

ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 1 (T.1)
2024



Kirov, Russian Federation

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2024) ISSUE 1 (T.1), 176 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

Olga Bermant-Polyakova, PhD, Israel

Tatyana Fedotova, PhD, Professor, Ukraine

Alla Gabidullina, PhD, Professor, Ukraine

Pavel Gorev, PhD, Associate Professor, Russia

Mariya Greb, PhD, Associate Professor, Ukraine

Natalya Korableva, PhD, Associate Professor, Ukraine

Nikolay Kotryahov, PhD, Professor, Russia

Kanat Lakbaev, PhD, Associate Professor, Kazakhstan

Galina Nekrasova, PhD, Professor, Russia

Aleksander Nosov, PhD, Professor, Russia

Gennadiy Senkevich, PhD, Associate Professor, Ukraine

Samvel Sukiasyan, PhD, Professor, Armenia

Eugene Vechtomov, PhD, Professor, Russia

Elena Visotskaya, PhD, Professor, Ukraine

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,

KIROV, RUSSIAN FEDERATION

PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.

Editorial opinion can differ from opinion of authors.

If reprinted, the reference to the journal is required.

© All Rights Reserved

Printed in Russian Federation, 2024



CONTENTS

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ
КАК ВНЕШНЕГО, ТАК И ВНУТРЕННЕГО

Ахметова Фания Харисовна, Головина Анастасия Михайловна,
Власов Павел Александрович
5-11

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ДИСЦИПЛИН
«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» И «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Бахтиярова Ольга Николаевна, Птицына Инга Вячеславовна,
Подзорова Марина Ивановна
12-22

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АКСИОМАТИК ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПРОГРАММИСТОВ

Белоусов Алексей Иванович, Власов Павел Александрович
23-37

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Бирюков Олег Николаевич, Хасанов Наиль Алфатович
38-46

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ
И РЕАЛИЗАЦИЯ ПОСРЕДСТВОМ КОМПЬЮТЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Вергазова Ольга Бухтияровна, Королев Евгений Алексеевич,
Силин Иван Дмитриевич
47-55

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ВСЕМИ ВЕРШИНАМИ
ВЗВЕШЕННОГО НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА
НА ПРИМЕРЕ АЛГОРИТМА ФЛОЙДА-УОРШЕЛЛА

Виноградова Марина Станиславовна, Ткачева Ольга Сергеевна
56-67

ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕМЫ «ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ»
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Власов Павел Александрович, Белоусов Алексей Иванович,
Хорькова Нина Григорьевна
68-77

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

Власов Павел Александрович, Хорькова Нина Григорьевна
78-83

МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА
ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Голубев Алексей Евгеньевич, Уткина Надежда Вениаминовна
84-89

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович
90-96

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА»

Косова Анна Владимировна, Ласковая Татьяна Алексеевна
97-105

ПРОВЕДЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО ЗАНЯТИЯ «ПЕРЦЕПТРОН РОЗЕНБЛАТТА»

Панкратов Владимир Александрович, Тверская Елена Сергеевна
106-112

ИСТОРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

Подзорова Марина Ивановна, Бахтиярова Ольга Николаевна,
Птицына Инга Вячеславовна
113-121

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Пугачев Олег Всеволодович, Павловский Ян Юрьевич
122-128

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПРОЦЕССА ПРОВЕДЕНИЯ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ
МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ УРОВНЯ ДЕТАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЕГО ПОЛЕТА

Ряхимов Ринат Равильевич, Кустов Аркадий Юрьевич
129-136

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА
ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ
В РАМКАХ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Титов Александр Дмитриевич, Забелина Светлана Борисовна
137-147

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ПЕРЕВОДЕ АНГЛИЙСКИХ НАУЧНЫХ ТЕКСТОВ
СТУДЕНТАМИ ВУЗОВ

Уткина Надежда Вениаминовна, Голубев Алексей Евгеньевич
148-153

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ
«ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ»

Хасанов Наиль Алфатович, Бирюков Олег Николаевич
154-159

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Хорькова Нина Григорьевна
160-165

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ
«РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ»

Чигирёва Ольга Юрьевна
166-174

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «MODERN EUROPEAN RESEARCHES»

Безверхний Николай Владимирович
175

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗАКОН МОДУЛЯ КАК ВНЕШНЕГО, ТАК И ВНУТРЕННЕГО

Аннотация

Содержание статьи будет актуально и полезно преподавателям и студентам младших курсов при изучении дисциплины «Математический анализ». Работа позволит освоить необходимые приемы и навыки построения графиков сложных многозначных функций. Цель работы заключается в том, чтобы показать, как максимально быстро и просто можно построить график функции с помощью основных линейных преобразований, свойств модуля и свойств четных, нечетных функций. В рамках поставленной задачи, в работе рассмотрены практические приемы построения графиков различного уровня сложности. На примере тригонометрических функций, содержащих закон модуля, одновременно как внешнего, так и внутреннего, изучено поведение графиков в области их определения.

Ключевые слова

тригонометрические функции, графики функций, линейные преобразования, внешний модуль, внутренний модуль

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Введение

Авторы продолжают рассмотрение цикла статей, посвященных методике преподавания решения задач и построения эскизов графика функций, содержащих закон абсолютного значения. Этот предмет обсуждения всегда вызывает наибольшие трудности и высокий интерес при решении задач как у школьников старших классов, так и у студентов первых курсов различных высших учебных заведений

Безусловно, эта тема не новая и существует большое число учебников, учебных и учебно-методических пособий, в которых рассматриваются такого рода функции [1-3]. Все они, в основном, предназначены для старшеклассников.

Имеется также ряд учебных пособий и статей для студентов начальных курсов [4-11]. Во всех этих изданиях речь идет либо о построении эскизов графиков отдельно взятых функций: линейно-зависимых, квадратичных, дробно-рациональных, тригонометрических и др., либо о построении эскизов графиков выражений, содержащих знак только внешнего или только внутреннего модуля.

В настоящей работе было решено объединить все подходы, рассмотренные в указанных источниках. Речь пойдет о построении графиков тригонометрических функций, содержащих одновременно знак абсолютного значения как внешнего, так и внутреннего. Именно при таком сложном задании, чаще всего возникают трудности и вопросы анализа функциональной зависимости.

Особенности поведения тригонометрических функций, в которых присутствует только внешний или только внутренний модуль, в этой статье не рассматриваются, так как всё это уже было описано авторами ранее в работах [12], [13], [14].

Методология и результаты исследования

Ранее авторами была подробно изложена методика преподавания и описан порядок исследования выражений: $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$. Однако на практике встречаются зависимости вида $y = |f(|x|)|$, где присутствуют внешний и внутренний модули одновременно.

В начале занятия, прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, безусловно, полезно повторить со студентами и прописать основные свойства модуля и тригонометрических функций (четность, нечетность, периодичность, область определения, область значений). Затем, сформулировать общие правила построения.

Итак, опишем рекомендации графической иллюстрации $y = |f(|x|)|$:

- строим график функции $y = f(x)$ для $x > 0$;
- отражаем симметрично относительно оси абсцисс часть эскиза графика $y = f(x)$, находящегося ниже оси Ox ;
- полученный результат параллельно переносим симметрично оси Oy .

Покажем действие применения данного алгоритма.

Пример 1. Изобразить эскиз графика функции $y = |2 \sin |x| + 1|$.

- строим $y = 2 \sin x + 1$ при $x > 0$;
- отображаем нижнюю часть $y = 2 \sin x + 1$ при $x > 0$ симметрично относительно оси абсцисс, замечаем, что $y = 3$, $y = -1$;
- результат построения параллельно переносим симметрично оси ординат.

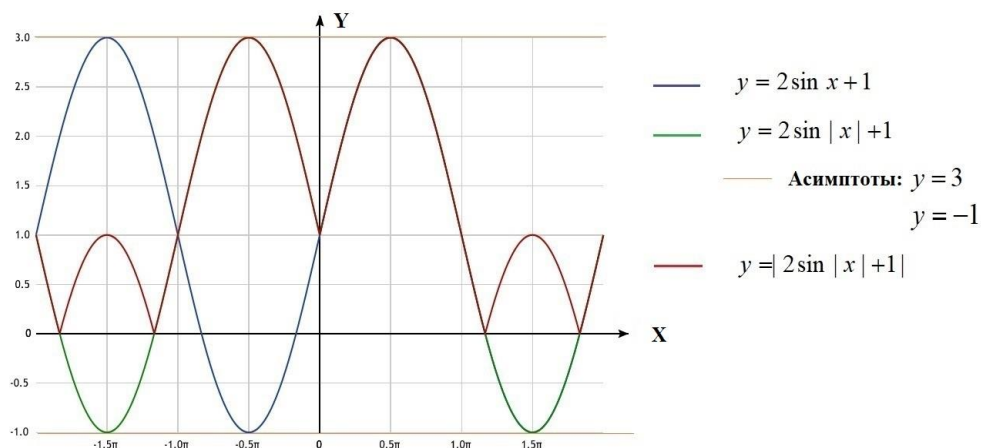


Рис. 1. Эскизы графиков функций $y = 2 \sin x + 1$, $y = 2 \sin |x| + 1$, $y = |2 \sin |x| + 1|$.

Пример 2. Изобразить эскиз графика функции $y = |3 \cos |2x||$.

– строим график функции $y = 3 \cos 2x$ при $x > 0$;

– отображаем нижнюю часть симметрично относительно оси Ox , тогда $y = 3$, $y = -3$;

– результат построения параллельно переносим симметрично оси Oy .

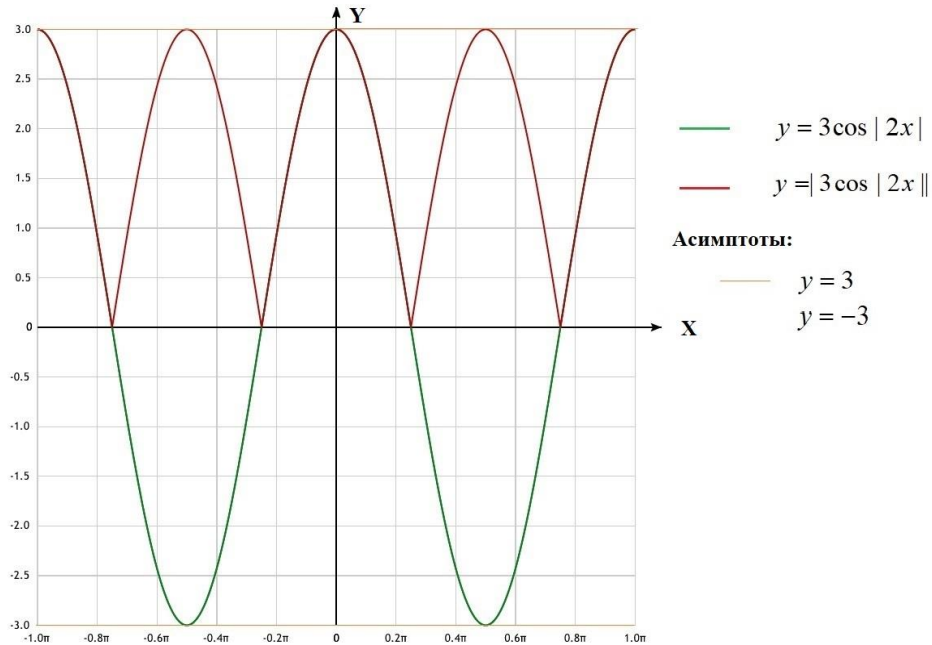


Рис. 2. Эскизы графиков функций $y = 3 \cos |2x|$, $y = |3 \cos |2x||$.

Замечание. Отметим, что в силу четности функции $y = \cos x$, а именно: $y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$, графики функций $y = |3 \cos 2x|$ и $y = |3 \cos |2x||$ совпадают. Другими словами, «внутренний» модуль «не участвует».

Пример 3. Изобразить эскиз графика функции $y = |4 \operatorname{tg} |3x||$.

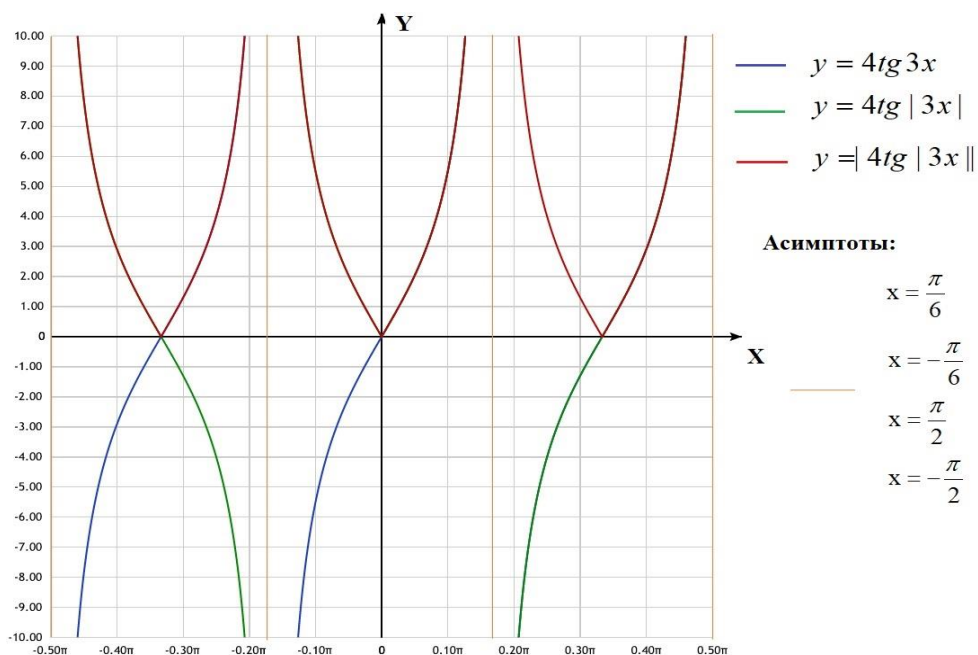


Рис. 3. Эскизы графиков функций $y = 4 \operatorname{tg} 3x$, $y = 4 \operatorname{tg} |3x|$, $y = |4 \operatorname{tg} |3x||$.

- строим график функции $y = 4tg3x$ при $x > 0$;
- отражаем симметрично оси Ox нижнюю часть графика;
- результат построения параллельно переносим симметрично оси Oy .

Пример 4. Изобразить эскиз графика функции $y = |-2ctg |5x||$.

Отрабатываем аналогичные действия:

- строим $y = -2ctg5x$ при $x > 0$;
- отражаем нижнюю часть относительно оси абсцисс;
- результат симметрично отражаем относительно оси ординат.

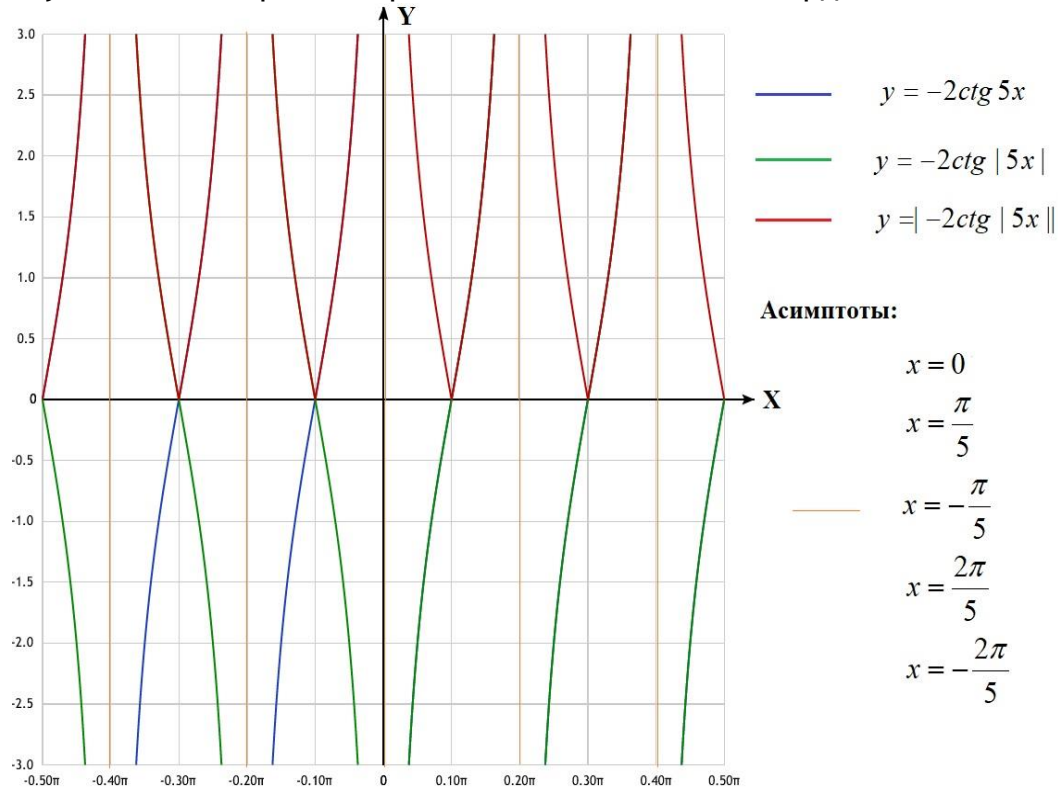


Рис. 4. Эскизы графиков функций $y = -2ctg 5x$, $y = -2ctg |5x|$, $y = |-2ctg |5x||$.

Усложним задачу, рассмотрим значение аргумента в виде суммы.

Пример 5. Изобразить эскиз графика функции $y = \left| 2ctg \left| \frac{\pi}{2} + 3x \right| - \frac{\pi}{4} \right|$.

Прежде, находим точки, в которых «внутренний» модуль обращается в нуль. Получаем $\frac{\pi}{2} + 3x = 0$, следовательно $x = -\frac{\pi}{6}$. Точка $x = -\frac{\pi}{6}$ разбивает область определения на две области: $x > -\frac{\pi}{6}$, $x < -\frac{\pi}{6}$. В каждой из этих областей раскрываем «внутренний» модуль со своим знаком. В итоге имеем кусочную функциональную зависимость:

$$y = \left| 2ctg \left| \frac{\pi}{2} + 3x \right| - \frac{\pi}{4} \right| = \begin{cases} 2ctg \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) - \frac{\pi}{4}, & x > -\frac{\pi}{6}, \\ -2ctg \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) - \frac{\pi}{4}, & x < -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Строим график функции. Нижнюю часть графика, построенной функции переносим вверх симметрично оси Ox .

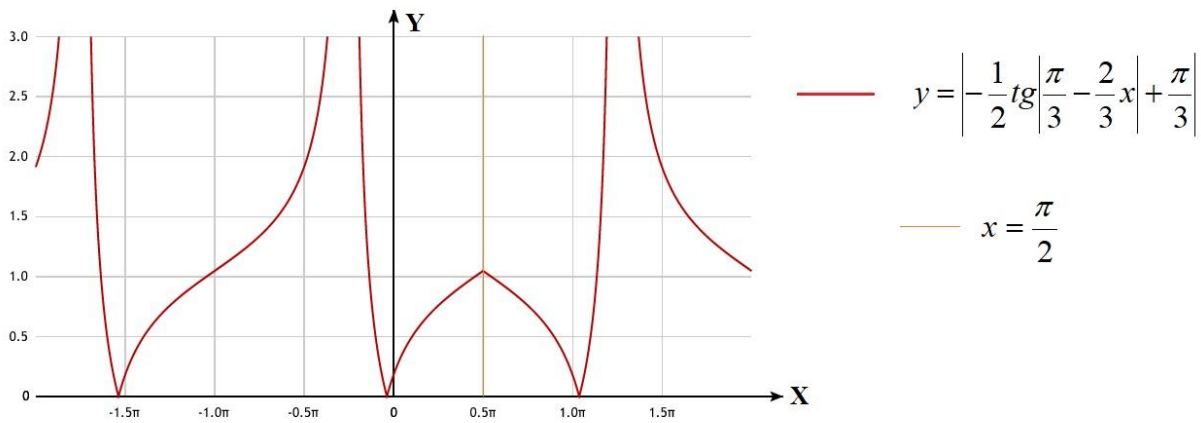


Рис. 6. Эскиз графика функции $y = \left| -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right| + \frac{\pi}{3} \right|$.

Итак, сформулируем схему исследования выражения $y = |f(|ax+b|)|$, где $f(x)$ - тригонометрическая функция, $a \neq 0$, b - константы:

1. Приравняем часть, стоящую под «внутренним» модулем к нулю. Тем самым мы находим точку или точки, которые разбивают всю числовую ось на промежутки. Например, $ax+b=0$, тогда $x = -\frac{b}{a}$. Получаем два промежутка $x > -\frac{b}{a}$ и $x < -\frac{b}{a}$.

2. Раскрываем «внутренний» модуль в полученных промежутках либо с «плюсом», либо с «минусом», руководствуясь свойством четности тригонометрических функций. В итоге приходим к кусочной функции вида:

$$y = f(|ax+b|) = \begin{cases} g(x), & x > -\frac{b}{a}, \\ h(x), & x < -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Здесь $g(x)$ и $h(x)$ функции, зависящие от констант a , b , выражающиеся через $y = f(x)$.

3. Строим эскиз графика, полученной функциональной зависимости.

4. Результат отражаем симметрично оси Ox .

Закрепим применение данного алгоритма.

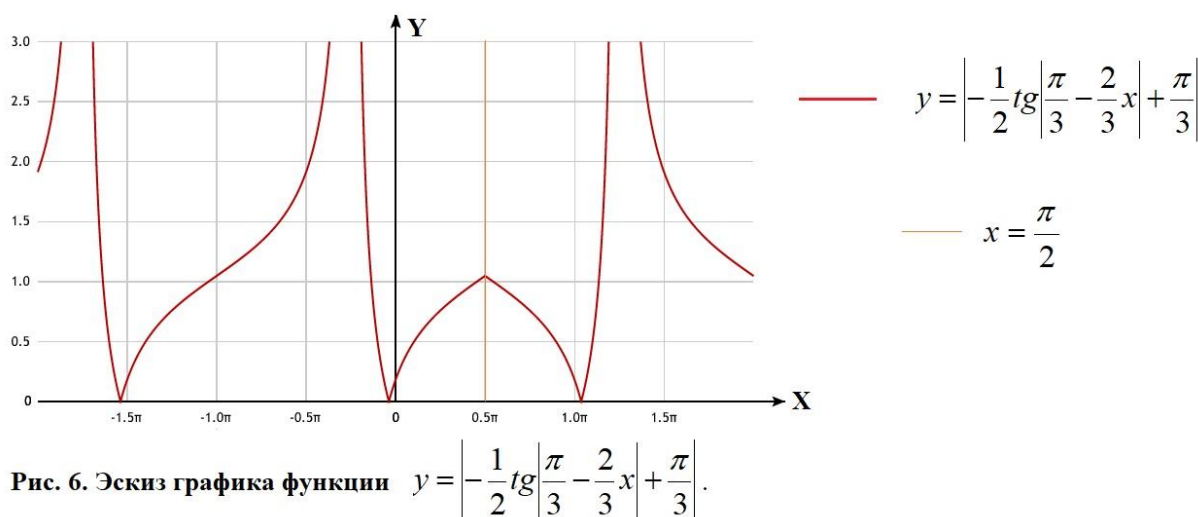
Пример 6. Построить эскиз графика функции $y = \left| -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right| + \frac{\pi}{3} \right|$.

Первые три шага алгоритма, были подробно описаны в работе [15] (см. пример 4).

В итоге получили кусочную функцию:

$$y = \left| -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right| + \frac{\pi}{3} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(-\frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}, & x > \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(-\frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}, & x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Выполняем заключительный четвертый шаг - отражаем график симметрично оси Ox .



Заключение

По-прежнему подчеркиваем, что преимуществом графического задания функции является его наглядность, недостатком - его неточность. Однако, если к известным элементарным функциям аккуратно применить те или иные преобразования, то характер поведения функции становится вполне понятным и наглядным.

Отметим, что данная работа будет полезна студентам первого курса МГТУ им. Н.Э. Баумана практически всех специальностей при выполнении первого контрольного домашнего задания по дисциплине «Математический анализ». Кроме того, на занятиях интересно будет рассмотреть графики многозначных тригонометрических функций.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. И.М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль: Функции и графики. Основные приемы, МЦНМО, 2015 г., 120 стр.
2. Ильичев А.Т., Кузнецов В.В., Фаликова И.Д. Графики элементарных функций. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004
3. Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие. – Изд. 3-е, стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с
4. М.Я. Выгодский Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ Астрель, 2019. - 509 с.
5. С. В. Буфеев Функции и графики: Учебное пособие / 2-е изд., Издательство Ленанд, 2017, 120 стр.
6. Башмаков М.И. Математика. М.: Академия, 2014. - 256 с.
7. Кузнецов Б.Т. Математика. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: 2004. – 719 с.
8. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2009, – 192 с. ISBN 978-5-89237-108-7.
9. Казанджан Э.П. Графики. Сборник задач с примерами решений по исследованию функций и построению графиков. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1982. - 616 с.
11. Гриншпон И. Э, Гриншпон Я. С. Элементарные функции и их графики, учебное пособие, Томск, Издательство томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2017, стр. 91
12. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков тригонометрических функций с помощью линейных преобразований // Modern European Researches. - Salzburg, 2021. -Т. 1. № 3. - P. 5-17. - URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47097457>
13. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внешнего модуля // Modern European Researches. - Salzburg, 2022. - Т. 1. №3. - P. 17-25. - URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49433654>
14. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внутреннего модуля // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - Т. 1. №1. - P. 18-28. - URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=53115562>

15. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Указ. соч.

Faniya Kh. Akhmetova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

dobrich2@mail.ru

Anastasiya M. Golovina,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nastya_gm@mail.ru

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

pvlx@mail.ru

The methodology of teaching the construction of graphs of trigonometric functions containing the sign of the module both external and internal

Abstract. The content of the article will be relevant and useful for teachers and undergraduate students when studying the discipline "Mathematical Analysis". The work will allow you to master the necessary techniques and skills for plotting complex multivalued functions. The purpose of the work is to show how it is possible to construct a graph of a function as quickly and simply as possible using basic linear transformations, module properties and properties of even and odd functions. Within the framework of this goal, the paper considers practical techniques for plotting graphs of various levels of complexity. Using the example of trigonometric functions containing the sign of the module, both external and internal, the behavior of graphs in the field of their definition is studied.

Keywords: linear programming, linear programming problems, simplex method, simplex table, resolving column, resolving row, resolving element, optimal solution.

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ДИСЦИПЛИН «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» И «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Аннотация

Одной из тем при изучении дисциплин «Исследование операций» и «Методы оптимизации» является «Решение задач линейного программирования». В статье рассмотрена постановка задачи линейного программирования, алгоритм решения этой задачи геометрическим методом, виды области допустимых решений, приведен пример решения задач с использованием рассмотренного алгоритма. Цель работы: проиллюстрировать особенности геометрического метода для решения задач линейного программирования, которые имеют широкое применение в экономике. Успешное освоение этой темы будет способствовать выработке у студентов практических навыков применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности. Результатом исследования является материал, который может служить основой для подготовки практических и лабораторных занятий и представлять интерес для студентов и преподавателей.

Ключевые слова

задачи линейного программирования, целевая функция, система ограничений, геометрический метод, допустимое решение, область допустимых решений, оптимальное решение

АВТОРЫ

Бахтиярова Ольга Николаевна,

кандидат технических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

olga-bakh06@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н.Э. Баумана», г. Москва

inpt@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,

кандидат педагогических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н.Э. Баумана», г. Москва

marinatichomirova@hotmail.com

Введение

Одной из задач исследования операций является задача линейного программирования, которая состоит в максимизации или минимизации линейной функции, определенной на множестве допустимых решений, представляющем собой выпуклый многогранник [1].

Область допустимых решений может иметь следующий вид:

1) пустое множество.

В случае, если область допустимых решений задачи линейного программирования - пустое множество, то рассматриваемая задача решения не имеет.

Пример 1.

Пусть система ограничений задачи линейного программирования имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, & (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим область допустимых решений задачи линейного программирования. Найдем решение неравенства

$$x_1 + x_2 \geq 4.$$

Заменим это неравенство соответствующим равенством

$$x_1 + x_2 = 4.$$

Построим прямую, описываемую этим уравнением, используя точки пересечения с осями координат $(x_1, x_2) = (0, 4)$ и $(x_1, x_2) = (4, 0)$. На рис. 1 эта прямая показана синим цветом.

Возьмем пробную точку $(0, 0)$ и подставим ее координаты в рассматриваемое неравенство

$$0 + 0 \geq 4, \text{ т. е. } 0 \geq 4.$$

Оно будет неверным. Значит, координаты этой точки $(0, 0)$ и всех точек полуплоскости, в которой она находится, не будут являться решением этого неравенства. Отсюда следует, что решением неравенства будут координаты точек другой полуплоскости. На рис. 1 она показана штриховкой синего цвета.

Найдем решение неравенства

$$2x_1 + x_2 \leq 2.$$

Заменим это неравенство соответствующим равенством

$$2x_1 + x_2 = 2.$$

Построим прямую, описываемую этим уравнением, используя точки пересечения с осями координат $(x_1, x_2) = (0, 2)$ и $(x_1, x_2) = (1, 0)$. На рис. 1 эта прямая показана розовым цветом.

Возьмем пробную точку $(0, 0)$ и подставим ее координаты в неравенство

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 2, \text{ т. е. } 0 \leq 2.$$

Оно будет верным. Значит, координаты этой точки $(0, 0)$ и всех точек полуплоскости, в которой она находится, будут являться решением рассматриваемого неравенства. На рис. 1 она показана штриховкой розового цвета.

Учитывая, что решением неравенств

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

являются координаты точек первой четверти системы координат (на рис. 1 они показаны штриховкой зеленого и оранжевого цвета), получаем, что пересечением решений всех условий системы ограничений является пустое множество.

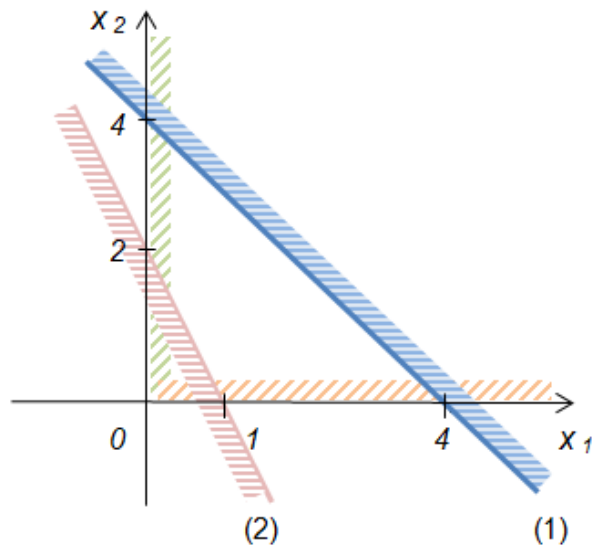


Рис. 1

Таким образом, область допустимых решений рассматриваемой задачи линейного программирования является пустое множество, и эта задача решения не имеет.

2) единственная точка.

В случае, если область допустимых решений задачи линейного программирования - единственная точка, то координаты этой точки являются решением рассматриваемой задачи линейного программирования.

Пример 2.

Пусть система ограничений задачи линейного программирования имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 1, & (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим область допустимых решений рассматриваемой задачи как пересечение решений условий системы ограничений (рис. 2).

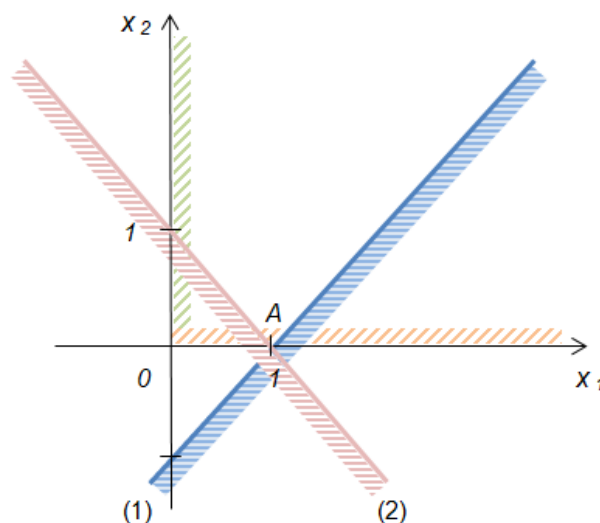


Рис. 2

В результате получаем, что областью допустимых решений рассматриваемой задачи линейного программирования является точка $A (1, 0)$. Ее координаты $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ являются решением этой задачи.

3) неограниченное (сверху или снизу) множество.

В случае, если область допустимых решений задачи линейного программирования - неограниченное (сверху или снизу) множество, то рассматриваемая задача может иметь оптимальное решение.

Пример 3.

Пусть система ограничений задачи линейного программирования имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 1, & (2) \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим область допустимых решений рассматриваемой задачи как пересечение решений условий системы ограничений (рис. 3).

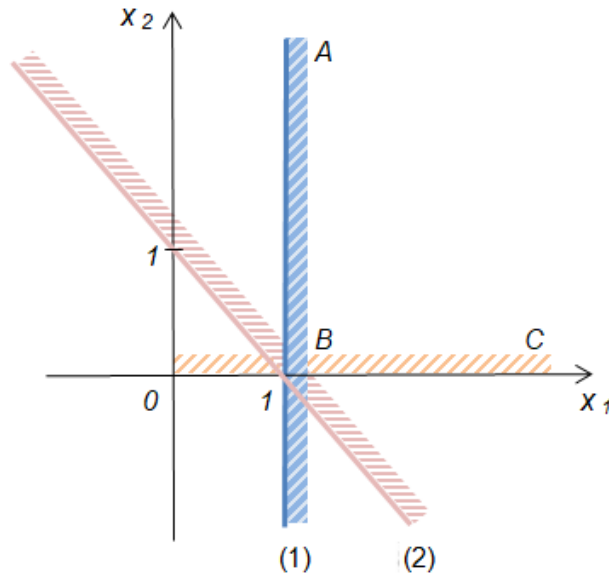


Рис. 3

В результате получаем, что областью допустимых решений рассматриваемой задачи линейного программирования является неограниченное множество ABC .

4) многоугольник.

В случае, если область допустимых решений задачи линейного программирования - многоугольник, то рассматриваемая задача имеет оптимальное решение.

Пример 4.

Пусть система ограничений задачи линейного программирования имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, & (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим область допустимых решений рассматриваемой задачи как пересечение решений условий системы ограничений (рис. 4).

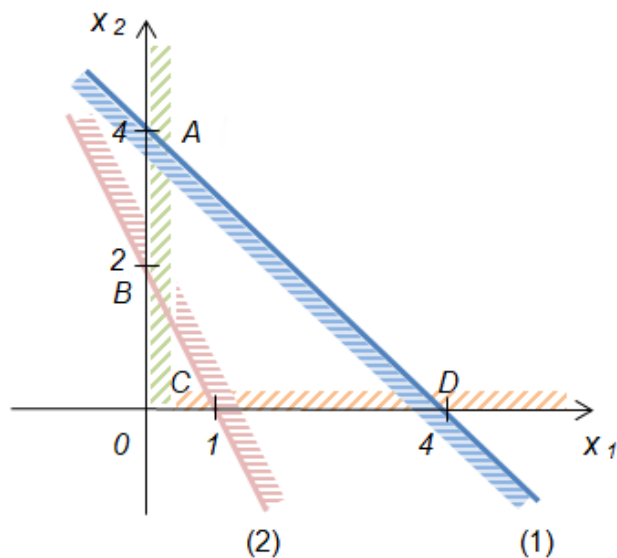


Рис. 4

В результате получаем, что областью допустимых решений рассматриваемой задачи линейного программирования является четырехугольник $ABCD$.

2. Построение линий уровня целевой функции.

Линией уровня функции двух переменных называется геометрическое место точек, в которых функция принимает одинаковые значения.

Примечание. Линии уровня целевой функции строят в случае, если область допустимых решений неограничена или является многоугольником.

Для построения линий уровня целевой функции

$$F(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

выбираем два произвольных ее значения a и b , $b > a$: $F(x) = a$, $F(x) = b$ и строим прямые, описываемые уравнениями

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = a,$$

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = b.$$

После их построения указываем направление возрастания целевой функции стрелкой от прямой, соответствующей значению целевой функции $F(x) = a$, к прямой, соответствующей значению целевой функции $F(x) = b$.

Пример 5.

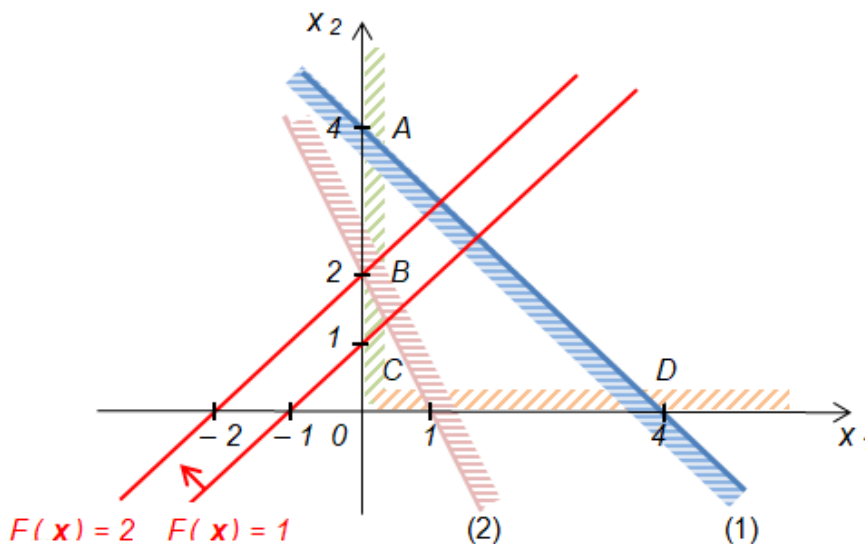
Рассмотрим задачу линейного программирования: среди неотрицательных переменных x_1 , x_2 найти такие, которые доставляют минимум и максимум функции

$$F(x) = -x_1 + x_2$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Область допустимых решений рассматриваемой задачи - четырехугольник $ABCD$ - построена в примере 4.



