 0$. Его дискриминант $D = (r-3)(r+1)$. Т.о. получаем пару корней $x = \frac{1+r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$, которые действительные при $r > 3$. При $r = 3$ корни совпадают и равны $x^* = 1 - \frac{1}{r} = 2/3$. Это показывает, что двукратный цикл непрерывно рождается от точки x^* . При $r < 3$ подкоренное выражение становится отрицательным, что указывает на отсутствие двукратного цикла при этих значениях r . Найдем значения параметра r , при которых двукратный цикл устойчив. Он будет устойчив, если x_1 и x_2 устойчивые точки для $f^2(x)$. Для проверки устойчивости вычислим мультипликатор $\frac{d}{dx}(f(f(x)))_{x=x_1} = f'(f(x_1)) \cdot f'(x_1) = f'(f(x_2)) \cdot f'(x_2)$.

После дифференцирования и подстановки x_1 и x_2 получаем $\lambda = 4 + 2r - r^2$. Таким образом, двукратный цикл линейно устойчив для $|4 + 2r - r^2| < 1$, т.е. $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$, что совпадает с ранее численно найденным значением. Диаграммы Ламерея и графики $f^2(x)$ (рис. 2.) иллюстрируют бифуркацию перехода к двукратному циклу

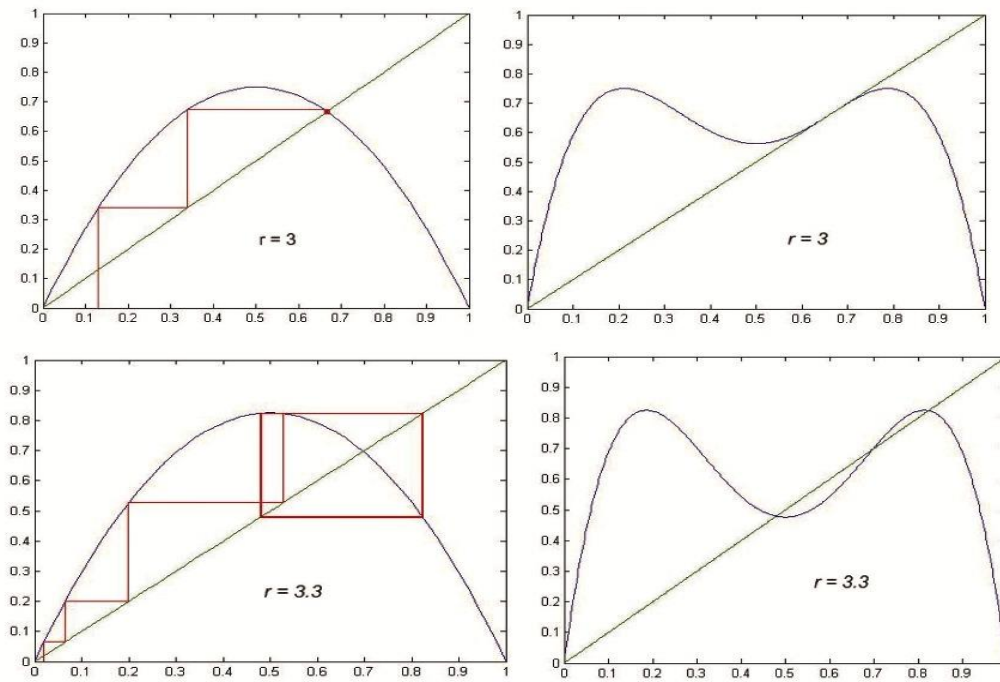


Рис. 2. Переход к двукратному циклу

Дальнейший анализ возникновения и устойчивости циклов более высокой кратности становится очень громоздким, хотя отдельные точные результаты все же можно получить.

Следует обратить внимание на окна периодичности на бифуркационной диаграмме. Особенно заметно окно периода три, которое существует в диапазоне $3,8284 < r < 3,8415$. Вспомним, что любая точка, принадлежащая трехкратному циклу, повторяется каждые три итерации и является неподвижной точкой уравнения $x = f^3(x)$. Так как $f^3(x)$ является многочленом восьмой степени, аналитическое исследование его представляется затруднительным. Однако, график функции $f^3(x)$ позволяет прояснить ситуацию. Внутри окна при $r = 3,835$ график имеет вид рис.3

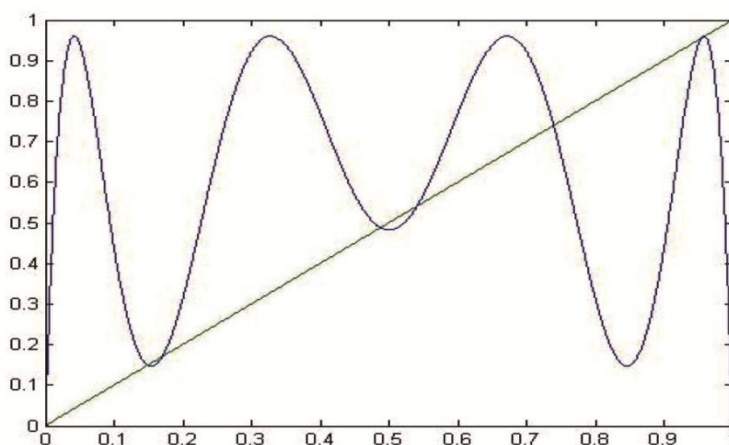


Рис. 3. Неподвижные точки $f^3(x)$ логистического отображения при $r=3.835$

Есть восемь неподвижных точек, две из которых (одна из них ноль) являются точками периода один. Для них $x = f(x)$. Три точки, в которых наклон касательных по модулю меньше 1, соответствуют устойчивому 3-х кратному циклу. Три других - неустойчивому 3-х кратному циклу. При уменьшении r в сторону начала возникновения

окна, при $r = 3,8$ кривая уже будет иметь только два пересечения, отвечающие неустойчивым однократным циклам рис. 4.

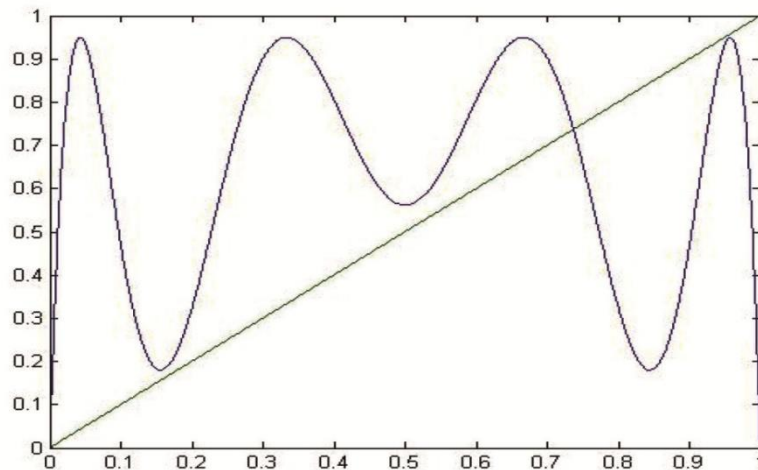


Рис. 4. Исчезновение трехкратного цикла при $r=3.8$

В некотором промежуточном значении параметра r , график $f^3(x)$ касается биссектрисы в двух точках рис. 5. Этот момент определяет начало появления окна периодичности три. Устойчивый и неустойчивые циклы периода три сливаются и исчезают. Такая бифуркация носит название касательной или тангенциальной. Можно показать, что значение r при этой бифуркации есть $1 + \sqrt{8} \approx 3,8284$

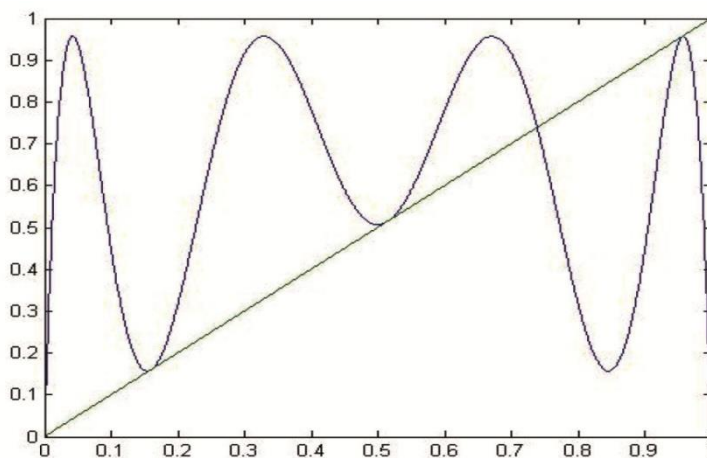


Рис. 5. Появление окна периодичности три при $r=3.8284$

Появление окон периодичности также подчиняется определенному закону. Метрополис с соавторами показали, что порядок, в котором появляются устойчивые периодические решения, для унимодального отображения является независимым от его вида (при некоторых ограничениях, указанных в статье). Если ограничиться периодом 6, то это $1, 2, 2 \times 2, 6, 5, 3, 2 \times 3, 5, 6, 4, 6, 5, 6$.

Начало этой последовательности это начало сценария удвоения периода (показаны только периоды меньше шести). Дальнейший порядок появления окон периодичности - узких интервалов параметра r , в которых наблюдаются периодические движения, полностью соответствует знаменитому порядку А. Шарковского.

$$\begin{aligned}
 &3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow 2n-1 \rightarrow 2n+1 \rightarrow \dots \\
 &\rightarrow 2 \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot 5 \rightarrow 2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (2n-1) \rightarrow 2 \cdot (2n+1) \rightarrow \dots \\
 &\rightarrow 2^2 \cdot 3 \rightarrow 2^2 \cdot 5 \rightarrow 2^2 \cdot 7 \rightarrow \dots \rightarrow 2^2 \cdot (2n-1) \rightarrow 2^2 \cdot (2n+1) \rightarrow \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

.....

статью известные американские ученые Ли и Иорк «Период 3 влечет хаос».

Показатель Ляпунова

Зрх, x_1 – начальная точка. Возьмем точку $x_1 + \varepsilon$, близкую к x_1 .

В линейном приближении получим:

$$\begin{aligned} f(x_1 + \varepsilon_1) &= f(x_1) + f'(x_1)\varepsilon_1 = x_2 + \varepsilon_2, & \text{где } \varepsilon_2 &= f'(x_1)\varepsilon_1 \\ f'(x_2 + \varepsilon_2) &= f'(x_2) + f''(x_2)\varepsilon_2 = x_3 + \varepsilon_3, & \text{где } \varepsilon_3 &= f''(x_2)\varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{T. o.} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = f'(x_1)\varepsilon_1, \varepsilon_3 = f'(x_2)\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k = f'(x_{k-1})\varepsilon_{k-1} \quad \Rightarrow \\ \varepsilon_n = f'(x_{n-1}) * f'(x_{n-2}) * \dots * f'(x_1)\varepsilon_1 \end{array}$$

асимптотически возмущение ведет себя по закону: $\varepsilon_n = \varepsilon_1 * e^{\lambda n}$

Траектории переходят в иное состояние. Происходит бифуркация.

$$\Rightarrow \begin{aligned} f'(x_{n-1}) * f'(x_{n-2}) * \dots * f'(x_1) \varepsilon_1 &= \varepsilon_1 * e^{\lambda N} \Rightarrow \lambda N = \sum_{i=1}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \end{aligned}$$

пределу, мы получим: $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_0)|$, λ - показатель Ляпунова.

заны два окна. В верхнем окне представлена бифуркационная диаграмма, на нижнем - показатель Ляпунова. Значения параметра соответственно находятся ровно друг под другом, чтобы было наглядно видно, что при удвоении периода показатель Ляпунова проходит через 0.

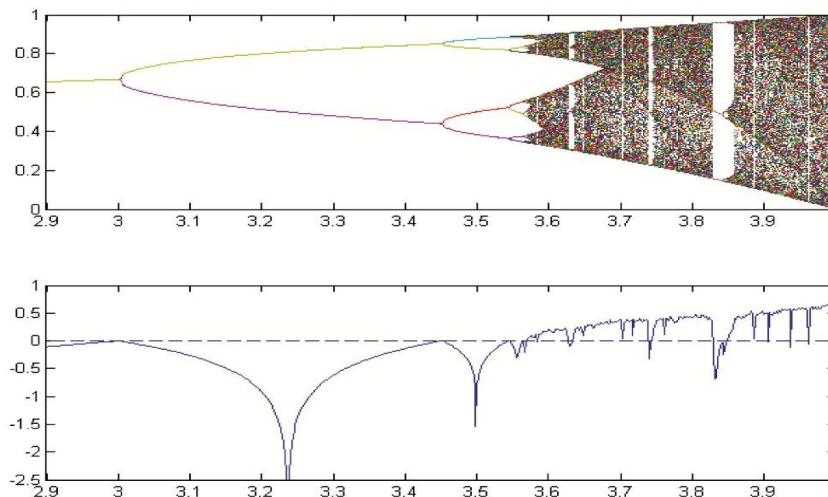


Рис. 6. Показатели Ляпунова логистического отображения

Как видно, ляпуновский показатель остается отрицательным вплоть до значения 3.57. То есть после данного значения параметра траектория впервые становится неустойчивой. Стоит обратить внимание на сильное падение показателя в связи с “Окном Периодичности”, 3-циклом.

Бифуркационное дерево в системе с шумом

Дискретные отображения являются удобными моделями, иллюстрирующими влияние шума на динамические системы. Так как в реальных системах всегда присутствует шум, представляется интересным, как он влияет, например, на бифуркации удвоения периода.

На рис. 7 показано бифуркационное дерево в системе с шумом. Влияние шума вида $x_{n+1} = f(x_n, r) + \varepsilon \xi_n$, где $f(x, r) = rx(1 - x)$, ε - амплитуда шума, а ξ_n - случайная последовательность, распределенная равномерно на $[0, 1]$.

На первой картинке представлена система без шума, то есть $x = f(x, r)$, на второй $x = f(x, r) + \varepsilon \xi_n$, на третий $x = f(x, r) + \varepsilon \xi_n \gamma$, на четвертой соответственно $x = f(x, r) + \varepsilon \xi_n \gamma^2$. Здесь $\varepsilon = 0,0001$, $\gamma = 6.619036513$ - универсальная константа, показывающая во сколько раз надо уменьшить шум, чтобы можно было наблюдать каждый новый уровень удвоения периода. Как видно, чем больше шум, тем более “размытым” становится дерево. Высшие бифуркации удвоения становятся невозможно различить. Каким бы малым не был шум, он все равно “размывает” ветви бифуркационного дерева. Это позволяет говорить о том, что в реальных системах всегда существует конечное число удвоения периодов. Также, видно, что при каждом умножении на γ пропадает одно удвоение периода: на второй картинке пропадает 8-кратный цикл, на третий пропадает 4-кратный, а на последней уже нет и 2-кратного цикла.

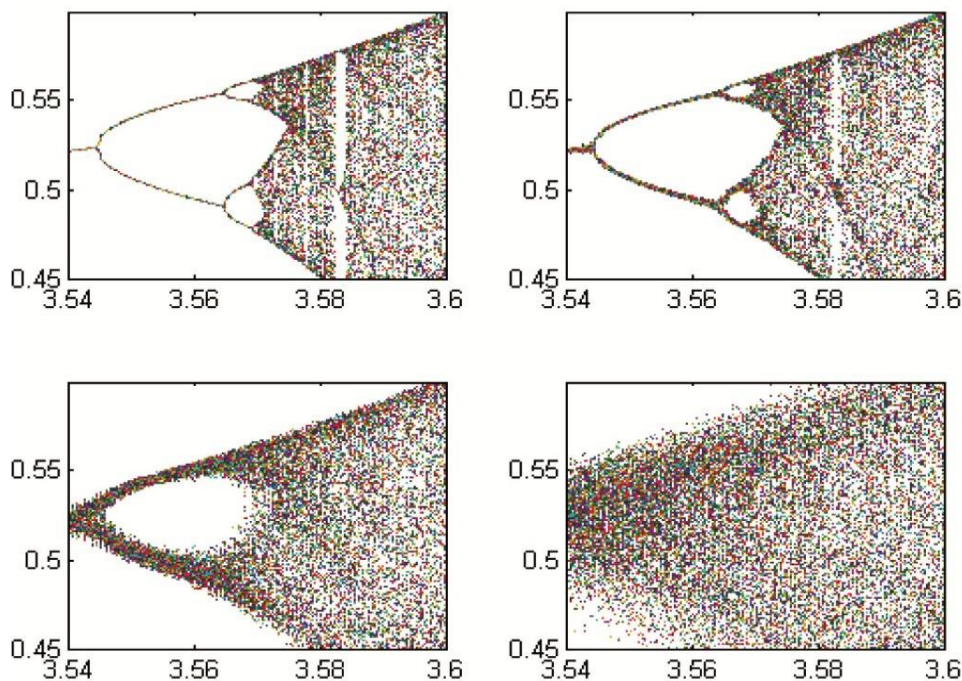


Рис. 7. Влияние шума на бифуркационную диаграмму логистического отображения

На рис. 8 иллюстрируется зависимость показателя Ляпунова от интенсивности шума для $x = f(x, r)$ и $x = f(x, r) + \varepsilon \xi_n$.

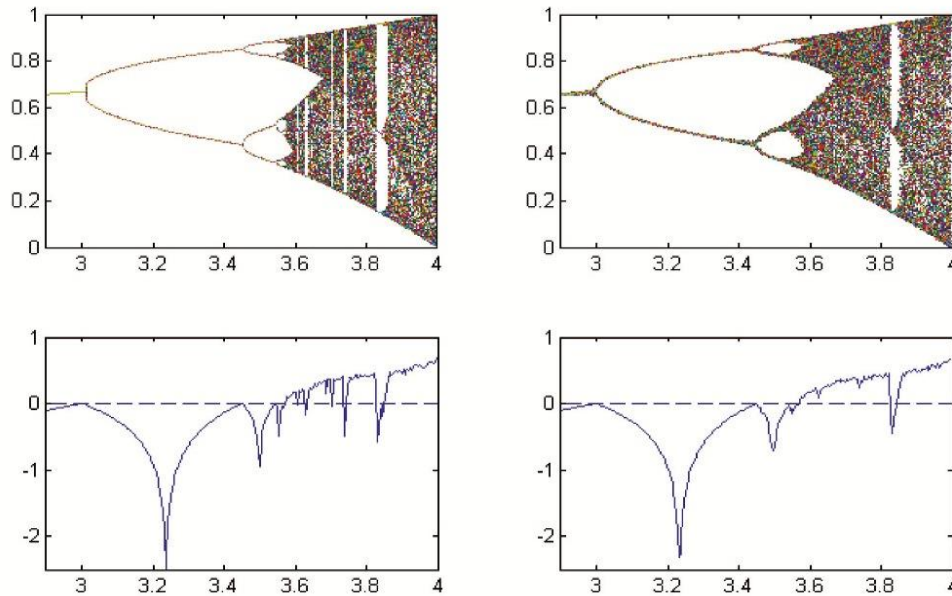


Рис. 8. Влияние шума на показатели Ляпунова

Результаты моделирования для отображения вида $x = 1 - rx^2$ при $\varepsilon = 0,002$, $\gamma = 6.619036513$ представлены на рис. 9

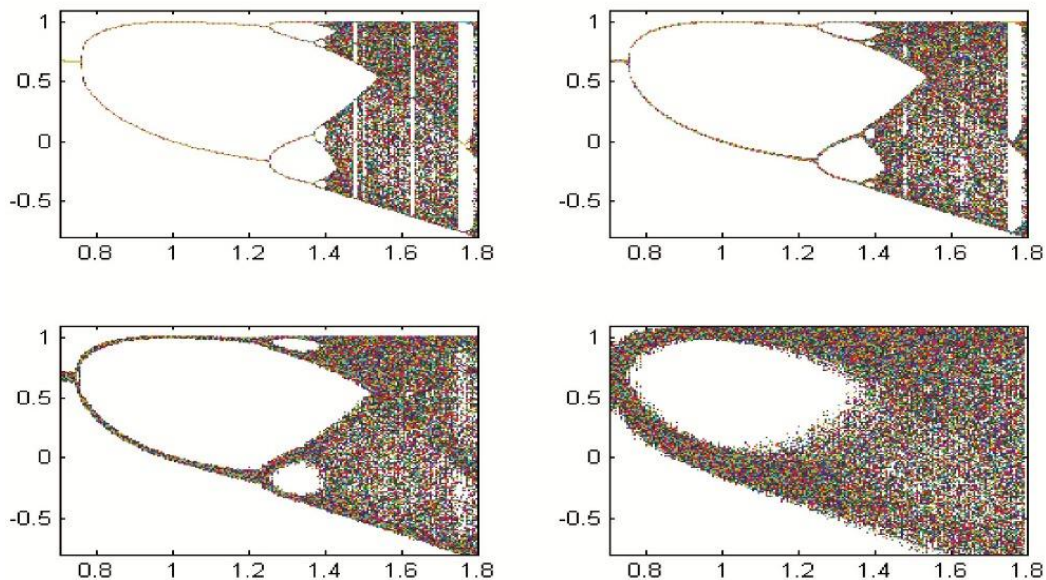


Рис. 9. Влияние шума на бифуркационную диаграмму квадратичного отображения

Синхронизация хаотических систем внешним шумовым воздействием

Рассмотрим две идентичные системы, на которые воздействует один и тот же шум. При этом движение начинается с разных начальных условий.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \xi_n \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \xi_n\end{aligned}$$

Под синхронизацией в данном случае мы будем понимать то, что системы начинают следовать за вынуждающим шумом и “забывают” свои начальные условия. В одной системе переход к синхронизации не виден, однако для двух систем их состояния становятся идентичными. ($x_n = y_n$)

Синхронное поведение можно наблюдать в самых различных технических системах (часы, лазеры, электронные генераторы и др.), в биологии (стрекозующие сверчки, нейроны), обществе, медицине и т.д.

Первым, кто описал явление синхронизации, был голландский ученый Х. Гюйгенс. Он заметил, что колебания двух маятниковых часов на общей опоре абсолютно совпадают.

Под синхронизацией обычно понимают подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет некоторого небольшого (слабого) взаимодействия между ними.

В дальнейшем будем рассматривать явление синхронизации для двух отображений: логистического и экспоненциального.

Систему логистических уравнений $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = f(x_n)$ запишем в виде

$$x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(x_n))$$

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(y_n))$$

ξ_n - случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с плотностью вероятности $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma^2})$, где $\xi_0 = 0.5$; $\sigma^2 = (0.12)^2$ - математическое ожидание и дисперсия соответственно. Или равномерному распределению с $p(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0; 1) \\ 0 & x \notin (0; 1) \end{cases}$

ε - параметр, определяющий интенсивность воздействия стохастического сигнала на систему. Способ введения шума $\varepsilon(f(\xi_n) - f(x_n))$ позволяет обеспечить нахождение фазовой траектории в диапазоне $[0; 1]$. Значение параметра r возьмем равным 3,75, что соответствует хаотическому режиму.

Для экспоненциального отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f(x_n) = \exp(-\left(\frac{x-0.5}{\omega}\right)^2)$,

$\omega = 0.3$ - управляющий параметр, ξ_n - случайная величина с нормальным законом распределения с $\xi_0 = 0$, $\sigma = 1$ систему отображений запишем в виде

$$x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon\xi_n$$

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon\xi_n$$

Бифуркационная диаграмма для экспоненциального отображения в системе с шумом изображена на рис. 10

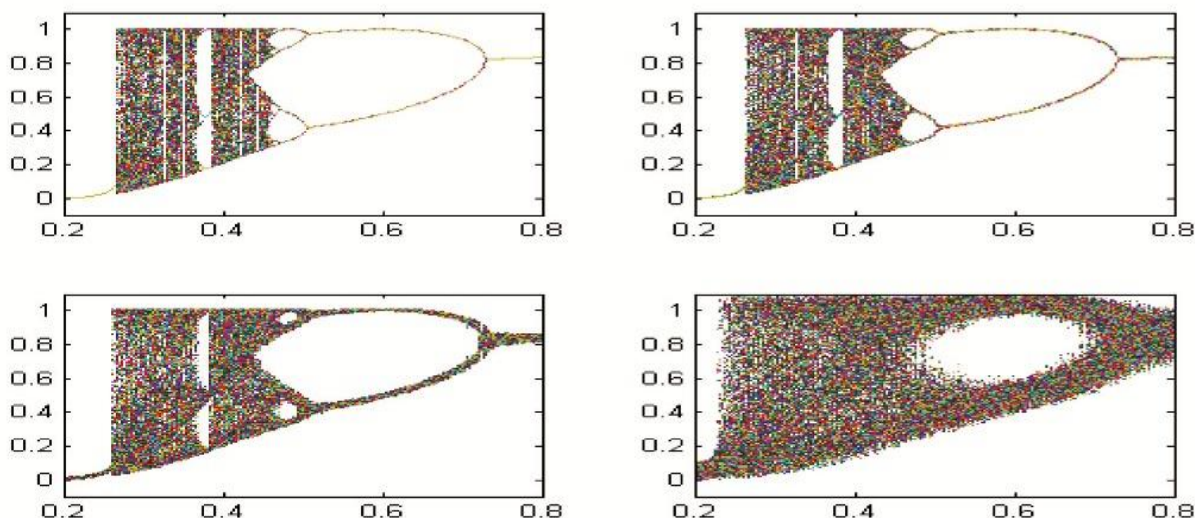


Рис. 10. Влияние шума на бифуркационную диаграмму экспоненциального отображения

Критические значения параметра ε будем определять путем сравнения состояний систем на плоскости (x, y) . Если точки, соответствующие состояниям систем, ложатся на диагональ, то это свидетельствует о наличии синхронного поведения в системе.

Некоторые результаты численного эксперимента представлены на рис. 11, рис. 12 и рис. 13.

$$f(x) = rx(1-x) \quad \xi_n - \text{нормальное распределение}$$

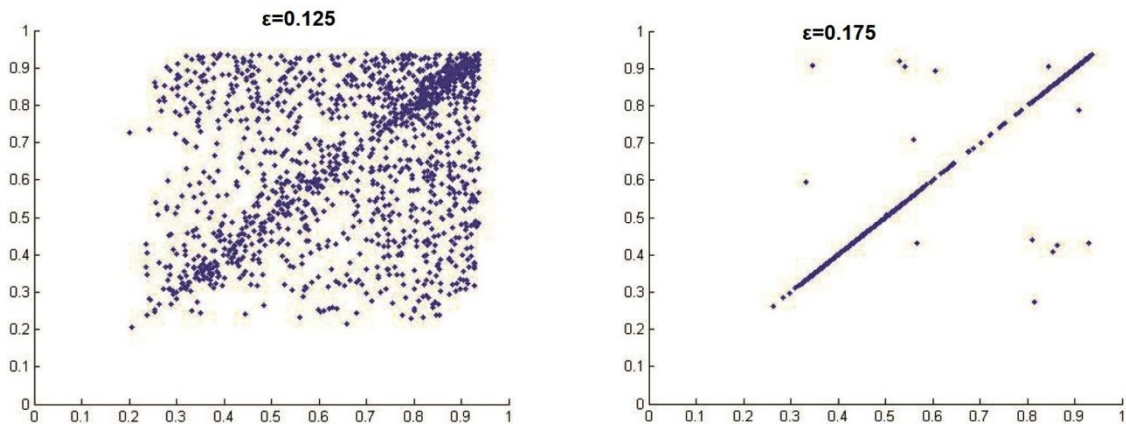


Рис. 11. Синхронизация логистического отображения шумом с нормальным распределением

$$f(x) = rx(1-x) \quad \xi_n - \text{равномерное распределение}$$

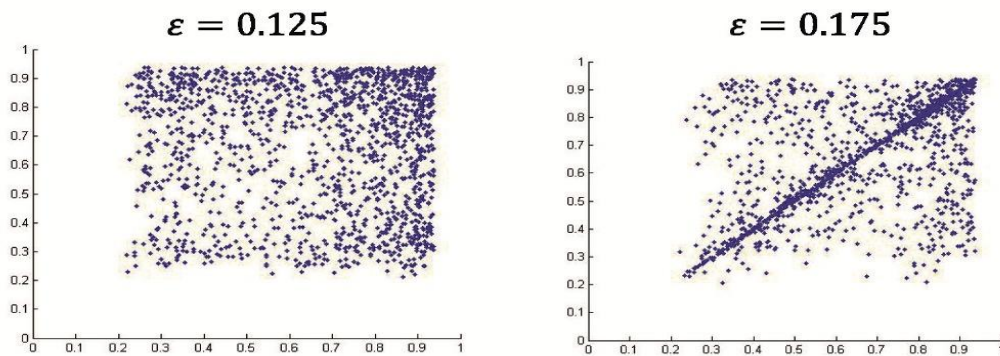


Рис. 12. Синхронизация логистического отображения шумом с нормальным распределением при различных уровнях шума

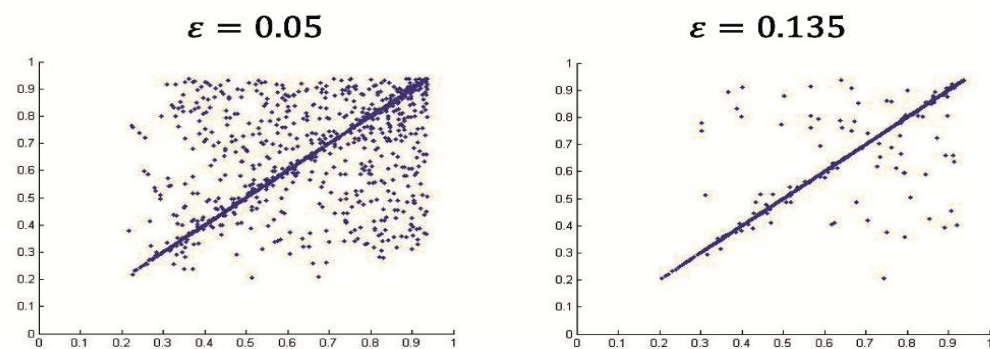


Рис. 13. Синхронизация логистического отображения шумом с равномерным распределением при различных уровнях шума

Как видно из опыта, полная синхронизация начинает прослеживаться в промежутке $\varepsilon \in (1.55; 1.65)$.