Зададим целевой функции $F(x) = -x_1 + x_2$ значения $F(x) = 1$ и $F(x) = 2$ и построим линии уровня этой функции, описываемые уравнениями

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 1, \\ -x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

На рис. 5 линии уровня целевой функции показаны красным цветом. Стрелкой показано направление возрастания целевой функции.

3. Определение оптимального решения задачи линейного программирования.

Если в задаче линейного программирования необходимо найти переменные, доставляющие максимум целевой функции, то перемещаем линию уровня этой функции в направлении ее возрастания до касания с областью допустимых решений.

Если в задаче линейного программирования необходимо найти переменные, доставляющие минимум целевой функции, то перемещаем линию уровня этой функции в направлении ее убывания до касания с областью допустимых решений.

Если линия уровня касается области допустимых решений в угловой точке, то координаты этой точки являются оптимальным решением рассматриваемой задачи линейного программирования. В этом случае задача имеет единственное оптимальное решение.

Если линия уровня касается области допустимых решений по части границы, то координаты точек этой части границы являются оптимальными решениями рассматриваемой задачи линейного программирования. В этом случае задача имеет бесконечное множество оптимальных решений.

Если область допустимых решений неограничена и невозможно найти переменные, доставляющие минимум целевой функции, то это означает, что область допустимых решений неограничена снизу, а если невозможно найти переменные, доставляющие максимум целевой функции, то область допустимых решений неограничена сверху.

Найдем оптимальное решение x^* задачи линейного программирования, рассматриваемой в примере 5.

Перемещаем линию уровня в направлении возрастания целевой функции. Она будет касаться области допустимых решений в точке $A(0, 4)$ (рис. 5). Значит, координаты этой точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ являются оптимальным решением данной задачи линейного программирования, доставляющим максимум целевой функции, т.е.

$$\mathbf{x}^* = (0, 4), F_{\max}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) = F(0, 4) = 4.$$

Перемещаем линию уровня в направлении убывания целевой функции. Она будет касаться области допустимых решений в точке $D(4, 0)$ (рис. 5). Значит, координаты этой точки $x_1 = 4$ и $x_2 = 0$ являются оптимальным решением рассматриваемой задачи линейного программирования, доставляющим минимум целевой функции, т.е.

$$\mathbf{x}^* = (4, 0), F_{\min}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) = F(4, 0) = -4.$$

Пример 6.

Рассмотрим задачу линейного программирования: среди неотрицательных переменных x_1, x_2 найти такие, которые доставляют минимум и максимум функции

$$F(\mathbf{x}) = 2 \cdot x_1 + x_2$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq \frac{1}{2}, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Областью допустимых решений рассматриваемой задачи является неограниченное множество $ABCD$ (рис. 6).

Зададим целевой функции $F(\mathbf{x}) = 2 \cdot x_1 + x_2$ значения $F(\mathbf{x}) = 4$ и $F(\mathbf{x}) = 6$ и построим линии уровня этой функции, описываемые уравнениями

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 4,$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 = 6.$$

На рис. 6 эти линии уровня целевой функции показаны красным цветом. Стрелкой показано направление возрастания целевой функции.

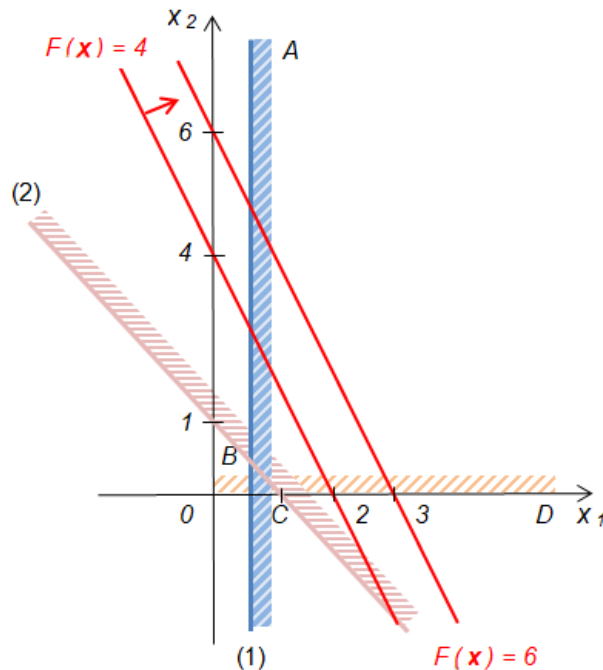


Рис. 6

Найдем оптимальное решение x^* рассматриваемой задачи линейного программирования.

Перемещаем линию уровня в направлении убывания целевой функции. Она будет касаться области допустимых решений в точке $B(0.5, 0.5)$ (рис. 6).. Значит, координаты этой точки $x_1 = 0.5$ и $x_2 = 0.5$ являются оптимальным решением данной задачи линейного программирования, доставляющим минимум целевой функции, т.е.

$$x^* = (0.5, 0.5), F_{\min}(x) = F(x^*) = F(0.5, 0.5) = 1.5.$$

Перемещаем линию уровня в направлении возрастания целевой функции. При этом невозможно найти точку или часть границы области допустимых решений, где линия уровня целевой функции касается области допустимых решений. Это означает, что рассматриваемая задача линейного программирования, в которой необходимо найти переменные x_1, x_2 , доставляющие максимум целевой функции, решения не имеет, т. к. область допустимых решений неограничена сверху.

Для оценивания результатов освоения студентами данной темы предлагаются следующие вопросы:

1. Дайте определение допустимого решения задачи линейного программирования.
2. Дайте определение области допустимых решений задачи линейного программирования.
3. Какие виды области допустимых решений существуют?
4. Дайте определение опорного решения задачи линейного программирования.
5. Дайте определение оптимального решения задачи линейного программирования.

Задание для самостоятельной работы

Для закрепления освоения данной темы студентам предлагается, используя описанный алгоритм, решить задачу линейного программирования геометрическим методом по индивидуальному варианту.

Заключение

В работе приведен алгоритм решения задач линейного программирования геометрическим методом и примеры его использования для решения задачи.

Материал, представленный в работе, может быть использован преподавателями при проведении практических и лабораторных занятий по теме «Решение задач линейного программирования», а также студентами для самостоятельной работы.

Приведенный в работе алгоритм решения задач линейного программирования геометрическим методом может помочь студентам в выработке у них практических навыков применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности [11].

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб, для вузов - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 436 с.
2. Бородакий Ю.В. Линейное программирование в современных задачах оптимизации. - М.: МИФИ, 2008. - 564с.
3. Бахтиярова О. Н., Птицына И. В., Подзорова М. И. Применение симплекс-метода для решения задач линейного программирования в курсе дисциплин «Исследование операций» и «Методы оптимизации» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - № 3. - Р. 5-16.
4. Там же.
5. Там же.

6. Таха Х.А. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. - 912 с.
7. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972. - 407 с.
8. Там же.
9. Там же.
10. Там же.
11. Бахтиярова О. Н., Птицына И. В., Подзорова М. И. Указ. соч.

Olga N. Bakhtiyarova,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
olga-bakh06@mail.ru

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

inpt@mail.ru

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
marinatichomirova@hotmail.com

Application of the geometric method for solving linear programming problems in the course of the disciplines "Operations Research" and "Optimization Methods".

Abstract. One of the topics in the study of the disciplines "Operations Research" and "Optimization Methods" is "Solving linear programming problems". The article considers the formulation of a linear programming problem, an algorithm for solving this problem using a method, types of the domain of acceptable solutions, and provides an example of solving problems using the algorithm considered. The purpose of the work is to illustrate the features of a geometric method for solving linear programming problems that are widely used in economics. Successful mastering of this topic will contribute to the development of students' practical skills in applying optimization methods to solve theoretical and applied problems of professional activity. The result of the research is a material that can serve as a basis for the preparation of practical and laboratory classes and be of interest to students and teachers.

Keywords: linear programming problems, objective function, constraint system, geometric method, feasible solution, domain of feasible solutions, optimal solution.

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АКСИОМАТИК ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПРОГРАММИСТОВ

Аннотация

Актуальность рассматриваемой методической задачи обусловлена тем, что в учебных планах студентов-программистов существенное место занимает математическая логика, и требуется отработка методики строгого и в то же время доступного указанному контингенту изложения основ математической логики. Цель предлагаемой статьи – изложить методику сравнения разных аксиоматик исчисления высказываний. Главный результат состоит в доказательстве сводимости двух аксиоматик к третьей, имеющей определенные преимущества.

Ключевые слова

математическая логика, исчисление высказываний, формальные теории, методические проблемы

АВТОРЫ

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Введение

Данная статья является продолжением публикаций по методике изложения разделов курса логики и теории алгоритмов [1], [2] и [3] и посвящена методике сравнения различных аксиоматик исчисления высказываний.

Известно много разных и, в определенном смысле эквивалентных, аксиоматизаций исчисления высказываний как формальной теории. Сводку этих аксиоматик (но без сравнительного анализа, часто в виде задач для самостоятельного решения) можно найти, например, в [4] и [5], в [6], а также в [7]. Представляет интерес анализ аксиоматик и для многозначных логик [8].

В предлагаемой статье в качестве базовой аксиоматики выбрана теория, называемая теорией L, которая является основной в книге [9]. Для полноты изложения она приведена здесь, хотя была подробно рассмотрена в [10]. Эта аксиоматика имеет определенные преимущества. Во-первых, она содержит всего три схемы аксиом; во-вторых, эти схемы имеют прозрачную содержательную основу. На основе этих схем легко доказывается теорема дедукции, являющаяся основным и мощным инструментом при построении доказательств в объектной теории.

Содержание данной статьи составляет подробное сравнение теории L с двумя альтернативными аксиоматиками: теорией, обозначенной здесь как теория L1 (в некоторых источниках ее называют системой Клини) и являющаяся основной в ряде источников [11], [12]. Концептуальное преимущество этой теории состоит в исключении

всякой апелляции к алгебре, что важно, если рассматривать логику как базу для обоснования алгебраических теорий, прежде всего теории булевой алгебры.

Вторая альтернативная аксиоматика - система Гильберта и Аккермана [13].

Это одна из классических аксиоматик, принадлежащая основоположнику математической логики Д. Гильберту.

В статье подробно доказывается сводимость каждой из альтернативных к теории L аксиоматик к теории L, то есть аксиомы теории L доказываются в рамках альтернативных систем аксиом как теоремы.

Проведенный в статье анализ важен при обучении студентов элементам математической логики, так как позволяет достаточно широко взглянуть на методы построения формальных теорий, что для специалиста по программированию имеет значение при разработке различных формальных исчислений программ и схем программ [14].

Можно отметить некоторые публикации, в которых проведен сравнительный анализ сложности выводов в разных аксиоматиках исчисления высказываний: [15] и [16]. Но эти работы носят сугубо научный характер и далеки от методических проблем. К тому же там рассматривается секвенциальная форма исчисления высказываний, которая в данной статье не затрагивается.

Методология и результаты исследования

Рассматриваемая в статье методика основана на известных из перечисленных источников концепциях изложения математической логики с учетом особенностей аудитории, в которой читается курс.

Далее рассматриваются основные рубрики, по которым раскладывается теоретический материал, включая полученные результаты.

Теория L

В книге Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» [17] исчисление высказываний аксиоматизируется следующим образом.

Три схемы аксиомы:

$$(1) (A \rightarrow (B \rightarrow A)),$$

$$(2) ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))),$$

$$(3) (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

Правило вывода - modus ponens.

Определение связок дизъюнкции и конъюнкции (как способов сокращения записи формул):

$$A \vee B = \neg A \rightarrow B; A \& B = \neg(A \rightarrow \neg B).$$

Эта теория обозначается как теория L.

На основе двух первых схем может быть доказана простая, но важная объектная теорема:

$$\vdash (A \rightarrow A)$$

Затем после доказательства теоремы дедукции, которая также может быть доказана на основе первых двух схем и записанной выше объектной теоремы, доказываются следующие секвенции (под этим термином в данном контексте понимаются любые утверждения о выводимости в объектной теории):

$$1) A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

$$2) A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$$

$$3) \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

$$4) \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$5) \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

- 6) $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 7) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 8) $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$
 9) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$.

Следует заметить, что две первые секвенции доказываются на основе только двух первых схем. Каждой из этих секвенций сопоставляется дополнительное правило вывода, и эти правила можно использовать наряду с основным (MP):

$$\text{Правило R1: } \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$\text{Правило R2: } \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B}{A \rightarrow C}$$

$$\text{Правило R3: } \frac{\neg\neg A}{A}$$

Важно: правилом R3 можно пользоваться только для снятия *внешнего* двойного отрицания. Применять его для снятия двойного отрицания с некоторой подформулы нельзя.

$$\text{Правило R4: } \frac{A}{\neg\neg A}$$

Опять-таки навесить двойное отрицание согласно этому правилу можно только как внешнее.

$$\text{Правило R5: } \frac{A, \neg A}{B}$$

$$\text{Правило R6: } \frac{\neg B \rightarrow \neg A}{A \rightarrow B}$$

(правило контрапозиции)

$$\text{Правило R7: } \frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

(правило обратной контрапозиции)

$$\text{Правило R8: } \frac{A, \neg B}{\neg(A \rightarrow B)}$$

$$\text{Правило R9: } \frac{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B}{B}$$

Доказывается непротиворечивость и полнота теории L [18].

Рассмотрим теперь две альтернативные аксиоматики.

Для каждой из рассматриваемых ниже аксиоматических теорий доказываются их сводимость к теории L, то есть все аксиомы теории L доказываются в каждой из альтернативных аксиоматик как теоремы. В то же время все аксиомы альтернативных

аксиоматик могут быть достаточно просто доказаны в теории L. Эти доказательства здесь не приводятся.

Система Клини (теория L1)

Теория L1 задается 10 схемами аксиом (внешние скобки опущены)

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
3. $(A \& B) \rightarrow A$
4. $(A \& B) \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$
6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
10. $\neg\neg A \rightarrow A$

и правилом МР.

Заметим, что в этой аксиоматике нет никаких лазеек для алгебры, то есть связки дизъюнкции и конъюнкции не вводятся как способы сокращения записи (что имеет место в теории L).

Заметим также, что первые две схемы теории L1 совпадают с таковыми же в теории L.

Докажем, что любая формула, являющаяся частным случаем схемы (3) теории L, доказуема в теории L1. Во всех приводимых далее доказательствах подстановки в схемы формул (схемы аксиом в том числе) как правило, не указываются. Кроме того, используется термин «доказательство схемы», под которым понимается доказательство произвольного частного случая схемы. Подробно о схемах формул написано в статье [19].

Выведем сначала правило навешивания двойного отрицания, то есть докажем формулу

$$A \rightarrow \neg\neg A.$$

Мы можем использовать теорему дедукции, а также правила R1 и R2, так как они опираются только на схемы (1) и (2), как и в теории L.

Имеем:

1. A - гипотеза
2. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A)$ - схема (9)
3. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ - схема (1)
4. $\neg A \rightarrow A$ - МР, (1) и (3)
5. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg A$ - МР, (2) и (4)
6. $\neg A \rightarrow \neg A$ - теорема (ее доказательство также использует только схемы (1) и (2))
7. $\neg\neg A$ - МР, (5) и (6).

Итак, $\square A \rightarrow \neg\neg A$

Отсюда легко доказать $\square (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B)$.

Действительно,

1. $A \rightarrow B$ - гипотеза

2. $B \rightarrow \neg\neg B$ - теорема

3. $A \rightarrow \neg\neg A$ - R1, (1) и (2).

Теперь докажем схему (3) теории L (точнее, произвольную формулу, являющуюся частным случаем этой схемы):

$\square(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.

1. $\neg B \rightarrow \neg A$ - гипотеза

2. $\neg B \rightarrow A$ - гипотеза

3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg B)$ - схема (9)

4. $(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg B$ - МР, (1) и (3)

5. $\neg\neg B \rightarrow B$ - схема (10)

6. $(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow B$ - R1, (6) и (5)

7. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg A)$ - теорема (см. выше)

8. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$ - R1, (7) и (6)

9. B - МР, (2) и (8),

что и требовалось (с учетом теоремы дедукции).

Дальше точно так же, как и в теории L доказываются секвенции (5)-(9), и можно использовать вытекающие из них правила (R5) - (R9).

Чтобы использовать свойства дизъюнкции и конъюнкции (в том числе доказать законы де Моргана), нужно доказать эквивалентности:

(E1) $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$ и

(E2) $A \& B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$

Доказательство (E1)

Слева направо:

1. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ - секв. (5)

2. $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ - схема (1)

3. $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)))$ - схема (8)

4. $(B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ - МР, (1) и (3)

5. $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ - МР, (2) и (4).

Доказано.

Справа налево:

1. $\neg A \rightarrow B$ - гипотеза

2. $B \rightarrow (A \vee B)$ - схема (7)

3. $\neg A \rightarrow (A \vee B)$ - R1, (1) и (2)

4. $A \rightarrow (A \vee B)$ - схема (6)

5. $A \vee B$ - R9, (3) и (4).

Доказано.

Доказательство (E2):

Докажем секвенцию

$\neg\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$

1. $\neg\neg(A \rightarrow \neg B)$ - гипотеза

2. $A \rightarrow \neg B$ - R3, (1)
3. $(A \& B) \rightarrow B$ - схема (4)
4. $\neg B \rightarrow \neg(A \& B)$ - R7, (3)
5. $A \rightarrow \neg(A \& B)$ - R1, (2) и (4)
6. $(A \& B) \rightarrow A$ - схема (3)
7. $\neg A \rightarrow \neg(A \& B)$ - R7, (6)
8. $\neg(A \& B)$ - R9, (5) и (7)

Из доказанного, с учетом правила R6, получаем, что $(A \& B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$, т. е. правая часть (E2) выводится из левой части.

Чтобы доказать обратную выводимость, докажем секвенции $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$ и $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$.

Опять используем контрапозицию:

1. $\neg A$ - гипотеза
2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ - секв. (5)
3. $A \rightarrow \neg B$ - МР, (1) и (2)
4. $\neg\neg(A \rightarrow \neg B)$ - R4, (3)

Первая секвенция доказана. Вторая доказывается точно так же (через контрапозицию), но вместо 5-й секвенции используется схема (1).

Итак,

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \square A, B.$$

Продолжая вывод из исходной формулы $\neg(A \rightarrow \neg B)$, пишем:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$ - схема (5)
2. $B \rightarrow (A \& B)$ - МР, формула A (выводимая из исходной) и шаг 1
3. $A \& B$ - МР, формула B (выводимая из исходной) и шаг 2.

Итак, окончательно $\neg(A \rightarrow \neg B) \square A \& B$, и эквивалентность (E2) доказана.

Тем самым мы имеем возможность дальше строить теорию, как и в рамках теории L, то есть вывести все не постулируемые алгебраические свойства дизъюнкции и конъюнкции (включая законы де Моргана) и доказать непротиворечивость и полноту теории L1.

Аксиоматика теории L1 является более последовательной в смысле исключения всех алгебраических свойств априори, носит исключительно логический характер. В то же время, введение связок дизъюнкции и конъюнкции в теории L как способов сокращения записи некоторых формул является по сути «протаскиваем» булевой алгебры в формальную теорию. Но теория L является более удобной при построении выводов не только в исчислении высказываний, но и в исчислении предикатов. Видно также, сколь мощным инструментом является схема (3) теории L, выражающая ход доказательства от противного в общем случае.

Замечание. Доказательства алгебраических свойств в теории L1 будут сложнее, чем в теории L, если строго соблюдать запрет на замену эквивалентной формулой.

Если в теории L можно было на шаге вывода использовать определения дизъюнкции и конъюнкции (что является завуалированной подстановкой эквивалентной формулы), то в теории L1 это невозможно.

Для примера докажем эквивалентность

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B,$$

выражающую один из законов де Моргана.

Слева направо:

1. $\neg(A \vee B)$ - гипотеза
2. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)$ - теорема (из эквивалентности E1)
3. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$ - R7, (2)
4. $\neg(\neg A \rightarrow B)$ - МР, (1) и (3)
5. $(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ - теорема (легко доказать по схеме (10) и правилу R1)

6. $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ - R7, (5)
7. $\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ - МР, (4) и (6)
8. $\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg A \& \neg B)$ - теорема (из эквивалентности E2)
9. $\neg A \& \neg B$ - МР, (7) и (8).

Справа налево:

1. $\neg A \& \neg B$ - гипотеза
2. $(\neg A \& \neg B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ - теорема (из эквивалентности E2)
3. $\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ - МР, (1) и (2)
4. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B)$ - теорема (навешивание двойного отрицания и правило R1)

5. $\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$ - R7, (4)
6. $\neg(\neg A \rightarrow B)$ - МР, (3) и (5)
7. $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ - теорема (из эквивалентности E1)
8. $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \vee B)$ - R7, (7)
9. $\neg(A \vee B)$ - МР, (6) и (8).

Эквивалентность доказана.

Для сравнения напомним доказательство ее в теории L.

Используя определения дизъюнкции и конъюнкции, сводим задачу к доказательству эквивалентности

$$\neg(\neg A \rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B).$$

Снимая внешние отрицания, получим

$$(\neg A \rightarrow B) \equiv (\neg A \rightarrow \neg\neg B),$$

доказательство чего тривиально.

Система Гильберта и Аккермана

Базис - дизъюнкция и отрицание $\{\neg, \vee\}$.

Схемы аксиом:

1. $(A \vee A) \rightarrow A$
2. $A \rightarrow (A \vee B)$

3. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$

4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$

Единственное правило вывода - МР. Определение: $(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$. То есть импликация определяется как дополнительная связка подобно тому, как в теории L определялись дизъюнкция и конъюнкция.

Можно заметить, что приведенная аксиоматика имеет предельно прозрачное содержательное обоснование (как и определение импликации через дизъюнкцию и отрицание). В этой очевидности аксиом и состоит основное концептуальное преимущество системы.

Но за прозрачность оснований приходится платить: свести эту аксиоматику к теории L весьма непросто. Сразу надо заметить, что пока у нас нет схем (1) и (2) теории L, которые должны быть доказаны как теоремы, мы не можем доказать теорему дедукции.

Будем доказывать последовательно следующие утверждения. Начало и конец формального доказательства отмечаем значками ◀ и ▶ соответственно.

(1) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \square A \rightarrow C$

◀

1. $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ - гипотеза

2. $(\neg A \vee B) \rightarrow (B \vee \neg A)$ - схема (3)

3. $B \vee \neg A$ - МР, (1) и (2)

4. $B \rightarrow C = \neg B \vee C$ - гипотеза

5. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee C))$ - схема (4)

6. $(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee C)$ - МР, (4) и (5)

7. $\neg A \vee C = A \rightarrow C$ - МР, (1) и (6).

▶

Заметим, что в приведенном доказательстве теорема дедукции не используется, а просто строится вывод из гипотез без их последующего устранения.

Итак, мы можем теперь использовать правило R1:

$$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$A \rightarrow C$$

(2) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (схема (1) теории L)

◀1. $A \rightarrow (A \vee \neg B)$ - схема (2)

2. $(A \vee \neg B) \rightarrow (\neg B \vee A)$ - схема (3)

3. $A \rightarrow (\neg B \vee A) = A \rightarrow (B \rightarrow A)$ - R1, (1) и (2)

▶

(3) $\vdash (A \rightarrow A) = (\neg A \vee A)$

◀1. $A \rightarrow (A \vee A)$ - схема (2)

2. $(A \vee A) \rightarrow A$ - схема (1)

3. $(A \rightarrow A) = (\neg A \vee A)$ - R1, (1) и (2)

▶

$$(4) \quad \vdash A \vee \neg A$$

Следует из (3) с учетом схемы (3) (коммутативность дизъюнкции).

$$(5) \quad \text{Навешивание двойного отрицания: } \vdash A \rightarrow \neg\neg A.$$

Следует из п. (4) при замене A на $\neg A$.

$$(6) \quad \text{Снятие двойного отрицания: } \vdash \neg\neg A \rightarrow A.$$

◀

$$1. \quad \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A - \text{п. (5) при замене } A \text{ на } \neg A$$

$$2. \quad (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg\neg\neg A)) - \text{схема (4)}$$

$$3. \quad (A \vee \neg A) \rightarrow (A \vee \neg\neg\neg A) - \text{MP, (1) и (2)}$$

$$4. \quad A \vee \neg A - \text{п. (4)}$$

$$5. \quad A \vee \neg\neg\neg A - \text{MP, (3) и (4)}$$

$$6. \quad (A \vee \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg\neg A \vee A) - \text{схема (3)}$$

$$7. \quad \neg\neg\neg A \vee A = \neg\neg A \rightarrow A - \text{MP, (5) и (6).} \blacktriangleright$$

$$(7) \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$\blacktriangleleft 1. \quad B \rightarrow \neg\neg B - \text{п. (5)}$$

$$2. \quad (B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B)) - \text{схема (4)}$$

$$3. \quad (\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B) - \text{MP, (1) и (2)}$$

$$4. \quad (\neg A \vee \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) - \text{схема (3)}$$

$$5. \quad (\neg A \vee B) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) = (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) - \text{R1, (3) и (4).} \blacktriangleright$$

$$(8) \quad \vdash (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$\blacktriangleleft 1. \quad (\neg B \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg B) = (\neg B \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg\neg B) - \text{п. (7)}$$

$$2. \quad (\neg\neg B \vee \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg B - \text{схема (1)}$$

$$3. \quad (\neg B \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg B - \text{R1, (1) и (2)}$$

$$4. \quad \neg\neg B \rightarrow B - \text{п. (6)}$$

$$5. \quad (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B - \text{R1, (3) и (4)}$$

▶

Так как $B \rightarrow (B \vee B)$, то из доказанного следует $(\neg B \rightarrow B) \rightarrow (B \vee B)$

$$(9) \quad A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \vdash B$$

$$\blacktriangleleft 1. \quad A \rightarrow B - \text{гипотеза}$$

$$2. \quad \neg A \rightarrow B - \text{гипотеза}$$

$$3. \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) - \text{п. (7)}$$

$$4. \quad \neg B \rightarrow \neg A - \text{MP, (1) и (3)}$$

$$5. \quad \neg B \rightarrow B - \text{R1, (4) и (2)}$$

$$6. \quad (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B - \text{п. (8)}$$

$$7. \quad B - \text{MP, (5) и (6)} \blacktriangleright$$

Тем самым обосновано правило R9:

$$\frac{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B}{B}$$

$$(10) \quad \vdash A \vee (B \vee C) \rightarrow B \vee (A \vee C)$$

Доказательство взято из книги [20, с. 58, формула (14)] с изменением обозначений. Кроме того, в целях сокращения записи доказательства будем использовать два дополнительных правила:

$$\frac{A \vee B}{B \vee A} \text{ (S3) (основано на схеме 3)}$$

и

$$\frac{B \rightarrow C}{(A \vee B) \rightarrow (A \vee C)} \text{ (S4)}$$

(основано на схеме 4).

Доказательство п. (10):

1. $C \rightarrow (C \vee A)$ - схема (2)
2. $(C \vee A) \rightarrow (A \vee C)$ - схема (3)
3. $C \rightarrow (A \vee C)$ - R1, (1) и (2)
4. $(B \vee C) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ - S4, (3)
5. $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \vee (A \vee C)))$ - S4, (4)
6. $(A \vee (B \vee (A \vee C))) \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$ - схема (3)
7. $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$ - R1, (5) и (6)
8. $A \rightarrow (A \vee C)$ - схема (2)
9. $(A \vee C) \rightarrow ((A \vee C) \vee B)$ - схема (2)
10. $((A \vee C) \vee B) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ - схема (3)
11. $(A \vee C) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ - R1, (9) и (10)
12. $A \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ - R1, (8) и (11)
13. $(B \vee (A \vee C)) \vee A \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee (B \vee (A \vee C)))$ - S4, (12)
14. $((B \vee (A \vee C)) \vee (B \vee (A \vee C))) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$ - схема (1)
15. $(B \vee (A \vee C)) \vee A \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$ - R1, (13) и (14)
16. $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$ - R1, (7) и (15).

(11) Обоснование правила R2

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B}{A \rightarrow C}, \text{ то есть доказательство секвенции}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$$

- ◀1. $A \rightarrow (B \rightarrow C) = \neg A \vee (\neg B \vee C)$ - гипотеза
2. B - гипотеза
3. $\neg A \vee (\neg B \vee C) \rightarrow \neg B \vee (\neg A \vee C)$ - п. (10)
4. $\neg B \vee (\neg A \vee C) = B \rightarrow (A \rightarrow C)$ - МР, (1) и (3)
5. $A \rightarrow C$ - МР, (2) и (4). ▶

$$(12) \quad \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

◀Прямое следствие схемы (2) при замене A на $\neg A$.

Заменяя в только что доказанной секвенции A на $\neg A$, получим $\neg \neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, откуда в силу п.(5) и правила R1 получим $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. ▶

$$(13) \quad A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C$$

- ◀1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ - гипотеза
2. $A \rightarrow B$ - гипотеза
3. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee C))$ - схема (4)
4. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ - R1, (1) и (3); с учетом определения импликации.
5. $A \rightarrow (A \rightarrow C)$ - R2, (2) и (4)
6. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow C)$ - п. (12)
7. $A \rightarrow C$ - R9, (5) и (6). ▶

Теперь можно доказать теорему дедукции, но в индукционном переходе мы используем не схему (2) теории L, а основанное на секвенции (13) правило вывода. Базис основан на схеме (1) теории L (п. 2) и секвенции п. 3.

Чтобы окончательно «войти» в рамки теории L, нужно доказать как теорему схему (3) этой теории.

Докажем сначала закон контрапозиции, то есть

$$(14) \quad \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Мы можем теперь использовать теорему дедукции.

1. $\neg B \rightarrow \neg A$ - гипотеза
2. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B)$ - п. (7) при $A := \neg B, B := \neg A$
3. $\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B$ - МР, (1) и (2)
4. $A \rightarrow \neg \neg A$ - п. (5)
5. $A \rightarrow \neg \neg B$ - R1, (4) и (3)
6. $\neg \neg B \rightarrow B$ - п. (6)

7. $A \rightarrow B$ - R1, (5) и (6).

Остается применить теорему дедукции.

(15) $\square (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$

Следует из п. (14) и п. (8), как это доказывалось при анализе теории L1 (система Клини).

Итак, в силу всего доказанного, мы можем применять правила (R1) -- (R9), как в теории L.

Остается установить взаимную связь дизъюнкции и импликации, то есть доказать эквивалентность

(E1) $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$.

Сначала докажем

$\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((B \vee A) \rightarrow (C \vee A))$

1. $B \rightarrow C$ - гипотеза
2. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$ - схема (4)
3. $(A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$ - МР, (1) и (2)
4. $(B \vee A) \rightarrow (A \vee B)$ - схема (3)
5. $(B \vee A) \rightarrow (A \vee C)$ - R1, (4) и (3)
6. $(A \vee C) \rightarrow (C \vee A)$ - схема (3)
7. $(B \vee A) \rightarrow (C \vee A)$ - R1, (5) и (6).

С учетом теоремы дедукции получаем требуемое.

Далее нам будет удобно использовать правило

$$\frac{B \rightarrow C}{(B \vee A) \rightarrow (C \vee A)} \text{ (S4')}$$

Переходим к доказательству эквивалентности (E1).

Слева направо:

1. $A \vee B$ - гипотеза
2. $A \rightarrow \neg \neg A$ - п. (5)
3. $(A \vee B) \rightarrow (\neg \neg A \vee B)$ - (S4'), (2)
4. $(\neg \neg A \vee B) \equiv (\neg A \rightarrow B)$ - МР, (1) и (3).

Справа налево доказывается точно также, но вместо навешивания двойного отрицания используется его снятие (п. (6)).

Запишем теперь секвенцию (8) теории L в виде

1. $A \rightarrow (\neg \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$, произведя замену B на $\neg B$ и сделав тем самым 1-й шаг нового вывода

2. A - гипотеза
3. B - гипотеза
4. $\neg \neg B$ - R4, (3)
5. $\neg \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ - МР, (1) и (2)
6. $\neg(A \rightarrow \neg B)$ - МР, (4) и (5)

Итак, $A, B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$.

Можно доказать и обратную выводимость, то есть

$\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A, B$.

Докажем $\neg A \vdash \neg\neg(A \rightarrow \neg B)$.

1. $\neg A$ - гипотеза
2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ - п. (12)
3. $A \rightarrow \neg B$ - МР, (1) и (2)
4. $\neg\neg(A \rightarrow \neg B)$ - R4, (3).

Совершенно аналогично доказывается секвенция $\neg B \vdash \neg\neg(A \rightarrow \neg B)$, но вместо п. (12) (или секвенции (5) теории L) используется п. (2) (или схема (1) теории L).

Естественно тогда *определить* конъюнкцию:

$A \& B = \neg(A \rightarrow \neg B)$.

Дальше можно строить выводы, почти как в теории L. Почти - так как дизъюнкция не вводится здесь по определению, а доказывается эквивалентность (E1), и мы не можем делать соответствующую замену на шаге вывода.

Опять докажем для примера эквивалентность

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$.

Конъюнкцию можно раскрыть по определению, и тогда задача сводится к доказательству эквивалентности

$\neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$.

Снимая внешние отрицания, получим:

$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow \neg\neg B$.

Слева направо:

1. $A \vee B$ - гипотеза
2. $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ - теорема (эквивалентность (E1))
3. $\neg A \rightarrow B$ - МР, (1) и (2)
4. $B \rightarrow \neg\neg B$ - п. (5)
5. $\neg A \rightarrow \neg\neg B$ - R1, (3) и (4).

Вывод справа налево будет точной инверсией построенного.

Но некоторые алгебраические свойства булевых операций легче доказать в аксиоматике Гильберта-Аккермана.

Например, ассоциативность дизъюнкции:

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

Слева направо:

1. $A \vee (B \vee C)$ - гипотеза
2. $(B \vee C) \rightarrow (C \vee B)$ - схема (3)
3. $A \vee (B \vee C) \rightarrow A \vee (C \vee B)$ - S4, (2)
4. $A \vee (C \vee B) \rightarrow C \vee (A \vee B)$ - п. (10) при $B := C, C := B$
5. $A \vee (B \vee C) \rightarrow C \vee (A \vee B)$ - R1, (3) и (4)
6. $C \vee (A \vee B)$ - МР, (1) и (5)

7. $(A \vee B) \vee C$ -S3, (6)

Справа налево:

1. $(A \vee B) \vee C$ - гипотеза

2. $C \vee (A \vee B)$ - S3, (1)

3. $C \vee (A \vee B) \rightarrow A \vee (C \vee B)$ - п. (10) при $A := C, B := A, C := B$

4. $A \vee (C \vee B)$ - МР, (2) и (3)

5. $A \vee (B \vee C)$ - схема (3) и правило S4 (как в шагах 1--3 предыдущего вывода).

Можно сделать исключение для дизъюнкции и разрешить ее замену в выводах согласно эквивалентности (E1), как если бы она была *определена*, как в теории L. Тогда все дальнейшие выводы могут быть построены, как в теории L.

Заключение

Проведен сравнительный анализ трех аксиоматик в исчислении высказываний и доказана сводимость двух альтернативных к теории L аксиоматик к теории L.

В результате можно сделать вывод, что система Гильберта и Аккермана имеет самые простые и очевидные содержательные логические предпосылки, но и путь от них к ключевым в теории L схемам (1) и (2) весьма тернист. Теория L кладет в основу схему доказательства от противного (схема 3) и достаточно просто трактуемую содержательно схему (1), но использует в качестве второй схемы достаточно «удаленную» от очевидности схему умозаключения (свойство дистрибутивности импликации). Но зато такая аксиоматика оказывается самой эффективной в смысле построения формальных выводов. Система Клини занимает между этими двумя аксиоматиками промежуточное положение и ее главная особенность состоит в полном исключении дополнительных определений, которые, строго говоря, следует считать «лазейками» для алгебры. И в этом отношении теория L наиболее уязвима.

Представленный сравнительный анализ может быть полезен как обучающимся по соответствующей программе, так и преподавателям, читающим курс математической логики. На его основе отрабатывается техника построения формальных доказательств, а также сам подход к сравнительному анализу разных формальных теорий может быть использован при разработке таких теорий в программных технологиях.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам // Modern European Researches 2021 .- № 2-1 .- С. 42 - 58.
2. Безверхний Н.В., Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам: основы исчисления предикатов // Modern European Researches 2022 .- № 1-2 .- С. 46 - 54.
3. Белоусов А.И. Некоторые методические аспекты изложения метода резолюций для студентов-программистов // Modern European Researches 2023 .- № 3-1 .- С. 24 - 40.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1971. - 320 с.
5. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. - 6 ed. - N.Y., CRC Perss.- 2015. - 499 pp.
6. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. - М.: КомКнига, 2006. - 240 с.
7. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. - М. Гос. изд. иностранной лит., 1947. - 307 с.
8. Slaney J. K. More Proofs of an Axiom of Lukasiewicz // J. of Automated Reasoning 2002.- №1.- pp. 56-66.
9. Mendelson E., op. cit.
10. Белоусов А.И., указ. соч. (2021)
11. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г., указ. соч.
12. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. - М.: Наука, 1979. - 320 с.
13. Гильберт Д., Аккерман В., указ. соч.
14. Касьянов В.Н. Оптимизирующие преобразования программ. - М.: Наука, 1988. - 335 с.

15. Тамазян А. А., Чубарян А. А. Об отношениях сложности выводов в ряде систем исчисления высказываний // Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 2020. - №54. - С. 138-146.
16. Апинян Л.А. Сравнение длин линейных и древовидных выводов некоторых семейств формул в ряде систем исчисления высказываний // Доклады Национальной Академии наук РА 2022. - №2. - С. 125-132.
17. Mendelson E., op. cit.
18. Mendelson E., op. cit.
19. Белоусов А.И., указ. соч. (2021)
20. Гильберт Д., Аккерман В., указ. соч.

Alexey I. Belousov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

al_belous@bk.ru

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

Comparison of various axiomatics of propositional calculus in a course of mathematical logic for student programmers

Abstract. The relevance of the methodological problem under consideration is due to the fact that mathematical logic occupies a significant place in the curricula of student programmers, and it is necessary to develop a methodology for presenting the fundamentals of mathematical logic in a strict and at the same time accessible to the specified contingent. The purpose of this article is to outline a method for comparing different axiomatics of propositional calculus. The main result is the proof of the reducibility of two axiomatics to a third one, which has certain advantages.

Keywords: mathematical logic, formal theory, propositional calculus, methodological problems.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

Абсолютной геометрией называется раздел классической геометрии, независимый от пятого постулата Евклида, т.е. это те теоремы, которые можно доказать без использования аксиомы о параллельных прямых, а значит, это будут теоремы, одинаковые для евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Цель работы заключается в рассмотрении методики преподавания абсолютной геометрии в рамках школьного факультатива. В работе последовательно излагаются основные факты абсолютной геометрии, приводятся доказательства ключевых теорем, включая две теоремы Саккери-Лежандра, возникшие при попытке доказать пятый постулат Евклида. Работа будет полезна школьным учителям математики при проведении факультативных занятий по геометрии.

Ключевые слова

абсолютная геометрия, пятый постулат Евклида, теоремы Саккери-Лежандра

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Хасанов Наиль Алфатович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Введение

Абсолютной геометрией называется раздел классической геометрии, независимый от пятого постулата Евклида, т.е. это те теоремы, которые можно доказать без использования аксиомы о параллельных прямых. Как правило, при изложении аксиом в учебниках геометрии не акцентируется внимание на том, какие именно теоремы не зависят от постулата о параллельных прямых. Подобные факты можно найти лишь в книгах, где подробно освещаются основания геометрии (см., например, [1], [2], [3], [4]). В то же время представляется полезным знакомство учащихся с этими фактами, поскольку в геометрии Лобачевского постулат о параллельности заменяется на противоположное утверждение, но теоремы абсолютной геометрии будут одинаковыми для евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

Цель работы заключается в рассмотрении методики преподавания абсолютной геометрии в рамках школьного факультатива. В работе последовательно излагаются основные факты абсолютной геометрии, приводятся доказательства ключевых теорем, включая две теоремы Саккери-Лежандра, возникшие при попытке доказать пятый постулат Евклида. Изложение основано на аксиоматике, принятой в школьном учебнике геометрии А.В. Погорелова [5]. Так что работа будет полезна школьным учителям математики при проведении факультативных занятий по геометрии.

Методология и результаты исследования

Основу элементарной геометрии составляет система аксиом, первоначально сформулированная Евклидом ок. 300 г. до н. э. и доработанная до современного состояния выдающимся немецким математиком Давидом Гильбертом в 1899 г. Основными объектами этой системы аксиом являются точки, прямые и плоскости, а аксиомы описывают очевидные, надёжно подкреплённые опытом и потому не требующие доказательства свойства этих объектов. Любые другие утверждения, описывающие свойства точек, прямых и плоскостей, требуется доказывать, исходя из аксиом с помощью правил логического вывода.

Напомним, что аксиоматика Евклида состояла из постулатов и аксиом. Постулатов у Евклида было пять.

- I. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
- II. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
- III. Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг.
- IV. Все прямые углы равны между собой.
- V. Если две прямые пересечь третьей и при этом сумма внутренних односторонних углов будет меньше двух прямых углов, то две данные прямые при их продолжении пересекутся с той стороны от третьей прямой, где эта сумма меньше двух прямых углов.

Аксиом было девять.

- I. Величины, равные одному и тому же, равны между собой.
- II. Если к равным величинам прибавить равные, то получатся равные.
- III. Если от равных величин отнять равные, то получатся равные.
- IV. Если к неравным величинам прибавить равные, то получатся неравные.
- V. Удвоенные одного и того же равны между собой.
- VI. Половины одного и того же равны между собой.
- VII. Совмещающиеся наложением равны.
- VIII. Целое больше части.
- IX. Две прямые не содержат пространства.

Особое место в аксиоматике Евклида занимает пятый постулат. Он заметно сложнее остальных постулатов и аксиом Евклида и больше похож на достаточно сложную, неочевидную теорему. Вероятно, изначально он и имел статус теоремы, ведь первые 28 предложений в «Началах» Евклида доказываются без привлечения пятого постулата. Когда же древним грекам стало ясно, что доказать пятый постулат не удаётся, статус теоремы, видимо, просто повысили до постулата, оставив его громоздкую формулировку без изменений.

Заметим, что пятый постулат можно эквивалентно переформулировать так: если прямые не пересекаются, то при их пересечении секущей сумма внутренних односторонних углов будет равна двум прямым углам. Прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, в евклидовой геометрии называются параллельными. Поэтому пятый постулат Евклида также называется *аксиомой параллельности*.

К сожалению, аксиоматика Евклида по многим причинам сегодня не может считаться удовлетворительной. Поэтому продолжать изложение будем, исходя из более современной и в то же время сравнительно простой аксиоматики Погорелова. В его системе аксиом помимо точек, прямых и плоскостей для выполнения измерений используется вспомогательное понятие вещественного числа. Собственно, отчасти благодаря этому и достигается сравнительная простота аксиоматики Погорелова, поскольку в ней, в отличие, скажем, от системы аксиом Гильберта, не приходится воспроизводить аксиомы, используемые для определения вещественных чисел.

Перечислим аксиомы планиметрии по Погорелову.

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

II. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

III. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

IV. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

V. Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

VI. Каждый угол имеет определённую градусную меру, большую нуля. Развёрнутый угол равен 180° . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

VII. На любой полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

VIII. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180° , и только один.

IX. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

X. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

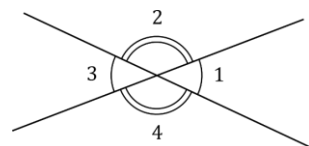
Сразу обратим внимание, что роль пятого постулата (аксиомы параллельности) в аксиоматике Погорелова играет последняя десятая аксиома. Почему это так, станет ясно чуть позже. А пока что рассмотрим, какие теоремы можно доказать без привлечения аксиомы параллельности, т. е. исходя только из аксиом I - IX.

Абсолютной геометрией называется часть евклидовой геометрии, логически независимая от аксиомы параллельности (пятого постулата Евклида), т. е. это тот набор теорем евклидовой геометрии, которые можно доказать без помощи этой аксиомы.

Рассмотрим некоторые теоремы абсолютной геометрии.

Теорема 1. Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть при пересечении двух прямых образуются четыре угла $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ как на рисунке. Докажем, что вертикальные углы $\angle 1$ и $\angle 3$ равны.



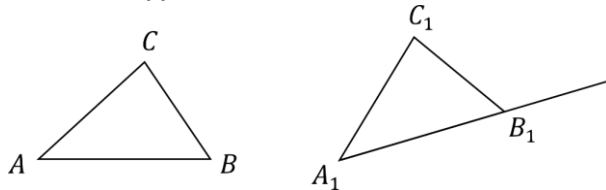
По аксиоме VI сумма смежных углов, т. е. таких, которые в сумме дают развёрнутый угол, равна 180° . Поэтому:

$$\begin{array}{l} \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \\ \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \angle 1 = 180^\circ - \angle 2 \\ \angle 3 = 180^\circ - \angle 2 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \quad \angle 1 = \angle 3 \quad \square$$

Теорема 2 [первый признак равенства треугольников]. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. По аксиоме IX на луче A_1B_1 в полуплоскости, содержащей точку C_1 , можно построить треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC . Осталось доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ совпадают.

По построению точки A_1 и A' совпадают. По условию $AB = A_1B_1$, а по построению $AB = A'B'$. Отсюда по аксиоме VII точки B_1 и B' совпадают. По условию $\angle A = \angle A_1$, а по построению $\angle A = \angle A'$. Отсюда по аксиоме VIII лучи A_1C_1 и $A'C'$ совпадают. По условию $AC = A_1C_1$, а по построению $AC = A'C'$. Отсюда по аксиоме VII точки C_1 и C' совпадают \square

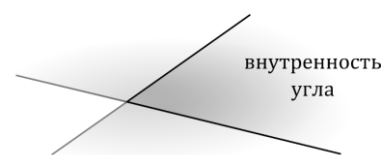


Далее следует по очереди доказать следующие факты абсолютной геометрии (в указанном порядке):

- [второй признак равенства треугольников] Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, и наоборот, если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.
- [третий признак равенства треугольников] Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство перечисленных фактов можно оставить учащимся в качестве упражнения.

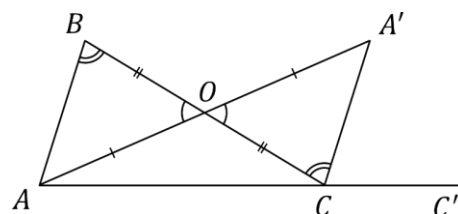
В абсолютной геометрии можно ввести понятие внутреннейности угла. Под углом понимают два различных луча с общей вершиной. Эти лучи называются сторонами угла. Для каждой стороны угла рассмотрим полуплоскость, которая содержит другую сторону. Пересечение этих полуплоскостей и образует множество точек, лежащих внутри угла.



Теорема 3. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что внешний угол при вершине C больше внутреннего угла при вершине B .

Обозначим через O середину стороны BC и на луче AO построим точку A' так, чтобы $AO = OA'$. Ясно, что точка A' лежит внутри внешнего угла при вершине C . В самом деле, у угла $\angle BCC'$ две стороны CB и CC' . Точки A' и O лежат в одной полуплоскости относительно стороны CC' , так как отрезок $A'O$ не пересекает прямую CC' . Точки A' и C' лежат в одной полуплоскости относительно стороны CB , так как обе эти точки лежат в другой полуплоскости по сравнению с точкой A . Так что для каждой из сторон $\angle BCC'$ точка A' лежит в полуплоскости, которая содержит другую сторону, т. е. лежит внутри угла.

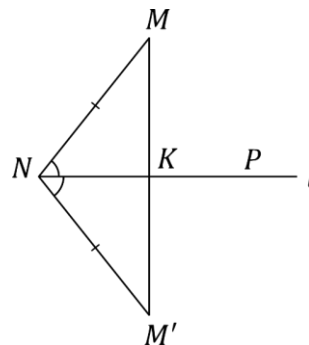


Соединим точки A' и C . Треугольники AOB и $A'OC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому внутренний угол при вершине B равен $\angle OCA'$, который является частью внешнего угла при вершине C , а значит, меньше него \square

Теорема 4. Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить перпендикуляр на данную прямую, и только один.

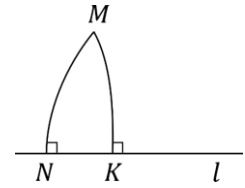
Доказательство. Пусть даны прямая l и точка M , не лежащая на прямой l . Докажем сначала существование перпендикуляра. Выберем произвольную точку N на прямой l . Если $MN \perp l$, то существование перпендикуляра доказано. В противном случае выберем произвольную точку $P \in l$ так, чтобы угол $\angle MNP$ был острым, и от луча NP в полуплоскость, не содержащую точку M , отложим угол, равный углу $\angle MNP$.

На построенном луче отложим отрезок NM' , равный отрезку NM . Точки M и M' лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l . Следовательно, по аксиоме IV отрезок MM' пересекает прямую l в некоторой точке K . В треугольниках MNK и $M'NK$ равенства



$MN = M'N$ и $\angle MNK = \angle M'NK$ верны по построению, а сторона NK общая. Следовательно, по теореме 2 треугольники MNK и $M'NK$ равны. Значит, равны их соответственные углы: $\angle MKN = \angle M'KN$. И поскольку эти два угла смежные, каждый из них равен 90° , и, значит, MK - перпендикуляр к прямой l .

Докажем теперь единственность перпендикуляра методом от противного. Предположим, существуют два разных перпендикуляра MN и $M'K$ к прямой l . Тогда в треугольнике MNK внутренний угол при вершине N будет прямым и внешний угол при вершине K тоже будет прямым, что противоречит теореме 3 \square



Исходя из доказанной теоремы, в абсолютной геометрии можно корректно определить понятие осевой симметрии (отражения относительно прямой): каждая точка оси симметрии остаётся неподвижной, а для всякой другой точки опускаем перпендикуляр на ось и продолжаем его в другую полуплоскость на такое же расстояние.

И далее, опираясь на понятие осевой симметрии, можно доказать следующие теоремы:

- Осевая симметрия является преобразованием плоскости, т. е. биективным (взаимно однозначным) отображением плоскости на себя.

- Осевая симметрия переводит прямую в прямую, отрезок - в равный ему отрезок, а угол - в равный ему угол.

- Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

Теперь можно доказать ещё некоторые факты о треугольниках:

- Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

- Всякая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

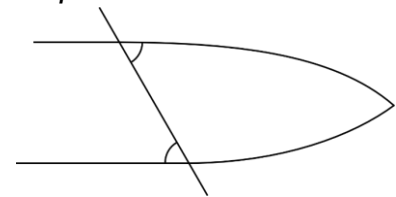
Доказательства всех этих утверждений предлагается оставить учащимся в качестве упражнения.

В абсолютной геометрии можно доказать, что три медианы треугольника, как и три его биссектрисы, пересекаются в одной точке, причём точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности. Однако, как станет ясно чуть позже, доказать то же самое про три высоты или три серединных перпендикуляра уже не получится. Напомним, что в евклидовой геометрии точка пересечения серединных перпендикуляров является центром описанной около треугольника окружности. Так что в абсолютной геометрии не получится доказать теорему о том, что около любого треугольника можно описать окружность.

Также в абсолютной геометрии нет понятия параллельных прямых. Но можно говорить о прямых, которые не пересекаются.

Теорема 5 [признак непересекающихся прямых]. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые не пересекаются.

Доказательство. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что прямые пересекаются. Тогда вместе с секущей они образуют треугольник, причём один из двух равных накрест лежащих углов будет внутренним углом этого треугольника, а другой - внешним. Но по теореме 3 эти углы не могут быть равны \square

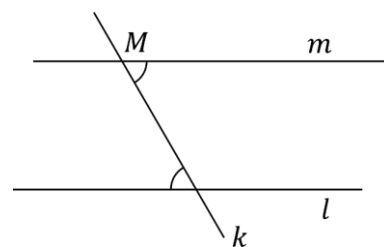


Аналогично, доказывается, что прямые не пересекаются, если при их пересечении секущей соответственные углы равны или если сумма внутренних односторонних

углов равна 180° . Заметим, что доказать эти теоремы в обратную сторону в абсолютной геометрии не получится. Собственно, обратное утверждение и является пятым постулатом Евклида.

Теорема 6. *Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, которая не пересекается с данной прямой.*

Доказательство. Пусть даны прямая l и точка M , не лежащая на прямой l . Через точку M проведём произвольную прямую k . Если она не пересекает прямую l , то всё доказано. Если же прямые k и l пересекаются, то будем считать прямую k секущей, и через точку M проведём ещё одну прямую m так, чтобы накрест лежащие углы были равны. По теореме 5 прямые m и l не пересекаются \square



Заметим, что доказанная теорема 6 не совпадает с аксиомой X. В самом деле, в доказанной теореме утверждается, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести хотя бы одну прямую, не пересекающуюся с данной прямой. А в аксиоме X говорится, что можно провести не более одной такой прямой.

Рассмотрим теперь две теоремы абсолютной геометрии, названные в честь итальянского математика Джироламо Саккери (1667-1733) и французского математика Адриена Мари Лежандра (1752-1833). Оба безуспешно пытались доказать пятый постулат Евклида как теорему абсолютной геометрии. Однако, каждый из них в своём доказательстве использовал некое неявное допущение, эквивалентное пятому постулату, и тем самым их доказательства были ошибочными. Тем не менее положительным результатом их исследований стало прояснение вопроса о сумме углов треугольника. Сразу заметим, что в абсолютной геометрии нельзя доказать, что сумма углов треугольника равна 180° . Однако, будут справедливы следующие две теоремы. В этих теоремах символом d обозначена градусная мера прямого угла, т. е. 90° . Соответственно, $2d = 180^\circ$. Такое обозначение для прямого угла общепринято, когда речь заходит об основаниях геометрии.

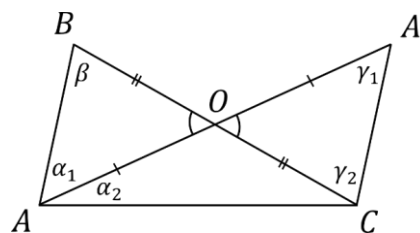
Теорема 7 [первая теорема Саккери-Лежандра]. *Сумма углов треугольника не больше $2d$.*

Доказательство теоремы 7 опирается на следующую лемму.

Лемма 7.1. *Для любого треугольника ABC можно построить треугольник $A_1B_1C_1$ с такой же суммой углов и сколь угодно малым углом при вершине A_1 , т. е. $\angle A_1$ будет меньше любого, наперёд заданного числа.*

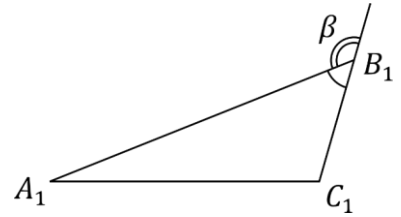
Доказательство леммы 7.1. Для треугольника ABC обозначим через O середину стороны BC и на луче AO построим точку A' так, чтобы $AO = OA'$.

Треугольники AOB и $A'OC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\alpha_1 = \gamma_1$ и $\beta = \gamma_2$. Отсюда суммы углов в треугольниках ABC и $AA'C$ совпадают. И кроме того, либо α_1 , либо α_2 не превосходит половины угла $\angle BAC$. Так как $\alpha_1 = \gamma_1$, то хотя бы один из углов α_2 или γ_1 треугольника $AA'C$ не превосходит половины угла $\angle BAC$.



Таким образом, построен треугольник $AA'C$ с такой же суммой углов, как и в треугольнике ABC , и одним из углов, не превосходящем $\frac{1}{2} \angle A$. Применяя данное построение к треугольнику $AA'C$, можно построить треугольник с такой же суммой углов и одним из углов, не превосходящем $\frac{1}{4} \angle A$. Повторяя это построение n раз, можно сделать один из углов не больше величины $\frac{1}{2^n} \angle A$. При достаточно большом n эта величина будет меньше любого, наперёд заданного числа \square

Доказательство теоремы 7 проведём методом от противного. Предположим, существует треугольник ABC , сумма углов которого больше $2d$ и равна $2d + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Применяя доказанную лемму, построим такой треугольник $A_1B_1C_1$, сумма углов которого также будет равна $2d + \varepsilon$ и при этом $\angle A_1 < \varepsilon$. Тогда $\angle B_1 + \angle C_1 > 2d$, откуда $2d - \angle B_1 < \angle C_1$.



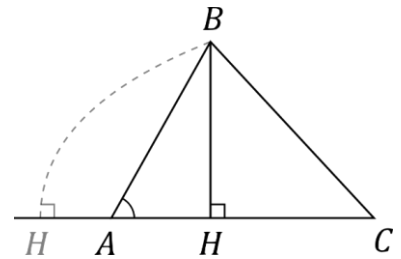
С другой стороны, если обозначить через β внешний угол при вершине B_1 , то $\angle B_1 + \beta = 2d$. Отсюда $\beta = 2d - \angle B_1 < \angle C_1$, что противоречит теореме 3 \square

Теорема 8 [вторая теорема Саккери-Лежандра]. *Если в каком-либо одном треугольнике сумма углов равна $2d$, то сумма углов любого треугольника равна $2d$.*

Доказательство теоремы 8 опирается на следующие две леммы.

Лемма 8.1. *Всякий треугольник можно разрезать на два прямоугольных треугольника.*

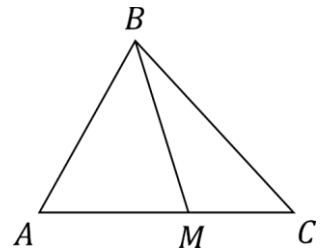
Доказательство леммы 8.1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC . По теореме 7 в этом треугольнике может быть максимум один тупой или прямой угол, т. е. угол больше или равный d . Другие два угла обязательно острые. Будем считать, что в треугольнике ABC углы A и C острые. По теореме 4 из точки B на прямую AC можно опустить единственный перпендикуляр BH , причём точка H окажется на прямой AC между точек A и C . В противном случае, если, скажем, точка H окажется вне отрезка AC со стороны точки A , то в треугольнике ABH будет прямой угол H и острый внешний угол при вершине A , что противоречит теореме 3. Таким образом, всякий треугольник ABC можно разрезать на два прямоугольных треугольника ABH и CBH \square



Лемма 8.2. *Пусть треугольник ABC разрезан на два треугольника ABM и CBM . Тогда сумма углов треугольника ABC равна $2d$ в том и только том случае, когда сумма углов каждого из двух треугольников ABM и CBM равна $2d$.*

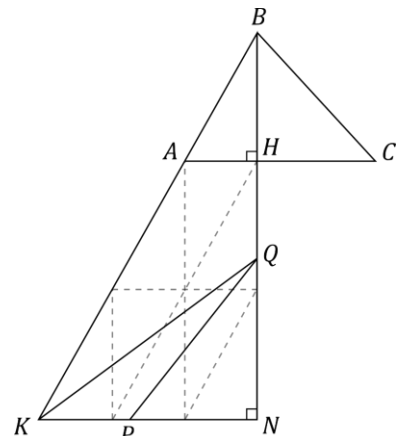
Доказательство леммы 8.2. Рассмотрим треугольник ABC и на стороне AC выберем произвольно точку M . Буквой σ будем обозначать сумму углов треугольника. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{ABM} + \sigma_{CBM} &= \angle A + \angle ABM + \angle BMA + \angle C + \angle CBM + \angle BMC = \\ &= \angle A + \angle C + (\angle ABM + \angle CBM) + (\angle BMA + \angle BMC) = \\ &= \angle A + \angle C + \angle ABC + 2d = \sigma_{ABC} + 2d. \end{aligned}$$



Отсюда, если $\sigma_{ABC} = 2d$, то $\sigma_{ABM} + \sigma_{CBM} = 4d$, откуда по теореме 7 имеем: $\sigma_{ABM} = \sigma_{CBM} = 2d$. Обратно, если $\sigma_{ABM} = \sigma_{CBM} = 2d$, то из равенства $\sigma_{ABC} + 2d = \sigma_{ABM} + \sigma_{CBM}$ следует, что $\sigma_{ABC} = 2d$ \square

Доказательство теоремы 8. Пусть в треугольнике ABC сумма углов равна $2d$. Тогда по лемме 8.1 треугольник ABC можно разрезать на два прямоугольных треугольника ABH и CBH , сумма углов в каждом из которых по лемме 8.2 равна $2d$. Присоединяя к прямоугольному треугольнику ABH равные ему треугольники, как показано на рисунке, можно получить прямоугольный треугольник KBN с суммой углов $2d$ и сколь угодно большими катетами.



Отсюда следует, что в любом прямоугольном треугольнике сумма углов равна $2d$. В самом деле, любой прямоугольный треугольник PQN можно получить из достаточно большого треугольника KBN двумя разрезами: сначала разрезать вдоль KQ , получив треугольник KQN , а затем разрезать вдоль PQ ,

получив треугольник PQN . С учётом леммы 8.2 получаем, что и в треугольнике KQN , и в треугольнике PQN сумма углов равна $2d$.

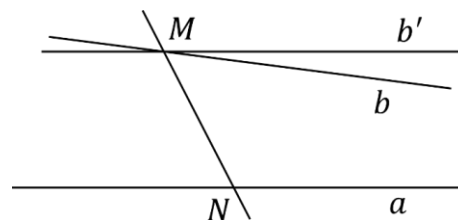
Пусть теперь задан произвольный треугольник $A'B'C'$. По лемме 8.1 его можно разрезать на два прямоугольных треугольника $A'B'H'$ и $C'B'H'$. Поскольку каждый из прямоугольных треугольников, как только что доказано, имеет сумму углов $2d$, то по лемме 8.2 сумма углов треугольника $A'B'C'$ также равна $2d$ \square

Докажем, что в абсолютной геометрии аксиома X из аксиоматики Погорелова логически эквивалентна пятому постулату Евклида.

Теорема 9. *В системе аксиом I - IX Погорелова аксиома X эквивалентна пятому постулату Евклида, т. е. принимая одно из этих утверждений в качестве ещё одной аксиомы, другое можно доказать как теорему.*

Доказательство. Докажем сначала, что в системе аксиом I - X Погорелова справедлив пятый постулат Евклида. Пусть при пересечении прямых a и b секущей MN сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$.

Через точку M проведём прямую b' так, чтобы при пересечении прямых a и b' секущей MN сумма внутренних односторонних углов была равна $2d$. Тогда по замечанию после теоремы 5 прямые a и b' не пересекаются. В силу аксиомы X через точку M проходит не более одной прямой, не пересекающейся с a . И это прямая b' , которая не совпадает с прямой b , поскольку образует другой угол с секущей MN . Так что прямые a и b пересекаются, причём с той стороны, где сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$, иначе получится противоречие с первой теоремой Саккери-Лежандра.



Докажем теперь, что если к системе аксиом I - IX Погорелова присоединить пятый постулат Евклида, то аксиома X получается как теорема. Пусть даны прямая a и точка M , не лежащая на прямой a . Докажем, что через точку M можно провести не более одной прямой, не пересекающей a .

На прямой a выберем произвольную точку N и через точку M проведём прямую b' так, чтобы прямые a и b' вместе с секущей MN образовывали внутренние односторонние углы, в сумме дающие $2d$. Тогда по замечанию после теоремы 5 прямые a и b' не пересекаются. Для любой другой прямой b , проходящей через точку M сумма внутренних односторонних углов будет меньше $2d$ с одной стороны и больше $2d$ с другой. В силу пятого постулата Евклида каждая такая прямая b пересекается с прямой a \square

Помимо аксиомы X из системы Погорелова существует ещё много других эквивалентных формулировок пятого постулата Евклида. Перечислим некоторые из них.

– [аксиома Иоганна Фридриха Лоренца, 1791 г.] Прямая, проходящая через точку внутри угла, пересекает хотя бы одну из его сторон.

– Через каждую точку внутри острого угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе его стороны.

– Сумма углов любого треугольника равна $2d$.

– Для любого прямоугольного треугольника имеет место теорема Пифагора, т. е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

– [аксиома Валлиса, 1693 г.] Существуют два подобных, но не равных треугольника, т. е. два треугольника, соответствующие углы которых равны, а соответствующие стороны пропорциональны, но не равны.

– [аксиома Фаркаша Бойяи] Для всякого треугольника существует описанная окружность.

– Существует прямоугольник, т. е. четырёхугольник, у которого все углы прямые.

– Отношение длины окружности к её диаметру одинаково для всех окружностей и равно числу $\pi \approx 3,14$.

В силу эквивалентности всех перечисленных утверждений любое из них можно взять в качестве аксиомы X в системе Погорелова и тогда все остальные утверждения можно будет доказать как теоремы. Это будут теоремы евклидовой геометрии.

Заключение

В данной работе рассмотрены основные факты абсолютной геометрии, при этом для ключевых теорем приведены доказательства, остальные факты предлагается доказать учащимся самостоятельно. Все эти теоремы доказываются без привлечения пятого постулата Евклида о параллельных прямых, а значит, эти теоремы будут одинаковыми для евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского, в которой аксиома о параллельных прямых заменена на противоположное утверждение. Знакомство с абсолютной геометрией позволит учащимся лучше разобраться в основаниях геометрии, роли аксиом в доказательствах теорем, а также является первым шагом на пути к изучению геометрии Лобачевского.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2. - М.: Просвещение, 1987. - 352 с.
2. Гильберт Д. Основания геометрии. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. - 492 с.
3. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 584 с.
4. Постников М.М. Аналитическая геометрия. Лекции по геометрии. Часть I: Учеб. пособие. 3-е изд., испр. - СПб.: Издательство «Лань», 2009. - 416 с.
5. Погорелов А.В. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. - 10-е изд. - М.: Просвещение, 2009. - 224 с.

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nail_khasanov@mail.ru

Methods of teaching absolute geometry

Abstract. Absolute geometry is a section of classical geometry that is independent of the fifth postulate of Euclid, i.e. these are the theorems that can be proved without using the axiom of parallel lines, which means that these will be theorems that are the same for Euclidean geometry and Lobachevsky geometry. The purpose of the work is to consider the methodology of teaching absolute geometry in the school elective. The paper consistently presents the main facts of absolute geometry, provides proofs of key theorems, including two Saccheri-Legendre theorems that arose when trying to prove Euclid's fifth postulate. The work will be useful for school math teachers when conducting an elective in geometry.

Keywords: absolute geometry, the fifth postulate of Euclid, the Saccheri-Legendre theorems.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ ПОСРЕДСТВОМ КОМПЬЮТЕРНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Аннотация

Качественное освоение любой учебной дисциплины предполагает, что в результате обучения студент не испытывает затруднений при применении теоретического материала в процессе решения задач практического характера, связанных с его будущей профессиональной деятельностью. Цель статьи - выявить эффективность организации интегрированных семинарских занятий, на которых сочетаются изучение метода конечных элементов и его применение при решении практических задач посредством компьютерного проектирования, по сравнению с традиционным подходом. В статье рассматриваются вопросы организации семинарских занятий по теме «Метод конечных элементов (МКЭ), его приложения и реализация в САПР». В рамках освоения специальных глав математики и компьютерного проектирования наземного оборудования преподавателями и аспирантами были разработаны конспекты семинарских занятий.

Ключевые слова

метод конечных элементов, компьютерное проектирование,
интегрированное семинарское занятие

АВТОРЫ

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
vergazova@bmstu.ru

Королев Евгений Алексеевич,
аспирант
ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет», г. Москва
evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

Силин Иван Дмитриевич,
аспирант
ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет», г. Москва
Vsilin9@gmail.com

Введение

Успешное освоение студентами любой специальной инженерной дисциплины всегда предполагает наличие глубоких знаний фундаментальных дисциплин, а также сформированных умений и навыков применения этих знаний. Как правило, метод конечных элементов рассматривается в рамках одних учебных курсов, а его применение в других дисциплинах. Преподаватели и аспиранты поставили своей целью подготовить интегрированные семинарские занятия, объединяющие изучение метода конечных

элементов и применение указанного метода для решения задач. Кроме того, необходимо было выяснить, насколько эффективен такой подход при изучении данной темы.

Основные проблемы, которые требовалось рассмотреть на семинарах, были следующие: 1) Основные положения МКЭ, его преимущества и недостатки. 2) Решение задачи теории упругости. 3) Разбиения на конечные элементы. 4) Организация самостоятельной работы студентов (решение задач).

Методология и результаты исследования

Метод конечных элементов (МКЭ) имеет глубокие теоретические обоснования и применяется при решении множества современных научных проблем.

Метод основан на том, что любая непрерывную величину аппроксимируется дискретной моделью. Модель создается на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Значения непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области служат для определения указанных функций. В большинстве задач непрерывная величина заранее неизвестна. Для построения дискретной модели в МКЭ считают, что в каждой внутренней точке области величина имеет заданное значение.

При построении дискретной модели непрерывной величины следуют следующим правилам.

1. В области фиксируется конечное число точек, которые называются узловыми (или просто узлами).

2. В каждой узловой точке значение непрерывной величины считается переменной.

3. Область определения непрерывной величины разбивают на подобласти, называемые элементами (или конечными элементами). Конечные элементы имеют общие узловые точки.

4. Все множество элементов аппроксимирует форму области.

5. На каждом элементе непрерывная величина аппроксимируется функцией (или полиномом). Функция определяется с помощью узловых значений этой величины для каждого элемента. Главное требование при подборе функции элемента - сохранение непрерывности величины вдоль границ подобласти. [1, 2]

МКЭ успешно применяется для сложных тел, состоящим из нескольких материалов. Область можно разбивать элементы любой формы. При этом можно управлять сеткой: в местах с большим градиентом непрерывной величины «сгущать» сетку, в областях, в которых непрерывная величина не меняется, делать сетку с более крупными элементами. (Рис. 1). МКЭ можно применять при решении задач с граничными условиями любого характера.

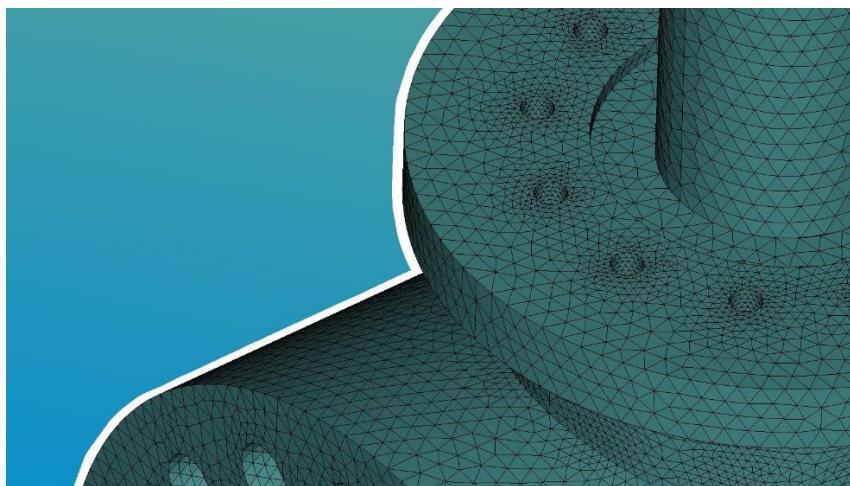


Рис. 1. Разбиение области на конечные элементы.

Указанные свойства МКЭ делают возможным создавать программы для решения множества частных задач, которые описываются одними и тем же дифференциальными уравнениями. [3, 4, 5]

Теория упругости. Решение задач методом конечных элементов

Для решения задач теории упругости применяют следующие методы:

- 1) решение дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями;
- 2) минимизация интегральной величины, связанной с работой напряжений и внешней нагрузки.

Как правило, в МКЭ применяется второй подход.

Если задача решается в перемещениях и на границе заданы их значения, то минимизируется потенциальная энергия (метод перемещений).

Если же задача решается в напряжениях с заданными на границах усилиями, то минимизируется дополнительная работа системы (метод сил).

Рассмотрим решение задачи поиска экстремальных значений потенциальной энергии системы.

Из множества перемещений, отвечающим кинематическим граничным условиям, потенциальная энергия принимает стационарное (экстремальное) значение при перемещениях, удовлетворяющим уравнениям равновесия.

Полная потенциальная энергия системы: $W = U + \Pi$, где U - потенциальная энергия деформации тела, Π - потенциал внешних сил.

Работа внешних сил $A_p = -\Pi$.

После разбиения области на элементы полная потенциальная энергия системы: $W = \sum_{e=1}^E (U^{(e)} - A_p^{(e)}) = \sum_{e=1}^E w^{(e)}$, $w^{(e)}$ - потенциальная энергия e -го элемента, E - число конечных элементов.

Используем один линейный одномерный элемент длиной L . Тогда:

$u^{(1)} = N_1^{(1)} q_1 + N_2^{(1)} q_2$, где $u^{(1)}$ - перемещение первой точки, N - функция формы.

При граничном условии $q_1 = 0$ получим, что

$u^{(1)} = N_2^{(1)} q_2 = \frac{x}{L} q_2$, где x - координата точки по оси Ox .

Полная потенциальная энергия выражается:

$$W = \int_V \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV - P q_2,$$

$$W = A \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 dx - P q_2.$$

Поскольку относительное удлинение (деформация) $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{q_2}{L}$, тогда $W = A \int_0^L \left(\frac{q_2}{L}\right)^2 dx - P q_2 = \frac{AE}{2L} q_2^2 - P q_2$, где P - сила, E - модуль упругости, q_2 - осевое перемещение, V - объем, σ_{xx} - нормальное напряжение в точке с координатой x в направлении оси Ox .

Минимизируем W по q_2 :

$$\frac{dW}{dq_2} = \frac{AE}{L} q_2 - P = 0.$$

И тогда $q_2 = \frac{PL}{AE}$, что совпадает с теоретическим решением. [6, 7]

Для реализации метода конечных элементов на практике можно воспользоваться программными комплексами SolidWorks и «Компас». SolidWorks (англ. solid – твёрдое

тело, works – работать) – программный комплекс САПР для автоматизации работ промышленного предприятия на этапах конструкторской и технологической подготовки производства. Разработан компанией SolidWorks Corporation (Франция). Комплекс предназначен для разработки изделий любой степени сложности и назначения. «Компас» – семейство систем автоматизированного проектирования (САПР), которое позволяет оперативно разрабатывать чертежи изделий, схемы, спецификации, таблицы, инструкции, расчётно-пояснительные записки, технические условия и т.д. Разработан компанией «Аскон» (Россия).