Заключение

В работе исследовано поведение одномерных непрерывных отображений отрезка в себя. Численным моделированием получен каскад бифуркаций удвоения периода, построена бифуркационная диаграмма для логистического отображения. Проведен теоретический анализ этого отображения. Исследовано влияние шума на каскад бифуркаций удвоения периода.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 926с.
2. Igor Belykh, Russell Jeter, Vladimir Belykh. Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge. Science Advances. Vol.3. no 11. 2017
3. Грибов А.Ф., Краснов И.К. Элементарное введение в теорию одномерных дискретных динамических систем. Modern European Researches. – 2019. – №5. – С. 49–56.
4. Steven Strogatz, «Non-linear Dynamics and Chaos: With applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering», Perseus Books, 2000.
5. May R.M. Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. Nature 261, 459 (1976)
6. Фейгенбаум М. Универсальность и поведение нелинейных систем. – Успехи физ. Наук, 1983, с. 137-145.
7. Шарковский А.Н., Майстенко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Научная думка, 1986, 279с.

Alexander F. Gribov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

alexandr-gribov@list.ru

Nikolai V. Bezverkhny,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nbezv@mail.ru

Igor K. Krasnov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

igorkrsnv@yandex.ru

An elementary introduction to chaos and synchronization for schoolchildren on the example of a one-dimensional representation

Abstract. The article considers such concepts of modern mathematics as chaos in deterministic systems and synchronization at an elementary level, clear to high school students and students of non-mathematical (humanitarian) specialties. The work is intended for an initial independent familiarization with a new rapidly developing mathematical discipline - chaotic dynamics.

Key words: one-dimensional mapping, trajectory, fixed point, chaos, Lyapunov exponents, synchronization.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ВАРИАНТОВ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ: АВТОМАТИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ВХОДНЫХ ФАЙЛОВ И ИХ ОБРАБОТКА

Аннотация

Хорошо известно, что использование издательской системы LaTeX позволяет при формировании, например, билетов или вариантов контрольного мероприятия и ответов к ним не копировать каждый раз условия задач и ответы, а заменять их командами, которые их задают; сами же условия или ответы могут считываться из отдельного файла. Эти приёмы широко используются. Однако, при формировании большого

числа билетов или вариантов было бы желательно максимально автоматизировать этот процесс, как и получение ответов. Эта задача стала особенно актуальной при проведении контрольных мероприятий в дистанционном обучении, когда, с целью избежать возможного несамостоятельного решения задач учащимися, потребовалось формировать большое число вариантов и распечатывать их в отдельных файлах. На примере систем Maple и Matlab обсуждаются автоматические формирование входных файлов LaTeX по заданному алгоритму и их обработка. Статья предназначена в качестве практического пособия, которое может быть полезно для преподавателей средней и высшей школы.

Ключевые слова
LaTeX, Maple, Matlab, язык Си

АВТОР

Довбыш Сергей Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана»,
доцент СУНЦ (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»,
г. Москва
sdovbysh@yandex.ru

Введение

Хорошо известны достоинства настольной издательской системы LaTeX, которая позволяет подготовить в автоматическом режиме оригинал-макет самого высокого качества, правильно размещая и масштабируя текст и формулы на странице, индексы и пределы в формулах, и предусматривает множество дополнительных возможностей и сопутствующих им настроек, задание стилей, создание новых команд и т.д. Немаловажным является и тот факт, что используемые в этой системе шрифты имеют хорошие начертания, так что генерируемые формулы получаются визуально более красивыми, чем, например, в Microsoft Word. Наконец, при работе с этой системой обычно не возникает проблем с переносимостью исходных файлов на другие компьютеры, поскольку эти файлы являются текстовыми и могут быть, в принципе, подготовлены и изменены в любом тестовом редакторе; возможные же проблемы с переносимостью, которые иногда возникают, устраняются редактированием команд в преамбуле (начале) файла. По этой же причине исходные файлы имеют сравнительно малый объём и удобны для пересылки по электронной почте. Использование LaTeX'a стало стандартом при подготовке математических рукописей. Следует отметить, однако, что уже давно имеются специализированные пакеты LaTeX'a, предназначенные и для совершенно других целей, например, для печати химических формул и диаграмм молекул или нотного стана или для набора и вывода текста на многих языках. А обсуждаемые в статье вопросы (см. аннотацию) могут сделать актуальным использование LaTeX'a и для подготовки контрольных мероприятий даже по тем гуманитарным предметам, где всегда с успехом применялась только русифицированная версия Microsoft Word.

Система LaTeX находится в постоянной разработке, её первая версия называлась LaTeX2.09, а современная носит название LaTeX2ε. Однако стандартные средства системы LaTeX2ε созданы уже давно и в качестве учебников, где они подробно описаны,

можно порекомендовать, например, книгу автора этой системы [1], прекрасное пособие [2], а также [3] и [4]. Этих стандартных средств вполне достаточно для подготовки почти всех материалов, используемых в учебных целях (коль скоро речь не идёт о, например, сложной графике и очень громоздких таблицах). Богатая библиотека пакетов (в количестве более 150), обеспечивающих дополнительные возможности, представлена в книге [5].

Использование стандартных средств LaTeX'a очень удобно при формировании билетов или вариантов контрольного мероприятия и ответов к ним и эти приёмы хорошо известны и широко используются. Однако может быть актуален вопрос об автоматической генерации входных файлов LaTeX'a. Например, может оказаться затруднительной подготовка большого числа вариантов каждой задачи. И в этих условиях, при невозможности контроля за самостоятельностью решения задач учащимися (прежде всего, при дистанционном обучении), выходом из положения может быть автоматическое перемешивание в билетах нескольких имеющихся вариантов каждой задачи, в соответствии с заданным алгоритмом. Дополнительно можно предусмотреть и изменение порядка следования задач в разных билетах.

В связи с этим возникает ещё одна проблема. Если каждый билет должен быть напечатан в отдельном файле (чтобы учащийся не мог просмотреть все билеты и найти, где встречаются те же варианты задач), то надо либо формировать один выходной файл и затем разбивать его на отдельные файлы, каждый из которых будет содержать ровно один билет, либо сразу формировать много выходных файлов.

Ещё одной проблемой может оказаться автоматическая генерация ответов к заданиям (избавляющая преподавателя от кропотливой ручной работы) с их последующим выводом.

В настоящей работе автор хотел бы поделиться личным опытом, большую часть которого он приобрёл во время недавнего периода дистанционного преподавания. В данной, первой части статьи обсуждаются вопросы, связанные с автоматическим формированием входных файлов LaTeX'a и их обработкой (т.е. трансляцией и последующей чисткой рабочей директории) при условии, что сами задания билетов уже сформированы. Вторая часть статьи будет посвящена вопросам автоматического формирования заданий билетов, исходя из имеющегося банка вариантов задач, и обсуждению удобного представления банка задач на основе возможностей системы LaTeX.

Уточнение обсуждаемых вопросов и анализ математических пакетов

Как было сказано, требуется предусмотреть автоматическое перемешивание в билетах нескольких имеющихся вариантов каждой задачи, как и порядка следования задач, в соответствии с заданным алгоритмом. Здесь могут быть только два подхода: либо это перемешивание осуществляется средствами самого LaTeX'a, либо соответствующий входной файл LaTeX'a формируется средствами какой-то внешней программы, в соответствии с заданным алгоритмом. Отметим, что этот входной файл не обязан содержать сами условия задач, а только команды, которые задают эти условия и определены в отдельном файле, где записаны условия. Первый вариант, когда перемешивание осуществляется средствами самой системы LaTeX, представляется малоподходящим по следующей причине. LaTeX - это не отдельная самостоятельная издательская система, а надстройка над издательской системой TeX или Plain TeX, созданной в 1979 г. Дональдом Кнутом, полное описание которой автор дал в книге [6]. Для нашего анализа существенно, что хотя Plain TeX и располагает возможностями для простейших вычислений (см. [7]), но они сводятся к арифметическим операциям над длинами и целыми числами, что, собственно говоря, и нужно для вычисления местоположения объектов на плоскости листа. Естественно, дальнейшее развитие

TeX'a не коснулось расширения круга возможных математических операций. Второй же вариант, когда перемешивание осуществляется внешней программой, представляется подходящим.

Внешняя программа, формирующая входной файл LaTeX'a, должна быть написана на языке, располагающем определёнными вычислительными возможностями для реализации (весьма простого) алгоритма перестановки вариантов и порядка следования задач и предусматривающем возможность форматного вывода в файл. Эти средства имеются, например, в языке Си и производных от него языках, они хорошо известны и описаны в пособиях по этим языкам (см., например, книгу [8] создателя языка С, где описан его стандарт ANSI C, или несколько последующих её переизданий). Однако, эти языки не располагают возможностью символьных вычислений, т.е. преобразований формул, которые могут потребоваться, например, при автоматизированном решении задач и выводе полученных ответов. Эти возможности реализованы в специализированных системах компьютерной алгебры (или символьных вычислений), среди которых, пожалуй, наиболее известными и разработанными являются Mathematica и Maple. Определённые возможности имеются и в известном пакете прикладных программ MATLAB, благодаря пакету Symbolic Math Tools, базирующемуся, опять-таки, на системе Maple. Во многих системах компьютерной алгебры имеются команды для вывода формул в формате LaTeX'a, в MATLAB и Maple этой цели сложит команда с именем latex.

По указанным причинам ниже речь пойдёт, главным образом, о системах Maple и MATLAB. Эти системы располагают командами для чтения из файлов и записи в них, которые основаны на аналогичных командах стандарта языка С, а часто имеют и такой же вид. Между тем в учебной литературе по этим системам (в отличие от языка С) часто вообще ничего не говорится или говорится крайне мало о средствах работы с файлами, поскольку основное внимание уделяется описанию возможностей решения широкого круга прикладных и чисто математических задач. (По этой причине автор не может указать подходящий для нашей цели учебник, но берётся изложить в настоящей статье необходимый минимум материала.) К счастью, оба этих пакета снабжены справочной системой, где описаны все имеющиеся команды.

Впрочем, язык С (или какой-либо другой, не располагающий возможностью символьных вычислений) может быть точно так же использован для формирования билетов и ответов к ним, если условия всех вариантов задач и готовые ответы к ним заранее записаны в отдельном файле, а не создаются в процессе генерации входных файлов LaTeX'a. Действительно, как уже говорилось, в эти входные файлы надо записывать не сами условия задач и ответы, а команды, ссылающиеся на них.

В связи с обсуждаемыми вопросами возникает ещё одна проблема. Если каждый билет должен быть напечатан в отдельном файле (чтобы учащийся не мог просмотреть все билеты и найти, где встречаются те же варианты задач), то надо либо формировать один выходной файл и затем разбивать его на отдельные файлы, каждый из которых будет содержать ровно один билет, либо сразу формировать много выходных файлов.

При первом подходе можно, например, сформировать, используя LaTeX, один выходной pdf-файл так, что каждый билет будет размещён на отдельной странице, а затем разбить этот файл на отдельные страницы. При отсутствии в наличии Adobe Acrobat Professional, программа, осуществляющая такое постраничное разбиение, легко может быть найдена и доступна online в Интернете (введите запрос: «разбиение pdf на страницы»). Следует отметить, что TeX не располагает возможностью делать одновременно вывод печатного материала в несколько файлов, поэтому при трансляции одного входного файла LaTeX'a получится только один выходной файл. Значит,

при втором подходе требуется сгенерировать много входных файлов LaTeX'a - по одному на каждый билет.

В свою очередь, наличие большого числа входных файлов, подлежащих трансляции в LaTeX'e, приводит к вопросу об автоматизации этого процесса. К этому примыкает и вопрос о возможности автоматической чистки рабочей директории от созданных при трансляции вспомогательных и протокольных файлов.

Автоматическая генерация входных файлов LaTeX'a

В этом разделе мы вкратце опишем команды, генерирующие входные файлы LaTeX'a, что позволит читателю без больших усилий применить эти команды для его собственных целей. Также охарактеризуем возникающие здесь проблемы и пути их решения. (Подчеркнём, что мы говорим о минимальном наборе команд, позволяющих достигнуть поставленной задачи, а на самом деле средств работы с файлами в рассматриваемых нами системах гораздо больше, например, возможно форматное чтение из файла.) Попутно будут затронуты некоторые вопросы и нюансы, о которых в учебниках по MATLAB и Maple не говорится, но которые выясняются экспериментированием с системой и знание которых позволит читателю избежать ошибок, тем более, что понять причину этих ошибок бывает не очень просто. Предполагается, что читатель владеет основами языка MATLAB или Maple, так что мы будем обсуждать именно вопросы, касающиеся некоторых приёмов работы с файлами, а не программирование или решение математических задач - эти аспекты как раз хорошо отражены в обильной учебной литературе.

Прежде чем начать работать с файлом, его надо открыть. Для этой цели в языке C служит команда

```
fp=fopen(filename, mode)
```

где filename - имя файла, а mode - режим работы с файлом, который может принимать значения "r" (read - открытие уже существующего файла для чтения), "w" (write - создание нового файла для записи, при наличии же файла с таким именем его содержимое будет уничтожено) и "a" (append - добавление, т. е. запись информации в конец уже существующего файла или создание нового файла при его отсутствии), fp - указатель или идентификатор файла, который будет применяться далее во всех командах работы с этим файлом. В языке C для работы с файлами надо подключать библиотеку <stdio.h> и описывать указатели декларациями вида

```
FILE *fp;
```

На многих платформах различаются текстовые и бинарные файлы. В языке C по умолчанию открывается текстовый файл. Если необходимо открыть бинарный файл, то в строку режима необходимо добавить букву "b", например, написать "wb". Строковая константа — это нуль или более символов, заключённых в двойные кавычки, т.е. в качестве mode могут выступать строковые константы указанного специального вида. Имя файла filename также является строковой константой и может содержать путь к файлу (написание пути зависит от используемой платформы).

Точно такая же команда для открытия файла применяется и в MATLAB, с той разницей, что теперь строковые константы могут заключаться и в двойные кавычки и в апострофы (одинарные кавычки), помимо основных вариантов 'r', 'w' и 'a' для mode теперь имеются ещё и некоторые дополнительные, а по умолчанию открывается бинарный файл, так что для открытия текстового надо добавить в описание режима

букву 't', например, написать 'wt'. Кстати, в MATLAB почти всегда неважно, использовать двойные кавычки или апострофы в качестве ограничителей строчных констант, но всё же, как мы увидим, есть две ситуации, где это становится существенным.

Наконец, в Maple эта команда принимает вид

`fp:=fopen(filename, mode)    либо    fp:=fopen(filename, mode,type)`

т.е., как обычно, в качестве оператора присваивания используется не знак равенства, а двоеточие с равенством, при этом строковые константы заключаются в двойные кавычки, но для режима `mode` предусмотрены варианты `READ`, `WRITE` и `APPEND`, и также есть возможность указания в необязательном аргументе `type` типа файла - `TEXT` или `BINARY` (текстовый или бинарный), по умолчанию подразумевается тип `TEXT`.

Далее, для форматной записи в файл применяется команда

`fprintf(fp,format,arg1,...,argn)`

где `arg1,...,argn` - необязательные аргументы, а строковая константа `format` задаёт выводимый текст и, при наличии аргументов, включает в себя спецификаторы, определяющие формат вывода этих аргументов. Спецификаторы следуют друг за другом в том же порядке, как и соответствующие им аргументы. Текст, включаемый в строку `format` и без изменений переносимый в файл, может содержать все символы, присутствующие на клавиатуре, кроме нескольких специальных символов, что позволяет использовать его для составления пояснений к выводимым аргументам. К этим специальным символам относятся знак процента `%`, бэкслэш `\`, двойные кавычки `"` и апостроф `'`, ниже будет сказано о том, как их можно вывести в файл. Спецификаторы почти одинаковы в C и в MATLAB, а Maple дополнены, главным образом, алгебраическими форматами (задающими вывод алгебраических выражений в том виде, как они вводятся в Maple). Спецификаторы всегда начинаются с спецсимвола `%` и, в простейшем случае, содержат ещё одну следующую за ним букву, самые важные варианты которой перечислены в следующей таблице вместе с указанием типа объекта, выводимого в файл:

d	десятичное целое число
c	одиночный символ
s	строка символов
f	десятичное число с фиксированной точкой
e, E	десятичное число с плавающей точкой и одной цифрой перед точкой

Кроме того, есть возможность уточнять вид выводимого объекта, например количество записываемых в файл символов или цифр после десятичной точки. Однако, приведённых сведений уже вполне достаточно как для понимания встречающихся ниже примеров, так и, по крайней мере, на первых порах для написания собственных программ. Также строка `format` может включать в себя некоторые команды, задающие вывод указанных выше специальных видимых символов, а также и невидимых, определяющих перемещение каретки в файле. Из команд первого типа укажем команду вывода бэкслэша - двойной бэкслэш `\\` и команду вывода знака процента `%` - двойной знак `%%`, а из команд второго типа - команду `\n` перехода на новую строку. (Кстати, в Maple, кроме последней команды, не предусмотрено других команд, определяющих перемещение каретки, а в языке C и MATLAB они имеются.) Все эти команды, кроме `%%`, состоят из бэкслэша и следующего за ним символа и называются

эскейп-последовательностями или эскейп-символами (в языке C и MATLAB предусмотрена также возможность вывода любого символа через задание его кода эскейп-последовательностью, в которой после бэкслэша идут три символа). Появление таких записей в строке `format` будет трактоваться как соответствующая команда и может привести к ошибке. В других случаях одинарный бэкслэш может просто игнорироваться при выводе. Поэтому, для записи бэкслэша в файл в строке формата всегда следует писать двойной бэкслэш. Остаётся сказать о выводе спецсимволов «двойные кавычки» и «апостроф». В языке C и Maple, где строковые константы заключаются в двойные кавычки, апостроф `'` уже не играет роль спецсимвола и его можно непосредственно писать в строку, но для него предусмотрен и эскейп-символ `\'`. Для вывода же двойной кавычки `"` используется эскейп-символ `\"`. В MATLAB ситуация оказалась хитрее. Для вывода двойной кавычки в строке надо заключить последнюю в апострофы, а саму кавычку либо записать непосредственно, либо как эскейп-символ `\'`. Точно так же, для вывода апострофа надо заключить строку в двойные кавычки, а сам апостроф либо записать непосредственно, либо как эскейп-символ `\'`. Попытка же записать апостроф в строке, ограниченной апострофами, или двойную кавычку в строке, ограниченной двойными кавычками, приводит к ошибке, даже если использовать для них указанные эскейп-символы.

Наконец, для закрытия файла после окончания его использования во всех трёх системах применяется команда `fclose(fp)`. Отметим, кстати, что программа может одновременно работать с несколькими разными файлами и содержать много описанных выше команд (конечно, при условии, что никогда в команде открытия файла не пишется идентификатор, принадлежащий какому-то открытому в этот момент файлу, и не производится попытка повторного открытия уже открытого и ещё не закрытого на этот момент файла).

Имеет смысл сказать о ещё нескольких особенностях работы команд `fprintf`, чтобы понять, как будет выглядеть сформированный этими командами файл. Если встречаются несколько команд `fprintf`, работающих с одним файлом, то каждая из них начинает запись не с новой линии, а помещает её сразу после записи, сделанной предыдущей командой. Это остаётся верно и в том случае, если между двумя командами записи файл был закрыт, а потом опять открыт на добавление. Для перехода же на новую строку следует использовать в строке формата команду `\n`. Далее, форматный вывод на монитор отождествляется с выводом в файл, идентификатор `fp` которого задаётся как `stdout` для языка C, `default` для Maple и `1` для MATLAB. При этом, конечно, не надо открывать и закрывать этот «файл» и, в случае языка C, описывать идентификатор файла. Но обычно в этом случае используются более короткие эквивалентные записи команды `fprintf`, без указания на этот специальный идентификатор и с заменой, в случае C и Maple, имени команды `fprintf` на `printf`:

<code>printf(format,arg1,...,argn)</code>	для языка C и Maple
<code>fprintf(format,arg1,...,argn)</code>	для MATLAB

Посылать запись не в файл, а на монитор весьма удобно при отладке программы. Сказанное выше о том, как команды делают записи, остаётся верно с одним исключением: каждая команда `printf` в Maple будет начинать запись с новой линии, если она содержится на верхнем уровне, т.е. не внутри процедуры (подпрограммы).

Для наших целей (например, создания имён файлов для записи) будет полезна операция конкатенации двух строк, т.е. создание новой строки, полученной приписыванием второй строки в конец первой. В языке C, как и в MATLAB этой цели служит команда `strcat(s1,s2)` (при этом в C надо подключать библиотеку `<string.h>`), а в Maple – команда `cat(s1,s2)`, где `s1` и `s2` – заданные строковые константы или переменные.

При этом в MATLAB и Maple указанные команды могут применяться к любому числу аргументов. (Если значения всех аргументов команды `strcat` в MATLAB – строки, заключённые в апострофы, то эта команда вернёт в качестве значения строку, также заключённую в апострофы; если же хотя бы у одного аргумента значение будет строкой, заключённой в двойные кавычки, то таковым будет и значение, возвращаемое командой.) Кроме того, в языке C и в Maple записанные рядом (разделённые только пробелами) строковые константы (но не переменные!) автоматически конкатенируются, и это же происходит в MATLAB со строковыми константами, заключёнными в апострофы и помещёнными внутрь квадратных скобок (результатом будет строка, также заключённая в апострофы).

Выше говорилось, что имя файла `filename` в команде открытия файла является строковой константой. Возникает важный вопрос: можно ли в качестве `filename` использовать строковую переменную (значение которой и будет именем файла), а не константу? Поскольку язык C компилирует программу перед её выполнением, то для этого потребуется оформить вызов всех команд работы с файлом (от его открытия и до закрытия) в виде одной подпрограммы (см. похожие примеры в §7.5 и §7.6 книги [9]). В случае же пакетов MATLAB и Maple (которые не компилируют программу, а интерпретируют отдельно каждую входную команду) такой проблемы не возникает – здесь аргумент `filename` может быть строковой переменной.

Совершенно аналогичным образом обстоит дело и с форматом `format` в команде записи в файл, про который также было сказано, что он является строковой константой, – в пакетах MATLAB и Maple в качестве формата можно использовать строковую переменную. По этой причине в команде `fprintf` и для MATLAB и для Maple строка формата и аргумент, являющийся строковой переменной или константой, в определённой мере уравниваются в правах. Можно, например, выводить строковую переменную как аргумент (используя формат “%s”), а можно как формат (без аргументов). (Конечно, это не совсем так, если выводимая строка содержит служебные символы. Например, нужна аккуратность при выводе в файл символа % через строку формата, поскольку этот символ трактуется как признак спецификации; для такого вывода этого символа надо написать в строке формата двойной символ %, в то время как через аргумент этот символ выводится без изменений. Точно так же MATLAB поступает и с бэкслэшем, см. чуть ниже.) Можно использовать операцию конкатенации для формирования строки формата или аргумента-строки. Эти приёмы весьма удобны и примеры их использования встретятся ниже. Однако следует подчеркнуть, что MATLAB и Maple по-разному трактуют бэкслэши в строковых константах. А именно, если MATLAB никак не преобразует строковую константу (в отличие от строки формата), в записи которой присутствует бэкслэш, то Maple поступает с ней как и со строкой формата, т.е. трактует бэкслэш и следующий за ним символ как команду, в частности, двойной бэкслэш преобразуется в одинарный. Последнее обстоятельство следует иметь в виду, если требуется вывести в файл формулы в нотации LaTeX’a, поскольку там командные последовательности, изображающие стандартные функции, начинаются с бэкслэша. Следовательно, при выводе формул посредством команды `fprintf` в системе Maple нужно каждый бэкслэш заменить на двойной бэкслэш, что довольно затруднительно. В качестве альтернативы следует использовать непосредственный вывод формул в файл командой `latex`. Что же касается вывода формул в системе MATLAB, то этот вывод следует делать через аргумент (а не формат) команды `fprintf`. Все эти наблюдения пригодятся чуть ниже при построении программ для модельных примеров.

В заключение коснёмся команды `latex`, предусмотренной в пакетах MATLAB и Maple и обеспечивающей вывод формул в нотации LaTeX’a (но без окружающих долларов или других ограничителей для формул). Команда `latex` для вывода на монитор имеет вид

`latex(expr)`

где `expr` раскрывается в выводимое математическое выражение. В MATLAB предусмотрен только вывод на монитор, чего достаточно, поскольку вывод в файл может быть осуществлён через команду `fprintf` обсуждаемым ниже способом, а в Maple возможен также вывод в файл командами

`latex(expr, filename)` и `latex(expr, filename, 'append')`

которые аналогичны описанным выше командам форматной записи с режимами работы WRITE и APPEND, соответственно. В первом случае файл для записи будет создан (как обычно, с уничтожением прежнего содержимого, если файл с таким именем уже существовал), а во втором - будет производиться запись в существующий файл либо, при его отсутствии, - во вновь созданный. Эти команды закрывают файл после произведённой ими записи. Сказанное выше о том, как команды `fprintf` и `printf` в Maple делают записи, остаётся верно и для `latex`, но с одним уточнением: после выполнения команды `latex` всегда происходит переход на новую линию. Естественно, попытка записи командой `latex` в файл, который открыт в данный момент, приведёт к ошибке. Некоторые важные моменты, связанные с использованием команды `latex`, мы затронем сейчас при обсуждении примеров.

Итак, проиллюстрируем простую возможность генерации входного файла LaTeX'a средствами пакета Maple. Зададим список (т.е. объект типа `list`) функций, которые надо внести в таблицу:

```
f_list:=[x^2+sin(3*x)+2*sqrt(x),x^3+cos(x),2*x^2+log(x)];
```

который отобразится следующим образом на мониторе:

$$f_list := [x^2 + \sin(3x) + 2\sqrt{x}, x^3 + \cos(x), 2x^2 + \ln(x)]$$

и применим к этому списку программу

```
my_file:=fopen("the_test.tex",WRITE);
fprintf(my_file,"\\begin{tabular}{|l|c|} \n");
for n from 1 to 3 do
f:=f_list[n]:
fprintf(my_file," %d & $",n):
close(my_file);
latex(f,"the_test.tex ','append');
my_file:=fopen("the_test.tex ','APPEND);
if n=3 then fmt:="$ \n": else fmt:="$ \\\\ \n": fi:
fprintf(my_file,fmt):
od:
fprintf(my_file,"\\end{tabular} \n");
close(my_file);
```

В этом иллюстративном примере команда `f:=f_list[n]:` присваивает на n -ом шаге цикла переменной `f` значение, равное n -ному элементу в списке `f_list`. Значение переменной `f` на каждом шаге могло бы быть сформировано по некоторому заданному алгоритму, а не извлекаться из списка функций, как в нашем примере. В результате выполнения программы будет сформирован файл с именем `the_test.tex`, в котором записано следующее:

```
\begin{tabular}{|l|c|}
1 & $\{x\}^2+\sin \left( 3\,x \right) +2\,\sqrt{x}$
```

```

$ \
2 & ${x}^{\{3\}}+\cos \left( x \right)
$ \
3 & $2\,{x}^{\{2\}}+\ln \left( x \right)
$
\end{tabular}

```

Заметим, что в командах вывода слова `\begin` и `\end` должны быть написаны с двойным бэкслэшем, причём независимо от того, встречаются они в строке формата или в аргументе команды `fprintf` (см. выше). Кстати, здесь видны типичные недостатки работы команды `latex` - в полученных формулах, записанных в формате LaTeX, много практически лишних символов: фигурные скобки около величин, возводимых в степень и самих степеней, даже если и те и другие состоят из одного символа, сопровождение всех круглых скобок парами ограничителей `\left` и `\right` и простановка мелких отступов `\`, после всех коэффициентов. Также выглядят неудачными переходы на новые строки в выходном файле. Причина в том, что, как указано выше, после выполнения команды `latex` всегда происходит переход на новую линию. Отметим также, что каждый раз перед применением команды `latex` приходится закрывать файл, а после её применения - опять открывать его; поскольку эта команда не будет вести запись в файл, если он в данный момент открыт. Но, в принципе, отмеченные недостатки носят непринципиальный характер, они относятся скорее только к внешнему виду входного файла LaTeX'a и не вызывают проблем при трансляции файла LaTeX'ом.