Для определения экстремальных значений потенциальной энергии в каждом элементе объекта можно применить любой из упомянутых программных комплексов.

Таким образом, встает проблема оптимального разбиения объекта на элементы.

Продемонстрируем студентам вариации параметров комбинированной сетки при разных условиях заданных контактов, соединение различных сеток между собой, элементы управления сеткой посредством программ, а также совместную и несовместную сетки.

Комбинированная сетка - это сетка, состоящая из разных типов элементов (3D, 2D, 1D). Такая сетка требуется в случае невозможности использования элементов одного типа. Наиболее частый случай - нецелесообразность адекватного разбиения модели на 3D элементы. Для соединения разных типов сетки между собой нужны инструменты набора контактов или соединители. Варианты параметров комбинированной сетки приведены на рисунках 2, 3, 4. (Рис. 2, 3, 4).

Контакт «проникновение допускается»

	3D Вершина	3D Кромка	3D Грань	2D Вершина	2D Кромка	2D Грань	1D Тело балки	1D Узел балки
3D Вершина	По умолчанию		+	По умолчанию			По умолчанию	
3D Кромка			+					
3D Грань	+	+	+	+	+	+		
2D Вершина	По умолчанию		+	По умолчанию				
2D Кромка			+					
2D Грань	+	+	+	+	+	+		
1D Тело балки	По умолчанию							
1D Узел балки								

Рис. 2. Параметры контакта с присутствующим проникновением.

Контакт «нет проникновения»

	3D Вершина	3D Кромка	3D Грань	2D Вершина	2D Кромка	2D Грань	1D Тело балки	1D Узел балки		
3D Вершина	-	-	+	-	-	+				
3D Кромка	-	-	+	-	-	+				
3D Грань	+	+	+	+	+	+				
2D Вершина	-	-	+	-	-	+				
2D Кромка	-	-	+	-	-	+				
2D Грань	+	+	+	+	+	+				
1D Тело балки										
1D Узел балки										

Рис. 3. Параметры контакта с отсутствующим проникновением.

Контакт «связанные»

	3D Вершина	3D Кромка	3D Грань	2D Вершина	2D Кромка	2D Грань	1D Тело балки	1D Узел балки
3D Вершина	-	-	+	-	-	+	-	-
3D Кромка	-	+	+	-	+	+	-	-
3D Грань	+	+	+	+	+	+	+	+
2D Вершина	-	-	+	-	-	+	-	-
2D Кромка	-	+	+	-	+	+	-	-
2D Грань	+	+	+	+	+	+	+	+
1D Тело балки	-	-	+	-	-	+	-	-
1D Узел балки	-	-	+	-	-	+	-	-

Рис. 4. Параметры контакта «связанные».

Совместимость сетки отражена на рисунке 5. (Рис. 5).

Совместимость сетки

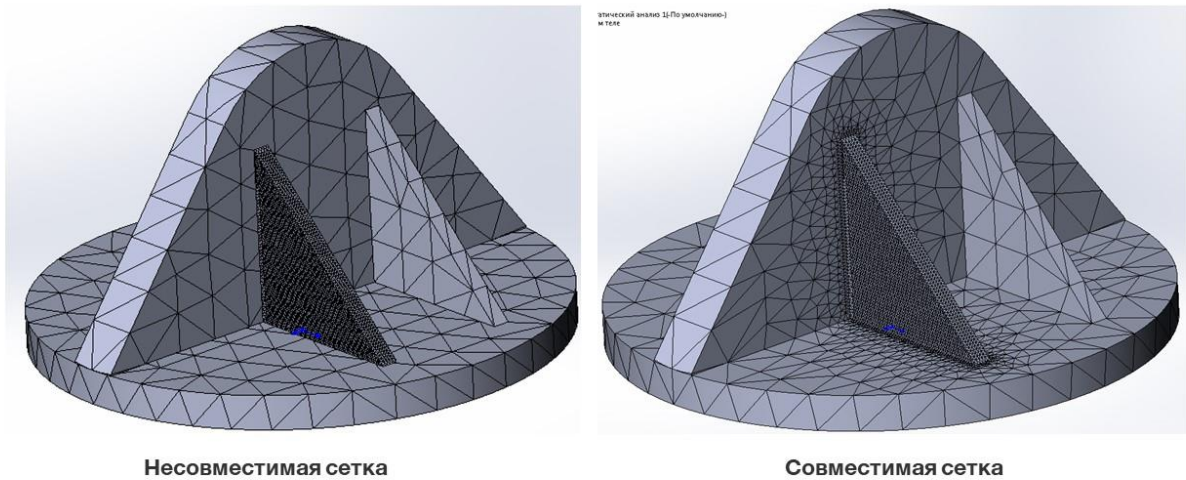


Рис. 5. Совместимая и несовместимая сетки.

Анализ совместимости сетки посредством программы отражен на рисунке 6. (Рис. 6).

Совместимость сетки

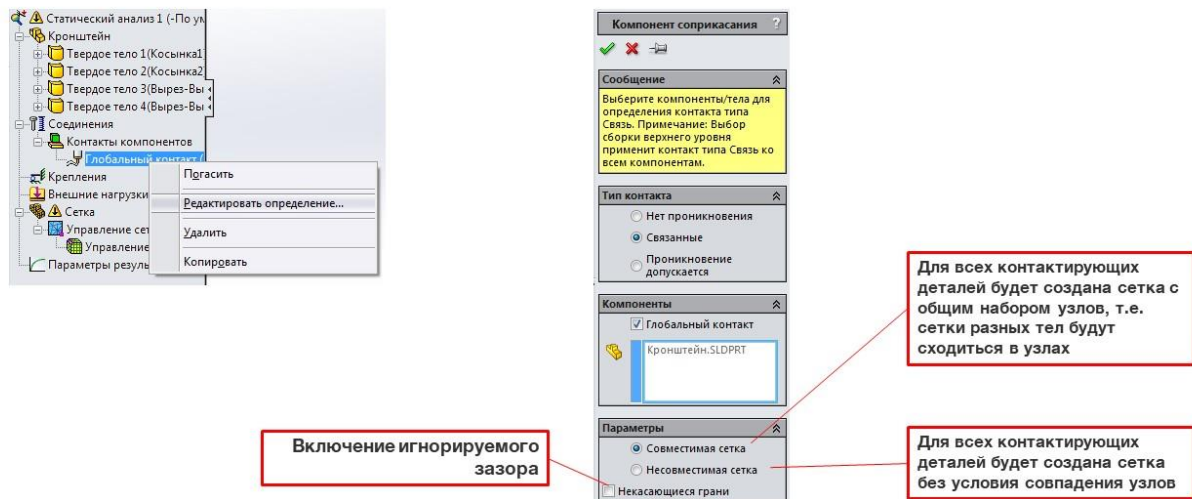


Рис. 6. Анализ совместимости сетки.

Важный этап семинарских занятий - обучение студентов управлению сеткой.

Под управлением понимается применение инструмента местной коррекции густоты сетки. Управление сеткой позволяет изменять густоту сетки отдельных геометрических объектов или целых тел. При этом управление сеткой не позволяет создавать для выбранных объектов сетку другого алгоритма. Также управление сеткой недоступно для балочных изделий. (Рис. 7).

Управление сеткой

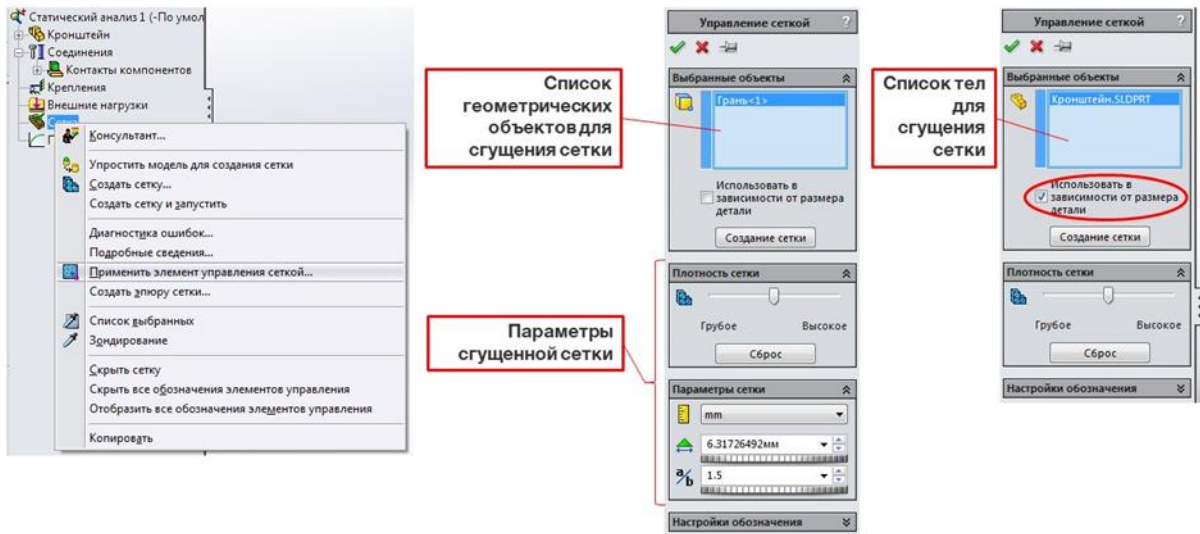


Рис. 7. Управление сеткой.

Результат управления сеткой показан на рисунке 8. (Рис. 8).

Управление сеткой

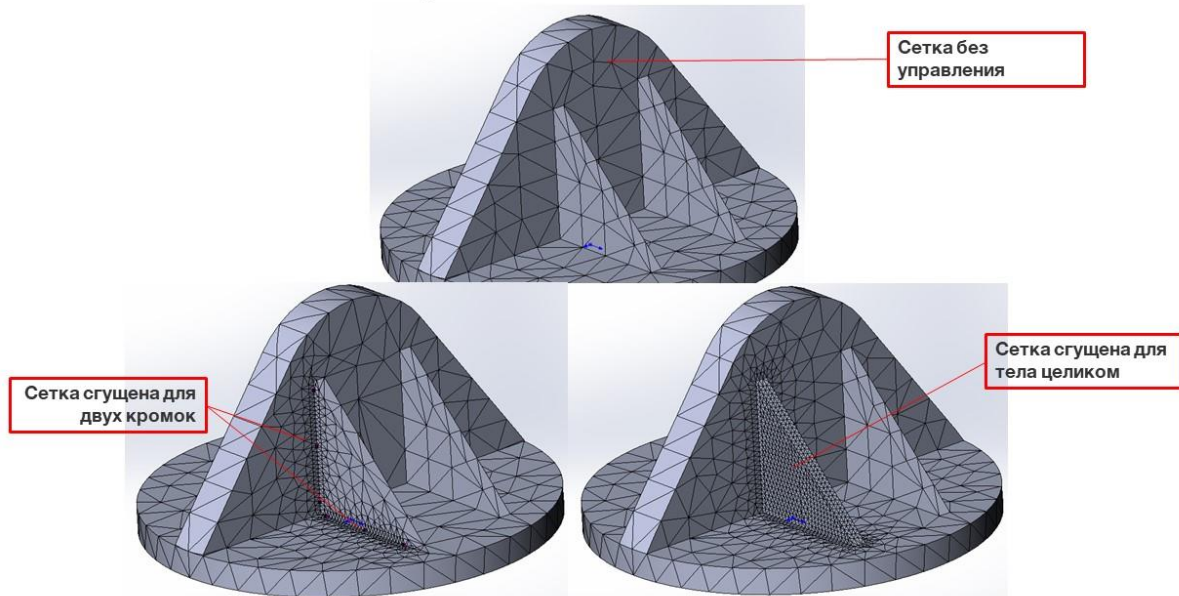


Рис. 8. Результат управления сеткой.

Для практического применения полученных знаний студентам предлагаются для самостоятельного решения задачи. Например, задачи. Условия которых приведены на рисунках 9, 10. (Рис. 9, 10).

Задача 1

Провести
**статический
расчет стола**
при следующей
заданной
распределенной
нагрузке:

Закрепление
опор
**жесткое,
здать
материал
09Г2С**

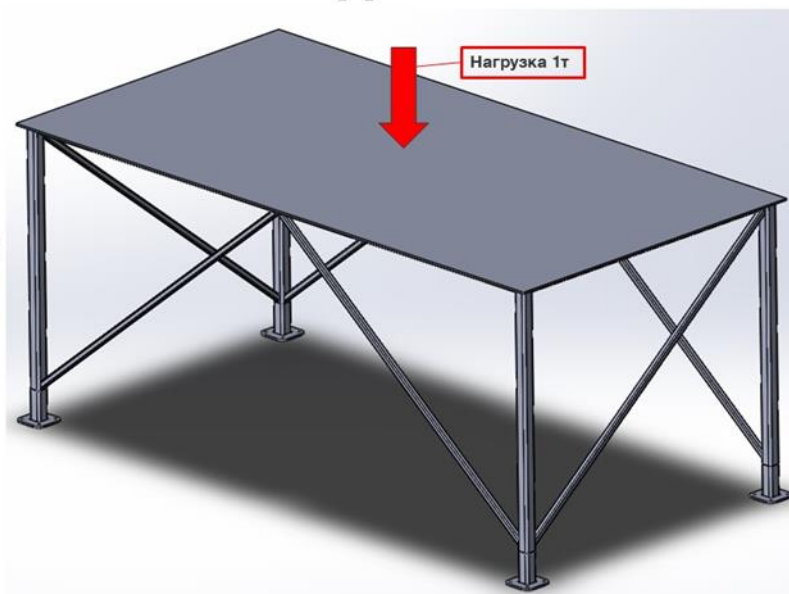
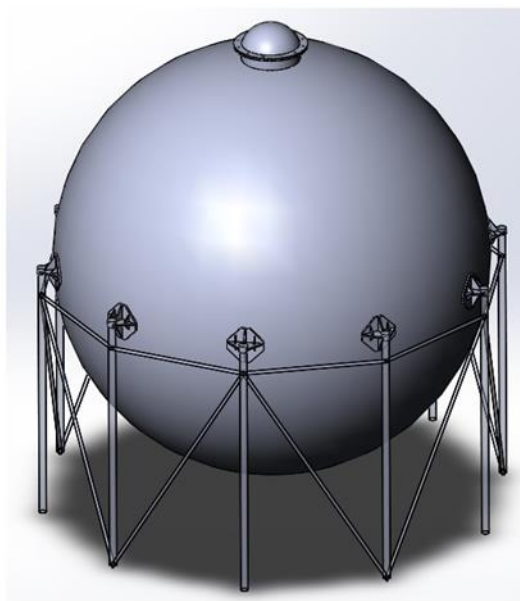


Рис. 9. Задача 1.

Задача 2



Провести
статический расчет газгольдера:

- Газгольдер заполнен 50 т сжиженного газа;
- Внутреннее давление – 5 атм;
- Оболочка сосуда, люк и крышка выполнена из 12Х18Н10Т;
- Остальные элементы выполнены из 09Г2С;
- Опоры заделаны в бетон.

Рис. 10. Задача 2.

При проведении анализа эффективности интегрированного подхода при организации семинарских занятий сравнили количество студентов, которые успешно решили самостоятельно предложенные на занятии задачи. В группе, в которой семинар проходил традиционно, из 17 студентов самостоятельно и правильно решили задачи 11 человек (65%). В группе из 19 студентов, в которой на занятиях применили интегрированный подход, рассмотрев и основные положения МКЭ, и его применение, 16 человек самостоятельно и правильно решили задачи (84%).

Заключение

Изложение необходимого теоретического материала из курса математики и наглядное применение такого материала при решении задач инженерного характера несомненно повышает качественное усвоение знаний, а также способствует совершенствованию навыков решения практических задач с применением компьютерного проектирования. Интегрированный подход демонстрирует студентам связи между различными областями знаний и способствует глубокому пониманию изученного. В планах преподавателей и аспирантов подготовить комплекс семинарских занятий, которые объединяют изучение специальных глав математики и компьютерного проектирования наземного оборудования.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Метод конечных элементов. Основы. Галлагер Р. М. Мир. 1984. 428 с.
2. Конечные элементы и аппроксимация. Зенкевич О., Морган К. М. Мир. 1986. 318 с.
3. Применение метода конечных элементов. Сегерлинд Л. М. Мир. 1979. 392 с.
4. Теория метода конечных элементов. Стренг Г. М. Мир. 1977. 349 с.
5. Каменев С. В. Основы метода конечных элементов в инженерных приложениях. Оренбург. ОГУ. 2019. 110 с.
6. Демидов С.П. Теория упругости: учебник для вузов. М. Высш. шк. 1979. 431 с.
7. Методы численного анализа математических моделей. Галанин М. П., Савенков Е. Б. М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2010. 590 с.

Olga B. Vergazova,

Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

vergazova@bmstu.ru

Evgeniy A. Korolev,

Postgraduate student, Moscow Automobile and Road State Technical University, Moscow

evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

Ivan D. Silin,

Postgraduate student, Moscow Automobile and Road State Technical University, Moscow

Vsilin9@gmail.com

The finite element method, its application and implementation through computer-aided design

Abstract. The qualitative development of any academic discipline assumes that as a result of training, the student does not experience difficulties in applying theoretical material in the process of solving practical tasks related to his future professional activity. The purpose of the article is to find out the effectiveness of the organization of integrated seminars, which combine the study of the finite element method and its application in solving practical problems through computer design, compared with the traditional approach. The article discusses the organization of seminars on the topic "Finite Element method (FEM), its applications and implementation in CAD". As part of the development of special chapters of mathematics and computer-aided design of ground-based equipment, teachers and graduate students developed summaries of seminars.

Keywords: finite element method, computer-aided design, integrated workshop.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ВСЕМИ ВЕРШИНАМИ ВЗВЕШЕННОГО НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА НА ПРИМЕРЕ АЛГОРИТМА ФЛОЙДА-УОРШЕЛЛА

Аннотация

Умение использовать алгоритмы на графах и, в частности, алгоритм поиска кратчайших расстояний между всеми вершинами графа, лежит в основе умения студентов решать практические задачи по дисциплинам дискретная математика, дискретная оптимизация, оптимизация на графах, а также инженерных дисциплинам, связанным с построением оптимальных маршрутов, проходящих через заданные точки. Целью данной статьи является методология преподавания решения задач поиска кратчайших расстояний между всеми вершинами графа. В работе описана методология изложения алгоритма Флойда-Уоршелла, приведены примеры поиска кратчайших расстояний между всеми вершинами неориентированного графа с иллюстрациями. Предложены задачи для самостоятельного решения.

Ключевые слова

граф, матрица кратчайших расстояний,
кратчайшие пути, алгоритм Флойда-Уоршелла

АВТОРЫ

Виноградова Марина Станиславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
m-s-vinogradova@yandex.ru

Ткачева Ольга Сергеевна,
ассистент преподавателя
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
tkolga17@gmail.com

Введение

Многие прикладные задачи из разных областей науки и техники сводятся к задаче нахождения наименьших расстояний между всеми вершинами графа. Например, задачи, заключающаяся в поиске оптимального маршрута, проходящего через указанные точки. Такие задачи встают при соединении n населенных пунктов единой сетью дорог или линий электропередач. При трассировке печатных плат сетью соединяют n контактов проводами с минимальной суммарной стоимостью. Графы также часто применяются для визуализации взаимосвязи многомерных данных, и задача, связанная с нахождения кратчайших расстояний между объектами (вершинами графа), является актуальной

Решить подобные задачи можно представив в виде математической модели на графе.

При решении практических задач оптимизации на графах студенты часто испытывают трудности. Причин этого может быть несколько. Теория графов часто остается

за рамками школьной программы, в ВУЗах теория графов, как отдельная дисциплина или в составе дисциплины дискретная математика, также не всегда входит в учебные программы инженерных специальностей. Однако умение решать задачи, связанные с теорией графов, является важной компетенцией, как и для студентов, обучающихся как инженерным, так и IT специальностям. Представляется важным привести методику обучения алгоритмам на графах.

Целью данной статьи является методика преподавания решения задачи нахождения наименьших (кратчайших) расстояний между всеми вершинами взвешенного неориентированного графа (алгоритм Флойда-Уоршелла).

Методология и результаты исследования

Прежде чем переходить к описанию алгоритма студентам, необходимо кратко осветить общую постановку задачи и методы ее решения. Для студентов предлагается формулировать задачу следующим образом: найти кратчайшие расстояния между каждой парой вершин графа. Решение этой задачи можно искать несколькими путями. Одним из подходов к решению поставленной задачи является алгебраический, который заключается в применении аппарата полуколец для нахождения наименьших расстояний между вершинами графа, например, с использованием полукольца R^+ [1,2,3]. Мы рассмотрим подход к решению этой задачи основанный на алгоритмах, разработанных для графов и не использующих алгебраические структуры. Наиболее часто для этих целей используются алгоритм Флойда–Уоршелла, который находит наиболее короткие пути между всеми вершинами взвешенного графа G . Также разработаны алгоритмы, позволяющие находить пути наименьшей длины от некоторой заданной вершины графа до всех остальных. Примерами таких алгоритмов служат алгоритмы Дейкстры, Беллмана – Форда и алгоритм волнового фронта Ли, основанный на алгоритме поиска в ширину. Алгоритм Дейкстры работает только для графов без ребер отрицательного веса, в алгоритме Беллмана – Форда вес ребер может принимать отрицательные значения [4,5]. Для минимальных путей между всеми вершинами взвешенного графа указанные алгоритмы можно запускать из каждой вершины последовательно.

Чтобы повысить уровень заинтересованности студентов, рекомендуем упомянуть перед началом содержательной части, что алгоритм Флойда-Уоршелла можно использовать для анализа не только технических задач, но и социальных, например, для анализа социальных сетей. Сегодня социальные сети являются неотъемлемой частью жизни многих людей, и их анализ позволяет получить ценную информацию о поведении пользователей, их предпочтениях и связях. Алгоритм позволяет находить «ближних соседей» в социальной сети, что может быть полезно для определения групп единомышленников или для выявления лидеров мнений. Необходимо обратить внимание обучающимися на такую перспективу применения алгоритма, таким образом обозначив возможные направления их личных исследований.

С развитием технологий и увеличением объема данных, алгоритмы на графах становятся все более важными для обработки, анализа и визуализации информации. Такие алгоритмы присутствуют в системах обработки больших данных.

Рассмотрим подробно алгоритм Флойда–Уоршелла (Floyd-Warshall algorithm). Данный алгоритм достаточно широко освещен в литературе, в том числе и в интернет-источниках. Можно рекомендовать преподавателям предложить студентам для углубленного изучения вопроса посмотреть следующие интернет-источники, отмеченные в списке литературы как [6,7].

Алгоритм Флойда-Уоршелла для нахождения наименьших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа G разработан в 1962 году Робертом Флойдом и

Стивенем Уоршеллом. Данный алгоритм использует методы динамического программирования, применим для графов, содержащих ребра как с положительным, так и с отрицательным весом. Доказательство корректности алгоритма Флойда-Уоршелла приведено в [8], сложность алгоритма составляет $O(n^3)$, где n количество вершин графа [9].

Важно обратить внимание студентов на то, что использование методов динамического программирования позволяет разбить решение одной большой задачи на несколько подзадач меньшего объема и, затем, объединить решения всех этих подзадач. Отметим, что эти подзадачи могут не являться независимыми, и быть перекрывающимися, то есть у подзадач могут быть общие части («подподзадачи») [10].

Перед подробным изложением алгоритма Флойда-Уоршелла необходимо кратко рассказать студентам основную идею алгоритма, которая состоит в том, что в процессе работы алгоритма сравниваются все возможные пути в графе между каждой парой вершин. На начальном этапе работы алгоритма заданы веса дуг (ребер) для всех пар вершин, соединенных дугой или ребром, то есть длины путей длины 1 для пар смежных вершин. Затем в цикле рассматриваются все пути между каждой парой вершин через i -ю вершину ($i = 1, 2, \dots, n$), сравниваются с уже имеющимися и выбирается путь наименьшей длины.

Необходимо отметить важность использования современного оборудования, установленного в аудиториях, компьютеров, связанных с проектором или телевизором. Студенты, как правило, намного лучше воспринимают визуальную информацию, поэтому полезным элементом на занятиях по теме «Алгоритмы на графах» являются презентации. В начале презентации рекомендуется предложить вспомнить основные определения, связанные с темой урока, затем перейти непосредственно к рассмотрению алгоритма. Здесь авторам представляется важными показанная анимация для иллюстрации работы различных алгоритмов. В процессе изучения алгоритма Флойда-Уоршелла каждый шаг работы алгоритма необходимо снабдить изображением графа отметив на нем все изменения, произошедшие на этом шаге. Таким образом можно показать последовательно заменяющие друг друга изображения графа G , с отмеченными на каждом рисунке очередными изменениями.

Авторы для создания презентаций используют свободно распространяемую систему LaTeX, иллюстрации могут выполнены в любом графическом редакторе, например, здесь рисунки выполнялись в системе CorellDraw.

Описание алгоритма Флойда-Уоршелла

В этом разделе мы предлагаем словесное описание алгоритма Флойда-Уоршелла в том, виде в котором один из авторов статьи излагает его на занятиях студентам.

На вход алгоритма подается граф $G = (V, E)$, заданный матрицей $A = \{a_{ij}\} \in M_{n \times n}$, все вершины графа из множества вершин V пронумерованными от 1 до n . Множество E – это множество дуг (v_i, v_j) в случае ориентированного графа, или, ребер $\{v_i, v_j\}$ в случае неориентированного графа. В дальнейшем, следуя [11], при описании графа G будем называть элементы множества E ребрами, а матрицу A — матрицей меток ребер. Элементы a_{ij} матрицы $A = \{a_{ij}\}$ равны весу ребра, соединяющего вершины v_i и v_j , $a_{ij} = \varphi(\{v_i, v_j\})$, если соответствующее ребро существует ($\{v_i, v_j\} \in E$), и плюс бесконечности $+\infty$, в противном случае ($a_{ij} = +\infty, \{v_i, v_j\} \notin E$). В случае неориентированного графа матрица меток ребер A является симметрической.

На выходе алгоритма мы получим матрицу D (distance) меток вершин $D = \{d_{ij}\} \in M_{n \times n}$, где каждый элемент d_{ij} равен длине кратчайшего пути от вершины v_i до вершины v_j для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тут рекомендуем сообщить, что ее можно рассматривать как матрицу минимальных или кратчайших расстояний. Так же, в этом

месте изложения алгоритма необходимо напомнить обучающимся, что под кратчайшим или наименьшим путем в графе G в данном случае будем понимать конечный путь, в котором сумма весов всех ребер, входящих в путь, будет минимальной. Здесь путь (конечный) – это последовательность вершин $v_{l_0}, v_{l_2}, \dots, v_{l_n}$, такая, что для любого номера l_i вершины v_{l_i} и вершины $v_{l_{(i+1)}}$ соединены ребром, если существует вершина $v_{l_{(i+1)}}$ [12].

Удобно ввести следующее обозначение $d_{ij}^k \in D^k$ для длины кратчайшего пути от вершины v_i до вершины v_j , который обязательно проходит через вершины v_1, \dots, v_k . Элемент d_{ij}^0 матрицы D^0 равен весу ребра $\{v_i, v_j\}$, соединяющего вершины v_i и v_j , $d_{ij}^0 = a_{ij}$, если ребро $\{v_i, v_j\}$ существует, и равен бесконечности $(+\infty)$ в противном случае.

Значения d_{ij}^k ($k = 1, \dots, n$) элемента матрицы D^k на каждом шаге получаем следующим образом:

1. Если кратчайший путь между вершинами v_i и v_j не проходит через вершину v_k , тогда на очередном шаге элемент d_{ij}^k не изменит своего значения, то есть $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$.

2. Если был найден более короткий путь между вершинами v_i и v_j , проходящий через вершину v_k при этом $i \neq j, i \neq k, k \neq j$ ($d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} < d_{ij}^{k-1}$), то есть, элемент d_{ij}^k станет равным сумме длин путей от вершины v_i до вершины v_k и от вершины v_k до вершины v_j — $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$.

Здесь необходимо сфокусировать внимание студентов, что, по сути, для нахождения значения d_{ij}^k надо выбрать минимум из $d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ и d_{ij}^{k-1} .

В качестве наглядного примера предлагаем рассмотреть со студентами три различные вершины графа v_1, v_2, v_3 , (рис. 1), расстояния между всеми парами вершин на шаге $k - 1$ известны и равны $d_{12}^{k-1} = 12$, $d_{13}^{k-1} = 5$, $d_{23}^{k-1} = 4$.

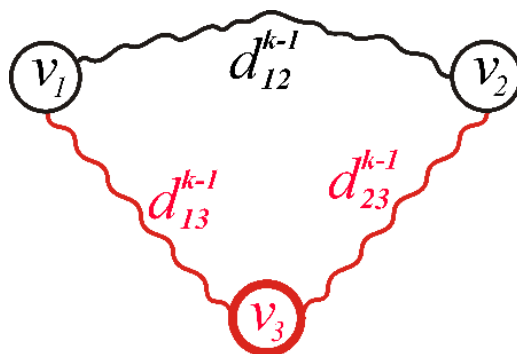


Рис. 1.

Рассмотрим длину пути d_{12}^k между вершинами v_1 и v_2 на шаге k . Имеющаяся длина пути $d_{12}^{k-1} = 12$ между вершинами v_1 и v_2 больше, чем длина пути, соединяющего эти вершины и проходящего через вершину v_3 , равный $d_{13}^{k-1} + d_{23}^{k-1} = 5 + 4 = 9$. Это означает, что на шаге k мы заменим путь из вершины v_1 в вершину v_2 путем из вершины v_1 в вершину v_2 через вершину v_3 . Иначе говоря, если $d_{13}^{k-1} + d_{23}^{k-1} < d_{12}^{k-1}$, тогда длина пути между вершинами v_1 и v_2 равна сумме расстояний от вершин v_1 до v_3 и от v_3 до v_2 $d_{12}^k = d_{13}^{k-1} + d_{23}^{k-1}$.

После этого примера рекомендуем вывести вместе со студентами рекуррентную формулу для вычисления d_{ij}^k .

$k = 0, d_{ij}^0 = a_{ji}$, где a_{ji} – длина ребра $\{v_i, v_j\}$;

$$k = 1, 2, \dots, n, d_{ij}^k = \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}).$$

Алгоритм Флойда - Уоршелла последовательно вычисляет все значения d_{ij}^k для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Полученные значения d_{ij}^n являются длинами наиболее коротких путей между всеми парами вершин v_i и v_j для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Алгоритм заканчивает работу.

Формальное описание алгоритма Флойда-Уоршелла

Здесь приводится формальное, более строгое описание используемого алгоритма, его тоже рекомендуется рассказать студентам в данном виде. Опираясь на опыт работы, можно отметить, что для студентов ИТ специальностей этот вид изложение алгоритмов на графах представляется наиболее понятным для восприятия.

Вход. Матрица меток ребер $A = \{a_{ij}\} \in M_{n \times n}$ графа $G = (V, E)$, $|V| = n, a_{ij} \geq 0$, $(i, j = 1, \dots, n)$.

Выход. Матрица кратчайших расстояний D между всеми парами вершин ($D = \{d_{ij}\} \in M_{n \times n}$).

Инициализация.

$$1. D = A \quad (\forall i = 1, \dots, n), \quad (\forall j = 1, \dots, n) \quad d_{ij} = a_{ij}.$$

2. Положим диагональные элементы d_{ii} , $\forall i = 1, \dots, n$ матрицы D равными 0 ($d_{ii} = 0$), так как считаем, что вершина достижима из самой себя и расстояние $d_{ii} = 0$ (диагональные элементы матрицы меток дуг A могут быть равны плюс бесконечности $+\infty$, или, если в ориентированном графе есть петли, элементы a_{ij} , равны весу дуги (петли) (v_i, v_i) ($a_{ij} = \varphi(v_i, v_i)$) (петли в неориентированном графе обычно не рассматриваются).

Основной цикл работы алгоритма.

3. Положить $k = 1$.

4. Положить $i = 1$.

5. Положить $j = 1$.

$$6. d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj}).$$

7. Если $j < n$, то положить $j = j + 1$ и перейти к шагу 6.

8. Если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 5.

9. Если $k < n$, то положить $k = k + 1$, перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 10.

Завершение работы алгоритма. Вывод результатов.

10. Печать матрицы D .

Полученные значения d_{ij} элементов матриц D дают расстояния между всеми парами вершинам v_i и v_j .

На этом этапе можно рассказать студентам модифицированный алгоритм Флойда-Уоршелла, добавив процедуру запоминания самых коротких путей. Считаем, что все вершины графа пронумерованы. Введем дополнительный массив $Pred(v_j)$, $i = 1, \dots, n$, $n = |V|$ (predecessor - предшественник, предок). Каждая ячейка массива $Pred(v_j)$ содержит вершину v_k ($Pred(v_j) = v_k$), откуда был совершен переход в вершину v_j , то есть вершину предка вершины v_j на кратчайшем пути через вершину v_k . При инициализации массива $Pred$ в начале работы алгоритма считаем, что предок каждой вершины не определен, все значения в ячейках массива $Pred$ положим равными, например, 0, если вершины графа пронумерованы начиная с 1 (или -1, если нумерация вершин начинается с 0). В процессе работы алгоритма обновление ячеек массива предков происходит одновременно с обновлением значения кратчайшего расстояния d_{ij} на шаге 6 алгоритма ($Pred(v_j) = v_k$).

Для лучшего закрепления материала, авторы рекомендуют показать студентам алгоритм Флойда-Уоршелла в виде псевдокода и предложить обучающимся реализовать его на любом удобном им языке программирования (Python, C++, Java, C#).

Псевдокод алгоритма Флойда-Уоршелла

% Инициализация массива минимальных расстояний D

For i = 1 to n

For j = 1 to n

D[i,j] = A[i,j]

% убираем петли, считаем, что путь от вершины до самой себя равен 0

For i = 1 to n D[i,i] = 0

% Основной цикл работы алгоритма.

For k = 1 to n

For i = 1 to n

For j = 1 to n

D[i,j] = min(D[i,j], (D[i,k] + D[k,j]))

Здесь i – номер вершины откуда идет путь в данную вершину (предок вершины j на предыдущем шаге), j – номер вершины – потомка графа (куда приходим), k – номер транзитной (промежуточной) вершины графа.

Рекомендуем проиллюстрировать лекцию так же примером работы алгоритма в программной среде и предложить сверить результаты с полученными вручную. Для этих целей авторы используют систему MATLAB, однако приведенный ниже код можно использовать и в системе Octave, фактически бесплатном аналоге MATLAB, пусть и с ограниченными возможностями.

function Distance = Floyd(n, Graph)

%n - размерность матрицы

% Graph - матрица меток дуг графа

D = Graph;

for i = 1:1:n

D(i,i) = 0;

end

D

for k = 1:1:n

%k - номер вершины графа, путь через которую рассматривается

for i = 1:1:n

for j = i:1:n

D(i,j) = min(D(i,j), (D(i,k) + D(k,j)));

end

end

disp(D)

Рассмотрим пример изложения решения задачи по теме «Применение алгоритма Флойда-Уоршелла для неориентированного графа с неотрицательными значениями весов ребер». Рекомендуем для примера работы алгоритма, брать граф с достаточно большим количеством вершин, у которого не очевидны кратчайшие пути.

Для взвешенного графа $G = (V, E)$, заданного матрицей меток ребер A (элемент матрицы a_{ij} равен весу ребра $\{v_i, v_j\}$, если ребро $\{v_i, v_j\}$ есть в графе, и $+\infty$, если ребра нет). Требуется нарисовать граф, и с помощью алгоритма Флойда-Уоршелла для графа G найти матрицу кратчайших расстояний между всеми вершинами D (описать последовательность действий, изменение матрицы D на каждом шаге алгоритма).

Замечание. Матрица A представлена таблицей.

По условию задачи граф G – неориентированный граф и матрица A симметрична относительно главной диагонали. Здесь рекомендуется спросить у студентов определение симметрической матрицы и предложить усовершенствовать описанный выше программный код с учетом этого факта.

Петель в графе G нет, и формально, пути от вершины до самой себя тоже нет, поэтому диагональные элементы матрицы A равными $+\infty$, $a_{ii} = +\infty$. Запишем матрицу A и рядом дадим изображение графа G .

$$A = \begin{pmatrix} +\infty & 1 & 3 & 8 & +\infty & +\infty & 9 & +\infty & 1 \\ 1 & +\infty & 9 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & +\infty & +\infty & 3 & 6 & 4 & 6 & +\infty \\ 8 & 6 & +\infty & +\infty & 4 & 3 & 2 & +\infty & 2 \\ +\infty & 8 & 3 & 4 & +\infty & 5 & 2 & +\infty & 1 \\ +\infty & 4 & 6 & 3 & 5 & +\infty & +\infty & 6 & +\infty \\ 9 & 1 & 4 & 2 & 2 & +\infty & +\infty & 5 & 5 \\ +\infty & 5 & 6 & +\infty & +\infty & 6 & 5 & +\infty & 2 \\ 1 & 3 & +\infty & 2 & 1 & +\infty & 5 & 2 & +\infty \end{pmatrix}$$

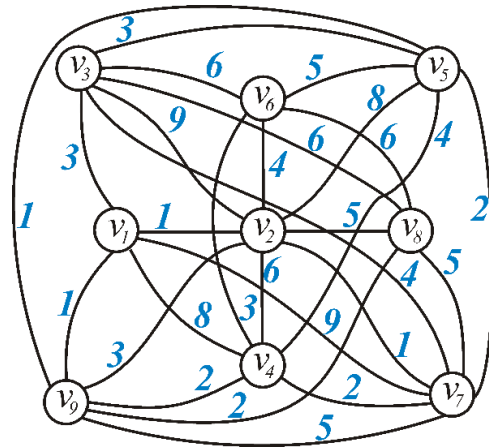


Рис. 2. Граф G

Начало работы алгоритма.