Интересно отметить, что никакие другие манипуляции с командой `latex` здесь невозможны. Дело в том, что хотя эта команда языка Maple и выводит запись формулы в формате LaTeX, то не возвращает её в качестве значения, вернее говоря, возвращает в качестве значения `NULL` - пустую последовательность символов. Поэтому, нельзя, например, преобразовать запись формулы в строковую переменную, чтобы потом вывести её содержимое в файл командой `fprintf`.

В качестве альтернативы можно представить записи функций в виде строковых констант с входными текстами LaTeX'a:

```
g_list:=["x^2+\sin (3x)+2\sqrt x","x^3+\cos x","2x^2+\ln x"];
```

что даст на мониторе

```
g_list := [ "x^2+\sin (3x)+2\sqrt x" , "x^3+\cos x" , "2x^2+\ln x" ]
```

но этот способ не будет годиться, если функции должны вычисляться в результате символьных преобразований. Соответственно, будет немного упрощена программа:

```

my_file:=fopen("the_test.tex",WRITE);
fprintf(my_file,"\\begin{tabular}{|l|c|} \n"):
for n from 1 to 3 do
g:=g_list[n]:
fprintf(my_file," %d & ${s}$",n,g):
if n=3 then fmt:=" \n": else fmt:=" \\\n": fi:
fprintf(my_file,fmt):
od:
fprintf(my_file,"\\end{tabular} \n"):
fclose(my_file);

```

Теперь отпадает необходимость повторного открытия и закрытия файлов, запись функций осуществляется командой форматной записи `fprintf`. (Заметим, что такой вывод формул непосредственно в файл можно осуществлять и обсуждавшимися выше средствами языка C.) Сгенерированный файл примет красивый вид:

```
\begin{tabular}{|l|c|}
1 &  $x^2 + \sin(3x) + 2\sqrt{x}$  \\
2 &  $x^3 + \cos x$  \\
3 &  $2x^2 + \ln x$  \\
\end{tabular}
```

Вместо двух команд `fprintf`, расположенных в теле цикла (между ограничителями `do` и `od`) можно было написать на месте второй из них одну команду

```
fprintf(my_file, " %d &  $%s$ ", n, g, fmt):
```

Здесь уже строковая переменная `fmt` рассматривается не как задающая формат, а как содержащая выводимую строковую константу. Возможны и другие модификации с использованием упомянутой команды конкатенации `cat`.

Ещё одно усовершенствование, которое может быть полезно во многих случаях, такое - при подключении пакета `array` в LaTeX'e в преамбуле таблицы можно заменить символ `c` на `>{\$}c<{\$}`, и, соответственно, в формате команды `fprintf` внутри цикла убрать два доллара, которые будут окружать формулу.

Эти программы можно переписать с Maple на язык MATLAB. Начнём с первой программы. В отличие от системы Maple, в MATLAB команда `latex` допускает вывод только на монитор, но не в файл, а, с другой стороны, она возвращает в качестве своего значения созданную ею запись формулы в нотации LaTeX'a в виде строки. Это строковое значение можно уже выводить в файл через команду форматной записи (что было невозможно в Maple). Команда `latex` в более поздних версиях MATLAB действует несколько разумнее, чем её двойник в Maple, т.е. не выставляет фигурные скобки около величин, возводимых в степень или самих степеней, если таковые состоят из одного символа, но в остальном она страдает теми же недостатками. При этом символ мелкого отступа `\,`, который проставляется после всех коэффициентов, равно как и начинающиеся с бэкслэша записи всех стандартных функций делают невозможным вывод формулы через строку формата команды `fprintf`, но не препятствуют её выводу через аргумент этой команды (см. выше).

Зададим матрицу, состоящую из одной строки, элементы которой - рассматриваемые функции:

```
syms x
f_list=[x^2+sin(3*x)+2*sqrt(x),x^3+cos(x),2*x^2+log(x)]
```

и применим к ней следующую программу, написанную на основе сделанных выше наблюдений:

```
fp=fopen("the_test.tex","wt")
fprintf(fp, "\begin{tabular}{|l|c|} \n");
for n = 1:3;
f=f_list(n);
fprintf(fp, " %d &  $%s$ ", n, latex(f));
if n==3 fmt=" \n"; else fmt=" \\ \n"; end;
fprintf(fp, fmt);
```



```
end
fprintf(fp, "\\end{tabular} \n");
fclose(fp)
```

Интересное усовершенствование: вместо двух команд `fprintf`, расположенных в теле цикла, можно было бы написать на месте второй из них две команды

```
strcat(" %d & $s$",fmt); fprintf(fp,ans,n,latex(f));
```

первая из которых вычисляет конкатенацию форматов исходных команд, а вторая использует полученный результат в качестве своего формата.

Теперь перепишем на MATLAB вторую программу, в которой формулы заранее заданы в виде строковых констант:

```
g_list=["x^2+\sin (3x)+2\sqrt x","x^3+\cos x","2x^2+\ln x"]
```

(где обязательно заключать строковые константы в двойные кавычки, а не апострофы, иначе они конкатенируются, как было отмечено выше; также напомним, что бэкслэши в формулах дублировать не надо, если они выводятся через аргумент команды `fprintf` системы MATLAB) и далее следует:

```
my_file=fopen("the_test.tex","wt");
fprintf(my_file, "\\begin{tabular}{|l|c|} \n");
for n=1:3;
g=g_list(n);
fprintf(my_file, ' %d & $s$',n,g);
if n==3 fmt='\n'; else fmt=' \\\n'; end;
fprintf(my_file, fmt);
end;
fprintf(my_file, "\\end{tabular} \n");
fclose(my_file);
```

где, опять-таки, два оператора `fprintf` в теле цикла можно заменить на один, как было отмечено выше.

Наконец, осталось сказать о том, как сгенерировать много входных файлов LaTeX'a, каждый из которых будет содержать ровно один билет. Для наших целей потребуется предусмотреть открытие одной командой `for`en, расположенной в цикле, файлов с разными именами, задаваемыми строковой переменной (а не константой) `filename`, значение которой будет разным на разных шагах цикла. Как уже было указано, в случае использования языков MATLAB и Maple это допустимо, а в случае языка C надо оформлять подпрограмму. Итак, на каждой итерации цикла будет формироваться один билет. Например, если значение параметра цикла `n` совпадает с номером билета, который формируется на данной итерации цикла, а выходной файл для этого билета должен иметь имя `bilet-«n».tex`, где «n» означает значение переменной `n` (т.е. при изменении `n` от, скажем, 1 до 20 это будут файлы с именами `bilet-1.tex`, `bilet-2.tex`, ..., `bilet-20.tex`), то имя файла может быть задано командой

```
filename:=cat("bilet-",n,".tex");           # в Maple
filename:=strcat("bilet-",string(n),".tex"); % в MATLAB
```

где название системы записано в комментарии.

Здесь использовано то обстоятельство, что в Maple команды конкатенации корректно работают, если значениями каких-то из их аргументов будут простые имена,

т.е. последовательности букв и цифр, а в MATLAB это уже не так и поэтому предварительно необходимо посредством команды `string` преобразовать число «n» в строку.

Автоматическая трансляция большого числа файлов в пакете LaTeX и чистка рабочей директории

Ранее был уже упомянут следующий вопрос, связанный с обсуждёнными выше, хотя и менее принципиальный: можно ли автоматизировать процесс трансляции в пакете LaTeX всех созданных входных файлов? Если, например, у вас сформировано 50 файлов, то потребуется немало минут «совершенно тупой» ручной работы по их трансляции, которую было бы желательно переложить на компьютер. Заодно было бы хорошо и почистить в автоматическом режиме рабочую директорию от созданных при трансляции `log`-, `aux`- и, возможно, других (в зависимости от использованной реализации LaTeX'a и поставленных целей) вспомогательных и протокольных файлов.

На самом деле этот вопрос оказывается тесно связан с материалом предыдущего раздела. Идея достаточно проста: необходимо сгенерировать вместе с входными файлами LaTeX'a и пакетный файл, который будет содержать команды трансляции этих входных файлов и последующего удаления вспомогательных и протокольных файлов. Если кликнуть такой файл, то система сама выполнит всю эту работу.

Например, одной из популярных компьютерных программ верстки в LaTeX'e является программа pdfLaTeX (содержащая некоторые усовершенствования типографских возможностей TeX'a), которая включена в большинство современных сборок LaTeX'a. Её особенностью является то, что при трансляции в качестве выходных она выдаёт сразу pdf-файлы (минуя dvi- и, возможно, ps-файлы), не говоря о генерируемых в любом случае `log`- и `aux`-файлах (и, при наличии соответствующих команд, некоторых других файлов, вроде `idx`-файла для составления предметного указателя, - необходимости во всём этом при составлении билетов и ответов к ним, конечно, нет). Пусть, например, требуется оттранслировать файлы с именами `bilet-1.tex`, `bilet-2.tex`, ..., `bilet-20.tex`, генерируемые, как описано в предыдущем разделе, программой на языке C, MATLAB или Maple. В результате трансляции появятся выходные файлы с теми же самыми именами и расширением `pdf`, а также и файлы с расширениями `log` и `aux` - мусор, который следовало бы затем удалить из директории. В системе Windows, которую мы и будем иметь в виду, для имён пакетных файлов используется расширение `bat`, а сам нужный нам файл должен иметь следующий вид (где многоточия означают не выведенную на страницу часть файла):

```
@echo off
pdflatex.exe bilet-1
del bilet-1.aux
del bilet-1.log
pdflatex.exe bilet-2
del bilet-2.aux
del bilet-2.log
.....
pdflatex.exe bilet-20
del bilet-20.aux
del bilet-20.log
```

Здесь `@echo off` - команда, отключающая режим вывода команд на экран, `pdflatex.exe` - команда вызова программы pdfLaTeX (написанная без указания пути, поскольку при инсталляции пакета был установлен доступ к этой программе из любой директории), а `del` - команда удаления файла. Из предыдущего раздела становится ясно, как сгенерировать такой пакетный файл одновременно с генерацией файлов

LaTeX, а именно: вначале, ещё до входа в цикл, где происходит формирование билетов, этот пакетный файл открывается на запись и в него записывается строка @echo off (напомним, кстати, что символ @ не является специальным и поэтому без изменений выводится в файл командой форматной записи), затем каждый раз одновременно с формированием файла билет-«n».tex, в пакетный файл пишутся две строки

```
del билет-«n».aux
del билет-«n».log
```

наконец после выхода из цикла этот файл закрывается.

Заключение

Обсуждена проблема автоматизированного формирования билетов контрольных мероприятий и ответов к ним в виде входных файлов системы LaTeX. На основе анализа возможностей этой системы и некоторых математических пакетов сделан вывод о целесообразности: 1) формирования отдельного входного файла для каждого билета, 2) использования для этой цели системы символьных вычислений, например, MATLAB или Maple, или, при определённых условиях, языка C или производных от него. Подробно описаны средства систем MATLAB и Maple, позволяющие сгенерировать такие входные файлы (но почти не отражённые в учебной литературе). Предложен способ для автоматической трансляции всех входных файлов в пакете LaTeX и последующей чистки рабочей директории.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Lamport L. LaTeX: A Document Preparation System, User's Guide and Reference Manual. 2nd ed. — Reading: Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994. — 273 с.
2. Львовский С. М. Набор и верстка в системе LaTeX. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2003. — 448 с.
3. Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А. Путеводитель по пакету LaTeX и его расширению LaTeX2ε / Пер. с англ. О.А. Маховой и др. под ред. И.А. Маховой. — М.: «Мир», 1999. — 606 с. — (Библиотека издательских технологий.)
4. Котельников И.А., Чеботаев П.З. LaTeX2ε по-русски. — 3-е издание, перераб. и доп. — Новосибирск: Сибирский хронограф, 2004. — 496 с.; 4-ое стер. изд. — СПб.: «Корона-Век», 2011. — 496 с.
5. Гуссенс М. Указ. соч.
6. Кнут Д.Е. Все про TeX / Пер. с англ. и подгот. ориг.-макета М.В. Лисиной под ред. С.В. Клименко, С.Н. Соколова. — Протвино: Изд-во АО RDTEx, 1993. — 592 с.; 2-е русск. издание: Перевод с англ. Л.Ф. Козаченко. Под редакцией Ю.В. Козаченко. — М. и др.: Изд. дом «Вильямс», 2003. — 560 с.
7. Кнут Д.Е. Указ. соч.
8. Керниган Б., Ритчи Д. Язык программирования Си / Пер. с англ. Вик.С. Штаркмана / Под ред. и с предисловием Вс.С. Штаркмана. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Финансы и статистика, 1992. — 272 с.
9. Керниган Б. Указ. соч.

Sergei A. Dovbysh,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Associate Professor, M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

sdovbysh@yandex.ru

On using some software for preparing variants of tests and auxiliary materials: automatic generation of input files and their processing

Abstract. It is well known that the use of the LaTeX publishing system makes it possible, for example, when compiling variants of a control event and answers to them, not to copy the conditions of problems and answers every time, but to replace them with commands that set them; the conditions or answers themselves can be read from a separate file. These techniques are widely used. However, when generating a large number of variants or options, it would be desirable to automate this process as much as possible, as well as receiving answers. This task has become especially relevant when conducting control activities in distance learning, when, in order to avoid possible non-independent solving tasks by students, it is necessary to compile a large number of variants and print them in separate files. On the example of the Maple and Matlab systems, the automatic generation of LaTeX input files according to a given algorithm and their processing are discussed. The article may be useful as a practical guide for teachers of secondary and high schools.

Keywords: LaTeX, Maple, Matlab, C language.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПРИВЕДЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ»

Аннотация

В курсе линейной алгебры тема «Приведение кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду» является одной из самых сложных. В статье рассмотрены два способа изложения материала для случая центральной кривой второго порядка, их сравнение проведено на примере решения одной и той же задачи. Цель работы - проиллюстрировать достоинства и недостатки каждого подхода, отметить их сильные и слабые стороны. В результате студенты смогут выбрать наиболее рациональный способ решения задач в зависимости от поставленной задачи.

Ключевые слова

центральная кривая второго порядка, каноническое уравнение,
ортогональное преобразование, метод инвариантов

АВТОРЫ

Ефремова Светлана Николаевна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
Efremova.sn@gmail.com

Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
talaskovy@mail.ru

Введение

Приведение к каноническому виду - задача, которую неизбежно приходится решать всем, кто работает с кривыми второго порядка. Как правило, она не является самостоятельной задачей, а возникает как составная часть другой, более обширной задачи. Поэтому очень важно из всех возможных ее решений выбрать наиболее простое и быстрое.

При изложении этой темы на занятиях обычно используют только один способ приведения к каноническому виду - наиболее универсальный. Это связано с тем, что применение этого метода позволяет проиллюстрировать практическое применение основных понятий, изучающихся в курсе линейной алгебры. Однако существует еще один метод (метод инвариантов), применение которого позволяет расширить кругозор студентов и дает им возможность выбора решения задачи.

В предложенной работе сравниваются два метода приведения центральной кривой второго порядка (эллипса и гиперболы) к каноническому виду: универсальный (с помощью ортогонального преобразования) и метод инвариантов, учитывающий особенности центральной кривой (существование единственного центра симметрии). В

изложении этих подходов отмечены их сильные и слабые стороны, что упрощает выбор одного из методов в зависимости от требований поставленной задачи.

Статья будет полезна преподавателям, студентам и всем интересующимся этой темой. Материал, изложенный в работе, можно использовать для проведения практических занятий.

Методология и результаты исследования

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

где $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Известно, что геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, представляет собой либо кривые: эллипс, гиперболу, параболу, либо - в вырожденных случаях - точку, пару пересекающихся кривых, пару параллельных кривых, одну прямую или пустое множество ([1],[2]).

Задача приведения уравнения кривой к каноническому виду заключается в поиске такой системы координат (называемой канонической), в которой уравнение кривой примет наиболее простой (канонический) вид. Общепринятым является соглашение о том, что каноническими уравнениями являются следующие:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0;$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0;$$

$$Y^2 = 2pX, \quad p > 0.$$

Переход от исходной системы Oxy координат к канонической $O_1X_1Y_1$ осуществляется в два этапа, независимых друг от друга: поворот и параллельный перенос. Заметим, что если в уравнении (1) $B=0$, то достаточно только параллельного переноса. Поэтому будем рассматривать общий случай $B \neq 0$, когда поворот необходим.

Для простоты изложения будем считать, что каноническая система координат не единственная, т.е. что поворот на угол $\pm \frac{\pi}{2}$ или π переводит каноническую систему координат в другую каноническую. Это позволит расширить множество канонических уравнений до следующего множества:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0;$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1, \quad a > 0, b > 0;$$

$$Y^2 = \pm 2pX, \quad p > 0;$$

$$X^2 = \pm 2pY, \quad p > 0.$$

Поэтому будем считать, что при переходе к канонической системе координат поворот осуществляется на угол $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

На примере решения конкретной задачи, сравним два метода приведения кривой к каноническому виду: универсальный (с помощью ортогонального преобразования) и метод инвариантов, учитывающий особенности центральной кривой (существование единственного центра симметрии).

При изложении этой темы на занятиях, общепринятым является универсальный способ, основанный на теории квадратичных форм [2], поэтому начнем с него.

Приведем уравнение кривой $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ к каноническому виду.

Рассмотрим определитель матрицы квадратичной формы $5x^2 + 4xy + 2y^2$.

Так как $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} > 0$, то можно установить, что кривая эллиптического типа. Найдем

собственные числа и собственные векторы:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=6 \end{cases}.$$

Для $\lambda=1$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim (2 \ 1) \Rightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Для $\lambda=6$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim (-1 \ 2) \Rightarrow -x + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Поскольку угол поворота $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то положительное направление новой оси

абсцисс задает собственный вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению

к $\lambda_1 = 6$, а вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ с собственным значением $\lambda_2 = 1$ задает положи-

тельное направление новой оси ординат. Таким образом, мы построили собственный ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$, с которым связана система координат Ox_1y_1 , полученная из исходной Oxy с помощью ортогонального преобразования - преобразования поворота.

Матрица этого преобразования имеет вид $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, и является матри-

цей поворота $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Поскольку $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то можно опреде-

лить угол поворота $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Итак, на первом шаге универсального метода сделаем преобразование координат (преобразование поворота) по формулам:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 \end{cases} \quad (2)$$

В результате преобразования (2) квадратичная форма примет канонический вид:

$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 6x_1^2 + y_1^2$, а коэффициенты при линейных слагаемых преобразуются по

формуле:
$$\begin{pmatrix} 2D_1 \\ 2E_1 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} 2D \\ 2E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

В новой системе координат Ox_1y_1 уравнение кривой примет вид:

$$6x_1^2 + y_1^2 + 12x_1 + 4y_1 - 14 = 0$$

Как видим, первый шаг универсального метода довольно трудоемкий, но он позволяет получить целый ряд дополнительных сведений. В результате найдены собственные числа и собственные векторы матрицы квадратичной формы, получен собственный ортонормированный базис, записаны формулы ортогонального преобразования (поворота) и связь координат, получено уравнение кривой в новой системе координат.

Чтобы осуществить второй шаг, выполним преобразование параллельного переноса. Для этого выделим полные квадраты по обеим переменным

$$6(x_1 + 1)^2 + (y_1 + 2)^2 = 24$$

и получим уравнение эллипса со смещенным центром:

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{2^2} + \frac{(y_1 + 2)^2}{(2\sqrt{6})^2} = 1.$$

Замена переменных

$$\begin{cases} X = x_1 + 1 \\ Y = y_1 + 2 \end{cases} \quad (3)$$

соответствующая параллельному переносу, приведет исходное уравнение к каноническому виду:

$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{(2\sqrt{6})^2} = 1$$

Выразим из (3) переменные x_1 и y_1 , и подставим их в (2):

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} X - \frac{1}{\sqrt{5}} Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} X + \frac{2}{\sqrt{5}} Y - \sqrt{5} \end{cases} \quad (4)$$

В результате получим формулы (4), связывающие исходные (x, y) и канонические переменные (X, Y)

Из формул (4) найдем координаты точки $O_1(0, -\sqrt{5})$ - начала канонической системы O_1XY в исходной системе Oxy .

Таким образом, итогом второго шага универсального метода являются замена переменных (4), связывающая исходную Oxy и каноническую O_1XY системы координат, и координаты точки O_1 - начала канонической системы координат.

Построим эскиз (Рис. 1).

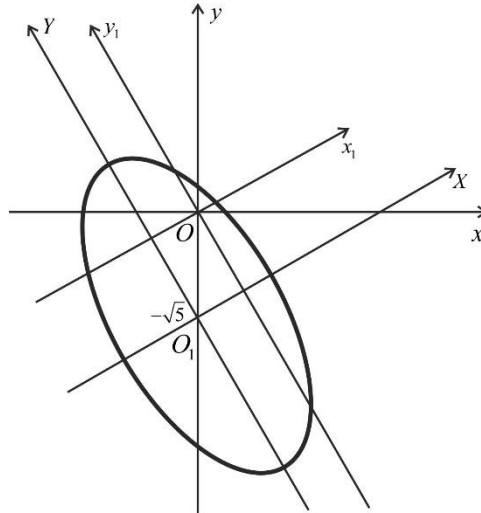


Рис.1

Теперь рассмотрим, как работает второй метод - метод инвариантов - при решении этой задачи ([3]). Будем использовать инварианты многочлена второй степени $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$, т.е. такие функции от коэффициентов этого многочлена, которые не меняются при ортогональном преобразовании. Как известно (см.

[3]), это $\Delta_1 = A + C$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$. Используем их, чтобы подобрать каноническую систему координат O_1XY , в которой уравнение линии примет вид $A_1X^2 + C_1Y^2 + F_1 = 0$, легко приводящийся к каноническому.

Имеем

$$\Delta_1 = A + C = 5 + 2 = 7 = A_1 + C_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{vmatrix} = A_1C_1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2\sqrt{5} \\ 2 & 2 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & -14 \end{vmatrix} = -144 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 \end{vmatrix} = A_1C_1F_1.$$

$$\text{Получим систему } \begin{cases} A_1 + C_1 = 7 \\ A_1C_1 = 6 \\ A_1C_1F_1 = -144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} A_1 = 1 \\ C_1 = 6 \\ F_1 = -24 \end{cases} \quad \text{(I)} \\ \begin{cases} A_1 = 6 \\ C_1 = 1 \\ F_1 = -24 \end{cases} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Координаты начала канонической системы $O_1(x_0, y_0)$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_0 + 2y_0 + 2\sqrt{5} = 0 \\ 2x_0 + 2y_0 + 2\sqrt{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\sqrt{5} \end{cases}.$$

Угол поворота φ найдем из условия $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 - A}{B}$.

Поскольку $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} \varphi > 0$ и нам подходит случай (II):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы построили каноническую систему координат O_1XY . Она имеет центр в точке $O_1(0, -\sqrt{5})$ и повернута на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ относительно Oxy . В этой системе уравнение кривой примет вид

$$A_1X_1^2 + C_1Y_1^2 + F_1 = 0, \text{ т.е. } 6X^2 + Y^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{(2\sqrt{6})^2} = 1.$$

Сделаем чертеж (Рис. 2).

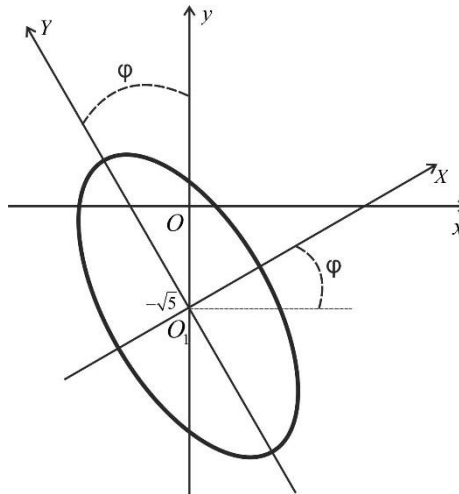


Рис. 2

Таким образом, оба способа решения приводят в итоге к одному ответу, однако построение канонической системы координат на чертеже при использовании второго метода несколько проще.

Методически, сравнивая два способа решения одной и той же задачи, можно сделать вывод, что при приведении к каноническому виду центральной кривой второго порядка метод инвариантов является более простым и лаконичным. Однако, он имеет свои недостатки. Например, при решении задачи этим методом мы не получаем формул (4), связывающих исходные и канонические переменные, а также матрицу ортогонального преобразования (поворота).

Поэтому, если в задаче требуется просто получить каноническое уравнение кривой и построить ее на плоскости (без каких-либо дополнительных заданий), то метод инвариантов явно предпочтительнее. В других случаях, когда, например, требуется найти собственные векторы, ортогональное преобразование поворота, а также результирующую замену переменных, универсальный метод оправдывает свое название полностью.

Заключение

При изложении темы «Приведение кривых второго порядка к каноническому виду» полезно показать студентам как универсальный метод, использующим средства линейной алгебры, так и метод инвариантов. Особенно хорошо показать сравнение этих методов, решая одну и ту же задачу приведения к каноническому виду центральной кривой второго порядка. Материал, изложенный в работе, можно использовать для проведения практических занятий.

В результате, студенты смогут увидеть, как можно прийти к поставленной цели более рациональным путем, в зависимости от поставленной задачи. Кроме того, дополнительные знания позволят расширить кругозор учащихся, глубже изучить тему, проиллюстрировать теоретический материал и в результате позволят студентам свободнее и увереннее чувствовать себя при решении задач.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 280 с.
2. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 336 с.
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – 3-е изд. - М.: Лань, 2019. – 912 с.

Svetlana N. Efremova,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Efremova.sn@gmail.com

Tatyana A. Laskovaya

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

talaskovy@mail.ru

Methodological aspects of the presentation of the topic « Reducing central conic section to the canonical form»

Abstract. The topic « Reducing central conic section to the canonical form» is one of the most difficult in the course of linear algebra. The article describes two methods of presenting the material for the case of reducing central conic section to the canonical form. Methods are compared based on the example of one of such conics. The purpose of the work is to illustrate the advantages and disadvantages of each method described in the article, to spotlight their strengths and weaknesses. As a result, students will be able to choose the most rational way of solving problems, depending on the task.

Keywords: central conic section, canonical equation, orthogonal transformation, invariants method.

О МЕТОДИКЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ ФУРЬЕ»

Аннотация

Для более эффективного проведения семинарских занятий со студентами по теме «Ряды Фурье» при ограниченности отпущенного по программе времени возникает необходимость избежать выполнения громоздких вычислений при решении стандартных задач по разложению функций (обычно кусочно линейных) в тригонометрические ряды Фурье. После внедрения балльно-рейтинговой системы возникла необходимость составления большого количества вариантов различных контрольных заданий. По этой причине стали актуальными новые методы выполнения такой работы. Для решения стандартной задачи по теме «Ряды Фурье» обычно требуется разложить в ряд Фурье некоторую кусочно линейную функцию. Составить достаточно большое количество заданий такого рода нетрудно, но к каждому заданию надо получить также и ответ, а для

его получения традиционным способом требуется большая вычислительная работа. В настоящей статье предлагается методика нахождения разложений в ряд Фурье с использованием свойств преобразования Фурье, которая позволяет значительно сократить вычислительную работу. Появляется возможность на занятиях решать большее число разнообразных задач по данной теме. Для студентов упрощается выполнение типовых расчётов и домашних заданий. Применение упомянутой методики даёт возможность составлять большое число вариантов разнообразных контрольных заданий и ответов к ним, избегая при этом выполнения значительного объема вычислительной работы. В первой части статьи приводятся решения некоторых стандартных задач для того, чтобы показать требуемый для этого объём вычислений. Затем перечисляются свойства преобразования Фурье, необходимые для применения предложенного в статье метода. В заключительной части работы демонстрируются преимущества этого метода на примере решения задачи из первой части. При этом все результаты получаются заново почти без вычислений и отчётливо видны преимущества нового метода.

Ключевые слова

типовые расчеты, ряды Фурье, преобразование Фурье

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.obuhov@outlook.com

Введение

При проведении занятий по теме "Ряды Фурье" при решении стандартных задач по разложению функций (обычно кусочно-линейных) в тригонометрический ряд Фурье традиционным методом большая часть времени уходит на вычисление коэффициентов разложения. Применяя некоторые свойства преобразования Фурье, можно без привлечения специальных программ для ЭВМ значительно упростить нахождение разложений функций в ряд Фурье. Это позволяет эффективнее проводить занятия по данной теме, решая большое число разнообразных задач. Для студентов упрощается выполнение типовых расчетов и домашних заданий. Применение преобразования Фурье позволяет составлять типовые расчеты, контрольные работы, домашние задания и ответы к ним, что является актуальным в связи с внедрением в обучение балльно - рейтинговой системы. Описанию методики применения преобразования Фурье и посвящена данная статья,

1. Решение некоторых стандартных задач

Для сравнения рассмотрим традиционные методы решения некоторых стандартных задач, включаемых в типовые расчеты.

Определение. Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt, n = 1, 2, \dots$$

Пример 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 \leq x < -1, \\ x + 1, & -1 \leq x < 1, \\ -x + 4, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & 3 \leq x \leq 5, \end{cases} \quad (1)$$

заданную на отрезке $[-5, 5]$; график функции изображен на рис. 1.

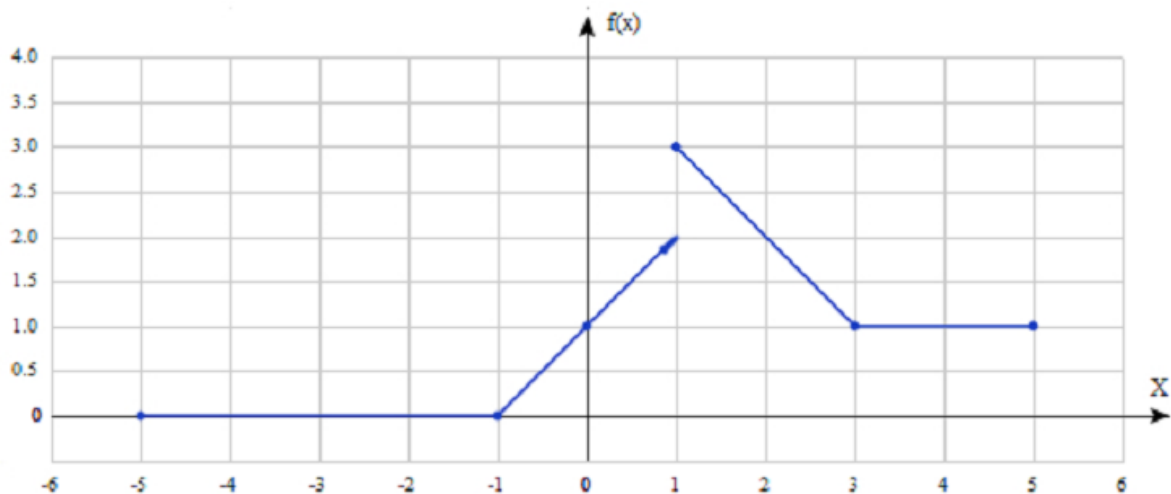


Рис.1

Вычислим коэффициенты Фурье этой функции; имеем

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 (x+1) dx + \frac{1}{5} \int_1^3 (-x+4) dx + \int_3^5 dx = \frac{8}{5};$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 (x+1) \cos \frac{n\pi x}{5} dx + \frac{1}{5} \int_1^3 (-x+4) \cos \frac{n\pi x}{5} dx +$$

$$+ \frac{1}{5} \int_3^5 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{5} & dx \\ v = \int \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} u = -x+4 & du = -dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{5} & dx \\ v = \int \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left[\frac{5(x+1)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right] + \\
&+ \frac{1}{5} \left[\frac{5(-x+4)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right] + \\
&+ \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_3^5 = \frac{1}{5} \left[\frac{2 \cdot 5}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} - \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(-\cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_{-1}^1 \right] + \\
&+ \frac{1}{5} \left[\frac{5}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{5} - \frac{3 \cdot 5}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} - \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_1^3 \right] - \\
&- \frac{1}{5} \left[\frac{5}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{5} \right] = \frac{1}{5} \left[\frac{10}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} + \frac{5}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{5} - \frac{15}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} \right] - \\
&- \frac{1}{5} \left[\left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{3n\pi}{5} - \cos \frac{n\pi}{5} \right) \right] - \frac{1}{5} \left[\frac{5}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{5} \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{5} - \cos \frac{3n\pi}{5} \right) - \frac{5}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(2 \cdot \sin \frac{2n\pi}{5} \cdot \sin \frac{n\pi}{5} \right) + \frac{5}{n\pi} \left(\sin \frac{5n\pi}{5} - \sin \frac{n\pi}{5} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 2 \left(2 \sin \frac{n\pi}{5} \cos \frac{n\pi}{5} \right) \sin \frac{n\pi}{5} + \frac{5}{n\pi} 2 \sin \frac{2n\pi}{5} \cos \frac{3n\pi}{5} \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[4 \left(\cos \frac{n\pi}{5} \right) \cdot \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{5} \right)^2 + 4 \left(\cos \frac{3n\pi}{5} \right) \frac{5}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{5} \right].
\end{aligned}$$

Аналогично найдём и коэффициенты b_n . Здесь требуется примерно тот же объем вычислений. Приведем лишь окончательный результат:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{5} \left[\int_{-1}^1 (x+1) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right] + \\
&+ \frac{1}{5} \left[\int_1^3 (-x+4) \sin \frac{n\pi x}{5} dx + \int_3^5 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right] = \\
&= \frac{1}{5} \left[\left(4 \sin \frac{n\pi}{5} \right) \cdot \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{5} \right)^2 + \left(4 \sin \frac{3n\pi}{5} \right) \cdot \frac{5}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{5} \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим решение другой стандартной задачи.

Определение. *Неполным тригонометрическим рядом Фурье по косинусам* функции $g(x)$ на интервале $[0, l]$ называется *ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{1}{2l} \int_0^l g(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 2. Разложить в неполный тригонометрический ряд Фурье по косинусам следующую функцию

$$g(x) = f(x-1) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ -x+5, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & 4 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[0, 6]$; график функции изображен на рис. 2.

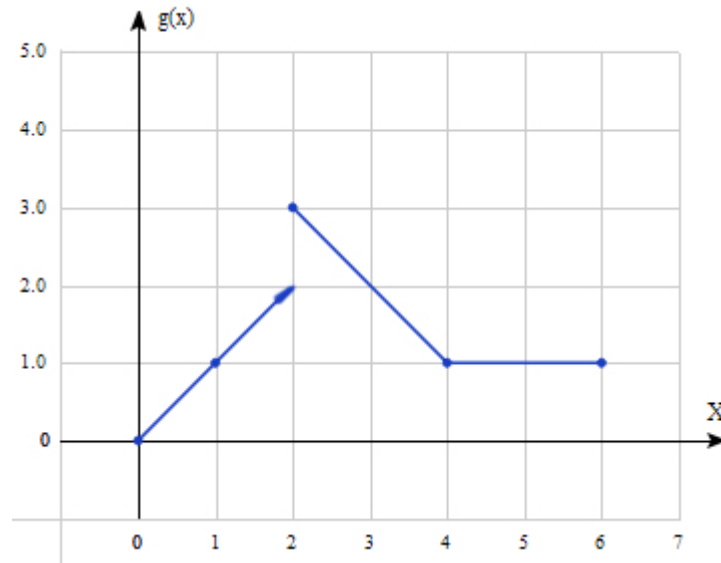


Рис. 2

Найдем коэффициенты Фурье a_n :

$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot 6} \int_0^2 x dx + \frac{1}{2 \cdot 6} \int_2^4 (-x + 5) dx + \frac{1}{2 \cdot 6} \int_4^6 1 dx = \frac{8}{12};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2 \cdot 6} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{6} dx + \frac{1}{2 \cdot 6} \int_2^4 (-x + 5) \cos \frac{n\pi x}{6} dx + \\ &+ \frac{1}{2 \cdot 6} \int_4^6 \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \left| \begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ dv=\cos \frac{n\pi x}{6} dx \\ v=\int \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} \end{array} \right|, \\ &\left| \begin{array}{l} u=-x+5 \\ du=-dx \\ dv=\cos \frac{n\pi x}{6} dx \\ v=\int \cos \frac{n\pi x}{6} dx = \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} \end{array} \right| = \frac{1}{12} \left[x \cdot \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} \Big|_0^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{12} \left[- \int_0^2 \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} dx + (-x + 5) \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} \Big|_2^4 \right] + \\ &+ \frac{1}{12} \left[- \int_2^4 \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} (-dx) + \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{6} \Big|_4^6 \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} - \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(-\cos \frac{n\pi x}{6} \right) \Big|_0^2 + \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \right] + \\ &\frac{1}{12} \left[-\frac{18}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(-\cos \frac{n\pi x}{6} \right) \Big|_2^4 + \frac{6}{n\pi} \left(-\sin \frac{2n\pi}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{3} - 1 \right) + \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \right] + \\ &+ \frac{1}{12} \left[-\frac{18}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(-\cos \frac{2n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{3} \right) - \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} \left[-\frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - \cos \frac{2n\pi}{3} - 1 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{12} \left[\frac{6}{n\pi} \left(\sin \frac{3n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right) + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - \left(1 + \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{12} \left[\frac{6}{n\pi} 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \cdot \sin \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - 2 \left(\cos \frac{n\pi}{3} \right)^2 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{12} \left[\left(4 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \cdot \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{3} \right) \right) \right] = \\
&= \frac{1}{12} \left[\left(4 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \cdot \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \left(4 \cos \frac{n\pi}{3} \right) \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{6} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим решение ещё одной стандартной задачи.

Определение. *Неполным тригонометрическим рядом Фурье по синусам* функции $g(x)$ на интервале $[0, l]$ называется **ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{1}{2l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n = 1, 2, \dots$$

Пример 2. Разложить в неполный тригонометрический ряд Фурье по синусам функцию $g(x) = f(x - 1)$, заданную на отрезке $[0, 6]$; график функции изображен на рис.2.

Решение. Объем вычислений здесь такой же, как и в предыдущем примере. Приведем лишь окончательный результат:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2 \cdot 6} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{6} dx + \frac{1}{2 \cdot 6} \int_2^4 (-x + 5) \sin \frac{n\pi x}{6} dx + \\
&\quad + \frac{1}{2 \cdot 6} \int_4^5 \sin \frac{n\pi x}{6} dx = \\
&= \frac{1}{12} \left[\left(4 \sin \frac{n\pi}{3} \right) \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{6} \right)^2 + \left(4 \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \right].
\end{aligned}$$

Из решенных стандартных задач для кусочно линейных функций видно, что для вычисления коэффициентов разложения функций в ряд Фурье требуется относительно большой объем вычислительной работы при решении задач на практических занятиях, выполнении домашних работ, типовых расчетов и составлении ответов к вариантам домашних заданий типовых расчетов и контрольных работ по теме "Ряды Фурье".

Методика применения преобразования Фурье основана на следующих положениях. Любая кусочно линейная функция может быть записана в виде линейной комбинации трех относительно простых функций. Найдя преобразование Фурье этих функций и используя затем свойства этого преобразования, получаем преобразование Фурье этой функции. По преобразованию Фурье кусочно линейной функции находим разложение этой функции в тригонометрический ряд Фурье. Поэтому рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье, которые будут использованы в дальнейшем, и преобразование Фурье трех простых функций.

2. Определение и основные свойства преобразования Фурье.

Обозначим символом $L_1(\mathbb{R})$ множество всех абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций, т.е.

$$L_1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty\}. \quad (2)$$

Определение. Отображение F , ставящее в соответствие функции f функцию, обозначаемую $\hat{f}$ или $F[f]$ и определяемую формулой

$$F[f(x)](v) = \hat{f}(v) = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ivx} dx, \quad (3)$$

называется **преобразованием Фурье (образом Фурье)** функции $f(x)$.

Преобразование Фурье определено для всех функций f , для которых в смысле главного значения (V.p.) существует интеграл (3).

Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то интеграл (3) превращается в обычный несобственный интеграл и для них существует преобразование Фурье.

Действительно, если комплекснозначная функция $f \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\begin{aligned} |f(x)e^{-ivx}| &\leq |f(x)| |e^{-ivx}| = |f(x)| |\cos vx - i \sin vx| = \\ &= |f(x)| \sqrt{\cos^2 vx + \sin^2 vx} = |f(x)|. \end{aligned}$$

Так как $f \in L_1(\mathbb{R})$, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ivx} dx$ абсолютно сходится при всех $v \in \mathbb{R}$ и, следовательно, сходится. Поэтому в формуле (3) можно снять символ главного значения V.p.

Определение. Преобразованием Фурье (образом Фурье)

функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется функция $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, определенная по формуле

$\hat{f}(v) = F[f(x)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ivx} dx$ (4) Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье функций $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Теорема. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(v)$ является ограниченной непрерывной функцией при $v \in \mathbb{R}$, причем $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(v) = 0$.

Доказательство теоремы можно найти в [1] – [4].

Теорема. (свойство линейности преобразования Фурье)

Если для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье, то для любых чисел λ_1 и λ_2 существует преобразование Фурье для функции $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, причем

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](v) = \lambda_1 F[f_1](v) + \lambda_2 F[f_2](v). \quad (5)$$

Доказательство этого свойства следует из определения преобразования Фурье (4) и линейности несобственного интеграла.

Теорема подобия. Если для функции $f(ax)$ существует преобразование Фурье, то

$$F[f(ax)](v) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{v}{a}\right), \quad a > 0. \quad (6)$$

Доказательство. По условию и определению (4)

$$F[f(ax)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ivx} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-i\frac{v}{a}(ax)} d(ax) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{v}{a}\right). \blacksquare$$

Теорема запаздывания. Если для функции $f(x-m)$ существует преобразование Фурье, то

$$F[f(x-m)](v) = e^{-imv} \hat{f}(v), \quad m \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Доказательство. По условию и определению (4)

$$\begin{aligned} F[f(x-m)](v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-m) e^{-ivx} dx = \int_{x=u+m}^{x=u+m} f(u) e^{-iv(u+m)} du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iv(u+m)} du = e^{-imv} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ivu} du = e^{-imv} \hat{f}(v). \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема сдвига. Если для функции $e^{-i\lambda x} f(x)$ существует преобразование Фурье, то

$$F[e^{-i\lambda x} f(x)](v) = \hat{f}(v-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Доказательство. По условию и определению (4) имеем

$$F[e^{-i\lambda x} f(x)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) e^{-ivx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(v-\lambda)x} dx = \hat{f}(v-\lambda). \blacksquare$$

Определение. *Сверткой* функций $f(x)$, $g(x) \in L_1(\mathbb{R})$ называется функция $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$, $x \in \mathbb{R}$, (9)

при условии, что несобственный интеграл сходится при всех $x \in \mathbb{R}$.

Замечание. Свертка двух непрерывных, ограниченных и абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций определена и является непрерывной, ограниченной и абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией.

Теорема (о преобразовании Фурье свертки). Если функции f и g непрерывны, ограничены и принадлежат классу $L_1(\mathbb{R})$, то свертка $f * g$ функций f и g также непрерывна, ограничена и $(f * g)(x) \in L_1(\mathbb{R})$, причем

$$F[(f * g)(x)](v) = F[f(x)](v) \cdot F[g(x)](v). \quad (10)$$

Доказательство. В силу замечания свертка $(f * g)(x) \in L_1(\mathbb{R})$, для нее существует преобразование Фурье

$$\begin{aligned} F[(f * g)(x)](v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ivx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \right) e^{-ivx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) e^{-ivx} dt dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Получили повторный несобственный интеграл (11). Для узкого класса функций, удовлетворяющих условиям теоремы, по теореме о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле, когда оба интеграла несобственные [5], [6], можно изменить в (11) порядок интегрирования относительно переменных x и t . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) e^{-ivx} dx dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{-ivx} dx \right) dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} x-t=s, dx=dt \\ x=s+t, x|_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow s|_{-\infty}^{+\infty} \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-iv(s+t)} ds \right) dt = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ivt} dt \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-ivs} ds \right) = F[f(x)](v) \cdot F[g(x)](v). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание. В случае двух одинаковых функций говорят об *автосвертке*.

Преобразование Фурье элементарных импульсных функций.

Определение. *Кардинальным синусом* называется функция

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Пример 4. Найдем преобразование Фурье прямоугольного единичного импульса (рис.3):

$$f(x) = \text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 0,5; \\ 0, & |x| > 0,5. \end{cases}$$

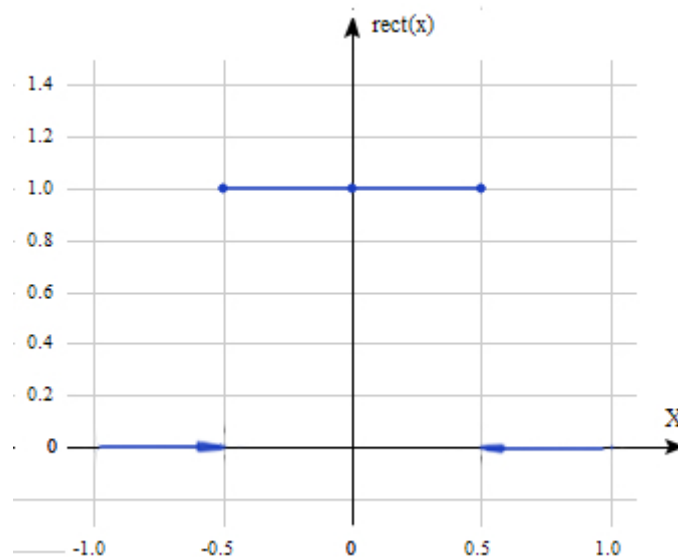


Рис. 3

Решение. $F[rect(x)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(x) e^{-ivx} dx$.

При $v = 0$ получим

$$\widehat{rect}(0) = F[rect(x)](0) = \int_{-0,5}^{0,5} 1 \cdot dx = 1.$$

При $v \neq 0$ получается следующий результат:

$$\begin{aligned} \widehat{rect}(v) &= \int_{-0,5}^{0,5} 1 \cdot e^{-ivx} dx = \int_{-0,5}^{0,5} \left(\frac{1}{-iv} \right) \cdot e^{-ivx} d(-ivx) = \\ &= \left(\frac{1}{-iv} \right) e^{-ivx} \Big|_{-0,5}^{0,5} = \frac{1}{iv} (e^{0,5iv} - e^{-0,5iv}) = \\ &= \frac{1}{iv} \left[\left(\cos \frac{v}{2} + i \sin \frac{v}{2} \right) - \left(\cos \frac{v}{2} - i \sin \frac{v}{2} \right) \right] = \frac{2}{v} \sin \frac{v}{2} \end{aligned}$$

Надо отметить, что функция $\widehat{rect}(v)$ непрерывна в точке $v = 0$, т.к.

$$\lim_{v \rightarrow 0} \widehat{rect}(v) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{2}{v} \sin \frac{v}{2} = 1 = \widehat{rect}(0).$$

Таким образом,

$$\widehat{rect}(v) = F[rect(x)](v) = \text{sinc} \left(\frac{v}{2} \right).$$

Пример 5. Найдем автосвёртку функции $f(x) = rect(x)$ [7].

Решение. По определению

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) dt, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Здесь } f(t) = rect(t) = \begin{cases} 0, & t < -0,5; \\ 1, & -0,5 \leq t \leq 0,5; \\ 0, & t > 0,5; \end{cases}$$

$$f(x-t) = \begin{cases} 0, & t < -0,5; \\ 1, & x-0,5 \leq t \leq x+0,5; \\ 0, & t > 0,5. \end{cases}$$

В зависимости от того, какие значения принимает переменная x , можно выделить четыре случая (рис. 4):

$$\text{а) } x < -1: (rect * rect)(x) = \int_{x+0,5}^{-0,5} 0 \cdot 0 dt = 0;$$

$$\text{б) } -1 \leq x < 0: (rect * rect)(x) = \int_{-0,5}^{x+0,5} 1 \cdot 1 dt = x + 1;$$

$$\text{в) } 0 \leq x < 1: (rect * rect)(x) = \int_{x-0,5}^{0,5} 1 \cdot 1 dt = 1 - x;$$

$$\text{г) } x \geq 1: (rect * rect)(x) = \int_{0,5}^{x-0,5} 0 \cdot 0 dt = 0.$$

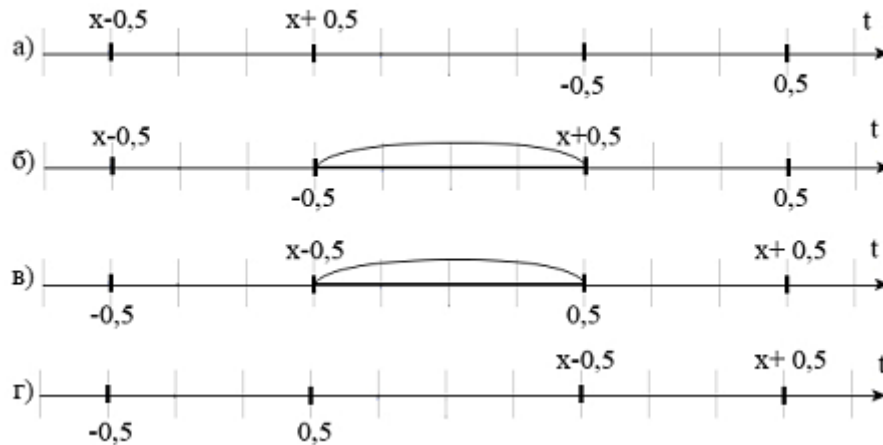


Рис. 4

Таким образом,

$$rect(x) * rect(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ 1 + x, & -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases} = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

График функции $rect(x) * rect(x)$ представлен на рис.5.

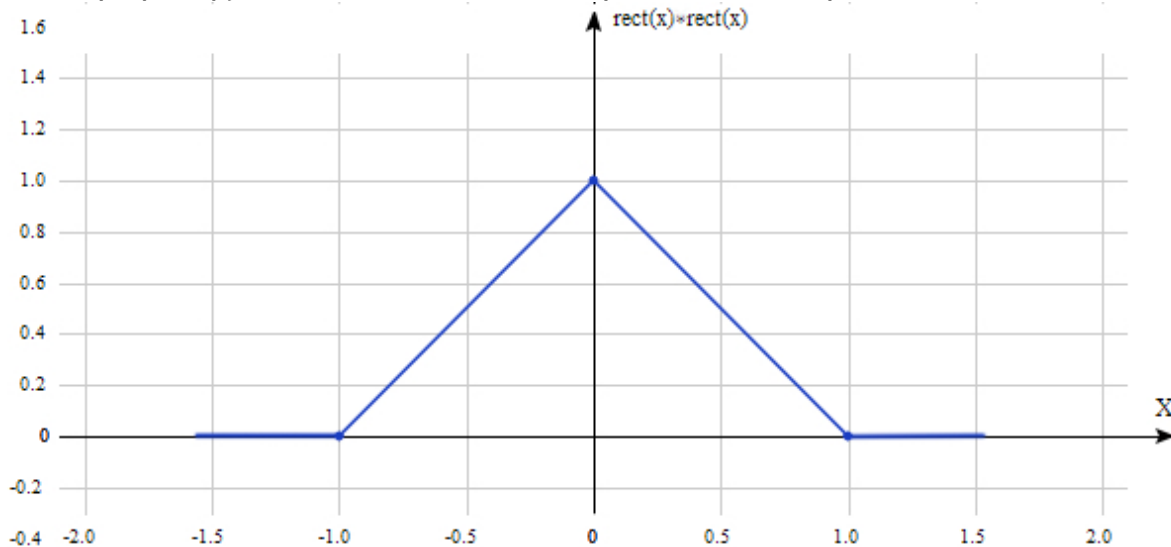


Рис. 5

Пример 6. Найти образ Фурье треугольного импульса (рис.5) :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение. Из примера 5 видно, что $\Lambda(x)$ является автосвёрткой функции $rect(x)$, т. е. $\Lambda(x) = rect(x) * rect(x)$.

Применяя теорему о преобразовании свертки, получим:

$$F[\Lambda(x)](v) = F[rect(x) * rect(x)](v) = \\ = \{F[rect(x)](v)\}^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{v}{2}\right).$$

Пример 7. Найдём преобразование Фурье функции (рис.6)

$$h(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

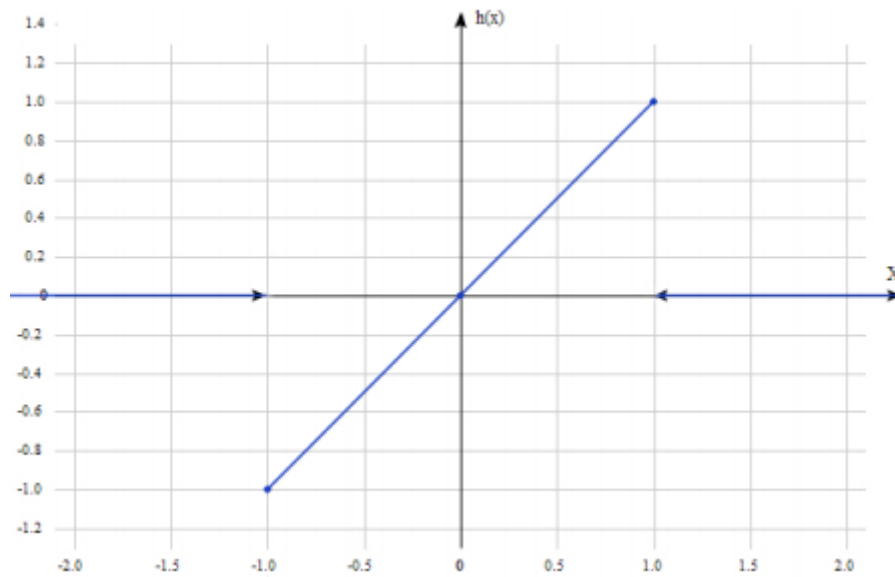


Рис. 6

Решение.

$$\begin{aligned}
 F[h(x)](v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-ivx} dx = \int_{-1}^1 x e^{-ivx} dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{(-ivx)}{(-iv)} e^{-ivx} \frac{1}{(-iv)} d(-ivx) = \left(-\frac{1}{v^2}\right) (-ivx e^{-ivx} - e^{-ivx}) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \left(-\frac{1}{v^2}\right) [-ive^{-iv} - e^{-iv} - (ive^{iv} - e^{iv})] = \\
 &= \left(-\frac{1}{v^2}\right) [(-iv)(e^{iv} + e^{-iv}) + (e^{iv} - e^{-iv})] = \\
 &= \frac{2i}{v} \left(\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}\right) - \frac{2i}{v^2} \left(\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}\right) = \\
 &= \frac{2i}{v} \cos v - \frac{2i}{v^2} \sin v.
 \end{aligned}$$

Используя свойства преобразования Фурье и найденные преобразования Фурье трех основных функций можно получить преобразование Фурье любой кусочно линейной функции.

Пример 8. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, график которой представлен на рис. 1.

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде линейной комбинации импульсных функций $rect(x)$ и $\Lambda(x)$.