Инициализация. $D^0 = A$. Граф G – неориентированный граф и, следовательно, $a_{ij} = a_{ji}$ и $d_{ij}^0 = d_{ji}^0$. Значения $d_{ii}^0 = 0$.

Запишем матрицу D^0

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 & +\infty & +\infty & 9 & +\infty & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 0 & +\infty & 3 & 6 & 4 & 6 & +\infty \\ 8 & 6 & +\infty & 0 & 4 & 3 & 2 & +\infty & 2 \\ +\infty & 8 & 3 & 4 & 0 & 5 & 2 & +\infty & 1 \\ +\infty & 4 & 6 & 3 & 5 & 0 & +\infty & 6 & +\infty \\ 9 & 1 & 4 & 2 & 2 & +\infty & 0 & 5 & 5 \\ +\infty & 5 & 6 & +\infty & +\infty & 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & +\infty & 2 & 1 & +\infty & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. На первом этапе рассмотрим все пути между вершинами, проходящие через вершину v_1 . Заметим, что значения первого столбца и первой строки не изменяются, выделим их красным цветом. В дальнейшем рекомендуется выделять цветом строки и столбцы матрицы, соответствующие вершинам графа, пути через которые мы ищем. Просматриваем все элементы d_{ij}^0 , при этом $i \neq 1 \wedge j \neq 1$.

Еще раз отметим, что выделенная красным цветом строка содержит расстояния, до всех вершин от первой вершины, а выделенный столбец расстояния от всех вершин до вершины v_1 .

Подробно покажем процесс вычисления элемента d_{23}^1 . Выделим цветом элементы матрицы D^0 нужные для вычисления этого элемента. Синим цветом выделен элемент d_{23}^0 , который содержит длину пути от вершины v_2 до вершины v_3 , на первом этапе это метка ребра $\{v_2 v_3\}$. Красным цветом и жирным шрифтом выделен элемент d_{21}^0 , который содержит длину пути от вершины v_2 до вершины v_1 (метка ребра $\{v_2 v_3\}$),

и, наконец, зеленым цветом выделен элемент d_{13}^0 , который содержит длину пути от вершины v_1 до вершины v_3 (метка ребра $\{v_2v_3\}$).

$$d_{23}^1 = \min(d_{23}^0, (d_{21}^0 + d_{13}^0)) = \min(9, (1 + 3)) = 4;$$

Подобное выделение цветом остальных элементов матрицы затруднит восприятие, и мы не будем их выделять.

Факт, что матрица симметричная, то есть, что $a_{ij} = a_{ji}$ позволяет нам вычислять на каждом шаге значения элементов, расположенных в строке правее главной диагонали. Приведем подробный расчет остальных элементов матрицы D^1 .

$$\begin{aligned} d_{24}^1 &= \min(d_{24}^0, (d_{21}^0 + d_{14}^0)) = \min(6, (1 + 8)) = 6; & d_{25}^1 &= \min(d_{25}^0, (d_{21}^0 + d_{15}^0)) = \min(8, (1 + \infty)) = 8; \\ d_{26}^1 &= \min(d_{26}^0, (d_{21}^0 + d_{16}^0)) = \min(4, (1 + \infty)) = 4; & d_{27}^1 &= \min(d_{27}^0, (d_{21}^0 + d_{17}^0)) = \min(1, (1 + 9)) = 1; \\ d_{28}^1 &= \min(d_{28}^0, (d_{21}^0 + d_{18}^0)) = \min(5, (1 + \infty)) = 5; & d_{29}^1 &= \min(d_{29}^0, (d_{21}^0 + d_{19}^0)) = \min(3, (1 + 1)) = 2; \\ d_{34}^1 &= \min(d_{34}^0, (d_{31}^0 + d_{14}^0)) = \min(\infty, (3 + 8)) = 11; & d_{35}^1 &= \min(d_{35}^0, (d_{31}^0 + d_{15}^0)) = \min(3, (3 + \infty)) = 3; \\ d_{36}^1 &= \min(d_{36}^0, (d_{31}^0 + d_{16}^0)) = \min(6, (3 + \infty)) = 6; & d_{37}^1 &= \min(d_{37}^0, (d_{31}^0 + d_{17}^0)) = \min(4, (3 + 9)) = 4; \\ d_{38}^1 &= \min(d_{38}^0, (d_{31}^0 + d_{18}^0)) = \min(6, (3 + \infty)) = 6; & d_{39}^1 &= \min(d_{39}^0, (d_{31}^0 + d_{19}^0)) = \min(\infty, (3 + 1)) = 4; \\ d_{45}^1 &= \min(d_{45}^0, (d_{41}^0 + d_{15}^0)) = \min(4, (8 + \infty)) = 4; & d_{46}^1 &= \min(d_{46}^0, (d_{41}^0 + d_{16}^0)) = \min(3, (8 + \infty)) = 3; \\ d_{47}^1 &= \min(d_{47}^0, (d_{41}^0 + d_{17}^0)) = \min(2, (8 + 9)) = 2; & d_{48}^1 &= \min(d_{48}^0, (d_{41}^0 + d_{18}^0)) = \min(\infty, (1 + \infty)) = \infty; \\ d_{49}^1 &= \min(d_{49}^0, (d_{41}^0 + d_{19}^0)) = \min(2, (8 + 1)) = 2; \\ d_{56}^1 &= \min(d_{56}^0, (d_{51}^0 + d_{16}^0)) = \min(5, (\infty + \infty)) = 5; & d_{57}^1 &= \min(d_{57}^0, (d_{51}^0 + d_{17}^0)) = \min(2, (\infty + 9)) = 2; \\ d_{58}^1 &= \min(d_{58}^0, (d_{51}^0 + d_{18}^0)) = \min(\infty, (\infty + \infty)) = \infty; & d_{59}^1 &= \min(d_{59}^0, (d_{51}^0 + d_{19}^0)) = \min(1, (\infty + 1)) = 1; \\ d_{67}^1 &= \min(d_{67}^0, (d_{61}^0 + d_{17}^0)) = \min(\infty, (\infty + 9)) = \infty; & d_{68}^1 &= \min(d_{68}^0, (d_{61}^0 + d_{18}^0)) = \min(6, (\infty + \infty)) = 6; \\ d_{69}^1 &= \min(d_{69}^0, (d_{61}^0 + d_{19}^0)) = \min(\infty, (\infty + 1)) = 1; & d_{78}^1 &= \min(d_{78}^0, (d_{71}^0 + d_{18}^0)) = \min(5, (9 + \infty)) = 5; \\ d_{79}^1 &= \min(d_{79}^0, (d_{71}^0 + d_{19}^0)) = \min(5, (9 + 1)) = 5; \\ d_{89}^1 &= \min(d_{89}^0, (d_{81}^0 + d_{19}^0)) = \min(2, (\infty + 1)) = 2; \end{aligned}$$

Первый этап работы алгоритма завершился. Запишем матрицу D^1 и для наглядности нарисуем граф G (рис. 3).

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 & +\infty & +\infty & 9 & +\infty & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 3 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 11 & 0 & 4 & 3 & 2 & +\infty & 2 \\ +\infty & 8 & 3 & 4 & 0 & 5 & 2 & +\infty & 1 \\ +\infty & 4 & 6 & 3 & 5 & 0 & +\infty & 6 & +\infty \\ 9 & 1 & 4 & 2 & 2 & +\infty & 0 & 5 & 5 \\ +\infty & 5 & 6 & +\infty & +\infty & 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & +\infty & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

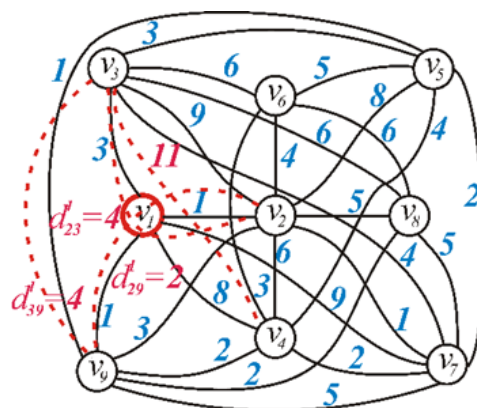


Рис. 3. Граф G

В матрице D^1 выделены элементы d_{ji}^1 , которые изменили значения на меньшие на первом шаге работы алгоритма. На графе G (рис. 3.) пунктирными линиями отмечены найденные на первом этапе кратчайшие пути. Предком вершин, для которых изменились кратчайшие расстояния d_{ji} на первом этапе является вершина v_1 .

2. Еще раз подробно рассмотрим вычисление элементов матрицы D . На втором этапе рассмотрим все пути между вершинами, проходящие через вершину v_2 . Для

удобства вычислений при работе в аудитории, рекомендуем еще раз показать матрицу D^1 и затем рядом выписать вновь построенную матрицу D^2 . Запишем матрицу D^1 и выделим красным цветом все элементы значения, которых на этом этапе не изменятся. Эти элементы $d_{i2} = d_{2j}$ означают расстояния от вершины v_2 до всех остальных. Просматриваем элементы d_{ij}^1 для всех $i \neq 2$ и $j \neq 2$ матрицы D^1 .

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 & +\infty & +\infty & 9 & +\infty & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 11 & 3 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 11 & 0 & 4 & 3 & 2 & +\infty & 2 \\ +\infty & 8 & 3 & 4 & 0 & 5 & 2 & +\infty & 1 \\ +\infty & 4 & 6 & 3 & 5 & 0 & +\infty & 6 & +\infty \\ 9 & 1 & 4 & 2 & 2 & +\infty & 0 & 5 & 5 \\ +\infty & 5 & 6 & +\infty & +\infty & 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & +\infty & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \underline{7} & \underline{9} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{6} & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & \underline{10} & 3 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ \underline{7} & 6 & \underline{10} & 0 & 4 & 3 & 2 & \underline{11} & 2 \\ \underline{9} & 8 & 3 & 4 & 0 & 5 & 2 & \underline{13} & 1 \\ \underline{5} & 4 & 6 & 3 & 5 & 0 & \underline{5} & 6 & \underline{6} \\ \underline{2} & 1 & 4 & 2 & 2 & \underline{5} & 0 & 5 & \underline{3} \\ \underline{6} & 5 & 6 & \underline{11} & \underline{13} & 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & \underline{6} & \underline{3} & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{13}^2 = \min(d_{13}^1, (d_{12}^1 + d_{23}^1)) = \min(3, (1 + 4)) = 3; \quad d_{14}^2 = \min(d_{14}^1, (d_{12}^1 + d_{24}^1)) = \min(8, (1 + 6)) = 7; \quad d_{15}^2 = \min(d_{15}^1, (d_{12}^1 + d_{25}^1)) = \min(\infty, (1 + 8)) = 9; \quad d_{16}^2 = \min(d_{16}^1, (d_{12}^1 + d_{26}^1)) = \min(\infty, (1 + 4)) = 5; \quad d_{17}^2 = \min(d_{17}^1, (d_{12}^1 + d_{27}^1)) = \min(9, (1 + 1)) = 2; \quad d_{18}^2 = \min(d_{18}^1, (d_{12}^1 + d_{28}^1)) = \min(\infty, (1 + 5)) = 6; \quad d_{19}^2 = \min(d_{19}^1, (d_{12}^1 + d_{29}^1)) = \min(1, (1 + 2)) = 1;$$

$$d_{34}^2 = \min(d_{34}^1, (d_{32}^1 + d_{24}^1)) = \min(11, (4 + 6)) = 10; \quad d_{35}^2 = \min(d_{35}^1, (d_{32}^1 + d_{25}^1)) = \min(3, (4 + 8)) = 3; \quad d_{36}^2 = \min(d_{36}^1, (d_{32}^1 + d_{26}^1)) = \min(6, (4 + 4)) = 6; \quad d_{37}^2 = \min(d_{37}^1, (d_{32}^1 + d_{27}^1)) = \min(4, (4 + 1)) = 4; \quad d_{38}^2 = \min(d_{38}^1, (d_{32}^1 + d_{28}^1)) = \min(6, (4 + 5)) = 6; \quad d_{39}^2 = \min(d_{39}^1, (d_{32}^1 + d_{29}^1)) = \min(4, (4 + 2)) = 4;$$

$$d_{45}^2 = \min(d_{45}^1, (d_{42}^1 + d_{25}^1)) = \min(4, (6 + 8)) = 4; \quad d_{46}^2 = \min(d_{46}^1, (d_{42}^1 + d_{26}^1)) = \min(3, (6 + 4)) = 3; \quad d_{47}^2 = \min(d_{47}^1, (d_{42}^1 + d_{27}^1)) = \min(2, (6 + 1)) = 2; \quad d_{48}^2 = \min(d_{48}^1, (d_{42}^1 + d_{28}^1)) = \min(\infty, (6 + 5)) = 11; \quad d_{49}^2 = \min(d_{49}^1, (d_{42}^1 + d_{29}^1)) = \min(2, (6 + 2)) = 2;$$

$$d_{52}^2 = \min(d_{56}^1, (d_{52}^1 + d_{26}^1)) = \min(5, (8 + 4)) = 5; \quad d_{57}^2 = \min(d_{57}^1, (d_{52}^1 + d_{27}^1)) = \min(2, (8 + 1)) = 2; \quad d_{58}^2 = \min(d_{58}^1, (d_{52}^1 + d_{28}^1)) = \min(\infty, (8 + 5)) = 13; \quad d_{59}^2 = \min(d_{59}^1, (d_{52}^1 + d_{29}^1)) = \min(1, (8 + 2)) = 1; \quad d_{67}^2 = \min(d_{67}^1, (d_{62}^1 + d_{27}^1)) = \min(\infty, (4 + 1)) = 5; \quad d_{68}^2 = \min(d_{68}^1, (d_{62}^1 + d_{28}^1)) = \min(6, (4 + 5)) = 6; \quad d_{69}^2 = \min(d_{69}^1, (d_{62}^1 + d_{29}^1)) = \min(\infty, (4 + 2)) = 6;$$

$$d_{78}^2 = \min(d_{78}^1, (d_{72}^1 + d_{28}^1)) = \min(5, (1 + 5)) = 5; \quad d_{79}^2 = \min(d_{79}^1, (d_{72}^1 + d_{29}^1)) = \min(5, (1 + 2)) = 3; \quad d_{89}^2 = \min(d_{89}^1, (d_{82}^1 + d_{29}^1)) = \min(5, (8 + 2)) = 5;$$

В матрице D^2 выделены элементы \underline{d}_{ji} , которые изменили значения на меньшие на втором шаге работы алгоритма. Предком вершин, для которых изменились расстояния d_{ji} на втором этапе является вершина v_2 .

Далее действуя аналогично, необходимо вычислить матрицы D^k для всех значений k от 3 до 9. Матрица кратчайших расстояний D равна матрице D^9 ($D = D^9$). При работе в аудитории для наглядности рекомендуется выписывать матрицу D^k и показывать граф G с отмеченными на нем вновь полученными более короткими путями на каждом шаге алгоритма. Приводим здесь итоговый результат вычислений для того, чтобы обучающиеся смогли сравнить свои результаты с заданными. Матрица D^9 имеет вид:

$$D^9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 3 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & 0 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 5 & 0 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & 3 & 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим кратчайшие пути между первой вершиной v_1 и всеми остальными на графе G (рис. 4.), найденные на последнем шаге работы алгоритма.

Пути и вершины, длина до которых от вершины v_1 изменилась в процессе работы алгоритма, отмечены цветом, цвет элемента матрицы D , означающего длину пути, на рисунке соответствует цвету вершины и ребер, входящих в этот путь.

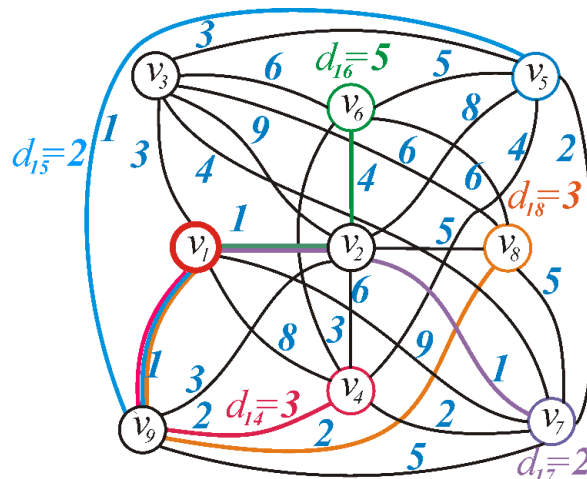


Рис. 4. Граф с отмеченными кратчайшими путями между вершиной v_1 и всеми остальными.

Показывать пути наименьшей длины между всеми парами вершин на одном графе одновременно представляется нецелесообразным, вследствие перегруженности и не информативности такого изображения. При работе в аудитории или создании электронных методических пособий можно показать серию изображений графа G , последовательно заменяющих друг друга, с отмеченными на них кратчайшими путями между очередной вершиной (второй, третьей и так далее) и всеми остальными.

Так же можно дополнить процедуру поиска кратчайших путей от заданной вершины процедурой восстановления этих путей с использованием массива предков $Pred(v_j)$. Считаем, что начинаем путь из вершины v_1 , поэтому предка у этой вершины нет. Для рассмотренного выше графа массив предков имеет вид: $Pred(v_2) = v_1, Pred(v_3) = v_1, Pred(v_4) = v_9, Pred(v_5) = v_9, Pred(v_6) = v_2, Pred(v_7) = v_2, Pred(v_8) = v_9, Pred(v_9) = v_1$.

Например, предком вершины графа v_5 является вершина v_9 ($Pred(v_5) = v_9$), а предком вершины графа v_9 является вершина v_1 ($Pred(v_9) = v_1$), и, следовательно, кратчайший путь между из вершины v_1 , в вершину v_5 будет путь через вершину v_9 ($v_1—v_9—v_5$).

Можно дать студентам задание самостоятельно дополнить свой программный код процедурой восстановления путей наименьшей длины и вывода их вместе с матрицей кратчайших расстояний.

Рекомендуем предложить обучающимся следующие задачи для самостоятельной работы для лучшего усвоения материала.

Примеры задач для самостоятельного решения

В задачах 1–4 неориентированный граф G задан матрицей меток ребер A , требуется найти матрицу D кратчайших расстояний между всеми вершинами графа G с помощью алгоритма Флойда-Уоршелла для взвешенного графа.

Замечание. Матрица A задана таблицей, $a_{ij} = +\infty$ означает, что дуги между вершинами v_i и v_j нет. Петель в графе нет, пути от вершины до самой себя тоже нет $a_{ii} = +\infty$.

Задача 1. Матрица A имеет вид:

∞	5	∞	∞	∞	2	∞	1	2
5	∞	∞	7	∞	∞	∞	4	2
∞	∞	∞	∞	5	5	∞	5	3
∞	7	∞	∞	6	∞	4	∞	6
∞	∞	5	6	∞	5	∞	2	6
2	∞	5	∞	5	∞	∞	4	∞
∞	4	∞	4	∞	∞	∞	∞	3
1	2	5	∞	2	4	∞	∞	4
2	∞	3	6	6	∞	3	4	∞

Приведем ответ для задачи 1.

Матрица D имеет вид

0	3	5	8	3	2	5	1	2
3	0	7	7	4	5	4	2	5
5	7	0	9	5	5	6	5	3
8	7	9	0	6	10	4	8	6
3	4	5	6	0	5	8	2	5
2	5	5	10	5	0	7	3	4
5	4	6	4	8	7	0	6	3
1	2	5	8	2	3	6	0	3
2	5	3	6	5	4	3	3	0

Задача 2. Матрица A имеет вид:

∞	6	∞	4	∞	1	1	∞	1
6	∞	1	3	∞	∞	1	∞	5
∞	1	∞	5	∞	∞	5	∞	1
4	3	5	∞	4	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	4	∞	∞	∞	6	∞
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	1
1	1	5	∞	∞	∞	∞	∞	6
∞	∞	2	6	6	3	∞	∞	4
1	5	1	∞	∞	1	6	4	∞

Задача 3. Матрица A имеет вид:

∞	∞	1	5	∞	5	∞	3	∞
∞	∞	6	6	∞	7	0	6	∞
1	6	∞	2	7	4	6	3	6
5	6	2	∞	∞	∞	6	∞	∞
∞	∞	7	∞	∞	∞	5	∞	6
5	7	4	∞	∞	0	∞	∞	3
∞	∞	6	6	5	∞	∞	∞	7
3	6	3	∞	∞	∞	∞	∞	6
∞	∞	6	∞	6	3	7	6	∞

Задача 4. Матрица A имеет вид:

∞	∞	5	∞	4	5	2	∞	7
∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	4	∞
∞	∞	∞	5	4	∞	∞	1	1
∞	∞	5	∞	∞	5	7	∞	3
4	∞	4	∞	∞	4	∞	4	5
5	∞	∞	5	4	∞	4	2	∞
2	5	∞	7	∞	4	∞	4	∞
∞	4	1	∞	4	2	4	∞	∞
7	∞	1	3	5	∞	∞	∞	∞

Заключение

В статье описана методика изложения решения задачи поиска матрицы кратчайших расстояний между вершинами для взвешенного графа G с неотрицательными ребрами. Для лучшего представления работы алгоритма подробно разобран пример такого поиска с иллюстрациями работы алгоритма. В работе приведены задачи, которые можно предложить студентам для самостоятельного решения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Белоусов А. И., Ткачёв С. Б. Дискретная математика: учебник для вузов. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIX) 6-е изд. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. - 713 с.: ил.
2. Белоусов А. И/ О некоторых методических вопросах изложения теории полуколец // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - №1. - P. 45-54.
3. Universal algorithms for solving the matrix Bellman equations over semirings/ G. L. Litvinov, A. Ya. Rodionov, S. N. Sergeev and A. N. Sobolevski / Journal: Soft Computing, 2113, Volume 17, Number 11, Page 1767/ DOI: 11.1117/s11511-113-1127-5
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2011.— 1296 с.
5. Емеличев В. А. Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов М.: Лександ. 2017.- 391 с
6. Алгоритм Флойда – Уоршелла [Электронный ресурс] //: <https://habr.com/ru/articles/105825/> (дата обращения: 27.03.2024).
7. Дискретная математика / Курс дискретной математики / Теория графов/ Задача о путях во взвешенных ориентированных графах [Электронный ресурс] //: <http://diskra.ru/alg/?lesson=11&id=70> / (дата обращения: 27.03.2024).
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. Указ. соч.
9. Емеличев В. А. Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. Указ. соч.
10. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. Указ. соч.7
11. Емеличев В. А. Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. Указ. соч.
12. Белоусов А. И., Ткачёв С. Б. Дискретная математика: учебник для вузов. Указ. соч.

Marina S. Vinogradova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

m-s-vinogradova@yandex.ru

Olga S. Tkacheva,

Junior researcher, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

tkolga17@gmail.com

Methodology for teaching solving problems of finding the shortest distances between all vertices of a weighted undirected graph using the example of the Floyd-Warshall algorithm

Abstract. The ability to use algorithms on graphs and, in particular, the algorithm for finding the shortest distances between all vertices of a graph underlies the ability of students to solve practical problems in the disciplines of discrete mathematics, discrete optimization, optimization on graphs, as well as engineering disciplines, associated with the construction of optimal routes passing through given points. The purpose of this article is a methodology for teaching solving problems of finding the shortest distances between all vertices of a graph. The paper describes the methodology for presenting the Floyd-Warshall algorithm, provides examples of searching for the shortest distances between all vertices of a non-directed graph with illustrations. Problems for independent solution are proposed.

Keywords: graph, shortest distance matrix, shortest paths, Floyd-Warshall algorithm.

ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕМЫ «ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Аннотация

В курсе математической статистики важное место занимает задача оценивания неизвестных параметров закона распределения, общий вид (тип, класс) которого известен. Один из подходов к решению этой задачи заключается в построении так называемых интервальных оценок. Соответствующие навыки имеют большое значение для практической работы будущего специалиста, что делает актуальным оттачивание методики изложения этого раздела. Целью работы является исследование методических аспектов преподавания темы «Интервальные оценки» для студентов (бакалавров) инженерных специальностей, их ранжирование по значимости и последовательности изложения. Для достижения поставленной цели в статье предложен компендуим, подкрепленный практическими упражнениями.

Ключевые слова

оценивание параметров, интервальная оценка, доверительный интервал, центральная статистика, нормальное распределение, квантиль

АВТОРЫ

Власов Павел Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Белоусов Алексей Иванович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Хорькова Нина Григорьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Введение

Как известно [1], одной из основных задач математической статистики является получение научно обоснованных выводов о свойствах массовых процессов или явлений по результатам экспериментов или наблюдений. Более узко одну из основных задач математической статистики можно сформулировать следующим образом: имеется случайная величина X , закон распределения которой неизвестен; требуется по результатам наблюдений сделать выводы о ее законе распределения. Эта задача обычно рассматривается в двух вариантах.

В первом из них закон распределения случайной величины X неизвестен «вообще»; требуется сформулировать и проверить гипотезу о виде (типе, классе) этого закона и, возможно, значениях его параметров.

Во втором случае общий вид (тип, класс) закона распределения случайной величины X предполагается известным. Требуется оценить значения неизвестных параметров, от которых этот закон зависит.

По общей логике решение второй из рассмотренных задач должно предшествовать решению первой. Дело в том, что проверка, например, гипотезы

{Случайная величина X имеет нормальный закон распределения}

фактически сводится к проверке гипотезы

{Случайная величина X имеет

нормальный закон распределения с параметрами m и σ^2 },

что предполагает использование в качестве параметров m и σ^2 значений, более или менее близких к их теоретическим («истинным») значениям. Таким образом, задача оценивания неизвестных параметров имеет ключевое значение для решения многих других задач математической статистики.

Для решения этой задачи используются два основных подхода. Первому из них, заключающемуся в построении точечных оценок, посвящены работы [2, 3]. При этом стоит отметить, что основным недостатком точечных оценок является отсутствие вероятностных характеристик точности оценивания неизвестных параметров.

Настоящая статья посвящена второму возможному подходу к решению этой задачи, заключающемуся в построении интервальных оценок.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой зависит от скалярного параметра θ , \vec{X} (соответственно \vec{x}) – случайная выборка (соответственно выборка) из генеральной совокупности X .

Определение 1. Интервальной оценкой уровня $\gamma \in (0, 1)$ (γ -доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют [4] пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$, $\bar{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \bar{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma.$$

Другими словами, γ -доверительная интервальная оценка для параметра θ – такой интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \bar{\theta}(\vec{X}))$ со случайными границами, который покрывает теоретическое (то есть «истинное») значение этого параметра с вероятностью γ . Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки \vec{X} статистики $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\bar{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Определение 2. Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ -доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \bar{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\bar{\theta}(\vec{X})$.

Здесь нужно сделать несколько важных замечаний.

Во-первых, из определений 1 и 2 следует, что доверительный интервал является выборочным значением (реализацией) интервальной оценки. Однако в дальнейшем в случаях, когда из контекста ясно, о чем идет речь, мы иногда будем нарушать введенную терминологию, называя, например, доверительным интервалом интервал со случайными границами.

Во-вторых, при построении доверительного интервала возможна ситуация, когда он не покрывает теоретическое значение оцениваемого параметра. Вероятность такого события

$$1 - \gamma = P\left\{\theta \notin \left(\underline{\theta}(\bar{X}), \bar{\theta}(\bar{X})\right)\right\}.$$

В-третьих, случайная величина

$$l(\bar{X}) = \bar{\theta}(\bar{X}) - \underline{\theta}(\bar{X}),$$

называемая *размахом* доверительного интервала, построенного по данным случайной выборки \bar{X} , является вероятностной характеристикой точности оценивания неизвестного параметра. При этом для каждой реализации \bar{x} случайной выборки \bar{X} значение $l(\bar{x})$ равно длине соответствующего интервала.

Методология и результаты исследования

Дисциплина «Математическая статистика» входит в программы многих направлений обучения бакалавров. Для некоторых направлений и специальностей в программу курса входит тема «Интервальные оценки».

В основе метода построения интервальных оценок лежит использование так называемых центральных статистик [5].

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ . Статистика $T(\bar{X}, \theta)$ называется *центральной*, если закон ее распределения не зависит от θ .

Пример 1. Пусть $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где значение θ неизвестно, а σ^2 известно. Покажем, что статистика

$$T(\bar{X}, \theta) = \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n} \quad (1)$$

является центральной.

В самом деле, случайная величина T является линейной функцией от случайных величин X_i , $i = \overline{1; n}$, имеющих одинаковое с X распределение, поэтому [6] T также имеет нормальное распределение: $T \sim N(m_T, \sigma_T^2)$. Поскольку

$$m_T = M[T] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (M[\theta] - M[\bar{X}]),$$

то с учетом очевидного равенства $M[\bar{X}] = \theta$ имеем

$$m_T = 0. \quad (2)$$

Аналогично с учетом равенства $D[\bar{X}] = \sigma^2/n$ и свойств дисперсии [7] получаем

$$\sigma_T^2 = D[T] = \frac{n}{\sigma^2} D[\bar{X}] = \frac{n}{\sigma^2} \frac{\sigma^2}{n} = 1 \quad (3)$$

С использованием равенств (2) и (3) заключаем, что $T(\bar{X}, \theta) \sim N(0, 1)$. Таким образом, вне зависимости от значения неизвестного параметра θ статистика T имеет стандартный нормальный закон распределения и, следовательно, является

центральной. Подчеркнем при этом, что сами значения статистики T зависят от параметра θ .

Покажем, как центральная статистика может быть использована для построения доверительных интервалов. Будем предполагать, что

(а) X – случайная величина, закон распределения которой зависит от неизвестного параметра θ ;

(б) $\gamma \in (0, 1)$ – выбранный уровень доверия;

(в) $T(\bar{X}, \theta)$ – центральная статистика;

(г) случайная величина T является непрерывной;

(д) функция $F_T(t)$ распределения статистики T является монотонно возрастающей на множестве $\{t \in \mathbb{R} : 0 < F_T(t) < 1\}$;

(е) T является монотонно возрастающей функцией параметра θ .

Выберем значения $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$ и при этом $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Замечание 1. В этом месте настоятельно необходимо напомнить учащимся определение квантили. Так, *квантилью уровня $\alpha \in (0, 1)$* случайной величины X называют [8] число q_α такое, что

$$P\{X < q_\alpha\} \leq \alpha, \quad P\{X > q_\alpha\} \leq 1 - \alpha.$$

Для непрерывной случайной величины X это означает выполнение равенства $F_X(q_\alpha) = \alpha$, где F_X – функция распределения случайной величины X (см. рис. 1, а). Если интерпретировать закон распределения случайной величины X как закон распределения вдоль прямой одного килограмма вероятностной массы, заданный плотностью f_X , то q_α – такая точка на этой прямой, слева от которой располагается ровно α килограммов вероятности (см. рис. 1, б). Замечание закончилось.

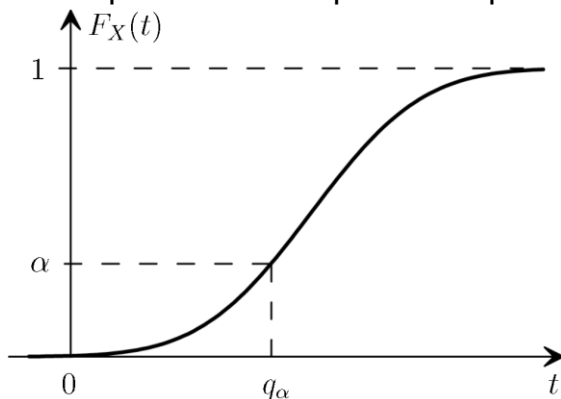


Рис. 1, а

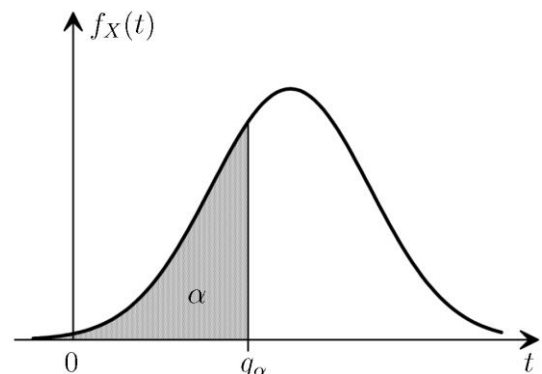


Рис. 1, б

Пусть q_{α_1} и $q_{1-\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней случайной величины T . В силу предположений (г) и (д) эти квантили определены однозначно, а поскольку статистика T является центральной (предположение (в)), они не зависят от значения неизвестного параметра θ . В соответствии с выбором значений α_1, α_2 и замечанием 1 слева от q_{α_1} располагается α_1 килограммов вероятностной массы, а справа от $q_{1-\alpha_2}$ располагается α_2 килограммов (см. рис. 2). Между q_{α_1} и $q_{1-\alpha_2}$ заключено

$1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$ килограммов вероятности и согласно свойствам непрерывных случайных величин справедливо равенство

$$\gamma = P\{q_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\}.$$

Перепишем стоящее под знаком вероятности событие в эквивалентном виде. В соответствии со сделанным выше предположением (е) зависимость T как функция параметра θ обратима, а при переходе к обратной функции знаки неравенств не изменяются, поэтому

$$\gamma = P\{T^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1}) < \theta < T^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})\}.$$

Последнее равенство означает, что для статистик

$$\underline{\theta}(\vec{X}) = T^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1}), \quad \bar{\theta}(\vec{X}) = T^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})$$

выполняется определение 1, то есть задача построения γ -доверительной интервальной оценки для параметра θ решена.

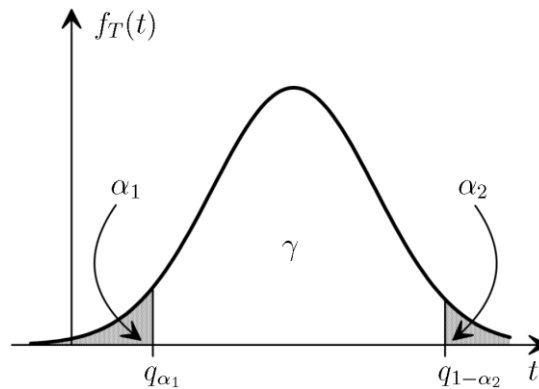


Рис. 2

Замечание 2. Построенный γ -доверительный интервал зависит от выбора значений α_1 и α_2 . Как правило, полагают $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Пример 2. В примере 1 было показано, что для случайной величины $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ при известной дисперсии σ^2 статистика (1) является центральной и имеет стандартное нормальное распределение. Построим с ее помощью γ -доверительный интервал для θ .

Выберем α_1 и α_2 так, как это делалось выше при построении интервальной оценки в общем виде. Аналогично проведенным выше общим рассуждениям можно утверждать, что

$$\gamma = P\{u_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < u_{1-\alpha_2}\}.$$

где символом u с индексами обозначены квантили соответствующих уровней стандартного нормального распределения (см. рис. 3). Поскольку

$$\begin{aligned} \{u_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < u_{1-\alpha_2}\} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{u_{\alpha_1} < \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n} < u_{1-\alpha_2}\right\} \Leftrightarrow \left\{\bar{X} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}\right\}, \end{aligned}$$

то статистики

$$\underline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Дают искомую интервальную оценку параметра θ .

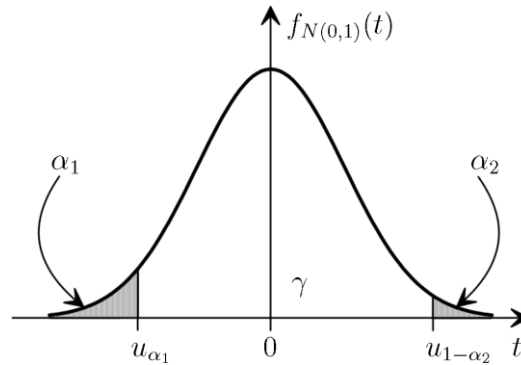


Рис. 3

Замечание 3. Построенная в примере 2 интервальная оценка параметра θ — математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии — имеет размах

$$l(\vec{X}) = \bar{\theta}(\vec{X}) - \underline{\theta}(\vec{X}) = (1 - u_{\alpha_1} - u_{1-\alpha_2}) \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

который является детерминированной величиной при любых $\alpha_1, \alpha_2, \sigma, n$. При этом из рис. 3 видно, что размах будет минимальным при $\alpha_1 = \alpha_2$. В этом случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}, \quad 1-\alpha_2 = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}.$$

В силу того, что функция плотности стандартного нормального распределения является четной (график симметричен относительно оси ординат), квантили этого распределения обладают свойством

$$u_{1-\alpha} = -u_{\alpha}, \quad (5)$$

поэтому получаем

$$u_{1-\alpha_2} = u_{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad u_{\alpha_1} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

Таким образом, при $\alpha_1 = \alpha_2$ интервальная оценка (4) примет вид

$$\underline{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\theta}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

и будет обладать минимально возможным размахом

$$l(\vec{X}) = \frac{2\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае (генеральная совокупность имеет нормальное распределение с известной дисперсией) размах доверительного интервала для математического ожидания фактически не зависит от случайной выборки \vec{X} , то есть является детерминированной величиной, зависящей от трех скалярных параметров: среднеквадратичного отклонения σ генеральной совокупности, уровня доверия γ и объема n выборки.