График функции $f_1(x)$ получается из графика функции $\Lambda(x)$ – стандартного "треугольного импульса" в результате последовательного применения следующих преобразований: растяжения вдоль оси абсцисс в 2 раза, растяжения вдоль оси ординат в 2 раза и сдвига вдоль оси абсцисс на одну единицу вправо, как показано на рис.7:

$$f_1(x) = 2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

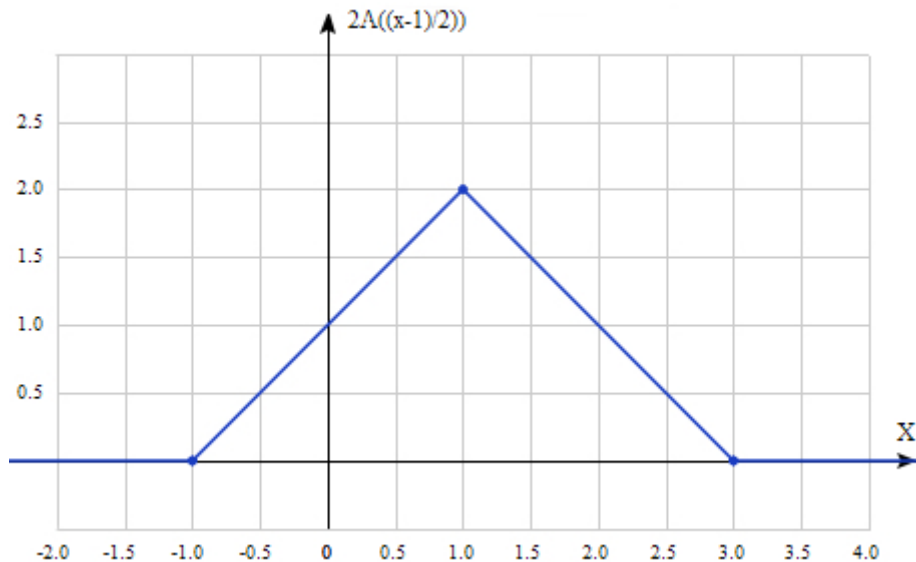


Рис.7

График $f_2(x)$ получается из графика $rect(x)$ в результате растяжения вдоль оси абсцисс в 4 раза и сдвига вдоль оси абсцисс на 3 единицы вправо, как показано на рис. 8:

$$f_2(x) = rect\left(\frac{x-3}{4}\right).$$

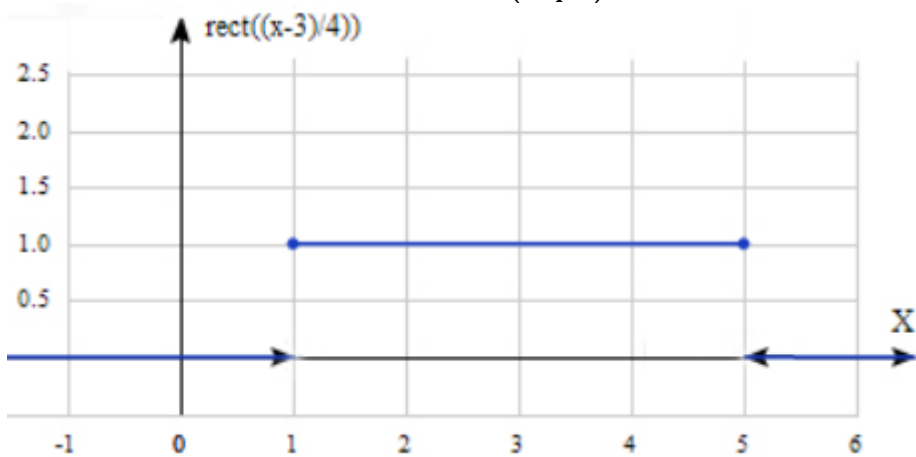


Рис.8

Таким образом,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right) + rect\left(\frac{x-3}{4}\right).$$

Используя свойства преобразования Фурье, найдем образ Фурье функции $f(x)$.

$$\begin{aligned} F[f(x)](v) &= F\left[2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right) + rect\left(\frac{x-3}{4}\right)\right](v) = \\ &= |\text{по лин. свойству}| = 2F\left[\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)\right](v) + F\left[rect\left(\frac{x-3}{4}\right)\right](v) = \\ &= |\text{по т. подобия}| = 4F[\Lambda(x-1)](2v) + 4F[rect(x-3)](4v) = \\ |\text{по т. запазд.}| &= 4e^{-vi}F[\Lambda(x)](2v) + 4e^{-3vi}F[rect(x)](4v) = \\ &= |\text{по образу Фурье для функций } \Lambda(x) \text{ и } rect(x)| = \\ &= 4e^{-vi}(\text{sinc}(v))^2 + 4e^{-3vi}\text{sinc}(2v). \end{aligned}$$

Пример 9. Найти образ Фурье функции $g(x) = f(x-1)$, график которой изображен на рис .2.

Решение. Так как график функции $g(x)$ является графиком функции $f(x)$, но смещённым вдоль оси абсцисс на одну единицу вправо, то образ Фурье $g(x)$ можно найти из преобразования Фурье функции $f(x)$, используя теорему запаздывания:

$$\begin{aligned} F[g(x)](v) &= F[f(x-1)](v) = e^{-vi} F[f(x)](v) = \\ &= e^{-vi} \left(4e^{-vi} (\text{sinc}(v))^2 + 4e^{-3vi} \text{sinc}(2v) \right) = \\ &= \left(4e^{-2vi} (\text{sinc}(v))^2 + 4e^{-4vi} \text{sinc}(2v) \right). \end{aligned}$$

3. Применение преобразования Фурье.

Пусть функция $f(x)$, определена на отрезке $[-l, l]$, и пусть требуется разложить ее в тригонометрический ряд Фурье на этом отрезке; будем считать при этом, что $f(x) = 0$, если $x \notin [-l, l]$. Для соответствующих коэффициентов Фурье имеем формулы:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \left(\cos \frac{n\pi t}{l} + i \sin \frac{n\pi t}{l} \right) dt = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{in\pi/l} dt \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{l} F[f(t)] \left(-\frac{n\pi}{l} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{1}{l} \text{Re } F[f(t)] \left(-\frac{n\pi}{l} \right), \quad b_n = \frac{1}{l} \text{Im } F[f(t)] \left(-\frac{n\pi}{l} \right).$$

С помощью полученных формул можно без труда, используя преобразование Фурье кусочно линейных функций, которое было изложено в предыдущем разделе, вычислять коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для любой кусочно линейной функции.

Рассмотрим примеры применения преобразования Фурье.

Пример 10. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-5, 5]$ и изображенной на рис.1, используя её преобразование Фурье.

Решение. Изображение Фурье функции $f(x)$ получено в примере 8.

Поэтому для коэффициентов разложения в тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{5} + b_n \sin \frac{n\pi x}{5}$$

имеем по полученным формулам и формуле Эйлера $e^{\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{5} \text{Re } \hat{f}(0) = \\ &= \frac{1}{5} \text{Re} \left(4e^{-vi} (\text{sinc}(v))^2 + 4e^{-3vi} \text{sinc}(2v) \right) \Big|_{v=0} = \frac{8}{5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5} \text{Re } \hat{f} \left(-\frac{n\pi}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \text{Re} \left(4e^{-vi} (\text{sinc}(v))^2 + 4e^{-3vi} \text{sinc}(2v) \right) \Big|_{v=-n\pi/5} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left(4 \cos \frac{n\pi}{5} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{n\pi}{5} \right) \right)^2 + 4 \cos \frac{3n\pi}{5} \operatorname{sinc} \left(\frac{2n\pi}{5} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{5} \left[4 \left(\cos \frac{n\pi}{5} \right) \cdot \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \cdot \left(\sin \frac{n\pi}{5} \right)^2 + 4 \left(\cos \frac{3n\pi}{5} \right) \frac{5}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{5} \right], \\
&\quad n = 1, 2, \dots; \\
&b_n = \frac{1}{5} \operatorname{Im} \hat{f} \left(-\frac{n\pi}{5} \right) = \\
&= \frac{1}{5} \operatorname{Im} \left(4e^{-vi} \left(\operatorname{sinc}(v) \right)^2 + 4e^{-3vi} \operatorname{sinc}(2v) \right) \Big|_{v=-n\pi/5} = \\
&= \frac{1}{5} \left(4 \sin \frac{n\pi}{5} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{n\pi}{5} \right) \right)^2 + 4 \sin \frac{3n\pi}{5} \operatorname{sinc} \left(\frac{2n\pi}{5} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{5} \left[4 \left(\sin \frac{n\pi}{5} \right) \cdot \left(\frac{5}{n\pi} \right)^2 \cdot \left(\sin \frac{n\pi}{5} \right)^2 + 4 \left(\sin \frac{3n\pi}{5} \right) \frac{5}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{5} \right], \\
&\quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Итак, мы получили коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $f(x)$ (рис.1), пользуясь её преобразованием Фурье, почти без вычислений по сравнению с получением её коэффициентов Фурье в примере 1.

Столь же просто решается вопрос и в разложении в неполные ряды Фурье на отрезке $[0, l]$. Если функция задана на таком отрезке и равна нулю при $x \notin [0, l]$, то для коэффициентов разложений

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \text{ и } g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

имеем аналогичное равенство

$$\begin{aligned}
a_n + b_n &= \frac{1}{2l} \int_0^l g(t) \left(\cos \frac{n\pi t}{l} + i \sin \frac{n\pi t}{l} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{n\pi t/l} dt = \frac{1}{2l} F[g(t)] \left(-\frac{n\pi}{l} \right) = \frac{1}{2l} \hat{g} \left(-\frac{n\pi}{l} \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{1}{2l} F[g(t)] \left(-\frac{n\pi}{l} \right), b_n = \frac{1}{2l} F[g(t)] \left(-\frac{n\pi}{l} \right).$$

Пример 11. Разложить в неполные тригонометрические ряды Фурье функцию $g(x)$, заданную на отрезке $[0, 6]$ и изображенной на рис. 2, пользуясь её преобразованием Фурье.

Решение. Преобразование Фурье функции $g(x)$ получено в примере 9.

Поэтому для коэффициентов разложений в неполные ряды Фурье

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{6}, g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{6}$$

имеем по полученным формулам и формуле Эйлера $e^{\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{12} \operatorname{Re} \hat{f}(0) = \\
&= \frac{1}{12} \operatorname{Re} \left(4e^{-vi} \left(\operatorname{sinc}(v) \right)^2 + 4e^{-3vi} \operatorname{sinc}(2v) \right) \Big|_{v=0} = \frac{8}{12}; \\
a_n &= \frac{1}{12} \operatorname{Re} \hat{g} \left(-\frac{n\pi}{6} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12} \operatorname{Re} \left(4e^{-2vi} (\operatorname{sinc}(v))^2 + 4e^{-4vi} \operatorname{sinc}(2v) \right) \Big|_{v=-n\pi/6} = \\
&= \frac{1}{12} \left(4 \cos \frac{n\pi}{3} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{n\pi}{6} \right) + 4 \cos \frac{2n\pi}{3} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{12} \left[\left(4 \cos \frac{n\pi}{3} \right) \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{6} \right)^2 + \left(4 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \right], \\
&\quad n = 1, 2, \dots; \\
&b_n = \frac{1}{12} \operatorname{Im} \hat{g} \left(-\frac{n\pi}{6} \right) = \\
&= \frac{1}{12} \operatorname{Im} \left(4e^{-2vi} (\operatorname{sinc}(v))^2 + 4e^{-4vi} \operatorname{sinc}(2v) \right) \Big|_{v=-n\pi/6} = \\
&= \frac{1}{12} \left(4 \sin \frac{n\pi}{3} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{n\pi}{6} \right) + 4 \sin \frac{2n\pi}{3} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{12} \left[\left(4 \sin \frac{n\pi}{3} \right) \left(\frac{6}{n\pi} \right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{6} \right)^2 + \left(4 \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \right], \\
&\quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Полученные результаты полностью совпадают с решением примеров 1, 2. Методика применения преобразования Фурье позволила получить эти результаты почти без вычислений.

Если кусочно-линейную функцию не удастся выразить через линейную комбинацию импульсных функций, как в рассмотренных примерах, то можно воспользоваться преобразованием Фурье функции $h(x)$.

Заключение

Методика получения разложения кусочно-линейных функций в тригонометрические ряды Фурье с привлечением преобразований Фурье элементарных функций, из которых можно образовывать любые кусочно-линейные функции, позволяет эффективнее проводить практические занятия со студента, упрощает для студентов выполнение типовых расчетов и домашних заданий по данной теме. Методика дает возможность составлять (конструировать) варианты типовых расчетов, контрольных работ, домашних заданий по теме "Ряды Фурье" и получать без особых вычислений ответы к таким заданиям.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Власова Е.А. Ряды: учеб. для втузов / Е.А Власова ; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 612 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа: часть II / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. М.: Наука, 1973. 447 с.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1976. 544 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ: т. II / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высшая школа, 1973. 470 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Указ. соч.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т. III / Г.М. Фихтенгольц. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960. 656 с.
7. Чигирёва О.Ю. Ряды Фурье. Преобразование Фурье: методические указания / О.Ю. Чигирёва; под ред. А.Н. Канатникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 52 с.

Pavel L. Ivankov,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ivankovpl@mail.ru

Viktor P. Obuhov,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

v.obuhov@outlook.com

On the methods of applying Fourier transform at practical classes on the topic «Fourier series»

Abstract. To carry out seminars with students on the topic «Fourier series» more effectively, in the situation of the limited time according to the curriculum, there arises the necessity to avoid complicated calculations concerning the expansion of functions (usually piecewise linear) in Fourier series. After introduction of rating system there appeared the necessity of compiling many variants of different tests. For this reason, new methods of carrying out such a work became actual. To solve a standard task within the topic «Fourier series» a student usually has to expand some piecewise linear function in Fourier series. It is not difficult to compile many tasks of that type but it is necessary to prepare answer for every task as well, and one has to execute many calculations to get all these answers by traditional methods. In this paper, we propose a new method of expanding piecewise linear functions in Fourier series with the use of the Fourier transform properties. This method makes it possible to reduce significantly the required volume of calculations. It gives us an opportunity to solve more problems during a seminar and that improves the process of instructing students on this topic. It becomes easier for students to fulfil tests and homeworks. Application of the abovementioned method makes it possible to compile many variants of tests and answers for them almost without calculations. In the first part of this paper, we solve some standard problems by means of traditional method in order to show the required volume of calculations for that task. After that we consider the properties of Fourier transform necessary for the method proposed in this paper. In the last part of the paper, we demonstrate the advantages of this method by solving the problems given in the first part of the paper almost without calculations.

Key words: routine calculations, Fourier series, Fourier transform.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация

В статье рассматриваются некоторые проблемы оценки знаний студентов в условиях модульно-рейтинговой системы. Оценка знаний студентов является важным элементом процесса обучения, в связи с чем актуальность рассматриваемых вопросов высока. Целью исследования являлось изучение особенностей выставления оценок преподавателями на примере кафедры ФН-12 «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э.Баумана. Показано, что существующая система оценки знаний требует доработки.

Ключевые слова

модульно-рейтинговая система, оценка знаний

АВТОРЫ

Кавинов Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Введение

Оценка знаний студентов - важный элемент процесса обучения. Являясь элементом обратной связи в процессе обучения, она позволяет корректировать его процесс и способствует самопознанию студента. В современной педагогике принято считать [1,2], что требования к оценке знаний и умений студентов включают в себя:

1. Объективность: оценка должна отражать действительный уровень усвоения учебного материала;
2. Индивидуальный характер: оценка должна фиксировать уровень знаний конкретного студента;
3. Гласность: оценка должна быть доведена до сведения как самого обучаемого, так и его коллег;
4. Обоснованность: оценка должна быть мотивированной и убеждающей.

В настоящей статье авторы рассматривают некоторые проблемы обоснованности и объективности оценки знаний студентов при использовании модульно-рейтинговой системы.

Модульно-рейтинговая система в учебном процессе в МГТУ им. Н.Э. Баумана стала внедряться с сентября 2011 года на основании приказа ректора МГТУ им. Н.Э. Баумана №31-03/1270 от 29 октября 2010г. Процессу внедрения системы посвящён ряд публикаций [3-8].

В соответствии с модульно-рейтинговой системой студенты в течение семестра получают баллы за выполненные контрольные мероприятия. Эти мероприятия группируются по частям, называемым модулями. Экзамен, если он предусмотрен учебным планом, считается отдельным модулем. Всего за весь семестр студент может получить максимум 100 баллов по каждому курсу. В конце семестра полученные баллы суммируются и в соответствии с вычисленной суммой, называемой балльной оценкой или рейтингом, выставляется итоговая оценка по пятибалльной шкале. При этом соответствие между суммой баллов и оценкой устанавливается таблицей 1:

Таблица 1

Рейтинг	Оценка на экзамене
85 - 100	отлично
71 - 84	хорошо
60 - 70	удовлетворительно
0 - 59	неудовлетворительно

Приведём некоторые пункты Положения о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов МГТУ им. Н.Э.Баумана от 23 января 2017 года, регламентирующего, в том числе, формы и порядок текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

3.9. Модуль учебной дисциплины - часть дисциплины, логически завершённая по отношению к установленным целям и результатам обучения и воспитания. По окончании модуля учебной дисциплины подводятся итоги текущего контроля, осуществляемого в рамках этого модуля. Количество модулей определяется в зависимости от содержания и трудоемкости дисциплины.

3.10. Балл - единица количественной оценки успешности освоения студентом каждой дисциплины основной образовательной программы. Балл является целым числом. Максимальное значение баллов равно 100 для каждой дисциплины за семестр. Распределение баллов по модулям учебной дисциплины указывается в рабочей программе дисциплины.

3.11. Балльная оценка по дисциплине (*называется также рейтингом - прим. авторов*) - суммарное количество баллов, начисленных по итогам текущего контроля

и промежуточной аттестации. Формируется из семестровой и экзаменационной составляющих. Если программой дисциплины экзамен не предусмотрен, то балльная оценка по дисциплине состоит только из семестровой составляющей.

3.17. Оценка - единица измерения качества образовательной деятельности студента. Определяется после промежуточной аттестации по дисциплине путем преобразования балльной оценки (см.п.3.10) по утверждённой шкале. В зависимости от вида промежуточной аттестации используются следующие оценки, выставляемые в экзаменационную ведомость ...

– положительные оценки: «зачёт» (Зчт), «удовлетворительно» (Удов), «хорошо» (Хор), «отлично» (Отл).

– неудовлетворительные оценки: «незачёт» (Нзч), «не аттестован» (Нат), «неудовлетворительно» (Неуд) и «неявка» (Я), проставляемая студенту, не явившемуся на промежуточную аттестацию.

3.18. Рейтинговая система - система контроля и оценки знаний студентов, основанная на суммировании баллов, полученных студентом за все виды учебной работы (работа на лекциях, практических, семинарских занятиях, за выполнение лабораторных, контрольных работ, расчетно-графических, курсовых работ/проектов и т.д.) с последующим определением рейтинга студента.

3.19. Рейтинг студента - индивидуальная накопительная оценка студента. Формируется суммированием балльных оценок по дисциплине, набранных студентом по всем дисциплинам.

О проведении экзамена в Положении, в частности, сказано следующее:

4.2.9. В рамках рейтинговой системы контроля успеваемости студентов, семестровая составляющая балльной оценки по дисциплине формируется при наборе заданной в программе дисциплины суммы баллов, получаемых студентом при текущем контроле в процессе освоения модулей учебной дисциплины в течение семестра.

4.2.10. Экзаменационную составляющую балльной оценки студент может набрать по итогам промежуточной аттестации в форме экзамена по дисциплине во время экзаменационной сессии. По решению кафедры и при соответствующем построении учебного графика дисциплины экзаменационная составляющая может быть сформирована в течение учебного времени семестра.

4.2.15. На экзамен выделяется 30 баллов из 100. Количество вопросов и задач в билете не может превышать количество модулей учебной дисциплины в текущем семестре. Каждый вопрос и каждая задача билета оцениваются в баллах, количество которых указывается в билете. Перечень теоретических вопросов и примеры типовых задач доводят до студентов на консультации перед экзаменом. Экзамен считается сданным, если за него студент получил в сумме не менее 18 баллов. Студент, получивший меньший балл признается не прошедшим промежуточную аттестацию по данной учебной дисциплине и в зачетной ведомости ему проставляется оценка «неудовлетворительно».

4.2.24. ... Итоговая оценка (за экзаменационную составляющую - прим. авторов) определяется как сумма баллов, набранных студентам по всем вопросам билета.

Ключевым для данной статьи пунктом Положения является следующий:

4.3.1. Рейтинг студента по дисциплине за семестр определяется как сумма баллов, полученных им за все модули учебной дисциплины, и баллов за промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов за дисциплину в семестре устанавливается равным 100. При наличии в учебном плане экзамена по дисциплине, студент может набрать за работу в семестре максимально 70 баллов и дополнительно 30 баллов - по результатам промежуточной аттестации в форме экзамена.

При отсутствии экзамена студенту выставляется его рейтинг по дисциплине (зачет или оценка) в соответствии с набранными им в течение семестра баллами.

В случаях набора студентом «пограничных» значений баллов, отличающихся от близкого, более высокого диапазона на 1-3 балла, преподаватель имеет право учесть и оценить личностные качества студента (активность на лекциях и семинарах, посещаемость, пунктуальность, дисциплина, ответственность, инициатива и др.) и дополнить набранные баллы до следующей градации в виде поощрения.

Методология и результаты исследования

Проведём неформальный анализ последнего абзаца пункта 4.3.1 Положения на предмет соответствия требованиям, предъявляемым к оценке знаний. Несомненно, право дополнения баллов до более высокой оценки введено для повышения обоснованности оценки. Действительно, в случае точного подсчёта баллов может быть трудно убедить студентов, получивших 70 баллов, что они менее достойны оценки «хорошо», чем студенты, получившие 71 балл. Трудно сказать, где грань, которая отделяет задачу, сделанную на 50%, от задачи, выполненной на 60%. А ведь если за решение задачи присуждается максимум 10 баллов, то эти 10 процентов изменят итоговую сумму на 1 балл... Можно, конечно, попытаться убедить в справедливости такой оценки аргументами из разряда «так фишка легла» и «вам судьба такая выпала», однако вряд ли это будет обоснованно с точки зрения студента. Логика составителей Положения понятна, тем не менее, такой способ решения проблемы обоснованности неизбежно влияет на объективность системы оценки знаний.

На первый взгляд кажется, что пункт 4.3.1 попирает объективность самым очевидным образом. Действительно, сами авторы Положения поясняют, что дополнительными баллами оценивается не уровень усвоения материала, а личностные качества студента (активность на лекциях и семинарах, посещаемость, пунктуальность, дисциплина, ответственность, инициатива и др.). Инициативность, ответственность, дисциплина и пунктуальность никак не связаны с уровнем усвоения материала, поэтому пункт 4.3.1 явным образом направлен на нарушение объективности оценки знаний. Однако приводит ли в действительности применение этого пункта к снижению объективности оценки? Этот вопрос слишком сложен, чтобы авторы статьи могли взять на себя ответственность ответить на него однозначно. Приведём лишь некоторые соображения относительно вопроса.

Зададимся вопросом: насколько объективной является балльная система оценки? Может показаться, что стобалльная система оценки знаний по определению более точна, чем пятибалльная, поскольку способна отразить более тонкие градации уровня владения материалом, но это лишь иллюзия. Во-первых, количество баллов - верхушка айсберга системы оценки, под которой скрываются факторы, известные лишь разработчикам заданий контрольных мероприятий и, возможно, преподавателям, ведущим практические занятия. Означает ли рейтинг 60, что студент усвоил 60% (или 50%, или 70%) материала? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо изучить структуру заданий контрольных мероприятий. Пропорционально ли количество баллов за задачу её сложности и занимаемому в курсе месту? Равноценны ли разные задачи с одинаковым количеством баллов? Верно ли распределены баллы по модулям с учётом их значимости? Это лишь часть вопросов, ответить на которые придётся, чтобы оценить объективность системы проверки знаний. Во-вторых, балльная система оценки, как и любая другая, имеет погрешность. Не всегда результаты проведения контрольных мероприятий отражают действительный уровень знаний обучаемого. Возникает вопрос: разумно ли измерять величину с точностью до балла при помощи инструмента, погрешность которого составляет 5 (или 10, или 20 - никто не проводил подобных измерений, по крайней мере, мне таковые неизвестны) баллов? Ответить на этот вопрос необходимо будет для каждого курса в отдельности, общие подходы здесь не применимы...

Можно было бы попытаться решить вторую из перечисленных проблем, проведя эксперимент с участием «подопытных» студентов - добровольцев с разной степенью усвоения материала. Сравнивая разброс баллов, полученных одним и тем же студентом за разные попытки написания различных вариантов контрольных мероприятий, можно оценить точность однократной оценки знаний. Это, однако, не поможет справиться с первой из обозначенных проблем в оценке объективности. Таким образом, объективность оценки знаний по стобалльной рейтинговой системе вызывает серьёзные сомнения.

Здесь авторы позволяют себе сделать небольшое отступление и вспомнить об одном из современных направлений научно-технического прогресса. В процессе развития систем искусственного интеллекта обнаружилось, что ряд задач с трудом поддаются формализации и решению с помощью жёстко заданных алгоритмов. Экспертная система, учитывающая массу разнообразных факторов и действующая по системе сложных правил, при решении таких задач проигрывает правильно обученному специалисту. Там, где экспертная система тонет в море малозначительных подробностей, специалист ментально ухватывает главное и принимает правильное решение на основании нескольких наиболее значимых факторов. В результате были созданы и успешно применяются методы, в своей работе имитирующие работу человеческого мозга - нейросетевое моделирование, системы нечёткого и нейронечёткого вывода [9-11].

Не относится ли задача объективной обоснованной оценки знаний к числу задач, эффективно решаемых указанными методами? (Авторы особо подчёркивают в последней фразе слова «объективной» и «обоснованной». Создать необъективную и необоснованную систему оценки знаний проще простого, никаких особых средств для этого не требуется). Попытки применения нечёткой логики для оценки знаний известны [12], однако пока уровень развития соответствующих областей науки и техники не позволяет создать систему, позволяющую, имея на входе обучаемую личность, получить на выходе обоснованную объективную оценку её знаний. Авторы возьмут на себя смелость выдвинуть предположение, что до создания подобной системы наиболее совершенным средством оценки знаний будет являться человек-преподаватель. Обученный экзаменатор может выдать для конкретного студента гораздо более обоснованную и объективную оценку, чем формальная система с подсчётом очков.

Вернёмся к пункту Положения 4.3.1 и практике его применения. Действительно ли преподаватели, руководствуясь им, оценивают личные качества студентов? Напомним, что речь в Положении идёт о личных качествах вообще. Сокращение «и др.» позволяет на законных основаниях учитывать при выставлении оценки любые качества - цвет глаз, форму бороды, степень подобиюстрастности при общении с преподавателем. К счастью, нет. Зачастую это и невозможно, если экзамен принимает преподаватель, не знакомый со студентом и его качествами. Вместо этого дополнительные баллы служат цели повышения объективности оценки, корректируя её в случае необходимости. Таким образом, в конечном счёте итоговая оценка по курсу выставляется в немалой степени по усмотрению преподавателя.

Насколько распространена практика присуждения дополнительных баллов, другими словами, насколько рейтинговая система требует корректировки дополнительными баллами, видно из данных, приведённых в заключительной части статьи. На кафедре ФН-12 «Математическое моделирование» ведётся учёт баллов, набранных студентами в течение семестра. Статистический ряд итогового количества баллов, набранных студентами, получившими в зимнюю сессию 2019/2020 года положительную оценку, приведён в таблице 2. Нечётные строки таблицы содержат количества баллов, а чётные - частоту этого количества в выборке.

Таблица 2

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
29	26	32	35	33	29	37	26	31	30	18	82	56	64	47
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
61	59	51	43	40	45	26	35	22	16	117	83	63	63	54
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100				
31	45	35	39	25	14	16	10	15	10	10				

Данные приведены для студентов первого и, частично, второго курсов, сдавших экзамен на положительную оценку. Графически эти данные показаны на рисунке 1. По оси х на рисунке отложены количества баллов, полученных студентами за семестр по одной из математических дисциплин, изучаемых в осеннем семестре, а по оси у - частота получения студентами указанного итогового количества баллов.