Замечание 4. Очевидно, что при $\gamma \rightarrow 1 - 0$ для размаха доверительного интервала (4) справедливо соотношение $l \rightarrow +\infty$. Это означает, что чем более достоверную оценку мы хотим построить, тем менее определенной она будет. Такая ситуация типична для математической статистики и единственной возможностью повышения уровня доверия интервальной оценки при сохранении размаха является увеличение объема выборки. На рис. 4 а, б представлены характерные зависимости размаха доверительного интервала (4) соответственно от объема выборки и коэффициента доверия γ .

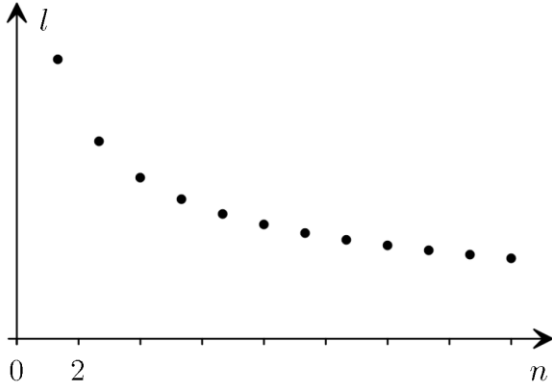


Рис. 4, а

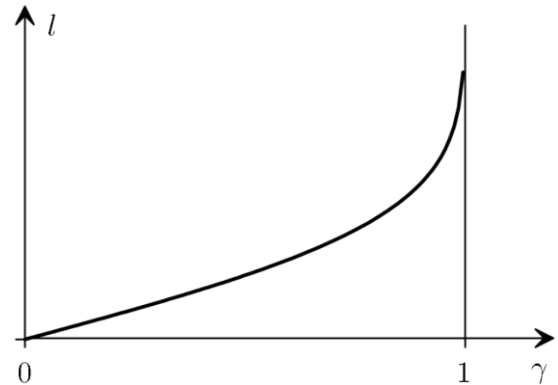


Рис. 4, б

Пример 3. Пусть $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где значения параметров θ и σ^2 неизвестны. Построим γ -доверительный интервал для θ .

Поскольку в рассматриваемом случае значение дисперсии σ^2 неизвестно, для составления статистики, аналогичной (1), используем исправленную выборочную дисперсию [9]

$$S^2(\bar{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

В этом случае статистика примет вид

$$T(\bar{X}, \theta) = \frac{\theta - \bar{X}}{S(\bar{X})} \sqrt{n} \quad (6)$$

Для установления закона распределения полученной статистики запишем ее в виде

$$T(\bar{X}, \theta) = \frac{\frac{\theta - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n}}{\frac{S(\bar{X})}{\sigma}} = \frac{\frac{\theta - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(\bar{X})}{\sigma^2}}} \sqrt{n-1} = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \sqrt{n-1},$$

где использованы обозначения

$$\xi = \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n}, \quad \eta = \frac{(n-1)S^2(\bar{X})}{\sigma^2}. \quad (7)$$

Из примера 1 следует, что $\xi \sim N(0, 1)$. Кроме того, можно показать [10], что $\eta \sim \chi^2(n-1)$ и случайные величины ξ и η независимы. Таким образом, определенная равенством (6) статистика T имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы: $T \sim \text{St}(n-1)$. Поскольку закон распределения этой статистики не зависит

от неизвестного параметра θ , она является центральной и, следовательно, может быть использована для построения доверительного интервала для θ .

Аналогично проведенным выше рассуждениям зафиксируем значения $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. Поскольку (см. рис. 5)

$$\gamma = P\left\{t_{\alpha_1} < T(\bar{X}, \theta) < t_{1-\alpha_2}\right\},$$

где символом t с индексами обозначены квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, и

$$\begin{aligned} \left\{t_{\alpha_1} < T(\bar{X}, \theta) < t_{1-\alpha_2}\right\} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{t_{\alpha_1} < \frac{\theta - \bar{X}}{S(\bar{X})} \sqrt{n} < t_{1-\alpha_2}\right\} &\Leftrightarrow \left\{\bar{X} + \frac{S(\bar{X})t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{S(\bar{X})t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}\right\}, \end{aligned}$$

закключаем, что статистики

$$\underline{\theta}(\bar{X}) = \bar{X} + \frac{S(\bar{X})t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\theta}(\bar{X}) = \bar{X} + \frac{S(\bar{X})t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

дают искомую интервальную оценку параметра θ .

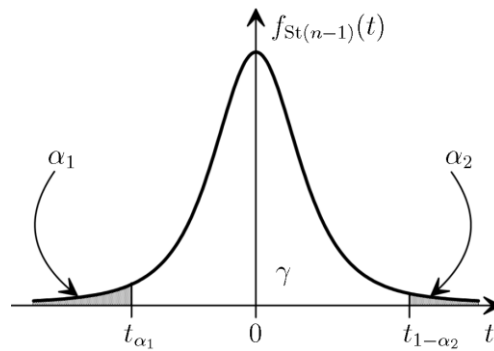


Рис. 5

Замечание 5. Рассмотрим случай $\alpha_1 = \alpha_2$. Поскольку функция плотности распределения Стьюдента (с любым числом степеней свободы) является четной (см. рис. 5), то в этом случае также проходят рассуждения, аналогичные рассуждениям из замечания 3, и интервальная оценка (8) принимает вид

$$\underline{\theta}(\bar{X}) = \bar{X} - \frac{S(\bar{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\theta}(\bar{X}) = \bar{X} + \frac{S(\bar{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Размах соответствующего интервала

$$l(\bar{X}) = \frac{2S(\bar{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

теперь является случайной величиной, поскольку зависит от случайной выборки \bar{X} .

Пример 4. Пусть $X \sim N(m, \theta)$, где значения параметров m и θ неизвестны. Построим γ -доверительный интервал для дисперсии θ .

Рассмотрим статистику

$$T(\vec{X}, \theta) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\theta}, \quad (9)$$

которая совпадает со статистикой η , определенной вторым соотношением (7). В примере 3 указывалось, что случайная величина η имеет распределение $\chi^2(n-1)$, то есть закон ее распределения не зависит от неизвестного параметра θ . По этой причине статистика (9) является центральной и может быть использована для построения γ -доверительного интервала для θ .

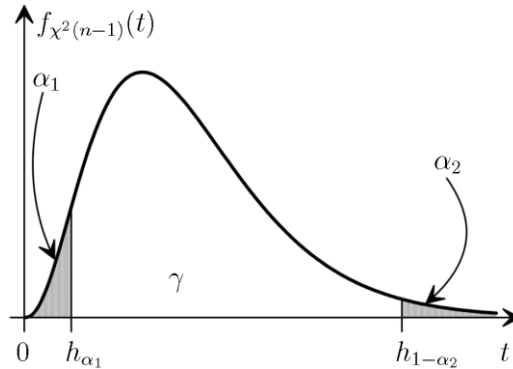


Рис. 6

Как и ранее, выберем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. С использованием свойств непрерывных случайных величин можно записать (см. рис. 6)

$$\gamma = P\{h_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < h_{1-\alpha_2}\},$$

где символом h с индексами обозначены квантили соответствующих уровней распределения $\chi^2(n-1)$. Событие, стоящее под символом вероятности в последнем равенстве, запишем в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \{h_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < h_{1-\alpha_2}\} &\Leftrightarrow \left\{h_{\alpha_1} < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\theta} < h_{1-\alpha_2}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{\frac{1}{h_{1-\alpha_2}} < \frac{\theta}{(n-1)S^2(\vec{X})} < \frac{1}{h_{\alpha_1}}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{1-\alpha_2}} < \theta < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\alpha_1}}\right\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что статистики

$$\underline{\theta}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{1-\alpha_2}}, \quad \bar{\theta}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\alpha_1}} \quad (10)$$

дают искомую интервальную оценку параметра θ .

Замечание 6. В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ аналогично замечанию 3 получаем, что

$$h_{\alpha_1} = h_{\frac{1-\gamma}{2}}, \quad h_{1-\alpha_2} = h_{\frac{1+\gamma}{2}},$$

однако использовать свойство (5) теперь не получится, поскольку функция плотности распределения χ^2 с любым числом степеней свободы не является четной. Поэтому в рассматриваемом случае интервальная оценка (10) принимает вид

$$\theta(\bar{X}) = \frac{(n-1)S^2(\bar{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}, \quad \bar{\theta}(\bar{X}) = \frac{(n-1)S^2(\bar{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}.$$

Заключение

В работе рассмотрены методические аспекты изложения темы «Интервальные оценки» в курсе математической статистики, который читается для студентов (бакалавров) инженерных специальностей.

Проведены общие соображения, приводящие к необходимости рассмотрения интервальных оценок, основные определения, описан общий метод построения интервальных оценок с использованием известной центральной статистики. В качестве примеров использования метода рассмотрены задачи построения интервальных оценок для неизвестных параметров нормального закона распределения в различных случаях сочетания известных и неизвестных параметров. В каждом случае отмечены особенности реализации метода, имеющие методическое значение.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
2. Власов П. А., Андреева Т. В., Семенов Ю. С. Изложение метода моментов построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. – Salzburg, 2023. – Т. 1, №1. – Р. 91-97. – URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=53115570
3. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Иложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. – Salzburg, 2023. – №3. – Р. 67-75. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54653953>
4. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
5. Там же.
6. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
7. Там же.
8. Там же.
9. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
10. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

Alexey I. Belousov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

al_belous@bk.ru

Nina G. Khorkova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

ninakhorkova@bmstu.ru

Presentation of the topic “Interval Estimation” in the course “Mathematical statistics”

Abstract. The problem of estimating unknown parameters of a distribution law, the general form (type or class) of which is known, takes an important place in the Mathematical statistics course. One approach to solving this problem is to construct interval estimates. The corresponding skills are of great importance for the practical work of the future specialist, which makes it important to sharpen the methodology for presenting this section. The purpose of this article is to study the methodological aspects of teaching the topic “Interval estimation” for students (bachelors) of engineering specialties and ranking those aspects by importance and sequence of presentation. To achieve this goal, the article proposes compendium supplemented with practical exercises.

Keywords: parameter estimation, interval estimation, confidence interval, central statistics, normal distribution, quantile.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

Аннотация

Модуль «Теория функций комплексного переменного» включен в образовательные стандарты для большинства специальностей технических университетов. Целью статьи является обсуждение методики преподавания темы «Особые точки функций комплексного переменного» в условиях ограниченного числа выделенных учебных часов. Рассмотрены методы определения характера особых точек функций комплексного переменного, включая бесконечно удаленную особую точку. Разобраны примеры решения задач. Содержание статьи будет полезно студентам и преподавателям технических университетов.

Ключевые слова

аналитическая функция, изолированная особая точка, полюс, существенно особая точка, бесконечно удаленная особая точка

АВТОРЫ

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Введение

Традиции преподавания комплексного анализа были заложены в классических университетах (см., например, [1-3]). Некоторые университетские учебники, изданные в прошлом веке, переиздаются до сих пор. В настоящее время модуль «Теория функций комплексного переменного» включен в учебные программы подавляющего большинства специальностей технических университетов. Преподавание этой дисциплины для инженеров имеет свои особенности, что привело к появлению ряда учебных пособий, специально предназначенных для подготовки инженерных кадров (см., например, [4],[5]). В МГТУ им. Н.Э. Баумана число выделяемых на изучение этого модуля часов, естественно, зависит от направления подготовки, и для некоторых потоков даже читается полноценный семестровый курс. Однако для большинства инженерных специальностей выделяется очень ограниченное количество часов, и этот модуль часто объединяют в рамках одного семестрового курса с рядами и (или) кратными интегралами, а также с операционным исчислением. В итоге на изучение модуля может выделяться менее 10 аудиторных занятий. Поэтому представляется целесообразным определить необходимый минимум знаний по разным темам, входящим в такой модуль. В данной работе предлагается обсудить методику преподавания темы «Особые точки функций комплексного переменного». Выбор материала для включения в программы дисциплин математического цикла определяется потребностями подготовки инженеров по конкретному направлению и необходимостью обеспечить изучение целого ряда других

дисциплин. Курс ТФКП необходим студентам при изучении физики, электротехники. Также надо учитывать возможность использования полученных знаний в будущей профессиональной деятельности (см., например, [6]). Кроме того, есть и внутренняя логика преподавания математики, когда для одного нового понятия требуется введение целой цепочки предварительных и доказательство ряда утверждений. Умение находить особые точки и определять их характер необходимо для правильного выбора формулы, используемой для нахождения вычета, вычеты используются при вычислении интегралов, имеющих практическое применение.

Методология и результаты исследования

В статье мы будем придерживаться терминологии и порядка изложения, принятого в [7]. В этом учебнике можно найти необходимые определения и формулировки теорем. Сделаем несколько предварительных замечаний. В работе будет обсуждаться выбор задач на исследование характера особых точек и методов их решения. Прежде всего отметим, что нарушаться условие аналитичности функции может по разным причинам. В условии курса, ограниченного по времени, предлагается рассматривать задачи на исследование *однозначных* функций, особые точки которых являются *изолированными* и появляются «при делении на нуль».

Классификацию особых точек во всех источниках (см., например, [8]) проводят, рассматривая предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Заметим, что в рамках краткого курса методы вычисления пределов не рассматриваются. Студенты часто предполагают, что действуют правила вычисления пределов функций действительного переменного, и допускают ошибки. Такое может происходить, когда надо вычислить пределы, содержащие функции $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, e^z$ и другие. Поэтому представляется разумным переориентировать студентов на применение других методов при решении задач по рассматриваемой теме. Для достижения этой цели при проведении занятия перед решением задач следует напомнить студентам формулировки теорем, позволяющие решать ряд задач без использования пределов. Такие задачи рассмотрены в п.1.

Отметим также, что при исследовании существенно особой точки в некоторых случаях предпочтительнее с методической точки зрения использовать пределы, а именно доказывать, что предела $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует. При проведении таких доказательств можно еще раз продемонстрировать студентам отличие перечисленных выше функций от их аналогов с действительным аргументом. Подобные примеры рассмотрены в п.2.

Бесконечно удаленная точка занимает особое положение из-за ее абстрактности. Даже ее представление как точки сферы Римана не упрощает восприятие студентами этого понятия, которое используется в дальнейшем в курсе ТФКП и приложениях. Поэтому исследование характера этой точки необходимо формализовать. Соответствующий известный прием обсуждается в п.3.

1. Устранимые особые точки, нули, полюсы.

Перед решением задач следует повторить определения и формулировки теорем, которые будут использоваться при исследовании данных типов особых точек. В литературе эти сведения приводятся в разных параграфах и будет удобным собрать их в одном месте. Минимальный набор теоретических сведений представляется следующим. Прежде всего приводим утверждение, которое оказывается полезным при исследовании особых точек всех типов, а его доказательство не займет много времени на лекции (а кто-то сочтет его очевидным).

Пусть функции комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$ связаны равенством $f(z) = \varphi(z)g(z)$, где функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда если точка z_0 является особой точкой функции $g(z)$, то она является также особой точкой функции $f(z)$ и имеет тот же характер.

Этот факт удобно использовать в случае, когда исследуемая функция является произведением нескольких сомножителей. В самом начале решения задачи надо подставить особую точку во все сомножители и те из них, которые не обратятся в нуль войдут в функцию $\varphi(z)$. Оставшиеся сомножители определяют функцию $g(z)$, которая будет иметь более простой вид для дальнейшего исследования.

Далее повторяем определения и критерии нуля и полюса k -го порядка, а также правило исследования функции в ситуации $\left[\frac{0}{0}\right]$

При подборе задач для проведения семинаров представляется полезным выбирать такие, при решении которых надо будет повторить правила вычисления значений функций комплексного переменного (например, связь тригонометрических и гиперболических функций, формулу Эйлера и т.п.), а также основные разложения в ряды Тейлора.

Простейшие задачи на отработку материала текущей темы могут быть такими.

1. Найти особые точки функции и определить их характер:

$$a) f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 + \pi^2)^2}, \quad b) f(z) = \frac{z^2 \operatorname{sh} z}{(z^2 + \pi^2)^2}.$$

Приравняв к нулю знаменатели, находим особые точки $z_1 = \pi i$, $z_2 = -\pi i$.

Исследуя характер особой точки $z_1 = \pi i$, представим в случае а) функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z - \pi i)^2(z + \pi i)^2} = \frac{\varphi_1(z)}{(z - \pi i)^2},$$

где функция

$$\varphi_1(z) = \frac{\sin z}{(z + \pi i)^2}$$

является аналитической в точке $z_1 = \pi i$ и

$$\varphi_1(\pi i) = \frac{\sin \pi i}{(\pi i + \pi i)^2} = -\frac{i \operatorname{sh} \pi}{4\pi^2} \neq 0.$$

Следовательно, точка $z_1 = \pi i$ является полюсом второго порядка. Аналогичным образом доказывается, что точка $z_2 = -\pi i$ также является полюсом второго порядка.

В случае б) для функции $g_1(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z - \pi i)^2}$ определяем порядки нулей в числителе и знаменателе и заключаем, что точка $z_1 = \pi i$ является простым полюсом.

2. Решим аналогичную задачу для функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos z^5}{z^2 \operatorname{sh} z}.$$

Функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z_1 = 0$. Эта точка является нулем и числителя, и знаменателя. Очевидно, что порядок нуля в знаменателе третий. Как определить порядок нуля числителя? Если действовать по определению нуля порядка k и считать производные в точке $z_1 = 0$ до первой производной, отличной от нуля, то решение займет слишком много времени. Поэтому используем следующее утверждение. Точка z_0 является нулем k -го порядка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда ряд Тейлора в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + c_{k+2} (z - z_0)^{k+2} \dots, c_k \neq 0.$$

Используя стандартное разложение для $\cos z$, получим разложение

$$1 - \cos z^5 = 1 - \left(1 - \frac{(z^5)^2}{2!} + \frac{(z^5)^4}{4!} - \dots \right) = \frac{z^{10}}{2!} - \frac{z^{20}}{4!} + \dots,$$

из которого следует, что точка $z_1 = 0$ является нулем десятого порядка числителя. Следовательно, точка $z_1 = 0$ является нулем седьмого порядка функции $f(z)$.

Умение быстро определять порядок полюса является важным при изучении теории вычетов и ее приложений, так как при вычислении вычета в полюсе используется особая формула и ее применение в ряде случаев бывает более простым по сравнению с формулой, выражающей вычет через коэффициент ряда Лорана.

2. Существенно особые точки.

На занятиях обычно рассматривают два способа исследования существенно особой точки.

1. Рассматривают предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ и доказывают, что он не существует (ни конечный, ни бесконечный).

2. Раскладывают функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0 и доказывают, что главная часть содержит бесконечное число слагаемых.

В приводимых ниже примерах сравниваются оба способа. Данная тема представляется достаточно сложной для студентов технических университета. При вычислении пределов возможны проблемы, о которых говорилось выше. Разложение функций в ряды Лорана также часто вызывает затруднения. Традиционно на лекциях в примерах и на семинарах в задачах присутствуют функции $e^{\frac{1}{z}}$, $e^{\frac{1}{z^2}}$, $\sin \frac{1}{z}$, и т.п., для которых исследуют характер точки $z_0 = 0$. Для разнообразия можно в примерах изменить функции $g(z)$, заменив $\frac{1}{z}$ на $\frac{1}{z-z_0}$, и исследовать точку $z_0 \neq 0$. Однако надо научить студентов делать и обратную замену, то есть сводить исследование точки $z_0 \neq 0$ к изучению точки $z_0 = 0$. Обсудим решение нескольких задач.

Определим характер особой точки $z_1 = 0$ функций

$$a) f(z) = \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{(z^2 + 2024)^2}, b) f(z) = \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}}}{(z^3 + 2024)^2}, c) f(z) = \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{(2024z^2 + 1)^2}.$$

Сначала рассмотрим решения, использующие пределы. В случае а) представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \varphi(z)g(z), \varphi(z) = \frac{1}{(z^2 + 2024)^2}, g(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}},$$

где функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке $z_1 = 0$ и $\varphi(0) = \frac{1}{2024^2} \neq 0$. Далее рассмотрим предел $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Для того, чтобы доказать, что предел не существует, надо указать два пути стремления z к нулю, вдоль которых предел примет различные значения. Будем стремиться к нулю по оси Ox слева и справа. Получим

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Следовательно, точка $z_1 = 0$ является существенно особой.

В случае b) $g(z) = z^2 e^{\frac{1}{z^2}}$ и

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Поэтому надо выбирать другой второй путь приближения к нулю. Будем стремиться к нулю по оси Oy , полагая $z = iy$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (iy)^2 e^{\frac{1}{(iy)^2}} = -\lim_{y \rightarrow 0} y^2 e^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Получили разные значения пределов. Следовательно, точка $z_1 = 0$ является существенно особой.

В случае с) также полезно рассмотреть решение с использованием пределов, так как функция $\sin z$ в комплексной области приобретает удивительные свойства, в частности, она перестает быть ограниченной. Возможно, что кто-нибудь из студентов делает ошибку, посчитав, что $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \sin \frac{1}{z} = 0$.

При стремлении к нулю по оси Ox получим ожидаемый результат в силу ограниченности функции $\sin x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Пусть теперь z стремится к нулю по оси Oy , $z = iy$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (iy)^2 \sin \frac{1}{iy} = \lim_{y \rightarrow 0} y^2 \operatorname{sh} \frac{1}{y} = \infty.$$

Следовательно, точка $z_1 = 0$ является существенно особой.

Те же результаты можно было получить, разложив функции в ряды Лорана, используя стандартное разложение для экспоненты и синуса. Очевидно, что в приводимых ниже разложениях содержится бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z}} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-2}}, \\ z^2 e^{\frac{1}{z^2}} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n-2}}, \quad z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n-2}}, \\ z^2 \sin \frac{1}{z} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}}. \end{aligned}$$

3. Бесконечно удаленная точка.

Бесконечно удаленная точка считается особой по определению. Характер бесконечно удаленной особой точки определяется по виду предела $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, как и в случае конечных особых точек. Следует обратить внимание на теорему о виде ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, так как правильная и главная части в нем меняются местами. Основное правило исследования характера бесконечно удаленной особой точки функции $f(z)$ рекомендует сделать замену $z = \frac{1}{w}$ и свести задачу к исследованию функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$ в окрестности точки $w = 0$. Обоснованием этого правила является равенство пределов

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{w \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{w}\right).$$

С учетом такого подхода исследование бесконечно удаленной особой точки не будет отличаться от исследования конечных особых точек.

Например, точка $z = \infty$ является существенно особой точкой функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 + 5)^2}$$

так как для функции

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\sin \frac{1}{w}}{\left(\frac{1}{w^2} + 5\right)^2} = \frac{w^4 \sin \frac{1}{w}}{(1 + 5w^2)^2}$$

точка $w = 0$ является существенно особой.

Для функции $f(z) = \frac{1}{(z^5 + 2024)^2}$

бесконечно удаленная особая точка будет нулем десятого порядка, так как после замены $z = \frac{1}{w}$:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{w^5} + 2024\right)^2} = \frac{w^{10}}{(1 + 2024w^5)^2} = w^{10}\varphi(w), \varphi(w) = \frac{1}{(1 + 2024w^5)^2}, \varphi(0) \neq 0.$$

Заключение

В статье представлена методика преподавания темы «Особые точки функций комплексного переменного». Данную методику предлагается использовать в случае, когда число учебных часов, выделенных на изучение темы, ограничено. Рассмотрены основные методы определения характера особых точек, включая бесконечно удаленную точку. Приведен набор задач с решениями, который может быть использован при проведении семинара для студентов технических университетов. На занятии при изучении новой темы закрепляются знания по пройденным разделам (свойства функций комплексного переменного, разложение функций в ряды Тейлора и Лорана) и студенты подготавливаются к изучению теории вычетов и ее приложений.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. - 4-е изд., испр. и дополн. - М.: «Наука», 1978. - 416 с.
2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч.1. - 6-е изд., стереотип. - М.: URSS, 2020. - 344 с.
3. Львовский С.М. Лекции по комплексному анализу - 2-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МЦНМО, 2009. - 136 с.
4. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов - М.: Изд-во МГТУ, 2000. - 520 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями. - 7-е изд., стереотип. - М.: URSS. 2017. 206 с.
6. Игнатъев А.А., Е. М. Самойлова Е.М., Игнатъев С.А. Применение теории вычетов при построении при построении аналитической модели автокорреляционной функции виброакустических колебаний в динамической системе станка. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. - 2017. - № 1 (41). - С. 138-151. DOI 10.21685/2072-3059-2017- 1-12
7. Морозова В.Д. Указ. соч.
8. Там же.

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

Nina G. Khorkova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

ninakhorkova@bmstu.ru

Some methodological aspects of teaching the topic "Singular points of functions of a complex variable"

Abstract. The module "Theory of Functions of a Complex Variable" is included in the educational standards for most specialties at technical universities. The purpose of the article is to discuss the methodology for teaching the topic "Singular points of functions of a complex variable" under conditions of a limited number of allocated teaching hours. Methods for determining the nature of singular points of functions of a complex variable, including the singular point at infinity, are considered. Examples of problem solving are discussed. The article will be useful to students and teachers of technical universities.

Keywords: analytic function, isolated singular point, pole, essentially singular point, singular point at infinity.

МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация

Использование квадрокоптеров как важных объектов управления в процессе обучения бакалавров и магистров математической теории управления является актуальной задачей. Ключевую роль в процессе преподавания является вывод математической модели движения аппарата. В работе рассматривается методика вывода уравнений движения квадрокоптера в пространстве как твердого тела. Записаны кинематические соотношения для линейных скоростей поступательного движения центра масс и угловых скоростей вращения корпуса аппарата вокруг центра масс. Осуществлен вывод уравнений динамики поступательного и вращательного движения корпуса аппарата.

Ключевые слова

теория управления, квадрокоптер, моделирование движения механических систем, динамика твердого тела, кинематика твердого тела

АВТОРЫ

Голубев Алексей Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v-algolu@hotmail.com

Уткина Надежда Вениаминовна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
utkina-nv@yandex.ru

Введение

Моделирование и управление движением различных беспилотных летательных аппаратов мульти-роторного типа представляет собой одну из популярных тем исследований последних десятилетий, см. например, работы [1,2]. Основой для исследования движения и синтеза алгоритмов автоматического управления в случае аппаратов мульти-роторного типа является математическая модель движения аппарата с четырьмя несущими винтами - квадрокоптера. Уравнения движения квадрокоптера как твердого тела рассматривались, например, в работах [3-5]. Однако, как правило, в публикациях вывод уравнений движений приводится не полностью. В настоящей работе рассмотрена методика преподавания вывода кинематических соотношений для линейных скоростей поступательного движения центра масс и угловых скоростей вращения корпуса аппарата вокруг центра масс, а также вывода уравнений динамики поступательного и вращательного движения корпуса аппарата.

Методология и результаты исследования

Методика преподавания кинематики движения аппарата

Для описания движения аппарата используются две системы координат: инерциальная земная система координат $Oxyz$ и неинерциальная система координат $O_Bx_By_Bz_B$, жестко связанная с корпусом аппарата. Начало O_B неинерциальной системы координат выбирается совпадающим с центром тяжести корпуса аппарата, а направления осей O_Bx_B , O_By_B и O_Bz_B фиксируются вдоль главных осей инерции корпуса, см. Рис. 1.

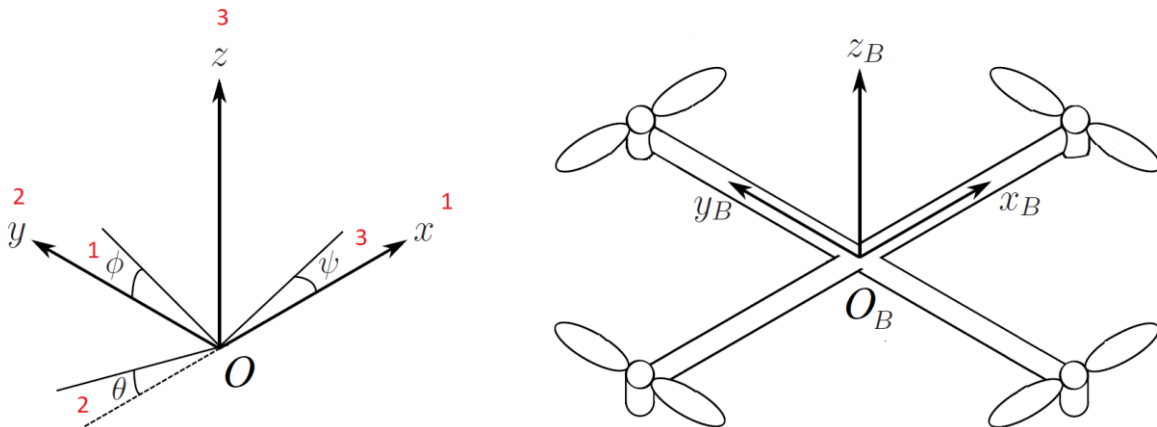


Рис. 1. Используемые системы координат.

Поступательное движение аппарата описывается тремя координатами $r = (x, y, z)^T$ точки O_B в инерциальной системе координат $Oxyz$. Вращательное движение корпуса аппарата задается при помощи угловых координат $\eta = (\phi, \theta, \psi)^T$ поворота связанной системы координат $O_Bx_By_Bz_B$ относительно инерциальной системы координат $Oxyz$, где ϕ - угол крена, θ - угол тангажа, ψ - угол рысканья.

Матрица перехода из инерциальной системы координат $Oxyz$ в неинерциальную систему координат $O_Bx_By_Bz_B$ имеет вид

$$R(\eta) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Координаты $\dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ и $v_B = (v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz})^T$ вектора линейной скорости точки O_B в инерциальной и неинерциальной системах координат, соответственно, связаны соотношениями

$$\dot{r} = R(\eta)v_B$$

и

$$v_B = R^{-1}(\eta)\dot{r} = R^T(\eta)\dot{r}.$$

Получим соотношения для пересчета угловых скоростей вращения корпуса аппарата вокруг осей неинерциальной системы координат $O_Bx_By_Bz_B$ в производные по времени угловых координат η . Пусть $X_B = (x_B, y_B, z_B)^T$ - координаты произвольного постоянного вектора в системе координат $O_Bx_By_Bz_B$. Тогда для произвольного фиксированного закона вращения $\phi = \phi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\psi = \psi(t)$, $t \geq 0$, системы координат

$O_B x_B y_B z_B$ относительно $Oxyz$ справедлива следующая формула пересчета координат X_B вектора в его координаты $X = (x, y, z)^T$ в системе координат $Oxyz$:

$$X(t) = R(t)X_B,$$

причем

$$\dot{X}(t) = \dot{R}(t)X_B = \dot{R}(t)R^{-1}(t)X(t).$$

Заметим, что матрица $\dot{R}(t)R^{-1}(t)$ является кососимметрической при всех $t \geq 0$, так как в силу соотношения $R(t)R^T(t) = E$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} (\dot{R}(t)R^{-1}(t))^T + \dot{R}(t)R^{-1}(t) &= (\dot{R}(t)R^T(t))^T + \dot{R}(t)R^T(t) = \\ &= R(t)\dot{R}^T(t) + \dot{R}(t)R^T(t) = \overbrace{R(t)\dot{R}^T(t) + \dot{R}(t)R^T(t)} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\dot{R}(t)R^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -d(t) & c(t) \\ d(t) & 0 & -a(t) \\ -c(t) & a(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{X}(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t)X(t) = N(t) \times X(t), \quad N(t) = (a(t), c(t), d(t))^T,$$

где $a(t) = w_x$, $c(t) = w_y$, $d(t) = w_z$, $w = (w_x, w_y, w_z)^T$ - вектор мгновенной угловой скорости вращения в системе координат $Oxyz$. Далее, для удобства рассуждений не будем указывать явную зависимость соответствующих величин от переменной t .

Отметим, что

$$\begin{aligned} \dot{R}R^{-1} &= (\dot{R}_\psi R_\theta R_\phi + R_\psi \dot{R}_\theta R_\phi + R_\psi R_\theta \dot{R}_\phi)R_\phi^T R_\theta^T R_\psi^T = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi} & \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi \\ \dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta & 0 & \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi & \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \psi & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \dot{R}R^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi} & \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi \\ \dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta & 0 & \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi & \dot{\phi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \psi & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Наконец, для координат вектора $w_B = (w_{xB}, w_{yB}, w_{zB})^T$ угловых скоростей вращения корпуса аппарата вокруг осей неинерциальной системы координат $O_B x_B y_B z_B$ получим

$$\begin{aligned} w_B = \begin{pmatrix} w_{xB} \\ w_{yB} \\ w_{zB} \end{pmatrix} &= R^{-1} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} \phi \cos \psi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi \\ \dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда производные по времени угловых координат η запишутся следующим образом:

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{xB} \\ w_{yB} \\ w_{zB} \end{pmatrix}.$$

Методика вывода общих уравнения динамики аппарата

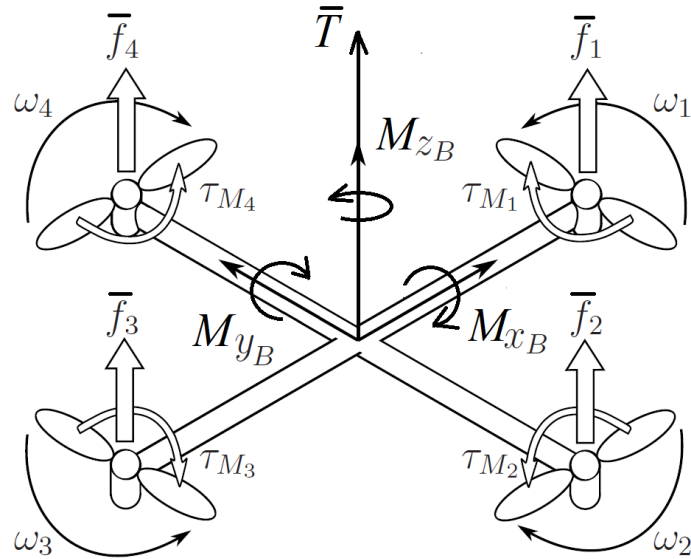


Рис. 2. Силы и моменты, действующие на аппарат.

Аэродинамическая подъемная сила, создаваемая i -м винтом аппарата, имеет вид

$$f_i = k\omega_i^2, \quad i = \overline{1,4},$$

где k - положительная постоянная, ω_i - угловая скорость вращения i -го винта, удовлетворяющая одному из соотношений

$$I_m \dot{\omega}_{1,3} = -b\omega_{1,3}^2 + \tau_{M_{1,3}},$$

$$-I_m \dot{\omega}_{2,4} = b\omega_{2,4}^2 - \tau_{M_{2,4}}.$$

Здесь I_m - момент инерции вращения винта, b - коэффициент аэродинамического сопротивления вращению винта, принимаемые одинаковыми для всех винтов, τ_{M_i} - момент от вращения соответствующего винта, действующий на корпус аппарата, взятый с противоположным знаком, $i = \overline{1,4}$.

Суммарная аэродинамическая подъемная сила, действующая на корпус аппарата, см. Рис. 2, запишется как

$$T = \sum_{i=1}^4 f_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2.$$

Положим $I_m \approx 0$. Тогда управляющие моменты вокруг соответствующих осей $O_B x_B$, $O_B y_B$ и $O_B z_B$ связанной системы координат $O_B x_B y_B z_B$ вычисляются следующим образом:

$$M_{xB} = lk(\omega_4^2 - \omega_2^2), \quad M_{yB} = lk(\omega_3^2 - \omega_1^2),$$

$$M_{zB} = \tau_{M_2} + \tau_{M_4} - \tau_{M_1} - \tau_{M_3} = b(\omega_2^2 + \omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_3^2),$$

где l - расстояние от i -го винта до центра масс аппарата, принимаемое одинаковым для всех винтов.

В векторном виде связь между подъемной силой T , моментами M_{xB} , M_{yB} , M_{zB} и угловыми скоростями ω_i , $i = \overline{1,4}$, вращения винтов аппарата имеет вид

$$\begin{pmatrix} T \\ M_{xB} \\ M_{yB} \\ M_{zB} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -l & 0 & l \\ -l & 0 & l & 0 \\ -b/k & b/k & -b/k & b/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix},$$

где соответствующая матрица является невырожденной.

Второй закон Ньютона для поступательного движения центра масс корпуса аппарата в инерциальной системе координат $Oxyz$ примет вид

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения поступательного движения центра масс корпуса аппарата запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{T}{m} \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Для записи уравнений вращательного движения корпуса аппарата вокруг центра масс заметим, что, так как направления осей O_Bx_B , O_By_B и O_Bz_B связанной системы координат $O_Bx_By_Bz_B$ фиксированы вдоль главных осей инерции корпуса, то тензор инерции вращения имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix},$$

причем в силу геометрии корпуса аппарата справедливо равенство $I_{yy} = I_{xx}$.

Уравнения вращательного движения корпуса аппарата вокруг центра масс в неинерциальной системе координат $O_Bx_By_Bz_B$ имеют вид

$$I \dot{\omega}_B + \omega_B \times I \omega_B + \Gamma = M_B,$$

где $M_B = (M_{xB}, M_{yB}, M_{zB})^T$, $\Gamma = (\sum_{i=1}^4 I_m \bar{\omega}_i \times \bar{\omega}_{yB}, \sum_{i=1}^4 I_m \bar{\omega}_i \times \bar{\omega}_{xB}, 0)^T$ - действующие на корпус аппарата гироскопические моменты, связанные с вращением винтов.

В покомпонентной форме уравнения вращательного движения аппарата запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{xx} \dot{\omega}_{xB} &= (I_{yy} - I_{zz}) \omega_{yB} \omega_{zB} - I_m \omega_{yB} \omega_{\Gamma} + M_{xB}, \\ I_{yy} \dot{\omega}_{yB} &= (I_{zz} - I_{xx}) \omega_{zB} \omega_{xB} + I_m \omega_{xB} \omega_{\Gamma} + M_{yB}, \\ I_{zz} \dot{\omega}_{zB} &= (I_{xx} - I_{yy}) \omega_{xB} \omega_{yB} + M_{zB}, \end{aligned}$$

где $\omega_{\Gamma} = \omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4$.

В итоге, математическая модель пространственного движения аппарата как твердого тела имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{T}{m} \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{xB} \\ \omega_{yB} \\ \omega_{zB} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_{xB} \\ \dot{\omega}_{yB} \\ \dot{\omega}_{zB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \omega_{yB} \omega_{zB} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \omega_{zB} \omega_{xB} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \omega_{xB} \omega_{yB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{I_m}{I_{xx}} \omega_{yB} \omega_{\Gamma} \\ \frac{I_m}{I_{yy}} \omega_{xB} \omega_{\Gamma} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{M_{xB}}{I_{xx}} \\ \frac{M_{yB}}{I_{yy}} \\ \frac{M_{zB}}{I_{zz}} \end{pmatrix}.$$

Далее будем полагать, что $I_m \approx 0$. Для удобства решения задач управления движением аппарата представим уравнения движения следующим образом:

$$\begin{aligned} m \ddot{\xi} &= T \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \end{pmatrix}, \\ m \ddot{z} &= -mg + T \cos \phi \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= C \omega_B, \\ \dot{\omega}_B &= I^{-1}(M_B - \omega_B \times I \omega_B), \end{aligned}$$

где $\xi = (x, y)^T$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Заключение

В работе рассмотрена методика преподавания вывода нелинейной математической модели пространственного движения квадрокоптера как твердого тела. Получены кинематические соотношения для линейных скоростей поступательного движения центра масс корпуса аппарата и угловых скоростей вращения корпуса аппарата вокруг центра масс. Выписаны уравнения динамики поступательного и вращательного движения корпуса аппарата. Полученные результаты могут быть использованы в процессе обучения бакалавров и магистров математической теории управления.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Glazkov T.V., Golubev A.E. Using Simulink support package for Parrot Minidrones in nonlinear control education // AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2195. P. 020007-1-020007-7.
2. Golubev A.E., Glazkov T.V. Nonlinear quadrotor control based on Simulink Support Package for Parrot Minidrones // CEUR Workshop Proceedings. 2020. V. 2783. P. 113-127.
3. Luukkonen T. Modelling and control of quadcopter. 2011. https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf
4. De Lellis Costa de Oliveira M. Modeling, identification and control of a quadrotor aircraft. 2011. doi: 10.13140/RG.2.1.1344.2409.
5. Elkholy H., Habib M. K. Dynamic modeling and control techniques for a quadrotor. In M. Habib (Ed.), Handbook of Research on Advancements in Robotics and Mechatronics. IGI Global. 2015. P. 408-454.

Alexey E. Golubev,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

v-algolu@hotmail.com

Nadezhda V. Utkina,

Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

utkina-nv@yandex.ru

Methodology for modeling the spatial motion of a quadcopter as a rigid body for teaching mathematical control theory

Abstract. The use of quadcopters as important control objects in the process of teaching bachelors and masters of mathematical control theory is an important task. A key role in the teaching process plays the derivation of a mathematical model of the apparatus motion. The current paper discusses a method for deriving the equations of motion of a quadcopter in space as a rigid body. Kinematic relationships are written for the linear velocities of the translational motion of the center of mass and the angular velocities of rotation of the apparatus body around the center of mass. The equations for the dynamics of translational and rotational motion of the apparatus body have been derived.

Keywords: control theory, quadrotor, dynamics, rigid body, modeling methodology.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

Аннотация

Актуальность темы ясна из того внимания, которое уделяют вопросу методики преподавания темы «Касательные к кривым второго порядка» авторы популярных учебников; в некоторых случаях рассмотрение этих вопросов даже в стандартных учебниках носит дискуссионный характер. В работе излагается методика преподавания перечисленных выше тем в условиях жёстких временных рамок втузовского курса высшей математики - в этом состоит одна из целей работы. Другой целью является изложение оригинального подхода к преподаванию этой темы. Результатом работы является получение приемлемого (в смысле времени и требований программы) способа преподавания указанных вопросов в реальных условиях; кроме того, предложен нетрадиционный подход к изложению данной темы, который можно использовать в порядке эксперимента для более подготовленного контингента учащихся.

Ключевые слова

параметрически заданные кривые, касательная, кривые второго порядка

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.obuhov@outlook.com

Введение

Для рассмотрения темы «Касательные к кривым второго порядка» следует уточнить понятие плоской кривой. Осуществить это в рамках втузовского курса математики не представляется возможным. Поэтому мы ограничиваемся лишь перечислением различных способов задания таких кривых. При рассмотрении касательных к кривым второго порядка мы предлагаем два существенно различных подхода к определению этого понятия. Первый подход к определению касательной к кривым второго порядка основан на традиционном для втузов определении её как "предельного положения секущей, для которого требуется введение полного определения понятия кривой не предусмотренного программой. Другой подход основан на очевидном определении касательной к окружности в данной её точке. Это определение распространяется на определение касательных к кривым второго порядка. Доказывается эквивалентность двух определений касательных к кривым второго порядка. Приведены формулы для касательных к кривым второго порядка, заданных различными способами. На этой основе предлагается методика преподавания данной темы в технических вузах.

Методология и результаты исследования

1. Понятие касательной

Рассмотрим плоскую кривую γ и точку M на этой кривой. Возьмём также другую точку $M_1 \in \gamma$ и проведём секущую MM_1 . Если точка M_1 , оставаясь на кривой γ , стремится к M , то может существовать прямая T , проходящая через точку M , к которой стремится секущая MM_1 при указанном предельном процессе. Такая прямая (если она существует) называется касательной к кривой γ в точке M . Для облегчения запоминания этого определения часто предлагается такая формулировка: касательной к кривой γ в точке $M \in \gamma$ называется предельное положение секущей MM_1 , когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к совпадению с M , см. например [1, с. 142]. Недостатком этой формулировки является то, что под “предельным положением секущей” понимается некоторая прямая (а именно касательная), хотя ясно, что “предельное положение” и “прямая” не одно и то же. В [2, с. 164, замечание к определению 4] мы видим пример дополнительных разъяснений к этой формулировке, которые устраняют возможные недоразумения.

В любом случае, однако, определение касательной к кривой должно начинаться с уточнения самого понятия кривой. Дело это непростое и не может быть в полном объёме включено в программу курса высшей математики для технических вузов. Подробное определение кривой, заданной в параметрическом виде, имеется, например, в уже цитированном учебнике [3, с. 255-262]. Здесь же имеется определение касательной. Упомянутое подробное определение прямой, заданной в параметрическом виде, подвергается критике в некоторых учебниках. Например, в [4, с. 242] читаем: “В начале нашего века из двух понятий кривой основным считалось понятие не параметризованной кривой, как якобы более близкое геометрической наглядности. Однако в последние годы всё чаще выдвигаются на первый план параметризованные кривые не только потому, что они концептуально более просты, но главным образом потому, что, как правило, именно они появляются в реальных математических конструкциях. Этим, в частности и объясняется, почему просто “кривыми” раньше назывались не параметризованные кривые, а теперь всё чаще - параметризованные кривые”. Заметим, что здесь “нашим веком” назван двадцатый век. Отметим также, что в приведённом отрывке “параметризованной кривой” называется параметрически заданная кривая (или кривая, заданная в параметрическом виде), а “не параметризованной кривой” - класс эквивалентности таких кривых. Уже эти краткие замечания показывают неприемлемость подробного обсуждения понятия кривой во всей его полноте (не говоря уже о хронической нехватке времени на разного рода подробности). Поэтому при практическом преподавании следует, по-видимому, ограничиться лишь рассмотрением трёх способов задания плоской кривой: кривая γ может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

в неявном виде равенством $f(x, y) = 0$ или в виде графика функции

$$y = y(x), a \leq x \leq b$$

(последний способ часто называют явным).

2. Касательная к кривым второго порядка

В теореме о классификации кривых второго порядка речь идёт о девяти типах таких кривых, из которых для нас представляют интерес лишь три: эллипс, гипербола и парабола. В курсе анализа устанавливается, если кривая γ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

то параметрические уравнения касательной, проходящей через точку (x_0, y_0) ,
 $x_0 = x_0(t_0), y_0 = y_0(t_0), \alpha \leq t_0 \leq \beta$,
 имеют вид:

$$x = x_0 + x'_0(t_0)t, y = y_0 + y'_0(t_0)t, \alpha \leq t \leq \beta.$$

Можно записать и каноническое уравнение этой прямой:

$$\frac{x - x_0}{x'_0(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_0(t_0)}.$$

Напишем параметрические уравнения эллипса:

$$x(t) = a \cos t, y(t) = b \sin t, 0 \leq t_0 \leq 2\pi.$$

Уравнения касательной к эллипсу в точке

$$x_0 = a \cos t_0, y_0 = b \sin t_0, 0 \leq t \leq 2\pi$$

имеет в соответствии с вышесказанным вид:

$$\frac{x - a \cos t_0}{-a \sin t_0} = \frac{y - b \sin t_0}{b \cos t_0},$$

или после очевидных преобразований

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1. \quad (1)$$

В случае гиперболы имеем такие параметрические уравнения:

$$x(t) = a \operatorname{ch} t, y(t) = b \operatorname{sh} t, -\infty \leq t \leq +\infty.$$

Уравнение касательной к гиперболе в точке

$$x_0 = a \operatorname{ch} t_0, y_0 = b \operatorname{sh} t_0, -\infty \leq t_0 \leq +\infty,$$

задаётся таким уравнением:

$$\frac{x - a \operatorname{ch} t_0}{a \operatorname{sh} t_0} = \frac{y - b \operatorname{sh} t_0}{b \operatorname{ch} t_0},$$

или

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

В случае параболы параметрические уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = \frac{t^2}{2p}, y(t) = t, -\infty \leq t \leq +\infty, p > 0.$$

Здесь уравнение касательной к параболе в точке

$$x_0 = \frac{t_0^2}{2p}, y_0 = t_0, -\infty \leq t_0 \leq +\infty, p > 0$$

запишется в виде:

$$\frac{x - \frac{t_0^2}{2p}}{\left(\frac{t_0}{p}\right)} = \frac{y - t_0}{1}, \quad (2)$$

или $uy_0 = p(x + x_0)$. Заметим, что скобки в знаменателе левой части равенства (2) поставлены не случайно: деление не обладает свойством ассоциативности (т.е. не всегда $(a : b) : c = a : (b : c)$), и в данном месте можно обратить внимание учащихся на этот факт (а также и на отсутствие ассоциативности и для вычитания, т.е. $(a - b) - c$ в общем случае не равно $a - (b - c)$).

Заметим, что все составленные выше уравнения касательных можно было бы получить и исходя из неявного задания уравнений эллипса, гиперболы и параболы.

Но это целесообразно делать лишь в том случае, когда студенты уже знакомы с правилом дифференцирования неявной функции. Рассмотрим случай эллипса, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b. \quad (3)$$

В данном случае

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, a \geq b,$$

и рассматриваемая кривая задаётся уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Касательная в точке (x_0, y_0) , для которой $F(x_0, y_0) = 0$, имеет уравнение

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Для эллипса имеем

$$F'_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2}, F'_y(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2},$$

и мы получаем уравнение касательной в виде

$$\frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} = 0.$$

Раскроем в полученном равенстве скобки и сократим на 2. В результате получаем равенство

$$\frac{x_0 x - x_0^2}{a^2} + \frac{y_0 y - y_0^2}{b^2} = 0, a \geq b.$$

Преобразуем его к виду

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0.$$

Учитывая равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

получаем

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Таким образом, мы получили такое же уравнение касательной, как в виде (1), при другом способе задания кривой.

Рассмотрим гиперболу, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b.$$

Для гиперболы

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, a \geq b,$$

$$F'_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2}, F'_y(x_0, y_0) = -\frac{2y_0}{b^2}.$$

Подставляя в общее уравнение касательной для неявных функций, полученные соотношения, получаем уравнение касательной для данной гиперболы в виде

$$\frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} = 0.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right) = 0.$$

Учитывая равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

получаем такое же уравнение касательной для данной гиперболы в виде

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

при другом способе её задании. Аналогично можно получить уравнение касательной для параболы при различных способах её задания, имеющей один и тот же вид.

3. Другой подход к определению касательной

В элементарной математике касательной к окружности в данной её точке называется прямая, проходящая через эту точку и не имеющая других общих точек с этой окружностью. При этом часто указывается недостаток данного определения, состоящий в том, что оно не годится для кривых более общего вида и даётся рассмотренное выше определение касательной, которое в дальнейшем никак не используется (см., например [5, с. 409 - 410] или [6, с. 228]). Любопытно, что «школьное» определение касательной можно перенести (для гиперболы и параболы с некоторыми оговорками) и на кривые второго порядка.

Рассмотрим сначала эллипс, заданный уравнением (3). Касательную к эллипсу в точке (x_0, y_0) определим как прямую, проходящую через эту точку и не имеющую других общих точек с эллипсом. Чтобы показать, что это определение эквивалентно данному выше, составим уравнение касательной к эллипсу в смысле нового определения. Для этого рассмотрим касательную к окружности радиуса a с центром в начале координат. Касательная к окружности, как известно, перпендикулярна радиусу, проведённому из центра окружности. Опираясь на это обстоятельство получаем такое уравнение касательной l' к окружности в точке M :

$$x'_0 (x' - x'_0) + y'_0 (y' - y'_0) = 0,$$

или

$$x' x'_0 + y' y'_0 = a^2,$$

где x' и y' – координаты переменной точки касательной.

Применим теперь преобразование сжатия плоскости к оси абсцисс с коэффициентом $\frac{b}{a}$. При этом точка (x', y') данной плоскости переходит в точку

$$(x, y) = \left(x', \frac{by'}{a} \right),$$

а окружность

$$x^2 + y^2 = a^2$$

переходит в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть при этом точка (x'_0, y'_0) отображается в точку (x_0, y_0) . Тогда прямая l' отобразится (в силу взаимной однозначности рассматриваемого преобразования плоскости) в касательную l в смысле нового определения, причём уравнение l

имеет вид

$$x_0 (x - x_0) + \frac{ay_0}{b} \left(\frac{ay}{b} - \frac{ay_0}{b} \right) = 0,$$

или

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Таким образом, мы получили уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) этого эллипса в смысле прежнего определения. Поэтому эквивалентность двух определений касательной к эллипсу легко следует из взаимной однозначности преобразования сжатия и единственности касательной к окружности. Аналогичные «школьные» определения возможны также и для гиперболы и параболы, но здесь нужны дополнительные ограничения: для гиперболы касательная должна не только иметь одну общую точку с гиперболой, но и не быть параллельной ни одной из её асимптот; для параболы касательная не должна быть параллельной оси параболы.

Рассмотрим вопрос о касательной к гиперболе. Для упрощения вычислений предположим, что уравнение гиперболы имеет вид $xy = 1$. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на этой гиперболе, и пусть $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$. Касательная к гиперболе в точке $M(x_0, y_0)$ в смысле нового определения не может проходить через начало координат и быть параллельной какой-либо из координатных осей (которые являются для данной гиперболы асимптотами). Поэтому уравнению касательной может быть записано «в отрезках»:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Поскольку касательная имеет лишь одну точку пересечения с гиперболой, то система

$$\begin{cases} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \\ xy = 1, \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Т.к. $y = 1/x$, то для определения x имеем уравнение $qx^2 - pqx + p = 0$, дискриминант которого имеет вид $D = p^2q^2 - 4pq$, и единственность решения имеет место лишь при $pq = 4$. При этом $x = p/2$, т.е. $p = 2x_0$, $q = 2y_0$. Таким образом, уравнение касательной (в смысле нового определения) есть

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1, \text{ или } xy_0 + yx_0 = 2.$$

Такое же уравнение касательной получается и при применении обычного определения. Чтобы убедиться, что и в общем случае два определения касательной эквивалентны, надо выполнить преобразования плоскости, при которых уравнение $xy = 1$ преобразуется к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для этого надо сначала осуществить поворот координатных осей на 45° по часовой стрелке, а затем преобразования сжатия (или растяжения). Уравнение гиперболы приобретёт канонический вид, и соответствующим образом изменится и уравнение касательной (в новом и традиционном понимании), что и убедит нас в эквивалентности двух определений также и в общем случае.

Проверим, что последнее определение касательной к параболе соответствует прежнему (т.е. определению через предельное положение секущей). Запишем каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$. Касательной к параболе в её вершине является ось ординат—как в смысле традиционного так и в смысле нового определений. Доказывать тут нечего. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на параболе и не является её вершиной. Прямая, удовлетворяющая требованиям определения касательной в новом смысле, должна иметь уравнение $y = y_0 + k(x - x_0)$, причём $k \neq 0$, так как горизонтальная прямая, получающаяся при $k = 0$ параллельна оси параболы. Не подходит и вертикальная прямая, так как она пересекает параболу в двух точках. В соответствии с определением касательной (в новом смысле) система относительно x и y

$$\begin{cases} y = y_0 + k(x - x_0), \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

должна иметь единственное решение (при этом x_0 и y_0 связаны соотношением $y_0^2 = 2px_0$). Нетрудно проверить, что упомянутая единственность осуществляется при $k = p/y_0$. Подставляя это значение в уравнение $y = y_0 + k(x - x_0)$, получаем, что

уравнение касательной в новом смысле имеет вид $y - y_0 = p(x + x_0)$, т.е. мы возвращаемся к полученному выше уравнению касательной, понимаемой в традиционном смысле.

Заметим, что материал последнего раздела можно рекомендовать для фактического преподавания лишь в порядке эксперимента.

Заключение

Подводя итоги, можно порекомендовать изложение рассматриваемой темы в следующем порядке. Сначала рассмотреть три способа задания плоской кривой, затем выписать формулу для уравнения касательной к кривой, заданной параметрическими уравнениями. Если студенты знакомы с правилом дифференцирования неявных функций, то эти же уравнения можно получить проще. Использование «школьного» определения касательной (приспособленного для случая эллипса, гиперболы и параболы) можно порекомендовать лишь в экспериментальных целях.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. 1. М.: Издательство “ Наука “, 1964, 463 с.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов. – М.: Высшая школа, 1981, т. 1- 687 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Указ. Соч.
4. Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. Семестр II. М.: «Наука», 1979, 312с.:с илл..
5. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. Элементарная математика. М.: «Наука», 1976, 592 с.
6. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: «Наука», 1979, 336 с.

Pavel L. Ivankov,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ivankovpl@mail.ru

Victor P. Obuhov,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

v.obuhov@outlook.com

Method of teaching of the theme “Tangents to the quadratic curves”

Abstract. In this paper we consider methods of teaching of the theme “Tangents to the curves of the second order”. We state forth also an auxiliary material concerning the definition and the way of representing the curves of general form. The topicality of the theme is clear from the attention which the authors of popular textbooks pay to it, in some cases even in standard textbooks consideration of these questions is of debatable character. In this paper we propose the method of teaching of the enumerated themes in conditions of hard time limits of the college course of higher mathematics. This is the first aim of our work. The second one consists of the consideration of original approach to the teaching of this theme. As a result of our work we achieve an exposition (in the sense of time and requirements of the program) of the indicated questions for real teaching. We propose besides an original approach to the exposition of the theme which can be made use of as an experiment for more prepared contingent of students.

Keywords: parametrically represented curve, tangent, quadratic curve.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА»

Аннотация

Тему «Формула Тейлора» начинают изучать в первом семестре, она входит во все курсы математического анализа для студентов негуманитарных специальностей. Успешное освоение этой темы необходимо для изучения ряда других математических дисциплин. Цель работы - показать некоторые методические аспекты изложения данной темы. Результат исследования может служить основой для подготовки занятий и представлять интерес для студентов и преподавателей.

Ключевые слова

многочлен Тейлора, коэффициенты Тейлора, остаточный член в форме Пеано, остаточный член в форме Лагранжа, формула Маклорена

АВТОРЫ

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
anna.v.kosova@mail.ru

Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
talaskovy@mail.ru

Введение

В статье обобщен многолетний опыт преподавания в техническом университете. На ряде примеров показаны основные моменты, на которые нужно обратить внимание при изучении темы «Формула Тейлора». Задачи тщательно подобраны. В некоторых задачах демонстрируются различные подходы к решению. Статья будет полезна преподавателям, которые смогут использовать ее при подготовке и проведении занятий, а также может быть использована студентами при изучении данной темы.

Методология и результаты исследования

Формула Тейлора является одной из жемчужин математического анализа и широко используется как в теоретических исследованиях, так и в вычислительной практике. Она позволяет функцию, заданную сложным аналитическим выражением, заменить удобным для анализа многочленом в окрестности некоторой точки. При этом разность между значением функции и многочленом Тейлора является бесконечно малой более высокого порядка, чем члены многочлена.

Качественное изложение этой темы на занятиях крайне важно в связи с широтой применения этой формулы во всех разделах высшей математики, и необходимо для дальнейшего обучения студентов в высших учебных заведениях.

Для успешного овладения этим материалом студентам необходимо уметь вычислять пределы (знать правила раскрытия неопределенностей), знать определение эквивалентных функций, выделять главные части бесконечно малых функций, уметь находить производные элементарных функций, знать свойства показательных и логарифмических функций, а также знать основные тригонометрические формулы и свойства тригонометрических функций.

Начинать занятие необходимо с изложения теории по данной теме [1].

Рассмотрим функцию $f(x)$, n раз дифференцируемую в точке a . Первоначально появилась задача о приближении функции $f(x)$, в окрестности точки $x = a$ многочленом вида $P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n$, удовлетворяющим условиям:

$$\begin{cases} f(a) = P_n(a) \\ f'(a) = P'_n(a) \\ f''(a) = P''_n(a) \\ \dots \\ f^{(n)}(a) = P^{(n)}_n(a) \end{cases} \quad (1)$$

Используя эти условия (1), несложно определить коэффициенты c_i . Тогда получим:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Следует обратить внимание студентов на то, что условия (1) с геометрической точки зрения означают, что графики функции и многочлена проходят через одну точку $(a, f(a))$, имеют общую касательную (условие равенства первых производных), имеют одинаковое направление выпуклости графиков (равенство вторых производных). Равенство остальных производных дает максимальное приближение графиков функции и многочлена.

Можно записать это приближенное представление функции в виде многочлена по степеням $(x-a)$ следующим образом:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Погрешность этого приближенного представления, т.е. разность $f(x) - P_n(x)$, обозначим $R_n(x)$. Тогда получим формулу

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x),$$

(2) называемую формулой Тейлора. Многочлен $P_n(x)$ называется многочленом Тейлора, а $c_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ - коэффициенты разложения, которые находятся единственным образом.

При этом погрешность $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $(x-a)^n$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке a , то при $x \rightarrow a$ $R_n(x) = o((x-a)^n)$, т.е. является бесконечно малой более высоко порядка по сравнению с $(x-a)^n$.

Подставляя данный остаточный член в формулу (2), получим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + o((x-a)^n).$$

Остаточный член в форме Пеано позволяет качественно оценить погрешность приближенной формулы и чаще всего используется при разложении функций по формуле Тейлора. Однако, в некоторых задачах на приближенные вычисления, требуется иметь возможность количественно оценить погрешность приближенной формулы. В этом случае применяется формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в окрестности точки a , то для любого x из этой окрестности ($x \neq a$) найдется такая точка c ($c: c = a + \Theta(x-a)$, где $0 < \Theta < 1$), что справедлива формула:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \text{ Здесь } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} -$$

остаточный член в форме Лагранжа. Он записывается также как и любой член формулы Тейлора с той разницей, что производная вычисляется не в точке a , а в точке c , лежащей между a и x .

Следует отметить, что частным случаем формулы Тейлора является формула Маклорена, для которой $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^n).$$

(3)

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c = \Theta x, \quad 0 < \Theta < 1.$$

(4)

Формулы (3), (4) отличаются тем, что остаточный член в них записан в форме Пеано и в форме Лагранжа соответственно.

После изложения теории можно переходить к решению задач. Первый блок задач должен быть посвящен непосредственному нахождению формул Тейлора и Маклорена, используя вычисление производных функций в точке $x = a$.

Пример 1. ([2]) Разложить по степеням $(x-1)$ многочлен $f(x) = 2x^4 - x^2 + x + 1$.

Решение. Выпишем формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x)$$

Поскольку $x - a = x - 1$, то $a = 1$.

Заметим, что если в задаче не указано, до какой степени делать разложение, то, либо требуется записывать n -й член формулы Тейлора, либо функцию можно разложить без погрешности (остаточный член равен нулю). С другой стороны, если разложение с погрешностью, то в условии должно быть написано, в какой форме необходимо записать остаточный член. В нашем примере все производные, начиная с пятой, будут равны нулю. Таким образом, остаточный член будет равен нулю.

Найдем производные функции:

$$f'(x) = 8x^3 - 2x + 1, \quad f''(x) = 24x^2 - 2, \quad f'''(x) = 48x, \quad f^{IV}(x) = 48.$$

Вычислим значения функции и производных в точке a :

$$f(1) = 3, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 22, \quad f'''(1) = 48, \quad f^{IV}(1) = 48.$$

Подставим найденные значения в формулу:

$$2x^4 - x^2 + x + 1 = 3 + 7(x-1) + \frac{22}{2!}(x-1)^2 + \frac{48}{3!}(x-1)^3 + \frac{48}{4!}(x-1)^4.$$

Упростим коэффициенты:

$$2x^4 - x^2 + x + 1 = 3 + 7(x-1) + 11(x-1)^2 + 8(x-1)^3 + 2(x-1)^4.$$

Важно понимать, что поскольку стоит задача представить многочлен по степеням $(x-1)$, то скобки раскрывать в правой части нельзя! Некоторые студенты раскрывают скобки в правой части, но это можно делать только для проверки.

Пример 2. ([3]). Разложить функцию $f(x) = \ln x$ по степеням $(x-1)$ до $(x-1)^5$ с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Поскольку $x - a = x - 1$, то $a = 1$. Найдем производные функции:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^V(x) = \frac{24}{x^5}.$$

Вычислим значения функции и производных в точке a :

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{IV}(1) = -6, \quad f^V(1) = 24.$$

Запишем многочлен Тейлора:

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \dots + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 = \\ &= \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}(x-1)^5 = \\ &= \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5. \end{aligned}$$

Осталось записать остаточный член в форме Пеано. Для этого предложите студентам воспользоваться следующим правилом: определить степень $(x-1)$ в следующем слагаемом формулы Тейлора; от полученного результата отнимаем единицу; это число является порядком бесконечно малой в остаточном члене. В нашем примере следующее слагаемое будет содержать $(x-1)^6$.

$$\text{Следовательно } R_n(x) = o((x-1)^{6-1}) = o((x-1)^5).$$

Окончательно получаем:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 + o((x-1)^5).$$

После того, как студенты запомнили на примерах саму формулу, стоит выписать разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена [4]. К этим разложениям стоит отнести всего пять. Больше трудно запомнить. Предлагаемые пять наиболее часто употребляемые. Некоторые другие можно получить, зная предлагаемые. Итак:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Обратите внимание студентов на некоторые вещи, которые помогут запомнить формулы:

1. Формула Тейлора дает общее правило выделения главной части бесконечно малой функции; поэтому в каждой формуле можно увидеть таблицу эквивалентных бесконечно малых (выделено рамками в формулах).

2. Функция и ее разложение по формуле Тейлора должны обладать одинаковыми свойствами: нечетный синус содержит в разложении только нечетные степени, а четный косинус - только четные степени.

3. Представление логарифмической функции не содержит факториалов.

4. Для экспоненциальной и степенной функций разложения не имеют чередования знака.

Обсудите со студентами, почему остаточные члены в этих формулах именно такие. Рассмотрим его запись на примере функции $f(x) = \sin x$. Эта функция нечетная, поэтому формула Тейлора содержит только нечетные степени. Последнее слагаемое в формуле $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Следующее слагаемое содержало бы $x^{2(n+1)+1} = x^{2n+3}$. Соответственно остаточный член, согласно нашему правилу, $R_n(x) = o(x^{2n+3-1}) = o(x^{2n+2})$.

Остаточные члены в форме Лагранжа для каждого разложения будут выглядеть так:

$$y = e^x$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$y = \ln(1+x)$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$y = \sin x$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos c}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

$$y = \cos x$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$y = (1+x)^m$$

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)(1+c)^{m-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

где $c = \Theta x$, $0 \leq \Theta \leq 1$.

После этого необходимо показать, как используются эти готовые разложения в задачах. Для этого можно Пример 2 решить с использованием стандартного разложения. Проиллюстрируем это.

$\ln x = \ln(1 + (x - 1)) = \ln(1 + t)$, где $t = x - 1$. При $x \rightarrow 1 \Rightarrow t = x - 1 \rightarrow 0$.

Тогда $\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} + o(x^n)$, $n = 1, 2, \dots$

Сделаем обратную замену

$$\ln(x) = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n} + o(x^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Важный момент, на который обязательно надо обратить внимание студентов: вводимое t обязательно должно стремиться к нулю при $x \rightarrow a$.

Следующий тип задач, которые можно рассмотреть на занятии - это использование стандартных разложений для более сложных функций.

Пример 3. Используя стандартное разложение, представить функцию $f(x) = \log_2(4 - x^3)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Требуется функцию разложить по формуле Маклорена, следовательно по степеням x ($a = 0$). В условии не сказано до какой степени делать разложение, следовательно, необходимо записывать общую формулу для n -го члена. Использование стандартного разложения в этой задаче сложное. Надо и аргумент видоизменить, и перейти к новому основанию логарифма. Сначала займемся аргументом. В стандартном разложении мы имеем $y = \ln(1 + x)$. К такому же виду надо привести и имеющийся аргумент. Чаще всего студенты предлагают такой вариант $4 - x^3 = 1 + (3 - x^3) = 1 + t$, где $t = 3 - x^3$. Но это неприемлемо, поскольку $3 - x^3$ не является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$. Необходимо поступить иначе: $4 - x^3 = 4(1 + (\frac{-x^3}{4})) = 4(1 + t)$, где $t = \frac{-x^3}{4}$. Тогда при $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$. Обратите внимание студентов, что минус мы должны забрать в новую переменную t .

Теперь перейдем к новому основанию:

$$\log_2(4 - x^3) = \frac{\ln(4(1 + (\frac{-x^3}{4})))}{\ln 2} = 2 + \frac{1}{\ln 2} \ln(1 + (\frac{-x^3}{4})) = 2 + \frac{1}{\ln 2} \ln(1 + t), \quad t = \frac{-x^3}{4}.$$

Воспользуемся стандартным разложением:

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} + o(x^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \log_2(4 - x^3) &= 2 + \frac{1}{\ln 2} \left(\left(\frac{-x^3}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-x^3}{4} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{-x^3}{4} \right)^3 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{-x^3}{4} \right)^n \right) + R_n(x) = \\ &= 2 - \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4^2} + \frac{x^9}{3 \cdot 4^3} + \dots + \frac{x^{3n}}{n \cdot 4^n} \right) + R_n(x). \end{aligned}$$

Теперь запишем остаточный член: $R_n(x) = o(x^{3(n+1)-1}) = o(x^{3n+2})$.

Получим окончательный результат:

$$\log_2(4 - x^3) = 2 - \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4^2} + \frac{x^9}{3 \cdot 4^3} + \dots + \frac{x^{3n}}{n \cdot 4^n} \right) + o(x^{3n+2}).$$

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 4. Используя стандартное разложение, представить функцию $f(x) = 2^{x-1}$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Имеем готовое разложение: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Как и в предыдущем примере, нам нужно изменить нашу функцию так, чтобы можно было использовать это разложение.

$$2^{x-1} = \frac{1}{2} 2^x = \frac{1}{2} e^{\ln 2^x} = \frac{1}{2} e^{x \ln 2} = \frac{1}{2} e^t, \quad t = x \ln 2. \quad \text{При } x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0.$$

Воспользуемся стандартным разложением, и вернемся к переменной x :

$$f(x) = 2^{x-1} = \frac{1}{2} \left(1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln 2)^n}{n!} \right) + o(x^n).$$

Остаточный член $R_n(x) = o(x^n)$. Обратите внимание студентов, что в остаточном члене пишем только степень x . Часто студенты пытаются туда подставить и $\ln 2$.

В Примерах 3 и 4 для приведения функции к нужному виду мы пользуемся свойствами логарифмической и показательной функций.

Пример 5. Используя стандартное разложение, представить функцию $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

Решение. Для того чтобы в этой задаче воспользоваться стандартными разложениями, предварительно необходимо воспользоваться формулой синуса суммы:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x).$$

Применим стандартные разложения, и сгруппируем слагаемые по возрастанию степеней:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) + o(x^{2n+1}).$$

Как мы уже сказали, формула Тейлора дает общее правило выделения главной части бесконечно малых функций, поэтому на занятии нужно показать, как применяется эта формула при вычислении пределов [5].

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решение. При решении данной задачи необходимо раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для этого воспользуемся формулой Тейлора.

Студенты всегда задают вопросы: по каким степеням и до какой степени делать разложение. Ответы просты. Поскольку требуется вычислить предел при $x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$), то и разложение надо делать по степеням x (по формуле Маклорена, т.к. $a = 0$). Необходимо выделить главную часть числителя. Но подсказкой, до какой степени записывать разложение, служит степень x знаменателя: будем записывать разложение до четвертой степени.

$$\text{Приступим: } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2), \quad t = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)$$

Числитель примет вид:

$$\begin{aligned} \cos x - e^{-x^2/2} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right) = \\ &= x^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) + o(x^5) = -\frac{x^4}{12} + o(x^5) \end{aligned}$$

Здесь остаточные члены являются подобными, но не равными слагаемыми, поэтому они не уничтожаются. Главная часть числителя равна $-\frac{x^4}{12}$. Именно ее и надо написать вместо числителя под знаком предела согласно теореме о переходе к эквивалентным под знаком предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4/12}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Пример 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

Решение. Снова речь идет о раскрытии неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$. Выделим главную часть числителя, раскладывая его по степеням x ($a=0$). Разложение делаем до третьей степени:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Тогда $e^x \cdot \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Здесь, перемножая многочлены, мы записали слагаемые только до третьей степени. Выделим главную часть числителя:

$$e^x \sin x - x(1+x) = e^x \sin x - x - x^2 = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x - x^2 = \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Главная часть числителя равна $\frac{x^3}{3}$.

$$\text{Окончательно имеем: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Заключение

В работе предложен план занятия по теме «Формула Тейлора», сформулированы основные теоретические сведения, разобраны типовые задачи и приведены примеры, на которые нужно обратить внимание при изложении данной темы.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учебник для студентов университетов и вузов. - М.: Высш. школа, 1981, т. I - 687 с.
 2. Сборник задач по математике для вузов. Ч.1. Под общей редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1993. - 480 с.
 3. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. М.: Наука, 2004. - 496 с.
 4. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. - 408 с.
 5. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. - М.: Наука, 1970. - 400 с.
-

Tatiana A. Laskovaya,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

talaskovy@mail.ru

Anna V. Kosova,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

anna.v.kosova@mail.ru

Methodological aspects of the presentation of the topic "Taylor's Formula"

Abstract. The topic "Taylor's Formula" begins to be studied in the first semester, it is included in all courses of mathematical analysis for students of non-humanitarian specialties. Successful mastering of this topic is necessary for studying a number of other mathematical disciplines. The purpose of the work is to show some methodological aspects of the presentation of this topic. The result of the research can serve as a basis for the preparation of classes and be of interest to students and teachers.

Keywords: Taylor polynomial, Taylor coefficients, residual term in Peano form, residual term in Lagrange form, Maclaurin formula.

ПРОВЕДЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО ЗАНЯТИЯ «ПЕРЦЕПТРОН РОЗЕНБЛАТТА»

Аннотация

В настоящее время искусственные нейронные сети переживают настоящий бум развития, в следствие чего, особенную актуальность приобретает преподавание математических основ данного инструментария, студентам высших технических учебных заведений. Целью данной статьи является желание расширить методические рекомендации для преподавания дисциплин, о которых говорится выше. В работе представлен материал для проведения лекционных занятий по курсам «Нейронные сети» или «Машинное обучение». Перцептрон Розенблатта представляет собой простейшую модель нейрона, с которой необходимо начинать знакомство с нейронными сетями. Несмотря на то, что данная тематика изложена в литературе, ощущается дефицит пособий с наглядным и доступным изложением обоснования правила обучения перцептрона. Статья освещает вопросы изложения понятия перцептрона, его применения, а также формулировки и обоснования алгоритма его обучения.

Ключевые слова

нейронные сети, нейрон, перцептрон Розенблатта, обучение нейронных сетей

АВТОРЫ

Панкратов Владимир Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.a.pankratov@bmstu.ru

Тверская Елена Сергеевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
e_tverskaya@bmstu.ru

Введение

В настоящее время наибольшим интересом у обучающихся пользуются курсы, связанные с искусственным интеллектом. Наличие такого интереса обусловлено многими факторами современной жизни, которые требуют работу с большим количеством данных. Активное развитие, в связи с этим получили *нейронные сети*. Поэтому, естественно, что в учебных планах и программах дисциплин по техническим и естественно-научным специальностям появились курсы по нейронным сетям. Очень важно выработать методику преподавания данной дисциплины для более глубокого освоения учебного материала студентами.