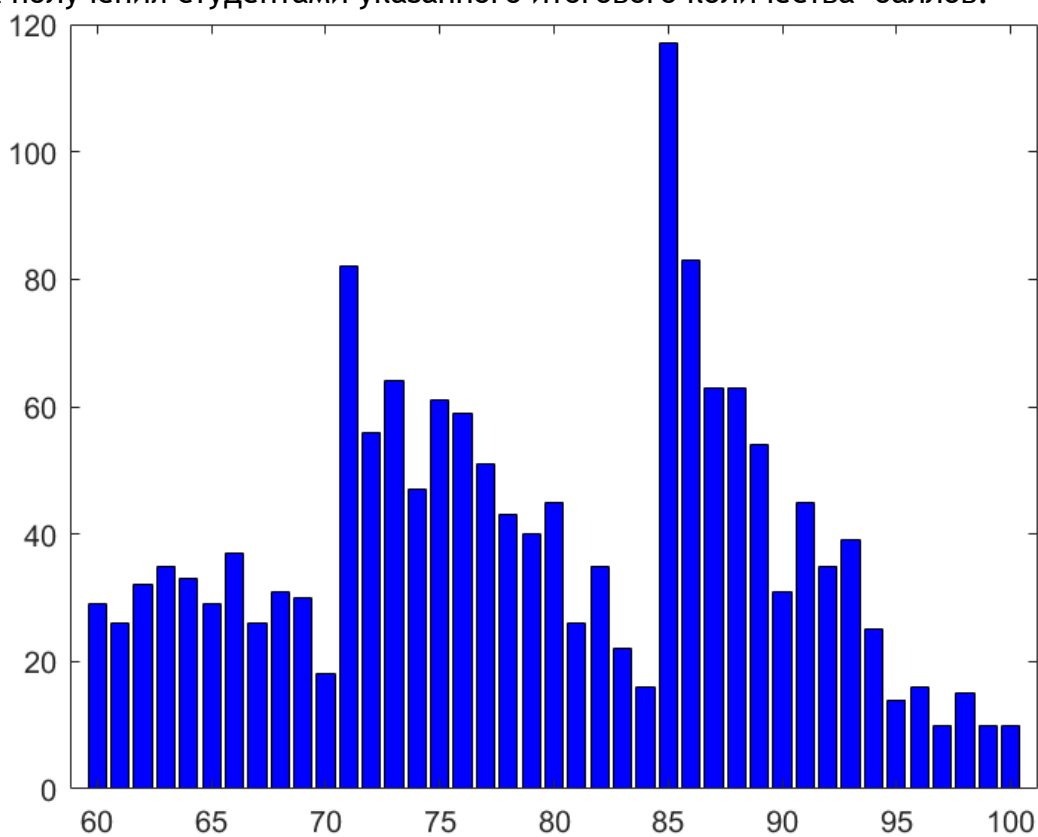


Рисунок 1

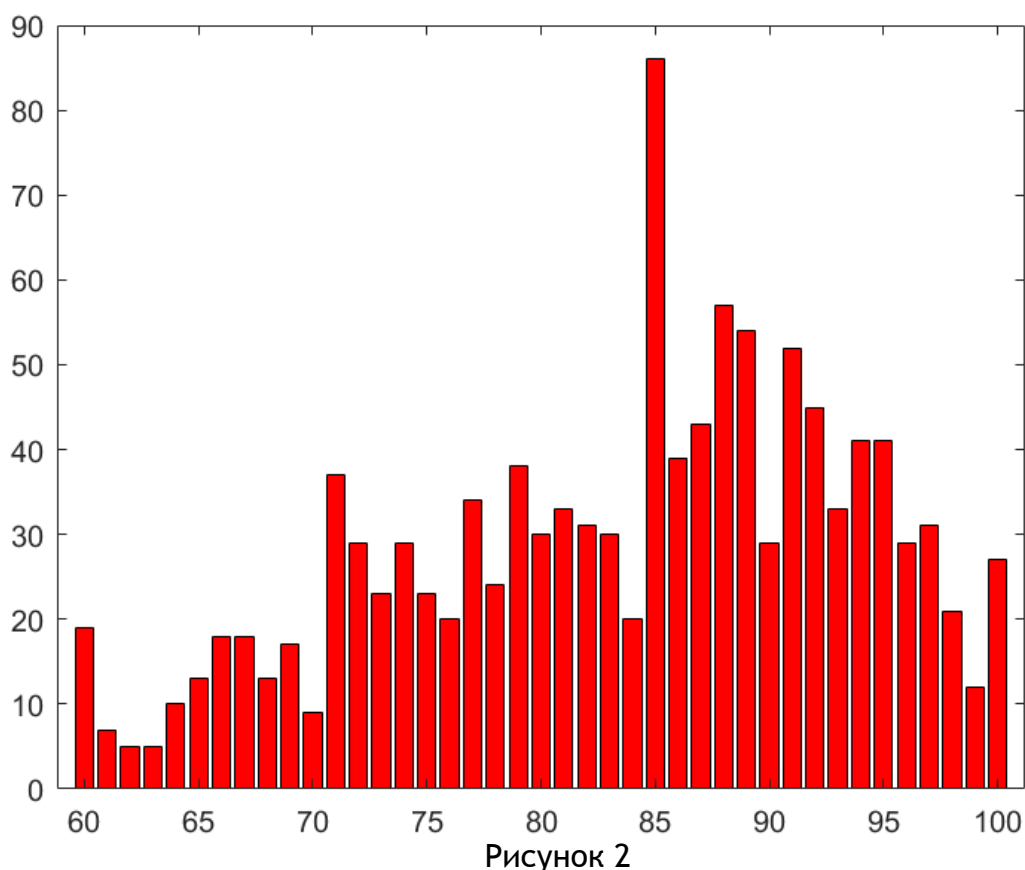
Приведённые выше данные убедительно показывают, что присуждение дополнительных баллов происходит в массовом порядке, причём размах этого явления выходит далеко за рамки 1-3 баллов, предписанных пунктом 4.3.1 Положения. Об этом свидетельствуют «пики» значений численности баллов, наблюдаемые на значениях 71 и 85 баллов, и предшествующие им «провалы». Действительно, если бы баллы за контрольные мероприятия присуждались без подгонки под результат, значения численности баллов в соседних столбцах были бы примерно одинаковы (с поправкой на «дискретность» баллов за отдельные мероприятия).

Занятия большей части весеннего семестра 2019/2020 учебного года проходили дистанционно из-за пандемии, вызванной вирусом CoVID-19 и введённого властями режима самоизоляции. В дистанционном режиме проходили и контрольные

мероприятия. Представление о том, как прошли эти мероприятия, можно получить из приведённых ниже таблицы 3 и рисунка 2.

Таблица 3

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
19	7	5	5	10	13	18	18	13	17	9	37	29	23	29
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
23	20	34	24	38	30	33	31	30	20	86	39	43	57	54
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100				
29	52	45	33	41	41	29	31	21	12	27				



Данные приведены для студентов первого курса.

Можно заметить, что явление корректировки оценок сохраняется в условиях дистанционного обучения, но имеет не такой ярко выраженный характер. Это может быть вызвано двумя причинами. Во-первых, введение дистанционного обучения привело к значительному росту успеваемости и повышению количества набранных студентами баллов, вследствие чего «натягивать» оценку во многих случаях стало не нужно. Во-вторых, отсутствие непосредственного личного контакта со студентом позволяет преподавателю более отстранённо относиться к оценкам студентов, формально выполняя свои обязанности. Так, количество оценок «84» в весеннем семестре больше, чем в первом, несмотря на то, что количество «человеко-экзаменов» по математике в весеннем семестре меньше, чем в осеннем.

Заключение

Из изложенного можно заключить, что система оценки знаний, предусмотренная модульно-рейтинговой системой, часто корректируется преподавателями в целях

повышения объективности и обоснованности. Фактически, преподаватели продолжают во многих случаях выставлять оценки студентам по пятибальной шкале, подгоняя затем итоговую сумму баллов под назначенный результат. Это наталкивает на мысль о том, что существующая система требует модернизации с применением информационных технологий.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Семушина Л.Г., Ярошенко Н.Г. Содержание и технологии обучения в средних специальных учебных заведениях: учеб. пособие для преп. учреждений сред. проф. образования. — М.: Мастерство, 2001. — 272 с.
2. Пшеничная Л.Ф. Педагогика в сестринском деле. — М.: Феникс, 2002 - 354 с.
3. Власова Е.А., Красновский Е.Е. Повышение качества обучения студентов в рамках модульно-рейтинговой системы организации учебного процесса // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание. — 2012. — №4 (4). — Режим доступа: <http://engjournal.ru/articles/136/136.pdf>
4. Хорькова Н.Г. Особенности модульно-рейтинговой системы организации преподавания дисциплин профессионального цикла в техническом университете. // Гуманитарный вестник (МГТУ им. Н.Э.Баумана): электронный журнал — 2015. — №4. — Режим доступа: <http://hmbul.bmstu.ru/cat...edu/pedagog/231.html>
5. Хрящев В.Г., Серегин В.И. Особенности модульно-рейтинговой системы организации преподавания дисциплин профессионального цикла в техническом университете. // Инженерный вестник — 2014. — №1.
6. Хрящев В.Г., Серегин В.И. Практика применения модульно-рейтинговой системы обучения в МГТУ им. Н.Э. Баумана // Инженерный вестник — 2014. — №12.
7. Чув В.Ю., Дубограй И.В., Дьякова Л.Н. Совершенствование балльно-рейтинговой системы оценки знаний студентов — путь к улучшению их успеваемости // Инженерный вестник — 2015. — №5.
8. Аникин А. Ю., Крапоткин В. Г., Кокотушкин Г. А. О путях совершенствования рейтинговой системы оценки успеваемости студентов по математическим дисциплинам / Аникин А. Ю., Крапоткин В. Г., Кокотушкин Г. А. // Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф., посвящ. 180-летию МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010 год, г. Москва / МГТУ им. Н. Э. Баумана. - М., 2010.
9. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление / пер. с англ. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 798 с.
10. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. — М.: Горячая — Телеком, 2006. — 452 с.
11. Яхьяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети: Учебное пособие. — М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 316 с.
12. Апатова Н.В., Гапонов А.И., Смирнова О.Ю. Оценка уровня освоения компетенций на основе нечеткой логики. // Балтийский гуманитарный журнал. - 2017. - Т. 6. - № 3(20)

Alexey V. Kavinov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

On the specifics of assessing students' knowledge using the modular rating system

Abstract. The article examines some of the problems of assessing students' knowledge in the context of a modular rating system. Assessment of students' knowledge is an important element of the learning process, and therefore the relevance of the issues under consideration is high. The aim of the work was to study the peculiarities of assessing by teachers using the example of the Department FN-12 "Mathematical Modeling" in the Moscow State Technical University named after N. E. Bauman. It is shown that the existing knowledge assessment system needs to be improved.

Key words: modular rating system, knowledge assessment.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

Аннотация

В статье на многочисленных примерах разобраны часто встречающиеся ошибки, наиболее сложные моменты, связанные с изучением темы «Геометрические приложения определенного интеграла». В работе предложен вариант изложения теоретического материала в виде таблицы, рассмотрен алгоритм решения задач по данной теме.

Ключевые слова

определенный интеграл, площадь плоской фигуры, объем тела вращения, длина дуги, площадь поверхности вращения

АВТОР

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
Anna.v.kosova@mail.ru

Введение

В статье обобщен многолетний опыт преподавания в техническом университете. На многочисленных примерах рассмотрены часто встречающиеся ошибки, наиболее сложные моменты, связанные с изучением темы «Геометрические приложения определенного интеграла». Задачи тщательно подобраны, чтобы наилучшим образом проиллюстрировать все трудности, которые могут возникнуть при освоении данного материала.

В предложенной работе демонстрируются различные подходы к решению одной и той же задачи. Подобные примеры позволяют сравнивать методы, отмечая слабые и сильные стороны, и выбирать наиболее простой из них.

Статья будет полезна не только молодым преподавателям, которые смогут использовать ее при подготовке и проведении занятий, но и поможет студентам расширить их возможности в изучении данной темы.

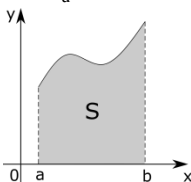
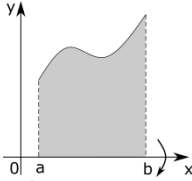
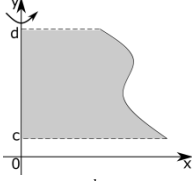
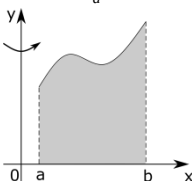
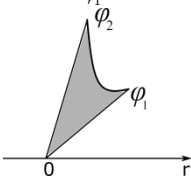
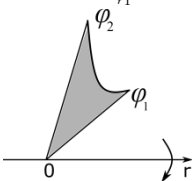
Методология и результаты исследований

При изучении темы «Геометрические приложения определенного интеграла» необходимо знать ряд основных формул, с помощью которых можно вычислить то или иное приложение [1, 2]. Очень важно учить формулы в сочетании с чертежами, поскольку для различных ситуаций необходимо использовать разные формулы. Особенно это касается вычисления объемов тел вращения. Как известно из теории, при вычислении объема тела, полученного вращением фигуры, ограниченной осью OY , прямыми $y = c$, $y = d$, кривой, заданной уравнением $x = x(y)$ (т.е. трапеции, опирающейся на ось OY), необходимо применять формулу $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$ - интегрирование по переменному y . Если же фигура, которую необходимо вращать вокруг оси OY , ограничена осью OX , прямыми $x = a$, $x = b$, кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ (т.е. трапеция, опирающаяся на ось OX), то и интегрирование надо проводить по переменному x - использовать формулу $V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$.

Предложите студентам свести формулы, позволяющие вычислить геометрические приложения определенного интеграла, в таблицу (таблица 1). Это поможет быстрее их выучить, увидеть общее. Необходимо отметить, что в таблицу для площадей и объемов тел вращения надо также вставить чертежи, чтобы необходимая информация была более наглядна.

Геометрические приложения определенного интеграла

Таблица 1

	Площадь плоской фигуры	Объемы тел	Длина дуги	Площадь поверхности вращения $P_x = 2\pi \int_a^b y dl$
ДЕКАРТОВЫ	$S = \int_a^b y dx$ 	По площадям поперечных сечений: $V = \int_a^b S(x) dx$ Вращения вокруг оси ОХ $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$ 	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$	$P_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ	замена переменного: $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$ $a = \varphi(t_1)$ $b = \varphi(t_2)$ $S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$	Вращения вокруг оси ОУ: $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$  $V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$  Для получения формулы при параметрическом задании необходимо сделать замену переменного.	$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$	$P_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt,$
ПОЛЯРНЫЕ	$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi$ 	$V_r = \frac{2}{3} \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin \varphi d\varphi$ 	$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$	$P_r = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi,$ $x = r \cos \varphi$ т.к. $y = r \sin \varphi$

Перейдем к рассмотрению наиболее часто встречающихся ошибок, которые делают студенты при изучении темы «Геометрические приложения определенного интеграла».

Пример 1. Найти большую из площадей, ограниченных кривыми $y=1-x^2$, $x^2+y^2=1$.

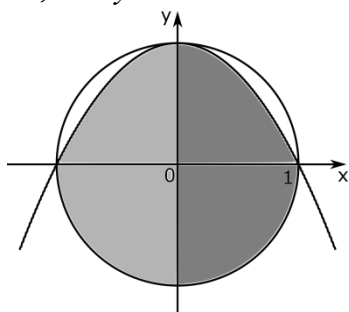


Рис. 1

На этом примере, в частности, рассмотрим алгоритм решения задач данной темы.

Первый шаг - построение чертежа (рис.1). Для задач на нахождение геометрических приложений определенного интеграла очень важна визуализация. Это помогает безошибочно выбрать область интегрирования и составить интеграл для вычисления.

Как видим, всегда верхняя граница фигуры - парабола, а нижняя - окружность, которые пересекаются в точках $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Следующий этап решения задачи - выбор формулы. Очевидно, площадь можно вычислить, сложив площадь фигуры, лежащей выше оси OX , и ту, что ниже нее: $S = S_{\text{верхн.}} + S_{\text{нижн.}}$. При таком решении не лишним будет напомнить студентам, что в слу-

чае, когда $y = f(x) \leq 0 \Rightarrow S = -\int_a^b y dx$. Но во многих ситуациях (чтобы не перегружать

решение) удобно использовать формулу $S = \int_a^b (y_{\text{верхн.}} - y_{\text{нижн.}}) dx$. В ней не имеет значения знак y .

Еще важный момент, о котором необходимо напомнить обучающимся: снизу фигура ограничена окружностью, уравнение нижней части которой $y = -\sqrt{1-x^2}$ (т.к. для этой полуокружности $y \leq 0$).

Поскольку фигура симметрична относительно оси OY , при составлении интеграла учтем это, вычисляя площадь S_1 правой части.

Учитывая все выше сказанное, получим: $S = 2S_1 = 2 \int_0^1 (1-x^2 - (-\sqrt{1-x^2})) dx$.

Следующий очень важный этап решения задачи - вычисление определенного интеграла. Обратите внимание студентов, что сначала необходимо записать результат интегрирования (первообразную) и, только после этого, подставить пределы интегрирования:

$$S = 2 \int_0^1 (1-x^2 + \sqrt{1-x^2}) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Часто встречающаяся ошибка при подстановке пределов интегрирования: если нижний предел - ноль, то нередко студенты считают, что результат подстановки тоже ноль. Это ошибочное мнение. Не лишним будет указать обучающимся на этот момент.

И последнее, на что необходимо обратить внимание студентов: надо убедиться, что полученный результат положителен (площадь не может быть отрицательна, как и любое другое геометрическое приложение). Отрицательный или нулевой ответ мог получиться только в одном из следующих случаев:

- ✓ неверно составлен интеграл;
- ✓ допущена ошибка при интегрировании;
- ✓ неверно подставили пределы интегрирования;

✓ допущена арифметическая ошибка при приведении подобных.

Особо следует обратить внимание, что при получении отрицательного результата, нельзя в ответ просто записать число с противоположным знаком. Необходимо оценить причину и исправить ошибку (это замечание будет проиллюстрировано ниже).

Последнее, что остается сделать - записать ответ: $S = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}(ed^2)$.

Рассмотрим еще одну задачу.

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной параболой $y = -(x + x^2)$ и осью OX .

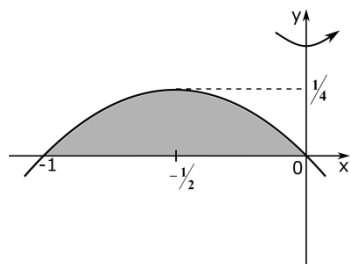


Рис. 2

Как видно из чертежа (рис. 2), фигура, которую требуется вращать, снизу ограничена осью OX . Поэтому формула, по которой следует проводить вычисления: $V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$. Очень важный момент, на который следует обратить внимание студентов: парабола симметрична относительно прямой $x = -\frac{1}{2}$; расстояния от точек параболы с абсциссами $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$

(симметричных относительно оси симметрии параболы) до оси вращения различны. Это означает, что для вычислений симметрией в данном случае пользоваться ни в коем случае нельзя.

Подставим данные задачи в формулу:

$$2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx = 2\pi \int_{-1}^0 x(-x - x^2) dx = -2\pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^0 = -2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Очевидно, что объем отрицательным быть не может. Где же ошибка?

Крайне важный момент: для того, чтобы при вычислении определенного интеграла получился положительный ответ, подынтегральная функция должна быть неотрицательна (в случае $a < b$). Т.е. формула выглядит так:

$$V_y = 2\pi \int_a^b |xy| dx = 2\pi \int_a^b |x| \cdot |y| dx.$$

Для нашей задачи $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$, $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$. Таким образом, в данном конкретном случае получаем:

$$V_y = -2\pi \int_a^b xy dx = 2\pi \int_{-1}^0 x(x + x^2) dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{6}(ed^3).$$

Рассмотрим еще несколько моментов, вызывающих трудности у студентов, проиллюстрировав их следующим примером.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $r = 1$, $r^2 = 2 \cos 2\varphi$ (вне окружности).

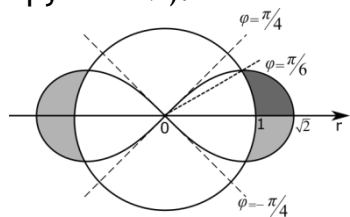


Рис. 3

Начнем с построения чертежа (рис. 3). Первое уравнение задает окружность радиуса $r = 1$ и центром в полюсе. Чтобы построить вторую кривую, необходимо найти область определения этой функции. Это очень важный момент для полярных координат. Обра-

тите внимание студентов, что для многих задач нахождение области определения позволяет найти и пределы интегрирования.

Приведем подробное объяснение того, как это сделать. Итак, r - расстояние от точек плоскости до полюса, т.е. величина неотрицательная. Следовательно, правая часть уравнения тоже неотрицательная:

$$2 \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \cos 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Важно при нахождении области определения не забывать о периодичности функции $\cos \varphi$ (в противном случае, мы построим только часть кривой).

Разделим неравенство на 2 и окончательно получим:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда видно, что лемниската $r^2 = 2 \cos 2\varphi$ - функция периодическая ($T = \pi$).

Первый период (при $k=0$) лежит в пределах $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ и симметричен относительно луча $\varphi = 0$ (полярной оси).

При составлении интеграла для вычисления искомой площади воспользуемся периодичностью и симметрией, находя площадь S_1 выделенной части (см. рис. 3).

Определим верхний предел интегрирования, найдя точку пересечения двух кривых в выбранной области ($\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$):

$$2 \cos 2\varphi = 1 \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Можно переходить к составлению интеграла. Часто обучающиеся записывают формулу для вычисления площади следующим образом: $S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r_{\text{больш.}}(\varphi) - r_{\text{меньш.}}(\varphi))^2 d\varphi$

. Обратите внимание студентов, что эта формула неверна, поскольку искомая площадь должна быть найдена как разность двух площадей (ограниченной лемнискатой и ограниченной окружностью). Следовательно, формула такова:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r_{\text{больш.}}^2(\varphi) - r_{\text{меньш.}}^2(\varphi)) d\varphi.$$

Для данных задачи (с учетом симметрии) получим:

$$S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2(\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\pi/6} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

На следующем примере рассмотрим еще один важный момент.

Пример 4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной линией $r = 2 \cos \varphi$.

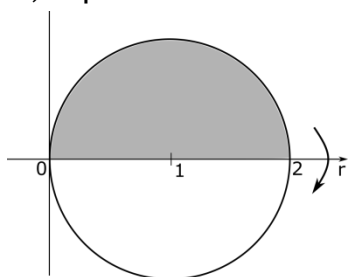


Рис. 4

Область определения функции $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Следует напомнить студентам, как строится данная кривая - переходом к декартовым координатам. Для этого домножим уравнение на r : $r^2 = 2r \cos \varphi$.

Воспользуемся уравнениями, связывающими полярные и декартовы координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x.$$

Выделим полный квадрат по переменному x : $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $(1,0)$ радиуса $R=1$ (рис. 4). При этом полюс и центр декартовой системы координат совпадают, положительное направление оси OX совпадает с полярной осью, а положительное направление оси OY совпадает с лучом $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

По условию задачи круг следует вращать вокруг своего диаметра. Для нахождения объема полученного шара не надо вычислять интегралы. Воспользуемся формулой, известной еще из курса школьной геометрии: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Такая простая задача была выбрана не случайно. На этом примере легко убедиться, что для получения полного объема необходимо вращать только верхнюю половину круга ($\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Проверим, воспользовавшись формулой:

$$V_r = \frac{2}{3}\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/2} (2 \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{16}{3}\pi \int_{\pi/2}^0 \cos^3 \varphi d(\cos \varphi) = \frac{4}{3}\pi \cos^4 \varphi \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{4}{3}\pi(e^0 - e^{\pi/2}).$$

Аналогичная ситуация возникает при вычислении площади поверхности, полученной вращением кривой вокруг оси. Проиллюстрируем это примером.

Пример 5. Вычислить площадь поверхности, полученной вращением астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0) \text{ вокруг оси } OX.$$

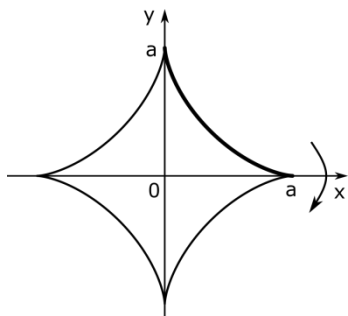


Рис. 5

Как видно из чертежа (рис. 5), астроида симметрична относительно оси вращения. Для того чтобы вычислить полную поверхность вращения, необходимо вращать только верхнюю половину кривой. Для нее $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$.

Найдем производные:

$$x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$$

Отсюда следует, что

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

Составим интеграл по формуле:

$$P_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t \cos t dt$$

Для интегрирования воспользуемся подведением под знак дифференциала:

$$6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t \cos t dt = 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{6\pi a^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Но такого быть не может. Здесь умышленно была допущена ошибка, которую часто делают обучающиеся.

Обратите внимание студентов, что $\sqrt{x^2} = |x|$ и, следовательно $\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = |\cos t \sin t| = |\cos t| \cdot |\sin t|$.

Поскольку $\sin t$ в первой и второй четвертях положителен, а $\cos t$ - в первой четверти положителен, а во второй принимает отрицательные значения, то:

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t |\cos t \sin t| dt = \\ &= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t |\cos t| dt = 6\pi a^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 t \cos t dt \right) = \\ &= \frac{6\pi a^2}{5} (\sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} - \sin^5 t \Big|_{\pi/2}^{\pi}) = \frac{12\pi a^2}{5}. \end{aligned}$$

При решении данной задачи будет целесообразным предложить студентам учесть симметрию астроида относительно оси OY и вычислить площадь поверхности P_{1x} , полученную вращением выделенной части астроида (см. рис. 5). Тогда:

$$P_x = 2P_{1x} = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t |\cos t \sin t| dt.$$

Обе тригонометрические функции в первой четверти положительны. Следовательно, модульные скобки можно просто опустить:

$$P_x = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) = \frac{12}{5} \pi a^2 \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{12}{5} \pi a^2 (e\partial^2).$$

То, что была учтена симметрия астроида, значительно облегчило решение задачи.

Рассмотрим теперь иной вопрос, связанный с вычислениями геометрических приложений.

Пример 6. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y = 1 - x$, $x = y^2 - 1$.

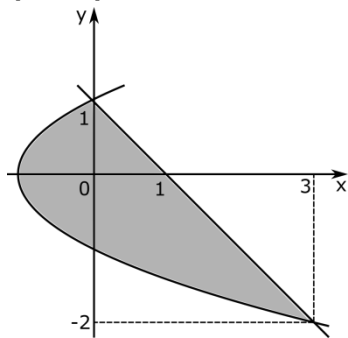


Рис. 6

Сделаем чертеж (рис. 6). Для этого необходимо

найти вершину параболы: $x + 1 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x_e = -1 \\ y_e = 0 \end{cases}$, а также,

точки пересечения параболы и прямой:

$$-y + 1 = y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, x = 0 \\ y = -2, x = 3. \end{cases}$$

Из рисунка видно, что при $x \leq 0$ верхней границей области интегрирования является парабола, а при $x \geq 0$ - прямая. Нижней границей фигуры всегда является нижняя ветвь параболы. Это означает, что площадь фигуры следует вычислять, как сумму двух площадей: S_1 ($x \in [-1, 0]$) и S_2 ($x \geq 0$). Каждая из них находится по

формуле $S = \int_a^b (y_{\text{верхн.}} - y_{\text{нижн.}}) dx$.

Также, для вычисления площади левой части можно использовать симметрию параболы относительно оси OX . Составим интегралы:

$$S = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx + \int_0^3 (1-x - (-\sqrt{x+1})) dx = \frac{4}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^3 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 + \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} (e\partial^2).$$

Предложите студентам еще один способ решения этой задачи: провести интегрирование по переменному y . Для составления интеграла чертеж стоит повернуть на 90° (так, чтобы ось OX была направлена вверх). При таком расположении верхняя граница фигуры - прямая, а нижняя - парабола. Формула для вычисления имеет вид:

$$S = \int_c^d (x_{\text{большее}}(y) - x_{\text{меньшее}}(y)) dy.$$

Получаем:
$$S = \int_{-1}^2 (y+1 - (y^2-1)) dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} (e\theta^2).$$

Обратите внимание студентов, что интегрирование по переменному y в некоторых случаях упрощает составление интегралов (как в данной задаче) или упрощает интегрирование (для некоторого ряда функций: логарифмических, обратных тригонометрических), что можно проиллюстрировать следующим примером.

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX , кривой $y = \arcsin x$, прямой $x=1$ (рис. 7).

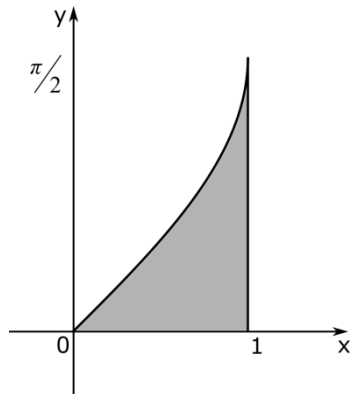


Рис. 7

Для нахождения искомой площади используем формулу $S = \int_a^b y dx$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b y dx = \int_0^1 \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} U = \arcsin x & dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV = dx & V = x \end{array} \right| = \\ &= x \arcsin x \Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

В этом случае пришлось применить интегрирование по частям (но также можно было воспользоваться и методом подстановки). Если же интегрировать по переменному y , то получим следующее:

$$S = \int_c^d (x_{\text{большее}} - x_{\text{меньшее}}) dy = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin y) dy = (y + \cos y) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 (e\theta^2)$$

При таком способе решения все интегралы табличные.

То, что мы только что обсудили, очень поможет при освоении темы «Кратные интегралы» и вычислении геометрических приложений, связанных с ними.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 8. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной осью OY , кривой $y = e^x$ и прямыми $y = x$, $x = 1$ (рис. 8).

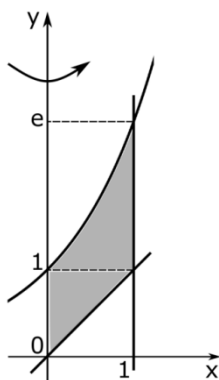


Рис. 8

Поскольку необходимо найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY , то мы имеем две формулы на выбор. Здесь нет фигуры, целиком опирающейся на ось, поэтому выбор неоднозначен.

Рассмотрим первый вариант - интегрирование по переменному y : $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$. В этом случае собрать все

интегралы без ошибок непросто - очень тщательно надо следить за тем, какие объемы надо складывать, а какие вычитать:

$$V_y = \pi \left(\int_0^1 y^2 dy + \int_1^e dy - \int_1^e (\ln y)^2 dy \right).$$

Кроме составления интегралов, еще и интегрирование не самое простое: два раза по частям (в последнем слагаемом). Попробуем выбрать вторую формулу:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy dx.$$

$$\text{Тогда } V_y = 2\pi \int_0^1 x(y_{\text{верхн.}} - y_{\text{нижн.}}) dx = 2\pi \int_0^1 x(e^x - x) dx = 2\pi \left(xe^x - e^x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi (e - 1).$$

Предложите студентам сравнить эти два решения. Очевидно, второй вариант предпочтительнее: пришлось интегрировать по частям, но лишь один раз, а составить интеграл было значительно проще.

В этой статье не приводились примеры на вычисление длины дуги. Как правило, эти задачи сложностей не вызывают. В них важно только следить, чтобы пределы интегрирования были взяты в порядке возрастания и производные найдены без ошибок.

Заключение

Тема «Геометрические приложения определенного интеграла» содержит много моментов, которые могут привести к ошибкам. В рамках этой статьи была предпринята попытка разобрать все основные связанные с ней трудности и ответить на большинство вопросов, которые могут возникнуть при вычислении приложений. Для иллюстрации ошибок студентов были подобраны наиболее информативные (с этой точки зрения) примеры. В статье были продемонстрированы различные подходы к одним и тем же задачам, что позволяет сравнить их и выбрать более рациональный способ решения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т., т. 1 – М.: Юрайт, 2014.
 2. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: Учебник для студентов вузов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.
-

Anna V. Kosova

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

anna.v.kosova@mail.ru

Some methodological aspects of the topic "Geometric applications of a definite integral" presentation

Abstract. The article deals with numerous examples of common errors, the most difficult aspects associated with the study of the topic "Geometric applications of a definite integral." A variant of theoretical material presentation in the form of a table is proposed in the paper, and an algorithm for solving tasks on this topic is considered.

Key words: definite integral, flat figure area, volume of a body of revolution, arc length, surface of revolution area.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ»

Аннотация

В статье приводится методика изложения темы «Преобразование Фурье» в курсе уравнений математической физики в МГТУ им. Н. Э. Баумана. Преобразование Фурье используется во многих областях науки - в физике, обработке сигналов, комбинаторике, теории вероятностей, статистике, криптографии, акустике, оптике, океанологии и др. В статье показано как вычислять преобразование Фурье с помощью его свойств, а также изложено, как преобразование Фурье применяется в теории вероятностей. Статья будет полезна студентам приборостроительных специальностей, а также преподавателям соответствующих курсов.

Ключевые слова

прямое преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье, характеристическая функция

АВТОР

Попова Елена Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
elmipo@yandex.ru

Введение

Преобразование Фурье широко используется при обработке сигналов. Если функция f является функцией времени и представляет собой физический сигнал, то ее преобразование Фурье имеет стандартную интерпретацию как спектр сигнала. Абсолютная величина получающейся в результате комплексной функции F представляет собой амплитуды соответствующих частот, а фазовые сдвиги получаются как аргумент этой комплексной функции.

Помимо этого, преобразование Фурье обладает рядом полезных свойств [1]-[5].

1. Преобразование Фурье обратимо, причем обратное преобразование Фурье имеет практически такую же форму, как и прямое преобразование Фурье.

2. С помощью преобразования Фурье можно решать обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных. Преобразование Фурье превращает линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в обычные алгебраические уравнения. Что касается дифференциальных уравнений в частных производных, то если применить преобразование Фурье по пространственной переменной, например, к уравнению теплопроводности, волновому и др., то указанные уравнения станут обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно временной переменной.

3. Применение преобразования Фурье превращает сложную операцию свёртки в простое умножение, т.е. обеспечивает эффективный способ вычисления основанных на свёртке операций.

Как уже отмечалось, преобразование Фурье широко применяется в обработке сигналов. В теории сигналов реальный сигнал представляется с помощью импульсных

функций (суммы прямоугольных импульсов, возникающих в последовательные моменты времени. Если устремить к нулю длительность прямоугольных импульсов, то в пределе будет получено точное представление исходного сигнала. Поэтому в приложениях часто используется преобразование Фурье импульсных функций.

О том, как находить преобразование Фурье импульсных функций, изложено в [5]. В настоящей статье показано, как можно вычислять преобразование Фурье непосредственно и с помощью его свойств, а затем изложено, как применяется преобразование Фурье в теории вероятностей. Статья, несомненно, будет полезна студентам и преподавателям, ведущим соответствующие курсы.

Преобразование Фурье и его свойства.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, то есть Место для уравнения.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty;$$

2. на любом отрезке $[a, b] \subset (-\infty; +\infty)$ $f(x)$ непрерывна за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва 1-го рода;

3. на любом отрезке $[a, b] \subset (-\infty; +\infty)$ $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть существует конечное число точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ таких, что в интервалах (x_{k-1}, x_k) , $k=1, \dots, n$, функция $f(x)$ монотонна.

Функцию, удовлетворяющую условиям 1-3, называют оригиналом преобразования Фурье.

Определение. Прямым преобразованием Фурье называется функция, определяемая формулой:

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx. \quad (1)$$

При этом функцию $\hat{f}(y) = F[f](y)$ называют образом Фурье оригинала $f(x)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ является оригиналом преобразования Фурье и во всех точках разрыва удовлетворяет условию $f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$. Тогда справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \quad (2)$$

Формула обращения позволяет восстанавливать функцию-оригинал по ее образу Фурье. При этом интегральное преобразование

$$F^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \quad (3)$$

называют обратным преобразованием Фурье.

Свойства преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - оригиналы преобразования Фурье, а $\hat{f}(y)$ и $\hat{g}(y)$ - их образы Фурье.

Приведем основные свойства преобразования Фурье.

1. Линейность преобразования Фурье:

$$F[\alpha f + \beta g](y) = \alpha \hat{f}(y) + \beta \hat{g}(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

2. Теорема запаздывания:

$$F[f(x-m)](y) = e^{-imy} \hat{f}(y), \quad \forall m \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

3. Теорема подобия:

$$F[f(ax)](y) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{y}{a}\right), \quad a \neq 0. \quad (6)$$

4. Теорема смещения:

$$F[e^{imx} f(x)](y) = \hat{f}(y-m), \quad \forall m \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

5. Связь прямого и обратного преобразования Фурье:

$$F[f(x)](y) = 2\pi F^{-1}[\hat{f}(-x)](y). \quad (8)$$

6. Преобразование Фурье производной: если функция $f(x)$ и ее производные до порядка n существуют, непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то

$$F[f^{(k)}(x)](y) = (iy)^k \hat{f}(y), \quad k = 1, \dots, n. \quad (9)$$

(9)

7. Дифференцирование преобразования Фурье: если функция $f(x)$ и функции $f(x), x f(x), \dots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то функция $\hat{f}(y)$ имеет производную до порядка n включительно, и

$$F[x^k f(x)](y) = (i)^k \left(\hat{f}(y) \right)^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Определение. Свёрткой функций $f(x)$ и $g(x)$, абсолютно интегрируемых на $(-\infty; +\infty)$, называют функцию

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) g(x-z) dz, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad (11)$$

при условии, что несобственный интеграл сходится.

8. Теорема о свертке:

$$F(f * g)(y) = \hat{f}(y) \cdot \hat{g}(y). \quad (12)$$

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\gamma|x|}$.

Решение. Применяя формулы Эйлера, получаем:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} (\cos xy - i \sin xy) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} \cos xy dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} \sin xy dx.$$

Так как $e^{-\gamma|x|} \sin xy$ является нечетной функцией переменной x , то $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} \sin xy dx = 0$. В силу того, что $e^{-\gamma|x|} \cos xy$ есть четная функция переменной x , то

$$\hat{f}(y) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \cos xy dx. \text{ Дважды интегрируя по частям, получаем:}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= 2 \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \cos xy \Big|_0^{+\infty} - \frac{y}{\gamma} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \sin xy dx \right) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{y}{\gamma} \left(-\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \sin xy \Big|_0^{+\infty} + \frac{y}{\gamma} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \cos xy dy \right) \right) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{y^2}{\gamma^2} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \cos xy dx \right) = \frac{2}{\gamma} - \frac{y^2}{\gamma^2} \hat{f}(y). \end{aligned}$$

Откуда $\hat{f}(y)\left(1+\frac{y^2}{\gamma^2}\right)=\frac{2}{\gamma}$. Следовательно, $\hat{f}(y)=\frac{2\gamma}{y^2+\gamma^2}$.

Итак, $F[e^{-\gamma|x|}](y)=\frac{2\gamma}{y^2+\gamma^2}$.

Пример 2. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{1}{x^2+\gamma^2}$.

Решение. В силу теоремы линейности и свойства 5 (формула 8), получаем

$$F\left[\frac{1}{x^2+\gamma^2}\right](y)=\frac{1}{2\gamma}F\left[\frac{2\gamma}{x^2+\gamma^2}\right](y)=\frac{2\pi}{2\gamma}F^{-1}\left[\frac{2\gamma}{(-x^2)+\gamma^2}\right](y)=\frac{\pi}{\gamma}F^{-1}\left[\frac{2\gamma}{x^2+\gamma^2}\right](y).$$

В силу предыдущего примера $F^{-1}\left[\frac{2\gamma}{x^2+\gamma^2}\right](y)=e^{-\gamma|y|}$. Следовательно,

$$F\left[\frac{1}{x^2+\gamma^2}\right](y)=\frac{\pi}{\gamma}e^{-\gamma|y|}. \quad (13)$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{1}{4x^2-8x+5}$.

Решение. Нетрудно видеть, что

$$f(x)=\frac{1}{4x^2-8x+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-2x+5/4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1/4}.$$

Тогда, используя свойство линейности (формула (4)), теорему запаздывания (формула (5)), пример 2, получаем

$$F\left[\frac{1}{4x^2-8x+5}\right](y)=\frac{1}{4}F\left[\frac{1}{(x-1)^2+1/4}\right](y)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{1/2}\cdot e^{-\frac{|y|}{2}}\cdot e^{-iy}=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}(|y|+2iy)}.$$

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}$.

Решение. $f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{ix}}{x^2+1}+\frac{e^{-ix}}{x^2+1}\right]$. Учитывая, что $F\left[\frac{1}{x^2+1}\right](y)=\pi e^{-|y|}$, теорему линейности (формула (4)) и теорему смещения (формула (7)), получаем:

$$F\left[\frac{\cos x}{x^2+1}\right]=\frac{1}{2}\pi(e^{-|y-1|}+e^{-|y+1|}).$$

Пример 5. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{x-1}{4x^2-8x+5}$.

Решение. Применяя теорему о дифференцировании преобразования Фурье (формула (10)) и формулу (13), имеем:

$$F\left[\frac{x}{x^2+1/4}\right](y)=i\frac{d}{dy}\left(F\left[\frac{1}{x^2+1/4}\right](y)\right)=i\frac{d}{dy}\left(2\pi e^{-\frac{|y|}{2}}\right)=-\pi i e^{-\frac{|y|}{2}}\operatorname{sign} y.$$

Применяя теорему запаздывания (формула (5)), получаем

$$F\left[\frac{x-1}{4x^2-8x+5}\right]=\frac{1}{4}F\left[\frac{x-1}{(x-1)^2+1/4}\right]=-\frac{\pi i}{4}e^{-iy}e^{-\frac{|y|}{2}}\operatorname{sign} y.$$

Пример 6. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$.

Решение. Нетрудно видеть, что (это разложение можно также получить методом неопределенных коэффициентов)

$$\frac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Используя теорему линейности (формула (5)) и пример 2 (формула (13)), получаем

$$\begin{aligned} F\left[\frac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}\right](y) &= F\left[\frac{1}{(x+1)^2+1}\right](y) - F\left[\frac{1}{x^2+1}\right](y) = \\ &= \pi e^{iy} e^{-|y|} + \pi e^{-|y|} = \pi e^{-|y|} (e^{iy} + 1) \end{aligned}$$

Пример 7. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \arctg x - \arctg(x-1)$.

Решение. Известно, что

$$(\arctg x - \arctg(x-1))' = (\arctg x)' - (\arctg(x-1))' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2}.$$

С одной стороны, из теоремы линейности (формула (4)), формулы (13) и теоремы запаздывания (формула (5)), получаем

$$\begin{aligned} F\left((\arctg x - \arctg(x-1))'\right)(y) &= F((\arctg x)')(y) - F((\arctg(x-1))')(y) = \\ &= F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - F\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right) = \pi e^{-|y|} - \pi e^{-|y|} \cdot e^{-iy} \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, по формуле (9)

$$F\left((\arctg x - \arctg(x-1))'\right) = (iy)F(\arctg x - \arctg(x-1)). \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что

$$F(\arctg x - \arctg(x-1)) = \frac{\pi e^{-|y|}}{iy} (1 - e^{-iy}).$$

Пример 8. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|} * \frac{\cos x}{x^2+1}$.

Решение. Используя пример 1, пример 4 и теорему о свертке, получаем:

$$\begin{aligned} F\left[e^{-|x|} * \frac{\cos x}{x^2+1}\right](y) &= F[e^{-|x|}](y) \cdot F\left[\frac{\cos x}{x^2+1}\right](y) = \\ &= \frac{2}{y^2+1} \cdot \frac{1}{2} \pi (e^{-|y-1|} + e^{-|y+1|}) = \frac{\pi (e^{-|y-1|} + e^{-|y+1|})}{y^2+1}. \end{aligned}$$

Применение преобразование Фурье в теории вероятности.

Характеристическая функция

Для доказательства наиболее общей формы центральной предельной теоремы Ляпунов ввел понятия характеристической функции случайной величины [6].

Определение. Характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$g(t) = M[e^{itX}], \quad (16)$$

где $M[e^{itX}]$ - это математическое ожидание комплексной случайной величины $U = e^{itX}$.

Если X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то ее характеристическая функция имеет вид:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx. \quad (17)$$

Очевидно, что $g(t) = 2\pi F^{-1}[g(x)]$. Следовательно, плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} F[g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g(t) dt. \quad (18)$$

Пример 9. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Определить ее характеристическую функцию.

Решение. Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

По формуле (17) имеем

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2itx - t^2) - \frac{t^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx.$$

Делая замену переменных $x - it = z$, получаем

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

так как $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ (интеграл Пуассона).

Итак, характеристическая функция нормально распределенной случайной величины X с параметрами $M(x) = 0$ и $\sigma = 1$ имеет вид

$$g(t) = e^{-t^2/2}. \quad (19)$$

Приведем без доказательства основные свойства характеристических функций.

1. Если случайные величины связаны соотношением $Y = aX$, где a - неслучайный множитель, то их характеристические функции связаны соотношением

$$g_Y(t) = g_X(at).$$

2. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Найдем с помощью характеристических функций закон распределения суммы независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, имеющих плотность распределения $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$.

Требуется найти плотность распределения случайной величины $z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Это можно выполнить следующим образом:

1. Найти характеристические функции $g_{X_1}(t), \dots, g_{X_n}(t)$ случайных величин $X_1, \dots, X_n$ и, перемножив их, получить характеристическую функцию случайной величины z

$$g_z(t) = g_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot g_{X_n}(t).$$

2. Найти плотность распределения z , применяя к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot g_z(t)$ преобразование Фурье:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz} g_z(t) dt.$$

Пример 9. Найти с помощью характеристических функций композицию двух нормальных законов

$f_X(x)$ с характеристиками $M(X) = 0$ и $\sigma = \sigma_X$;

$f_Y(y)$ с характеристиками $M(Y) = 0$ и $\sigma = \sigma_Y$.

Решение. Найдем характеристическую функцию случайной величины X . Представим X в виде $X = \sigma_X U$, где $M(U) = 0$ и $\sigma_U = 1$.

Пользуясь результатом примера 9 и свойством 1 характеристических функций, получаем

$$g_X(t) = g_U(\sigma_X t) = e^{-\frac{(\sigma_X t)^2}{2}}.$$

Аналогично,

$$g_Y(t) = e^{-\frac{(\sigma_Y t)^2}{2}}.$$

Перемножая $g_X(t)$ и $g_Y(t)$, получаем характеристическую функцию случайной величины $z = X + Y$:

$$g_z(t) = e^{-\frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2}{2}}. \quad (20)$$

Очевидно, формула (20) задает характеристическую функцию нормального закона с параметрами $M(z) = 0$, $\sigma_z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$.

Заключение

Работа основана на личном опыте автора преподавания данной дисциплины. Предложенная методика изложения материала сочетает краткие теоретические сведения и специально подобранные примеры вычисления преобразования Фурье, что позволит сформировать у студентов правильное представление о способах решения и приобрести необходимые навыки и компетенции. Статья будет полезна студентам при самостоятельной работе, а также преподавателям при подготовке к практическим занятиям.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / М.: Наука, 1988.
2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. / М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.
3. Бутко Я.А. Элементы функционального анализа и методы математической физики. / М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. / М.: Наука, 1976. – 544с.
5. Ахметова Ф.Х., Чигирева О.Ю. Методика изложения темы «Преобразование Фурье импульсных функций»// Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – №9 (сентябрь). – С.42-53. – URL:<http://e-koncept.ru/2016/16184.htm>.
6. Вентцель Е.В. Теория вероятностей. / М. Наука, 1969. – 576с.

Elena M. Popova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

elmipo@yandex.ru

Methodological features of the topic “Fourier transformation” presentation

Abstract. The article provides a methodology for presenting the topic "Fourier transformation" in the course of equations of mathematical physics at the Bauman Moscow State Technical University.

The Fourier transformation is used in many fields of science - in physics, signal processing, combinatorics, probability theory, statistics, cryptography, acoustics, optics, oceanology, etc. The article shows how to find the Fourier transformation using its properties, and also describes the use of the Fourier transformation in probability theory. The article will be useful to students of instrument-making specialties, as well as to teachers of relevant courses.

Key words: direct Fourier transformation, Fourier inversion, characteristic function.

О ПЕРВОМ РУССКОЯЗЫЧНОМ УЧЕБНИКЕ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

Статья посвящена методике преподавания аналитической геометрии в историческом аспекте: знакомит читателя с первым русскоязычным учебником по аналитической геометрии «Начальные основания аналитической геометрии» Севастьянова Я.А. (1819), историей его создания и методикой решения задач о кривых второго порядка. Изучение истории преподавания вузовских дисциплин повышает качество методической подготовки преподавателей высшей школы.

Ключевые слова

аналитическая геометрия, кривые второго порядка, методика преподавания, история российского образования, высшая школа, инженерное образование, Я.А.Севастьянов

АВТОРЫ

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Птицына Елена Владимировна,
студент ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова», г. Москва
elena-pt@yandex.ru

Введение

В прошлом, 2019 году исполнилось 200 лет с года издания в России первого оригинального учебника по аналитической геометрии на русском языке «Начальные основания аналитической геометрии» (1819) Якова Александровича Севастьянова (1796-1743). В следующем, 2021 году двухсотлетний юбилей отметит другой труд того же автора - «Основания начертательной геометрии» (1821), также первый оригинальный русскоязычный учебник по этой дисциплине.

Изучение истории, истории Отечества, истории науки и истории инженерного образования кроме самостоятельного интереса может способствовать созданию дополнительной мотивации предметного обучения. Знакомство с различными методами изложения известных разделов вузовской математики служит углублению знаний в соответствующей предметной области. Статья знакомит со структурой и некоторыми разделами первого русского учебника по аналитической геометрии, а также с биографией его молодого автора.

Методология и результаты исследования

Работа написана на основе анализа литературы по истории российского инженерного образования, изучения первого русскоязычного учебника по аналитической геометрии 1819 года и методики преподавания по данному учебнику.

Одной из важнейших государственных задач России в первой половине XIX века было создание разветвленной транспортной инфраструктуры. По своему значению для огромной российской территории решение этой задачи было сравнимо с развитием самолетостроения и авиации в середине XX века.

Для подготовки кадров в 1809 году указом Александра I в Санкт-Петербурге были открыты Корпус и Институт инженеров путей сообщения. До начала XIX века инженерное образование давали только Школа математических и навигацких наук, основанная в 1701 г. по инициативе Петра I в Москве, и Горный институт, основанный в 1773 году Екатериной II в Санкт-Петербурге. Институт инженеров путей сообщения вместе с Николаевским инженерным и Михайловским артиллерийским училищами, открытыми в 1819 году по инициативе великих князей Николая Павловича и Михаила Павловича, являлись основными учебными заведениями Российской империи, дающими инженерную подготовку.

До открытия Императорского Московского технического училища, переросшего в будущем в МГТУ им. Н.Э. Баумана, оставалось еще примерно половина столетия (Сапрыкин, 2012).

Первый директор Института инженеров путей сообщения Бетанкур А.А. (1758-1824) являлся крупным испанским инженером, возглавлявшим в Мадриде Школу дорог, каналов и мостов и находившимся на службе в России с 1808 года (Чукарёв, 2009). По его инициативе в Институт на следующий год после создания были приглашены выпускники Парижской политехнической школы Базен П.П., Фабр А.Я., Потье К.И., Дестрем М.Г. Этим учёным удалось воспитать несколько поколений отечественных инженеров.

Яков Александрович Севастьянов родился в 1796 году в семье Александра Федоровича Севастьянова — ординарного академика, лектора по зоологии и минералогии в Медико-хирургической академии, отличавшегося широким кругом интересов. Широким кругом интересов (точные науки, литература) обладал и его сын Яков, что отмечали его гимназические преподаватели. Окончив гимназию в Санкт-Петербурге в 1811 году, Яков поступил в Институт корпуса инженеров пути сообщения. Обучение в Институте начиналось с 15 лет и длилось 4 года: первому году соответствовала четвёртая бригада, второму — третья, и т. д. По результатам вступительных испытаний Севастьянов был зачислен сразу в третью бригаду (второй год обучения) (Елисеев, Елисеева, 2016).

После успешного окончания Института в 1814 году Севастьянов был поставлен репетитором в Институте, кроме него на репетиторскую работу был оставлен другой лучший выпускник — Алексей Иванович Рокасовский, впоследствии сенатор (Кузнецов, 2013). В 1818 Севастьянов стал читать собственный курс по начертательной геометрии на русском, а не на французском, как в прежние времена, языке. В те годы и были изданы два его знаменитых учебника: «Начальные основания аналитической геометрии» были написаны им в 23 года, причём начаты ещё в 19 лет, а «Основания начертательной геометрии» - в 25 лет. Первым читателем «Начальных оснований аналитической геометрии» был профессор Чижов, о чём Севастьянов говорит в предисловии: «по окончании сего сочинения он прочёл оное, и его отзыв одобрил меня представить труд мой Ученому Собранию Императорской Академии Наук» (Севастьянов, 1819). В 26-летнем возрасте Севастьянов вошёл в состав редколлегии задуманного первым инспектором Института Бетанкуром «Журнала путей сообщения», состоящей из шести человек (Кузнецов, 2013). В 28 лет Севастьянова удостоили звания профессора, причём Яков Александрович стал первым русским профессором начертательной геометрии. Опять же на русском языке читал Севастьянов лекции «Успехи

начертательной геометрии в России и приложение этой науки к теории теней», «Приложение начертательной геометрии к линейной перспективе», «Построение оптических изображений» в ходе публичных чтений при Институте, традиционно читавшихся на французском. В 40 лет Севастьянова назначили помощником директора института по учебной части, на этой должности он пробыл до 47 лет, после чего покинул Институт из-за назначения в Главное управление путей сообщения, откуда вышел в отставку в возрасте 53 лет. За свою жизнь Яков Александрович издал ещё несколько пособий по математике, в том числе «Приложения начертательной геометрии к рисованию» (1830), «Приложение начертательной геометрии к воздушной перспективе, к проекции карт и к гномике» (1831).

«Основания начертательной геометрии» (Севастьянов, 1919) были не только первым русским учебником по данной дисциплине. Это был не перевод иностранной книги, а первое доступно изложенное пособие по начертательной геометрии. Книга Гаспара Монжа (1746-1818) — основоположника начертательной геометрии — отличалась высокой сложностью и предназначалась для значительно подготовленных слушателей. Книга ученика Монжа — Карла Потье (1786-1855) — была больше похожа на задачник с решениями. Учебник Севастьянова был элементарным учебником с систематическим изложением теоретических сведений (Гусев, 1952).

«Начальные основания аналитической геометрии» также были первым оригинальным русским учебником, а не переводным — в данном случае по аналитической геометрии.

В разделе «К читателям» своего учебника по аналитической геометрии Севастьянов Я.А. указывает на источники, которые он использовал при составлении учебника: «Представляемая на суд Публики Начальные Основания Аналитической Геометрии, есть плод моих четырехлетних трудов, изысканий и наблюдений. Руководствуемый на стезях Анализа сочинениями Лакроа и Биота, иное я заимствовал из оных, приспособляя к плану, предначертанному мною для сего сочинения». Под Лакроа и Биотой Севастьянов, по видимому, подразумевает Лакруа, автора «Курса математики» (1798/99) и Био (1802) (Вилейтнер, 1966). Лакруа и Био включали сведения по аналитической геометрии в состав общих курсов, а впервые термин «аналитическая геометрия» был включен в заголовок книги Гарнье «*Elements de geomterie analytique*» (1802).

Раздел «К читателям» оканчивается следующими словами: «Польза, которую сие сочинение принесёт моим соотечественникам, будет для меня лестнейшею наградою».

Пособие состоит из нескольких частей:

- I. Определения и первоначальные понятия (11 параграфов).
- II. О прямой линии и круге (22 параграфа).
- III. О разделении кривых линий на порядки и перемене координат (7 параграфов).
- IV. Об эллипсисе (22 параграфа).
- V. О гиперболе (29 параграфов).
- VI. О параболе (15 параграфов).
- VII. Исследований уравнений (24 параграфа).
- VIII. О кривых линиях пересечения конуса с плоскостью (6 параграфов).
- IX. О разрешении по строению уравнений четвёртой и третьей степеней об одном переменном (2 параграфа).
- X. О точках и линиях, принимая опыт в разсуждение в пространстве (15 параграфов).

XI. О плоскости и перемене координат в пространстве (14 параграфов).

XII. О поверхностях второго порядка (15 параграфов).

XIII. О плоскостях касательных к поверхностям второго порядка (6 параграфов).

Каждый параграф обозначается числом со скобочкой (например, «1»), его краткое название вынесено на поля. На полях даются номера рисунков (например, «Фиг. 1»), расположенных в конце книги.

Остановимся на темах, касающихся линий второго порядка. Впервые это понятие вводится на первой странице главы III. О разделении кривых линий на порядки и перемене координат: «Уравнение между неопределёнными x и y второй степени будет представлять линии, называемые линиями второго порядка». Далее автор рассматривает различные способы «перемены координат», которые могут привести уравнение «в простейший вид».

После этого идёт несколько глав, посвящённых одним из наиболее значительных кривых второго порядка. Начинает Севастьянов с эллипса (IV. Об эллипсисе). Эллипс определяется геометрически: «Эллипсисом называется кривая линия, в которой сумма расстояний от 2 неподвижных точек до всякой её точки, постоянна». Далее путём рассуждения выводятся различные уравнения эллипса, этому предшествуют слова: «И так для выведения уравнения эллипса предложим вопрос, вывести уравнение кривой, имеющей сие свойство». Выводятся уравнения:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

- «уравнение эллипсиса, отнесенного к центру и к осям»;

$$y'^2 = px' - \frac{p}{2a} x'^2$$

- «уравнение эллипсиса, отнесенное к вершине», $p = \frac{b^2}{2a}$ - параметр эллипса;

$$a'^2 u^2 + b'^2 t^2 = a'^2 b'^2$$

- «уравнение эллипсиса, отнесенное к сопряженным диаметрам»;

$$z = \frac{b^2}{a + c \cos \phi}$$

- «полярное уравнение эллипсиса».

Выводятся свойства эллипса, причем такие, что давно не входят в вузовские программы, но могут предлагаться в виде задач; обсуждаются способы построения эллипса: по точкам и по непрерывному движению.

Глава V. О гиперболе построена по аналогичному плану. Глубокий педагогический опыт Севастьянова отражает то, что он начинает отрезки речи с тех же предложений-шаблонов, что и использовались в предыдущем параграфе. Такой параллелизм изложения позволяет студенту систематизировать в сознании получаемую информацию. Очертим схему, используемую Севастьяновым (Табл. 1).

Таблица 1. Схема изложения материала по кривым второго порядка в учебнике Я.А. Севастьянова по аналитической геометрии.

Тема	Параграф из главы «Об эллипсисе»	Параграф из главы «О гиперболе»	Параграф из главы «О параболы»
Уравнение кривой: 1. «... называется кривая линия, в которой...» (далее о расстояниях) 2. «Для сего пусть ... представляют собой...»	«Уравнение эллипсиса, отнесённого к центру и осям» Пояснение к 2.: «Для сего пусть F и F' представляют нам данные неподвижные точки...»	«Уравнение гиперболы, отнесённой к её центру и осям» Пояснение к 2.: «Для сего пусть F и F' представляют нам данные неподвижные точки...»	«Уравнение параболы, отнесённой к её вершине и оси» Пояснение к 2.: «Для сего пусть AB и F представляют нам данную прямую и данную точку...»
Исследование кривой «Исследуем теперь свойства кривой, которой уравнение пред нами выведено, для сего извлечём из онаго величину ординаты y в величине абсциссы x ...»	«Исследование эллипсиса»	«Исследование гиперболы»	«Исследование параболы»

Свойство центра и связанные определения	«Свойство центра в эллипсисе; определение что есть диаметр»	«Свойство центра в гиперболе; сравнение уравнений гиперболы и эллипсиса; уравнение гиперболы равноостронней»	
Построения кривой: по точкам, по непрерывному движению «Выведенные нами свойства ... подают нам способы строить оный по точкам...»	«Построения эллипсиса: по точкам, и по непрерывному движению»	«Построения гиперболы: по точкам, и по непрерывному движению»	«Построения параболы: по точкам, и по непрерывному движению»
О дополнительных хордах	«О дополнительных хордах», «Наибольший и наименьший углы, составляемые дополнительными хордами между собою»	«О дополнительных хордах»	
Уравнение кривой, отнесённой к вершине	«Уравнение эллипсиса, отнесённого к вершине»	«Уравнение гиперболы, отнесённой к вершине»	
Свойства параметра	«Свойства параметра в эллипсисе»	«Свойства параметра в гиперболе»	«Свойства параметра в параболе»
Отношения квадратов ординат	«Квадраты ординат относятся между собою как произведения из соответствующих им абсцисс, считая сии абсциссы от вершин»	«Квадраты ординат относятся между собою как произведения из соответствующих им абсцисс, считая сии абсциссы от вершин»	«Квадраты ординат относятся как абсциссы»
Уравнение кривой, отнесённой к её диаметрам	«Уравнение эллипсиса, отнесённого к сопряжённым диаметрам»	«Уравнение гиперболы, отнесённой к сопряжённым диаметрам»	«Уравнение параболы, отнесённой к её диаметрам»
Уравнение кривой, отнесённой к осям и, может быть, центру	«Переход из уравнения эллипсиса, отнесённого к сопряжённым диаметрам, к уравнению оного, отнесённого к осям»	«Переход из уравнения гиперболы, отнесённой к сопряжённым диаметрам, к уравнению оной, отнесённой к её центру и осям»	
Прямоугольник из осей	«Прямоугольник из осей равен параллелограмму из сопряжённых диаметров»	«Прямоугольник из осей равен параллелограмму из сопряжённых диаметров»	
Квадраты сопряжённых диаметров	«Сумма квадратов из сопряжённых диаметров равна сумме квадратов из осей»	«Разность квадратов из сопряжённых диаметров равна разности квадратов из осей»	
Уравнения для решения вопросов относительно к сопряжённым диаметрам и осям	«Уравнения для решения вопросов относительно к сопряжённым диаметрам и осям»	«Уравнения для решения вопросов относительно к сопряжённым диаметрам и осям»	

Общее свойство дополнительных хорд и сопряжённых диаметров, и построение по одному из последних	«Общее свойство дополнительных хорд и сопряжённых диаметров, и построение по одному из последних»	«Общее свойство дополнительных хорд и сопряжённых диаметров, и построение по одному из последних»	
Равные сопряжённые диаметры	«Построение сопряжённых диаметров, равных между собой»	«О равных сопряжённых диаметрах»	
Уравнение касательной через точку не на кривой и на кривой	«Уравнение касательной, проведённой к эллипсису чрез точку, данную вне онаго» «Уравнение касательной к эллипсису, проведённой чрез точку, данную на оном»	«Уравнение касательной к гиперболу, проведённой чрез точку, данную вне онаго» «Уравнение касательной к гиперболу, проведённой чрез точку, данную на онаго»	«Уравнение касательной, проведённой к параболу чрез точку, данную вне онаго» «Уравнение касательной к параболу, проведённой чрез точку, данную на онаго»
Выражение подкасательной, её построение	«Выражение подкасательной в эллипсисе; построение касательной к эллипсису с помощью круга»	«Выражение подкасательной в гиперболу; построение касательной к онаго с помощью гиперболу равносторонней»	«Выражение подкасательной в параболу»
Нормальная и поднормальная	«Уравнение нормальной в эллипсисе; выражения поднормальной, касательной, и нормальной»	«Уравнение нормальной к гиперболу; выражения поднормальной, касательной, и нормальной»	«Уравнение нормальной к параболу; выражения поднормальной, касательной и нормальной»
Положение касательной относительно к радиус-вектору и радиус-вектору или прямой, параллельной оси, проведённым чрез точку касания	«Положение касательной относительно к радиус-вектору, проходящим чрез точку касания»	«Положение касательной относительно к радиус-вектору, проходящим чрез точку касания»	«Положение касательной относительно к радиус-вектору и к прямой, параллельной оси, проведённым чрез точку касания»
Геометрические построения касательных к кривым, проведённым чрез точку на кривой и не на кривой	«Геометрические построения касательных к эллипсису: проведённой чрез точку на оном, и проведённой чрез точку вне онаго»	«Геометрические построения касательных к гиперболу: проведённой чрез точку на онаго, и проведённой чрез точку вне онаго»	«Геометрические построения касательных к параболу: проведённой чрез точку на онаго, и проведённой чрез точку вне онаго»
Аналитическое определение положения касательной к кривой, проведённой параллельно данной прямой	«Определить аналитически положение касательной к эллипсису, проведённой параллельно данной прямой»	«Определить аналитически положение касательной, проведённой к гиперболу параллельно данной прямой»	«Определить аналитически положение касательной к параболу, параллельной данной прямой»
Проведение касательных к кривой посредством сопряжённых диаметров	«Проведение касательных к эллипсису посредством сопряжённых диаметров»	«Проведение касательных к гиперболу помощью сопряжённых диаметров»	
Положение касательной в параболу относительно			«Положение касательной в параболу»

к диаметру, проходящему чрез точку касания, и выводимые из того построение касательной к параболы			относительно к диаметру, проходящему чрез точку касания, и выводимые из того построение касательной к параболы»
Асимптоты		«Что называется асимптотами вообще; уравнения асимптот в гиперболы» «Положение касательных в гиперболы относительно к ея асимптотам» «Уравнение гиперболы, отнесенной к ея асимптотам»	
Степень гиперболы, сопряжённые гиперболы		«Что называется степенью гиперболы, об гиперболы сопряжённых»	
Продолжение про асимптоты		«Свойство асимптот в гиперболы, из которого следует построение оной по точкам»	
Полярное уравнение кривой	«Полярное уравнение эллипсиса»	«Полярное уравнение гиперболы»	«Полярное уравнение параболы»

Мы представили последовательное изложение тем учебника Севастьянова в табличном виде, чтобы обратить внимание читателей на использование единого метода в изложении материала разных тем. Из современных учебников по аналитической геометрии табличное изложение материала, в частности, по кривым второго порядка, представлено, например, в (Птицына, 2015).

Рассмотрим, например, как автор исследует уравнение кривой второго порядка (Севастьянов, 1819).

В общем виде уравнение кривой второго порядка записывается в виде

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F.$$

Коэффициенты уравнения называются предстоящими. Севастьянов Я.А. использует комбинированный метод: инвариант $4AC - B^2$ и преобразования системы координат. Причем если уравнение кривой изначально дано в прямоугольной системе координат, то в процессе исследования он переходит к произвольным косоугольным (аффинным) системам координат, четко описывая их расположение по отношению к исходной системе координат.

Система координат задается парой пересекающихся прямых, например, Xx , Yy и точкой их пересечения, например, A . Маленькие и большие буквы, используемые для осей абсцисс и ординат, показывают направление на осях.

В своем учебнике Севастьянов Я.А. показывает смысл инварианта $4AC - B^2$:

при $4AC - B^2 > 0$ кривая относится «роду эллипсиса» («эллипсис», «круг», «уравнение не представляет никакой линии», «точка»),

при $4AC - B^2 < 0$ кривая относится к «роду гиперболы» («гипербола», «две прямые» пересекающиеся),

при $4AC - B^2 = 0$ кривая относится к «роду параболы» («парабола», «две параллельные прямые», «одна прямая», «две мнимые прямые»).

Приведем пример выяснения кривой второго порядка по ее уравнению (Севастьянов, 1819)

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2x = 0.$$

Из уравнения получаем

$A=1, B=-2, C=2$; «посему получим $4AC - B^2 = 4$, признак эллипсиса».

«Положив $x=0$ получим $y^2 - 2y = 0$, или $y(y-2)=0$, откуда $y=0$ и $y=2$; из чего следует, что искомая кривая пересекает ось ординат в двух точках: в начале координат A , для которого $y=0$, и в точке A' , для которой $AA'=2$.

Положив $y=0$ получим $2x^2 + 2x = 0$, или $x(x+1)=0$, откуда $x=0$ и $x=-1$; из чего следует, что искомая кривая пересекает ось абсцисс в двух точках: в начале координат A , для которого $x=0$, и в точке B , для которой $AB=1$.

Извлечем из данного уравнения величину ординаты y ; будем иметь:

$$y^2 - 2(x+1)y = -2x^2 - 2y; \quad \text{или} \quad y = x+1 \pm \sqrt{1-x^2}.$$

Положив $y - x - 1 = t$, получим $t = \pm \sqrt{1-x^2}$;

для нахождения новой оси абсцисс положим $t=0$, получим из условного уравнения $y = x+1$, из чего и следует, что прямая BB' , составляющая с осью абсцисс x угол в 45° , то есть коего тангенс равен единице, и пересекающая ось y в расстоянии $Ae=1$, будет новою осью абсцисс; означив сии абсциссы через s , получим $x = s \cos(eBA)$ или $x = \frac{1}{\sqrt{2}} s$. Подставив сию величину в уравнение между t и x , получим

$$t = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2} s^2}.$$

Предложенная кривая в сем уравнении отнесена к двум осям координат косоугольных; к оси BB' абсцисс s , и к оси Yy ординат t ; начало координат в точке e .

Данное уравнение легко может быть преобразовано в уравнение эллипса (в косоугольных координатах) $\frac{s^2}{2} + t^2 = 1$. Итак, исходная кривая второго порядка является эллипсом. В учебнике она представлена на Рис. 34 (Рис. 1).

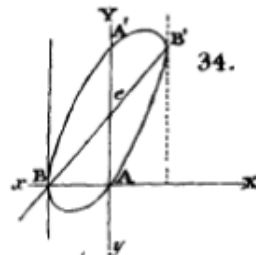


Рисунок 1. Изображение эллипса, построенного по уравнению $\frac{s^2}{2} + t^2 = 1$, в учебнике Севастьянова Я.А. по аналитической геометрии.

Из канонического уравнения эллипса мы сразу находим его параметры в косоугольной системе координат $a' = \sqrt{2}, b' = 1$.

У Севастьянова Я.А. написано так: «Сие уравнение между t и s может принять вид $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - s^2}$, которое сравнив с уравнением $t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - s^2}$, находим $\frac{b'}{a'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $a'^2 = 2$, откуда $a' = \pm\sqrt{2}$ и $b' = \pm 1$; и так имеем длину сопряженных диаметров BB' и AA' предложенной данным уравнением кривой, которая есть эллипсис и легко уже может быть построена по точкам».

Уравнение $t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - s^2}$ получено автором раньше, оно является одним из уравнением эллипса и получено из уравнения, $a'^2 t^2 + b'^2 s^2 = a'^2 b'^2$, которое называется в учебнике «уравнением эллипсиса, отнесенного к центру и к осям».

В учебнике приводится много примеров других кривых второго порядка. Приведённый способ может быть использован и при современном обучении аналитической геометрии.

Заключение

Работа приоткрывает одну из страниц становления отечественной школы математического и инженерного образования. Используя при своём становлении наилучший опыт учёных и педагогов из России, и других стран, российское образование к середине XIX века достигло высочайшего уровня, сравнимого лишь с французской школой. Большую роль в этом сыграло глубокое изучение наук и методика их преподавания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Сапрыкин Д.Л. Инженерное образование в России: история, концепция, перспективы // Высшее образование в России. - 2012. - №. 1. - С.125-137.
2. Чукарев А.Г. Институт корпуса инженеров путей сообщения - колыбель русской транспортной науки // История и перспективы развития транспорта на севере России. - 2009. - №. 1. - С. 14-20.
3. Елисеев Н.А., Елисеева Н.Н. К 220-летию со дня рождения профессора ИКИПС Я.А. Севастьянова (1796-1849) - главы отечественной школы начертательной геометрии 20-40 годов XIX века // Бюллетень научных работ брянского филиала МИИТ. - 2016. - №. 1. - С. 85-88.
4. Кузнецов Д.И. Бетанкур / Москва: Вече, 2013. - 480 с.
5. Севастьянов Я.А. Начальные основания аналитической геометрии / Санкт-Петербург: Печатано при Императорской Академии Наук, 1819. - 312 с. - С. 12.
6. Кузнецов Д.И. Указ. соч.
7. Севастьянов Я.А. Основания начертательной геометрии / Санкт-Петербург: Типография Главного управления путей сообщения и публичных зданий, 1919. - 204 с.
8. Гусев В.В. Первый русский профессор начертательной геометрии Я.А. Севастьянов // Труды Института истории естествознания. - 1952. - Т.IV. - С.186-194.
9. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1966. - 508 с. - С.399.
10. Птицына И.В. Аналитическая геометрия: курс лекций: учебное пособие / Москва: МГОУ, 2015. - 308 с.
11. Севастьянов Я.А. Указ. соч. (5.) - С.156.
12. Севастьянов Я.А. Указ. соч. (5.) - С.177.

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

inpt@mail.ru

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

marinatichomirova@hotmail.com

Elena V. Ptitsyna,

Student, Faculty of Bioengineering and Bioinformatics, Lomonosov Moscow State University, Moscow

elena-pt@yandex.ru

About the first Russian-language textbook on analytical geometry

Abstract. The article is devoted to the methodology of teaching analytical geometry in the historical aspect: it introduces the reader to the first Russian-language textbook on analytical geometry "Initial foundations of analytical geometry" by Sevastyanov Y.A. (1819), the history of its creation and methods for solving tasks concerning quadric curves. Studying the history of teaching University subjects improves the quality of methodological training of higher school teachers.

Key words: analytical geometry, quadric curves, teaching methods, history of Russian education, higher school, engineering education, Y.A. Sevastyanov

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПО ТЕМЕ «СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Аннотация

В современных условиях, особенно ввиду последних мировых событий, дистанционный формат стал единственно возможным способом обучения. Такой способ получения образования для многих студентов и преподавателей является новым, в должной мере не изученным. В данной статье на примере организации работы студентов на семинарских занятиях по решению задач по теме «Исследование несобственных интегралов на сходимость», демонстрируются особенности дистанционного способа изучения данного вопроса. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей и студентов специальностей технического и математического направлений.

Ключевые слова

дистанционное обучение студентов, контролируемая самостоятельная работа студентов, исследование несобственных интегралов на сходимость

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Введение

Многие университеты из разных стран мира (Открытый университет Великобритании, Университет Южной Африки, Национальный технологический университет США, Испанский национальный университет дистанционного обучения и др.) уже несколько десятков лет практикуют дистанционное обучение студентов. Этот способ обучения, конечно, имеет множество недостатков (отсутствие прямого контакта с

преподавателем, необходимость самоорганизации, самодисциплины и самостоятельного изучения материала), однако, и обладает рядом очевидных преимуществ (уменьшение стоимости обучения, экономия времени, гибкость графика, доступность для людей с ограниченными возможностями и людей из удалённых регионов).

В Российской Федерации использование дистанционное обучение регламентировано приказом №137 Министерством образования и науки РФ от 06.05.2005. Однако, лишь в период пандемии COVID-19, когда большинство высших учебных заведений в РФ были переведены на дистанционную форму обучения, стало очевидно неизбежность развития методологии этого способа обучения.

Методология и результаты исследования

Одним из важных навыков для студента технического профиля, приобретаемого в процессе изучения высшей математики, является навык решения задачи исследования несобственных интегралов на сходимость. Изучение данного вопроса отражает основные идеи системно-деятельностного подхода в освоении курса высшей математики. Изучение данного раздела способствует совершенствованию навыка работы с теоретическим материалом. Тема «Исследование несобственных интегралов на сходимость» является одной из самых трудных для понимания тем в курсе математического анализа для студентов первого курса математических и технических специальностей. Поэтому при подготовке занятий на эту тему следует уделять особое внимание теоретическому материалу и системе упражнений. Материал должен быть хорошо структурированным, не перегруженным излишним теоретическим материалом, с максимальным количеством подробно разобранных задач.

Теоретический материал, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения преподаватель может разместить на своем сайте, персональной странице официального сайта вуза или воспользоваться средствами любой современной виртуальной обучающей среды. Теоретический материал должен содержать полный список тем, необходимых для успешного освоения изучаемого вопроса, и ссылки на эти темы. Студент должен знать или иметь возможность быстро найти необходимые сведения, поэтому необходимо дать ссылки на основные методы интегрирования функций, вычисления пределов функций и определения эквивалентных главных частей. Разумеется, что теоретический материал должен содержать все определения по теме «Несобственные интегралы», признаки сходимости и примеры, демонстрирующих их применение. [1]

На изучение темы «Исследование несобственных интегралов на сходимость» отводится 3 семинарских занятия. Материал для изучения можно размещать единовременно, а можно - несколькими частями (желательно, по одной части в неделю).

Актуальным являются вопросы мотивации студента к изучению нового материала в условиях отсутствия прямого визуального контакта с ним. Одним из способов решения этой проблемы является проведение обязательных регулярных интернет-консультаций со студентами, что можно осуществить с помощью специальных интернет-платформ (например, Zoom). Эти консультации являются важным способом обратной связи со студентами. Проводить их следует через 3-5 дней после размещения материала, так как необходимо дать время студентам на самостоятельное изучение нового материала, после которого у студентов могут появиться вопросы.

После интернет-консультации студентам необходимо 2-3 дня для выполнения домашнего задания. Выполненное домашнее задание можно принимать по электронной почте или использовать облачные технологии, например, Яндекс-Диск, где каждый студент может создать папку для размещения домашнего задания и разрешить преподавателю доступ к этой папке.

При изучении темы «Сходимость несобственных интегралов» студенты должны

выучить следующие теоретические сведения. Первым обязательным пунктом является таблица эталонных интегралов. (Таблица 1).

Таблица 1.

	Эталон	Сходится	Расходится
1	$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$	$\alpha < 1$	$\alpha \geq 1$
2	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$	$\alpha > 1$	$\alpha \leq 1$
3	$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}} dx$	$\alpha > 0$	$\alpha \leq 0$
4	$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha \ln x ^\beta} dx$	$\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$ или $\alpha = 1, \beta > 1$	$\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$
5	$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$	$\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$ или $\alpha = 1, \beta > 1$	$\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$
6	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^\alpha x^\beta} dx$	$\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ или $\alpha = 0, \beta > 1$	$\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}$ или $\alpha = 0, \beta \leq 1$

В этой таблице интегралы 1-3 - для обязательного изучения, интегралы 4-6 даются в зависимости от уровня математической подготовки студентов.

Вторым обязательным пунктом является построение удобного и понятного алгоритма исследования на сходимость.

1. Определить все особые точки несобственного интеграла.

2. Если особая точка одна, то нужно определить является ли подынтегральная функция знакопостоянной и в зависимости от этого применить одну из схем исследования. (Рис 1, 2).

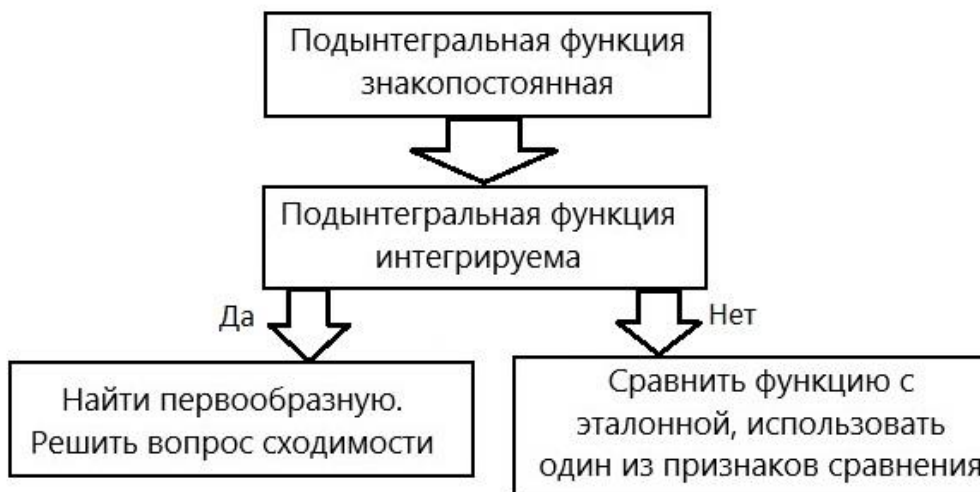


Рис.1. Схема исследования несобственного интеграла на сходимость в случае знакопостоянной подынтегральной функции.

3. Если особых точек несколько, то следует разбить несобственный интеграл на несколько интегралов, у каждого из которых будет только одна особая точка. Для каждого интеграла применить схему. (Рис. 1, 2). В результате, если сходятся все получившиеся несобственные интегралы, то сходится и исходный интеграл, если сходятся все получившиеся несобственные интегралы, кроме одного, то исходный интеграл расходится. Во всех других случаях однозначного ответа дать нельзя.



Рис.2. Схема исследования несобственного интеграла на сходимость в случае знакопеременной подынтегральной функции.

Третьим обязательным пунктом является большое количество подробно разобранных примеров. В условиях самостоятельного изучения нового материала, студенту необходимо большее количество примеров задач с решениями, чем при традиционном способе обучения. Примеры должны быть на все возможные случаи исследования на сходимость.

Примеры интегралов для исследования:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx; \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx; \int_0^{+\infty} \sin 2x dx; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5} dx; \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx; \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} dx; \\
 & \int_0^{+\infty} \sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2+5x+1} dx; \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+2x+1} \arctg 5x} dx; \int_0^2 \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-5x+6} dx; \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^3 \sqrt{x+1}} dx; \\
 & \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x+x}} dx; \int_0^1 \frac{\sin 2x}{3x^3 + \sqrt{x}} dx; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} dx; \int_0^{0.9} \frac{1}{x \ln^2 x} dx; \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx; \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx; \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^3}} dx. [2]
 \end{aligned}$$

Часть из перечисленных задач можно оставить в качестве домашнего задания.

Если уровень математической подготовки студентов достаточно высокий, то можно повысить сложность задач:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 \frac{1}{\ln x} dx; \int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx; \int_0^{+\infty} \frac{\arctg ax}{x^n} dx, (a \neq 0); \\
 & \int_0^{+\infty} \frac{x^m \arctg x}{2+x^n} dx, (n \geq 0); \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx, (n \geq 0); \\
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx; \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x \cdot \cos^q x} dx; \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx;
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx, (q \geq 0); \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^n} dx. [3]$$

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$.

Особые точки 0 и $+\infty$, следовательно, нужно разбить интеграл на 2 интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx.$$

Оба получившихся интеграла знакопостоянные.

Пусть $p < q$, тогда $\frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^p}$ при $x \rightarrow 0$ и $\frac{1}{x^p + x^q} \sim \frac{1}{x^q}$ при $x \rightarrow +\infty$. Значит,

по признаку сравнения $\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx$ сходится или расходится одновременно с $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$,

а $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ сходится или расходится одновременно с $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^q} dx$.

Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$ (Табл. 1).

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^q} dx$ сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$. Для сходимости исходного интеграла необходима сходимость обоих интегралов $\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$,

а достигается она только в случае $\begin{cases} p < 1 \\ q > 1 \end{cases}$.

При $p > q$ рассуждения аналогичные, и интеграл сходится в случае $\begin{cases} p < 1 \\ q > 1 \end{cases}$.

Если $p = q < 1$, то несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходится, а

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ расходится. Следовательно, расходится и искомый интеграл

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ как сумма сходящегося и расходящегося интегралов.

Если $p = q > 1$, то несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ расходится, а

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ сходится. Следовательно, расходится и искомый интеграл

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$ как сумма сходящегося и расходящегося интегралов.

Если же $p = q = 1$, то расходятся оба несобственных интеграла $\int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = +\infty$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty$. Тогда, расходится и искомый интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p + x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx = +\infty$ как сумма функций, стремящихся к бесконечности одного знака.

Ответ: интеграл сходится при $\begin{cases} p < 1 \\ q > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} p < 1 \\ q > 1 \end{cases}$. Интеграл расходится при всех других значениях параметров p и q .

Заключение

Таким образом, при организации дистанционного обучения по теме «Исследование несобственных интегралов на сходимости» деятельность студентов следует организовать с учетом особенностей данного учебного вопроса. Алгоритмичность, наглядные схемы-алгоритмы для рассуждений, четкие и краткие указания по решению задач позволяют студентам в условиях дистанционного обучения успешно усвоить учебный материал.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Зарубин В. С., Иванкова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - 528 с.
2. Малыгина О. А. Изучение математического анализа на основе системно-деятельностного подхода. М. Изд. ЛКИ. 2008. - 416 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московского ун-та, ЧеРо, 1997. - 624 с.

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nail-khasanov@mail.ru

Olga B. Vergasova,

Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

olga.aika@yandex.ru

Methodological features of conducting distance classes for engineering majors on the topic "Convergence of improper integrals"

Abstract. In modern conditions, especially in view of recent events in the world, distance learning has become the only possible way of learning. This method of education is new for many students and teachers, and has not been properly studied. This article demonstrates the features of the remote method of studying a topic using the example of the organization of students' work at seminars on solving tasks within the topic "Convergence of improper integrals". The content of the article may be interesting to teachers and students of technical and mathematical specialties.

Key words: distance learning of students, controlled independent work of students, investigation of improper integrals for convergence.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 2 (T.1), 2020
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Privatuniversität Schloss Seeburg, Salzburg

EDITORIAL ADDRESS
Seeburgstrasse 8, 5201 Seekirchen am Wallersee, Salzburg, Austria
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”
printed by permission of Privatuniversität Schloss Seeburg, Salzburg, Austria

Sent for printing 27-07-2020
Circulation 1000
Order 013117/125

© All Rights Reserved, 2020