Рассказ о нейронных сетях, по мнению авторов, следует начать с идеи создания нейронной сети, рассказать, как появилась у исследователей мысль работы с такими структурами. Изложение следует начать с того, что с давних времен человек хотел промоделировать работу человеческого мозга, создать его аналог. Мозг человека представляет собой чрезвычайно сложную, нелинейную, самоорганизующуюся структуру. Именно нейроны являются структурными компонентами мозга и именно их ра-

боту человек пытается промоделировать, создав искусственный нейрон. Следует отметить в изложении, что данная задача до настоящего времени так и остается нерешенной.

Для большей наглядности следует привести схемы искусственного и биологического нейронов.

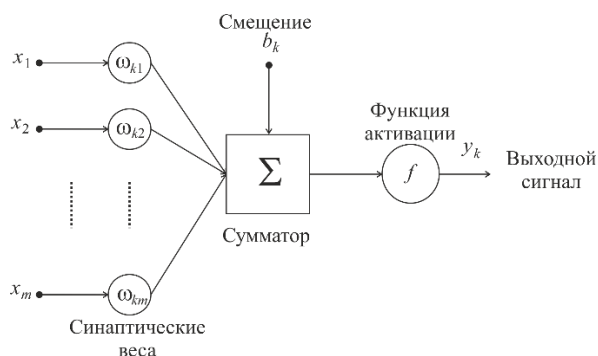


Рис. 1 Схема искусственного нейрона

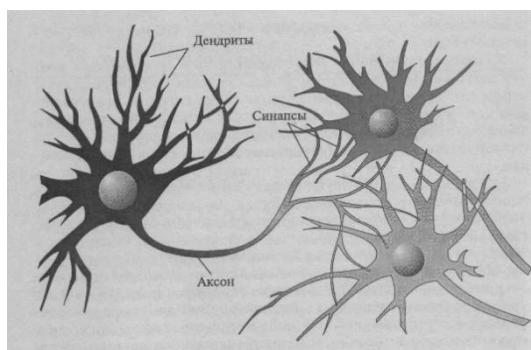


Рис. 2. Схема биологического нейрона

(<https://qb5kirov.ru/foto/specializirovannaya-zona-kontakta-mezhdu-otrostkami-nervnyh-kletok.html>)

Искусственная нейронная сеть, далее нейронная сеть, созданная человеком сходна с мозгом по двум позициям [1]:

1. Информация поступает в нейронную сеть из окружающей среды и используется в процессе обучения.

2. Для накопления информации применяются связи между нейронами.

Далее необходимо провести экскурс в исторические успехи работы искусственного интеллекта при использовании нейронных сетей.

1. Май 1997. Шахматы. Суперкомпьютер IBM Deep Blue вошел в историю как первая машина, сумевшая победить в шахматах гроссмейстера-человека. Чемпион мира Гарри Каспаров сумел выиграть в одной из партий, другая закончилась в ничью, но Deep Blue выиграл дважды и стал победителем поединка.

Через 20 лет Google представил мощную ИИ-систему DeepMind AlphaZero: она научилась шахматам, японским шахматам и го с нуля, причем в каждой дисциплине AlphaZero сумела победить лучшего компьютерного игрока. А компьютеры, по крайней мере - в шахматах, не оставляли людям шансов примерно со времен матча между чемпионом мира Владимиром Крамником и Deep Fritz в 2006 году (2-4).

2. Март 2016. Го. В мае 2017-го, произошел исторический матч между ИИ AlphaGo (Google DeepMind) и чемпионом мира по го Ли Седодем. AlphaGo выиграл со счетом 4-1. Позже этот успех развил "универсальный" игровой ИИ AlphaZero.

3. Январь 2019. Starcraft II. В этом году искусственному интеллекту покорилась одна из самых популярных стратегий реального времени XXI века - игра Starcraft II. В начале года нейросеть Deepmind AlphaStar (Google) легко победила (счет 5-1 или 5-0, смотря как считать) одного из лучших в мире игроков в Starcraft II, поляка Грегоржа Коминча.

4. Июль 2019. Покер. В 2017-м вышли ИИ-система DeepStack (университет Альберты), легко обыгрывающая профессионалов, а также проект Libratus от специалистов из университета Карнеги Меллон, который в 20-дневном марафоне выиграл виртуальные \$1,7 млн. у четырех профессиональных покеристов в матчах один на один.

5. Тот же Карнеги Меллон и Facebook в июле 2019 показали самую совершенную ИИ-систему для покера - Pluribus. Она умеет успешно играть (в том числе с использованием блефа) сразу с пятью оппонентами. Система работает на достаточно недорогом компьютере, а вычислительные ресурсы для обучения Pluribus обошлись всего в \$150: чтобы стать непобедимым, боту понадобилось разыграть триллионы покерных раздач с пятью своими клонами.

Продолжить изучение курса авторы считают необходимым с изучения простейшей нейронной сети с пороговой функцией активации.

Основная цель работы - предложить методику изложения материала по изучению перцептрона Розенблатта и изучить примеры его практического применения.

Методология и результаты исследования

Определение. Перцептроном будем называть векторную функцию векторного аргумента $\vec{y} = 1(u)$, $u = \vec{w}^T \vec{x} + b$, где $1(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$ - функция Хевисайда [2].

Функцию, определяющую выходное значение нейрона, в зависимости от результата взвешенной суммы входов и порогового значения называют функцией активации. Функцией активации перцептрона, очевидно, является функция Хевисайда.

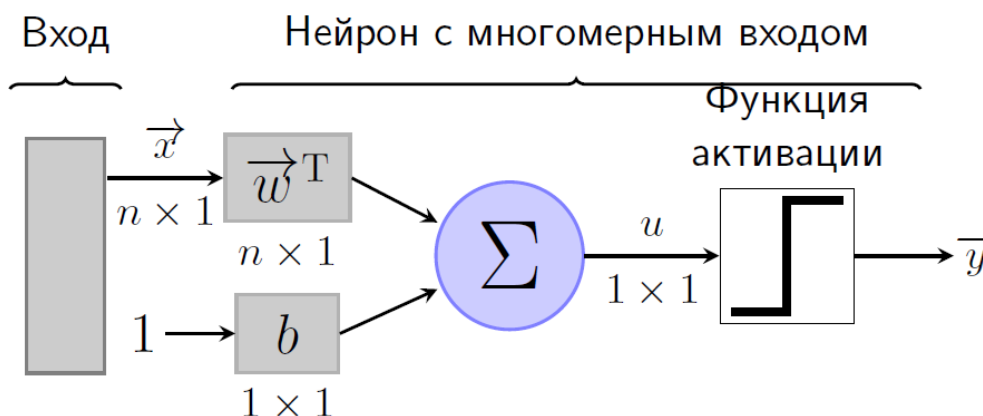


Рис. 3. Блок-схема перцептрона Розенблатта

Обучающая выборка: $S = \{(\vec{x}_1, y_1), (\vec{x}_2, y_2), \dots, (\vec{x}_\ell, y_\ell)\}$, $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \{0, +1\}$, $i = \overline{1, \ell}$ [3].

Веса: $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$, $w_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$.

Смещение: $b \in \mathbb{R}$.

Определение. Под обучением перцептрона будем понимать процесс подбора весов для наилучшего, в некотором смысле, соответствия выходов нейронной сети на объектах выборки \vec{x}_i , с соответствующими метками y_i $i = \overline{1, \ell}$.

Пример 1. Обучение перцептрона Розенблатта корректно вычислять значения логического отрицания [4].

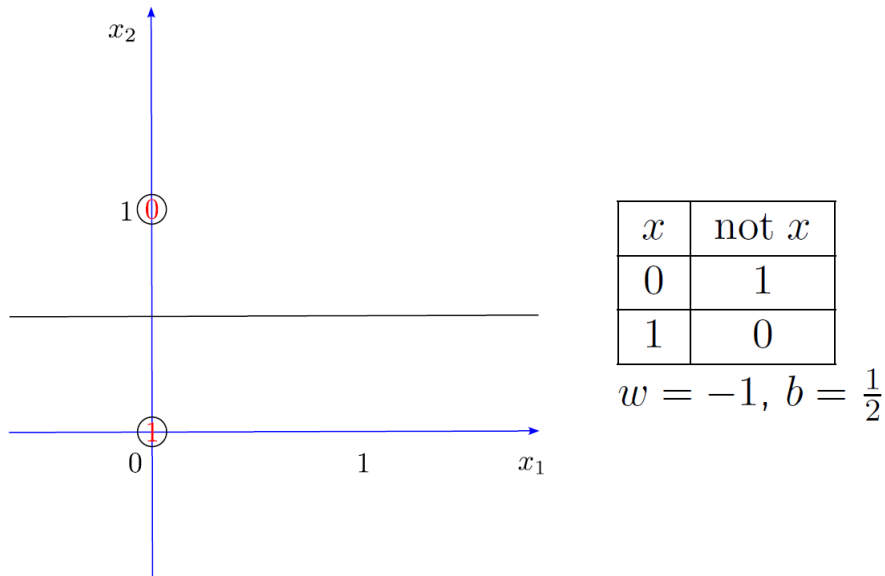


Рис. 4. Граница решения для вычисления логического отрицания.

Для решения данной задачи достаточно выбрать перцептрон со скалярным входом и скалярным выходом: $y = 1(\overline{w^T \vec{x}} + b) = 1(-x + \frac{1}{2})$.

Пример 2. Обучение перцептрона Розенблатта корректно вычислять значения логической конъюнкции.

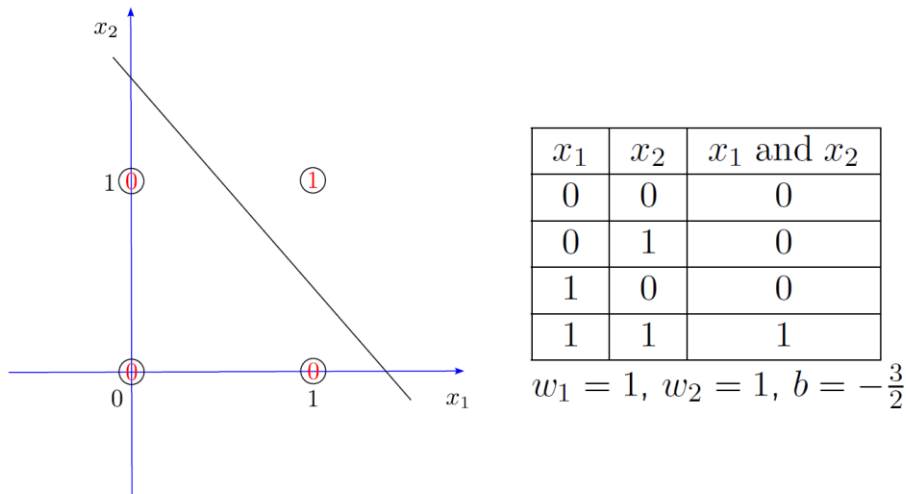


Рис. 5. Граница решения для вычисления конъюнкции.

Для решения данной задачи достаточно выбрать перцептрон с двумерным входом и скалярным выходом: $y = 1(\overline{w^T \vec{x}} + b) = 1(x_1 + x_2 - \frac{3}{2})$.

Пример 3. Обучение перцептрона Розенблатта корректно вычислять значения логической дизъюнкции.

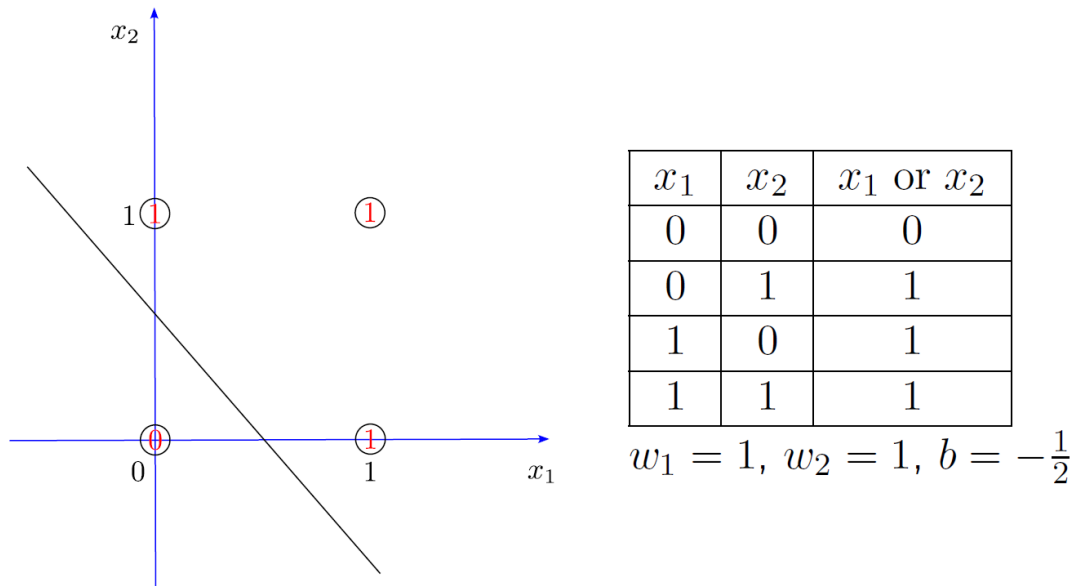


Рис. 6. Граница решения для вычисления дизъюнкции.

Для решения данной задачи достаточно выбрать перцептрон с двумерным входом и скалярным выходом: $y = 1 \left(\overline{w}^T \overline{x} + b \right) = 1 \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2} \right)$.

Обучающее правило. Рекуррентная последовательность весов, вида

$$\overline{w}^{(k)} = \overline{w}^{(k-1)} + e_{k-1} \overline{x}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

– $\overline{w}^{(m)}$ – m -е приближение вектора \overline{w}_1 , $\overline{w}^{(0)}$ – начальное приближение;

– $e_m = y^{(m)} - 1 \left(\overline{w}^{(m)T} \overline{x}^{(m)} \right)$;

– $\left(\overline{x}^{(m)}, y^{(m)} \right) \in S$ при увеличении m последовательно циклически перебирает все примеры в выборке $m = 0, 1, 2, \dots$

Замечание 1. Подразумевается, что каждый пример из выборки S может повторяться произвольное число раз, за счет этого получается бесконечная последовательность $\overline{w}^{(k)}$.

Замечание 2.

$e_m = y^{(m)} - 1 \left(\overline{w}^{(m)T} \overline{x}^{(m)} \right)$, тогда $e_m \in \{-1, 0, +1\}$, следовательно,

– если $e_m = -1$: классификатор отнес $\left(\overline{x}^{(m)}, 0 \right)$ к классу 1 и вектор признаков вычитается из вектора весов;

– если $e_m = 1$: классификатор отнес $\left(\overline{x}^{(m)}, 1 \right)$ к классу 0 и вектор признаков суммируется с вектором весов;

– если $e_m = 0$: $\left(\overline{x}^{(m)}, y^{(m)} \right)$ классифицируется корректно и веса не модифицируются.

Теорема (Сходимость обучающего правила [5]).

Пусть

1. $\exists \overline{w}^*$: $\forall (\overline{x}_i, y_i) \in S$

- a. $\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}_i > \delta > 0$, если $y_i = 1$;
 b. $\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}_i < -\delta < 0$, если $y_i = 0$;
 2. $\forall (\overrightarrow{x}_i, y_i) \in S \exists M > 0: \|\overrightarrow{x}_i\| < M$,

тогда последовательность $\overrightarrow{w}^{(k)}$ сходится.

Доказательство. Идея доказательства заключается в нахождении верхней и нижней границ нормы вектора весов. Не ограничивая общности, будем считать, что $\overrightarrow{w}^{(0)} = \vec{0}$, тогда, после k итераций

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w}^{(k)} &= e_0 \overrightarrow{x}^{(0)} + e_1 \overrightarrow{x}^{(1)} + \dots + e_{k-1} \overrightarrow{x}^{(k-1)} \\ \overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{w}^{(k)} &= e_0 \overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(0)} + e_1 \overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(1)} + \dots + e_{k-1} \overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\forall i = \overline{0, k-1}$

- при корректной классификации примера: $e_i = 0 \Rightarrow e_i \overrightarrow{x}^{(i)} = 0$;
- при некорректной классификации $(\overrightarrow{x}^{(i)}, 0)$: $e_i = -1$ и $\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(i)} < -\delta < 0 \Rightarrow e_i \overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(i)} > \delta$;
- при некорректной классификации $(\overrightarrow{x}^{(i)}, 1)$: $e_i = 1$ и $\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(i)} > \delta > 0 \Rightarrow e_i \overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{x}^{(i)} > \delta$,

следовательно, $\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{w}^{(k)} > \tilde{k}$, где $\tilde{k} \geq 0$ - число неверных классификаций среди k итераций ($e_i \neq 0$).

Из неравенства Коши-Буняковского, получим $(\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{w}^{(k)})^2 \leq \|\overrightarrow{w^*}\|^2 \|\overrightarrow{w}^{(k)}\|^2$, следовательно, нижняя граница нормы вектора весов на k -й итерации

$$\|\overrightarrow{w}^{(k)}\|^2 \geq \frac{(\overrightarrow{w^*}^T \overrightarrow{w}^{(k)})^2}{\|\overrightarrow{w^*}\|^2} > \left(\frac{\tilde{k}\delta}{\|\overrightarrow{w^*}\|} \right)^2.$$

Теперь можно вычислить верхнюю границу

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{w}^{(k)}\|^2 &= \overrightarrow{w}^{(k)}^T \overrightarrow{w}^{(k)} = (\overrightarrow{w}^{(k-1)} + e_{k-1} \overrightarrow{x}^{(k-1)})^T (\overrightarrow{w}^{(k-1)} + e_{k-1} \overrightarrow{x}^{(k-1)}) = \\ &= \overrightarrow{w}^{(k-1)}^T \overrightarrow{w}^{(k-1)} + 2e_{k-1} \overrightarrow{w}^{(k-1)}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)} + e_{k-1}^2 \overrightarrow{x}^{(k-1)}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку

- при корректной классификации примера: $e_{k-1} = 0 \Rightarrow e_{k-1} \overrightarrow{w}^{(k-1)}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)} = 0$;
 - при некорректной классификации $(\overrightarrow{x}^{(k-1)}, 0)$: $e_{k-1} = -1$ и $\overrightarrow{w}^{(k-1)}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)} > 0$;
 - при некорректной классификации $(\overrightarrow{x}^{(k-1)}, 1)$: $e_{k-1} = 1$ и $\overrightarrow{w}^{(k-1)}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)} < 0$,
- $$e_{k-1} \overrightarrow{w}^{(k-1)}^T \overrightarrow{x}^{(k-1)} \leq 0.$$

В итоге,

$$\|\overrightarrow{w}^{(k)}\|^2 \leq \|\overrightarrow{w}^{(k-1)}\|^2 + e_{k-1}^2 \|\overrightarrow{x}^{(k-1)}\|^2 \leq e_0^2 \|\overrightarrow{x}^{(0)}\|^2 + \dots + e_{k-1}^2 \|\overrightarrow{x}^{(k-1)}\|^2,$$

поскольку $\forall (\overrightarrow{x}_i, y_i) \in S \exists M > 0: \|\overrightarrow{x}_i\| < M$, имеем $\|\overrightarrow{w}^{(k)}\|^2 \leq \tilde{k}M$.

Следовательно, $\tilde{k}M \geq \|\overrightarrow{w}^{(k)}\|^2 \geq \left(\frac{\tilde{k}\delta}{\|\overrightarrow{w^*}\|} \right)^2$, а $\tilde{k} \leq M \cdot \left(\frac{\|\overrightarrow{w^*}\|}{\delta} \right)^2$. Полученная верхняя граница на \tilde{k} говорит о том, что число неверных классификаций \tilde{k} конечное. Значит

при дальнейшем последовательном циклическом переборе элементов выборки S все классификации будут корректными.

Заключение

В работе был предложен материал для проведения лекции по обучению перцептрона Розенблатта. В рамках занятия было определено понятие перцептрона, приведены примеры решения задач с его помощью, а также описан и обоснован метод обучения. Теоретический материал наглядно иллюстрируется примерами.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Хайкин Саймон. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд.: Пер. с англ. -СПб.: ООО «Диалектика», 2019. - 1104 с.
 2. Тюменцев Ю.В., Чернышев А.В. Обучение многослойных искусственных нейронных сетей прямого распространения: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 2012 - 48 с.
 3. Вьюгин В.В. Математические основы машинного обучения и прогнозирования. - М.: МЦНМО, 2014. - 304 с.
 4. Роберт Каллан. Нейронные сети. Краткий справочник / пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2018. - 288 с.
 5. Hagan M.T., Demuth H.B., Beal M.H., Orlando De Jesus. Neural network design, 2nd Edition. Publisher, Martin Hagan, 2014. - 1012 p.
-

Vladimir A. Pankratov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

iriskan07@gmail.com

Elena S. Tverskaya,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

e_tverskaya@bmstu.ru

A lecture "Rosenblatt's Perceptron"

Abstract. Currently, artificial neural networks are experiencing a real development boom, as a result of which teaching the mathematical foundations of this toolkit to students is of particular relevance. The purpose of this article is to desire to expand the methodological recommendations for teaching the disciplines above. The work presents material for lectures on the courses "Neural Networks" or "Machine Learning". Rosenblatt's perceptron is the simplest model of a neuron with which you need to start getting acquainted with neural networks. Despite the fact that this topic is presented in the literature, there is a shortage of manuals with a clear and accessible presentation of the rationale for the perceptron learning rule. The article covers issues related to the presentation of the concept of a perceptron, its application, as well as the formulation and justification of the algorithm for its training.

Keywords: neural networks, neuron, Rosenblatt perceptron, neural networks learning.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

Аннотация

Актуальность данной работы обусловлена тем, что инженерное образование сегодня требует реформ, содержанием которых должно быть сочетание классических традиций и самых современных подходов, связь теории и практики. В основу данной деятельности может быть положен, как исторический опыт, так и современный взгляд на математическое образование при подготовке инженеров. Цель работы: на основе проведённых параллелей между образованием в прошлом и современным образованием будущего инженера показать острую необходимость интеграции математики в инженерные науки, а также особую важность практической части в образовательном процессе. Данная работа может быть полезна при составлении учебных планов и программ, написании учебников и методических материалов, при подготовке лекций и практических занятий во втузе.

Ключевые слова

математика, инженерное образование, фундаментальное образование, интеграция

АВТОРЫ

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Введение

Первые инженеры появились несколько тысячелетий назад. Но за годы истории эта профессия претерпела глобальные изменения. Инженер сегодня это аналитик, конструктор, менеджер и IT-специалист. И только суть профессии не меняется. Сначала инженер анализирует ситуацию, затем ставит задачу, реализует её исполнение и несёт ответственность за полученный результат.

В современных реалиях российской экономики требуются специалисты, обладающие высоким уровнем профессионализма, креативным мышлением и готовые принять оптимальные и конкурентоспособные решения. Только профессионал с глубокой фундаментальной подготовкой может принимать такие решения, используя математическое моделирование и IT-технологии, и оценивать выгоду не только в денежном

эквиваленте, но и весь комплекс эффектов: социально-экономических, политических, экологических, нравственных и других.

Мобильность научных интересов - одно из требований к образованию инженера будущего. Для того, чтобы это требование было реализовано, можно и нужно дополнять или изменять список дисциплин, но также важно усилить фундаментальную подготовку по естественным наукам, расширить и разнообразить практическую базу.

Появление компьютера и развитие IT-технологий очень сильно повлияло на систему математического образования во ВТУЗе. Вопрос о глубине курса математики для студентов технических вузов стал звучать чаще. Но, несмотря на возможность решения традиционных задач курса высшей математики с помощью вычислительной техники, нельзя отказаться от базового курса высшей математики, а наоборот, отнестись к нему с большей серьёзностью. Чтение специальных курсов высшей математики преподавателями выпускающих кафедр обеспечивает непрерывность математического образования.

В статье определены проблемы интеграции математики в инженерные науки в техническом образовании на основе работ по истории инженерного и математического образования, тенденций развития профессионального образования.

Методология и результаты исследования

Исторически в системе инженерного образования математика занимает важное место. Для того, чтобы овладеть техническими науками, инженер должен иметь достаточно хорошую математическую подготовку. К тому же, математика способствует воспитанию профессиональных качеств инженера, к числу которых относят системность мышления, «дисциплину ума», изобретательские способности, креативность и другие.

Но, как показывает практика, отношение инженеров к математике всегда было неоднозначным. Даже высказывалось мнение, что преподавание математики зачастую носит изолированный характер [1]. Отражение тенденции ослабления связей математики с реальностью нашло в так называемом «принципе Гельфанда - Цейтлина» о минимизации взаимодействия [2], который был сформулирован математиками не без иронии. Бытует неверное мнение, что такая математика инженеру не нужна. Чтобы доказать обратное, современные методические материалы должны отражать интеграцию математики в инженерные науки.

О месте математики и исторических путях её интеграции в систему инженерного образования уже написано много работ. Но новые реалии сегодняшнего дня предъявляют к инженерному образованию и новые требования. XXI век заставляет специалиста при решении любой технической проблемы использовать социальные, общепедагогические и экзистенциальные подходы.

Вторая половина XIX века характеризовалась тем, что в преподавании математики ставилось во главу развитие логического мышления будущих инженеров. Это вопрос неоднократно поднимался в методической литературе на протяжении XIX и XX веков, и решение его склонялось в ту или другую сторону в зависимости от реалий времени. Специалисты технических наук и преподаватели математики выражали различные мнения. Выдающийся русский и советский учёный-математик, механик, инженер-кораблестроитель А.Н. Крылов считал, что при обучении математике следует больше учитывать практические цели, а не стремиться к недостижимой цели развития способности к логическому мышлению [3]. В 1910 году писатель, педагог, историк науки и профессор В.Р. Мрочек в своей книге «Педагогика математики. Исторические и методические этюды» [4] писал:

а) практическая цель - научить применять математику в бытовых ситуациях, научить применять математические методы для исследования природных явлений;

б) образовательная цель - не столько развитие формального мышления, сколько предоставление мира идей через работу с материалами, имеющими научную и культурную ценность. Эта цель может быть достигнута через проявление идеи закономерности, интуитивное осознание которой присуще каждому; через углубление этой идеи и ее преобразование в стройную концепцию функциональной зависимости; и, наконец, через знакомство с сущностью и границами применения математического метода в целом, символического метода, который пытается выразить любую зависимость в виде уравнения с целью дальнейшего использования этого уравнения для выполнения вычислений;

в) воспитательная цель - воспитание привычки экономии мышления и сосредоточения внимания наиболее эффективным образом; воспитание осторожности в суждениях, их последовательности и достаточной обоснованности. Эта цель достигается не через обучение, а через изучение. Изучение же означает понимание генезиса явления и прослеживание его связи с другими явлениями.

Такое понимание назначения предмета математики преобладало в период расцвета классической концепции инженерного образования. Следует отметить, что в приведенном отрывке воспитательные цели математического образования упоминаются весьма сдержанно, а на первый план выдвигается его объективная значимость.

Великий математик XX века А.Н. Колмогоров писал: «Принципиально область применения математического метода не ограничена: все формы движения материи могут изучаться математически» [5].

. Вентцель Е.С., советский математик, доктор технических наук, автор исследования по методологии прикладной математики, считала, что при преподавании математики должны учитываться практические задачи. По мнению Вентцель, утверждение, что основной целью обучения математике в учебных заведениях является обучение людей логическому мышлению, приводит к чрезмерной формализации математических дисциплин и их преподаванию в отрыве от практики. Несомненно, развитие логического мышления полезно, но у математики также есть другие цели: активное участие в практических задачах и разумное управление производственными и другими процессами [6].

Одним из сильнейших высших учебных заведений в точных и инженерных науках является французская Политехническая школа, образованная в 1794 году под Парижем. Своё современное название она получила в 1975 году. Успех Политехнической школы во многом связан с принципом сочетания фундаментального и прикладного образования. Школа стремилась подготовить широко образованных инженеров без узкой специализации. По этой причине математика занимала важное место в программе этой школы. Влияние, которое французская Политехническая школа оказала на развитие математического образования, было настолько велико, что, по словам историков первой половины XIX века, технические вузы по всей стране начали активно использовать ее методы обучения.

Принципы математического образования, возникшие в XIX веке во французской Политехнической школе, были систематизированы А. Пуанкаре в его работах по философии науки: «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод» и др. Впоследствии эти работы были включены в сборник [7] и переизданы на русском языке. Великий Пуанкаре считал, что теоретически математику можно представить, как единство двух частей: математика для математики и математика, устремленная на изучение природы. Эти части не могут существовать друг без друга. Пуанкаре выделял мысль о том, что для инженера может не подойти решение, удовлетворяющее математика, но решение, не удовлетворяющее математика, может вполне подойти для инженера. Инженеру важнее закончить проект в указанный срок, а не иметь теоретические рассуждения. Приближенное решение может удовлетворить инженера, хотя кажется, что аналитическое решение намного предпочтительнее. Но во многих случаях аналитическое решение просто невозможно [8].

Пуанкаре рассматривает два противоположных подхода к математике: чистая математика, которая изучает отношения между объектами, и прикладная математика, которая применяет эти отношения для решения практических задач. Первый подход обеспечивает большую логическую строгость, но теряет связь с реальностью. Второй подход позволяет применять математику на практике, но может быть менее строгим в своих предположениях и доказательствах.

В прикладных задачах нельзя полагаться только на математические истины, так как только опыт может подтвердить справедливость математических суждений относительно реальных объектов. Особенно важную роль в математике Пуанкаре отводит интуиции. Без интуиции молодые умы не смогут понять математику и применять ее, так как она помогает сохранять связь с реальным миром [9].

Пуанкаре считал, что только экспериментальный подход является основой развития научной интуиции. Именно такой подход может обеспечить наиважнейшую роль интуиции в обучении и даст возможность студентам осознать основные принципы науки, понять её происхождение и решающую роль в развитии общества.

Экспериментальный подход поддерживает индуктивное рассуждение в дополнение к дедуктивному [10]. При первом знакомстве с задачей молодой учёный или инженер должен идти по пути от простого к сложному, от частного к общему, и никак иначе. Результаты конкретных наблюдений и экспериментов анализируются, а потом уже формулируются общие выводы. Это особенность экспериментального подхода позволяет исследовать и открывать новые идеи, что является очень важным для специалиста инженерной профессии во всех сферах человеческой деятельности.

Важную роль в преподавании математики Пуанкаре отводил эвристическим методам, позволяющим раскрыть творческий потенциал студентов и способность видеть новые качества исследуемого объекта. Он подробно останавливается на одном из таких методов - аналогии. По его мнению, аналогия является важным инструментом для передачи и укрепления интуитивных представлений и может быть использована для убедительности в рассуждениях. В качестве примера он приводит использование Ф. Клейном физической аналогии для исследования свойств поверхностей Римана [11].

Выгодский М.Я., советский математик, доктор физико-математических наук, автор учебников и справочников по математике, один из основателей советской историко-математической школы, в своей работе по истории дифференциальной геометрии [12], указывал на важность наглядного и прикладного подхода в обучении математике. Он отмечал, что аналитический стиль Эйлера не мог быть основополагающим, т. к. не имел большой популярности и не удовлетворял складывающимся на базе технической практики особенностям мышления и эстетическим потребностям.

Выгодский считал, что особенность методологии научных работ, созданных инженерами, состоит в предпочтении синтетических подходов аналитическим операциям. С такой позицией был согласен и немецкий математик Феликс Клейн в своих комментариях результатов деятельности представителей школы Монжа [13]. Аналитическая формула для них являлась не самоцелью, а кратким выражением реально воспринимаемых геометрических образов. Они развивали теорию, опираясь на пространственные построения. Рассматривая вопросы преподавания, Ф. Клейн также сравнивал подходы между чистой и прикладной математикой. Он предлагал обратиться к учебнику Э. Рауса [14], который отличался тем, что, хотя общие принципы в нем и были представлены, они всегда сопровождались большим количеством примеров и приложений. Клейн выражал мнение, что, если изучать математику только в ее абстрактной форме, то можно утратить способность к восприятию конкретных явлений, а, следовательно, и способность правильно подходить к текущим проблемам и полностью решать их. Для физиков и инженеров такой подход обладает особенной важностью. «Теории (для инженеров) представляют собой, так сказать, схему с пустыми клетками, в которые должен быть уложен пёстрый мир явлений, чтобы придать им смысл и значение» [15].

Аналогичный подход прослеживается у Монжа, Пуассона, Понселе и других при изложении учебных материалов, в которых они стремятся придать абстрактным формулам смысловую нагрузку.

Выпускник Политехнической школы и долголетний преподаватель Санкт-Петербургского института инженеров путей сообщения Г. Ламе, при обучении математики рекомендовал устанавливать соответствие между математическими понятиями и соответствующими областям механики, физики [16]. Это соответствие позволяло конкретизировать поставленные задачи, делать их более ясными и приводило к быстрому и творческому их решению, используя математический аппарат. В своих работах Н.В. Бугаев, русский математик и философ, яркий представитель Московской философско-математической школы, дал положительную оценку такому подходу.

Ридлер А., немецкий инженер и ректор Берлинского политехнического института, в начале XX века представил коллегам на обсуждение свои работы «Германские высшие технические заведения и запросы двадцатого столетия» и «Цели высших технических школ», посвящённые особенностям инженерного образования. Он считал, что у инженерного образования и у университетского есть методологические различия, а для успеха в обучении важно учитывать специфику инженерной работы и мышления. Он также предостерегал от тенденции к переоценке аналитических методов, которая господствует в научном сообществе, и видел проблему в «общей абстракции, лишённой реального представления, в избытке отвлечённых методов». Поэтому для инженера особенно важно «научиться видеть» и «представлять в виде чертежа или наброска», развивать «способность к созерцанию». На основе этих выводов, Ридлер предложил следующую концепцию инженерного образования - «выработать научно-образованных и общеобразованных практических инженеров» [17].

В 1830 году произошло событие, в значительной степени повлиявшее на вектор развития инженерного образования в России и в мире: было образовано Московское ремесленное учебное заведение (МРУЗ). Перед руководством и преподавателями нового учебного заведения стояли трудные задачи: сделать из его слушателей отличных ремесленников с глубокими теоретическими знаниями.

Курс алгебры и геометрии читался со дня основания Московского ремесленного учебного заведения, позже добавились физика, химия и механика.

Первым профессором-математиком МРУЗа был выдающийся педагог Платон Николаевич Погорельский. Он внес неоценимый вклад в развитие учебно-методической работы по практической механике и математике. П.Н. Погорельский перевёл с французского, изменил и дополнил учебник «Курс Чистой Математики, составленный по поручению Беллавеня профессорами математики: Аллезом, Билли, Пюиссаном и Будро, и принятый за руководство во французских военных школах». Выдающиеся педагогические способности профессора Погорельского помогали ему излагать предмет просто и ясно, что вдохновляло учеников и вызывало у них интерес к науке.

Развитие и реализация грамотного теоретического и практического обучения в училище привело к тому, что к середине XIX века выпускники МРУЗа по уровню квалификации не уступали выпускникам других высших технических учебных заведений Российской империи. А позднее на основе синтеза теории и практики там сложилась своя эксклюзивная система подготовки выпускников, которая по многим направлениям превосходила аналогичные системы России и Европы.

В 1868 году была создана кафедра «Высшей математики», которую возглавил Алексей Васильевич Летников, выдающийся российский математик и педагог. Традиции первого профессора-математика П.Н. Погорельского были продолжены. Лекции А.В. Летникова отличала доступность при изложении материала. А его научная работа была неразрывно связана с его педагогической деятельностью. Этот период училища характеризуется повышением уровня математической подготовки студентов.

На формирование научной школы математики в училище оказала большое влияние деятельность выдающегося русского математика и механика академика Пафнутия Львовича Чебышева, учёного-механика, основоположника гидро- и аэродинамики Николая Егоровича Жуковского, механика и математика, один из основоположников современной аэромеханики и аэродинамики Сергея Алексеевича Чаплыгина. Гениальные открытия этих учёных являются доказательством необходимости глубокого изучения математики и умения применять математический аппарат при решении глобальных задач.

После 1917 года кафедра «Высшей математики» Московское высшее техническое училище (МВТУ) играла заметную роль в организации и совершенствовании математического образования в вузах страны. Вопрос о преподавании математики в технических вузах был очень актуальным в те годы. Сотрудники кафедры «Высшей математики» МВТУ были сторонниками фундаментального математического образования будущих студентов-инженеров и непосредственной связи этого образования с решением практических задач, выдвигаемых временем. Преподаватели принимали активное участие в многократных жарких обсуждениях, посвящённых этой теме, отстаивали свои позиции последовательно, аргументированно и с большой любовью к делу своей жизни.

В 1936 году на кафедру «Высшей математики» МВТУ пришёл Борис Павлович Демидович, советский математик и педагог высшей школы, автор многочисленных учебников и непревзойдённых сборников задач по математическому анализу, актуальных и в настоящее время.

Демидович Б.П., получив квалификацию преподавателя ВТУЗа, работая в технических вузах страны и непосредственно в МВТУ им. Н.Э. Баумана, большую роль отводил учебно-методической работе. Им были разработаны и написаны учебные пособия для студентов. В 1952 году вышел легендарный «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», а в 1959 году - «Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов» под редакцией Б.П. Демидовича. Под его редакцией 80 лет назад была создана книга, являющаяся результатом проведения практических занятий по математике со студентами ВТУЗов. Она содержит более трёх тысяч задач по всем основным разделам математики, преподаваемым будущим инженерам, и была переведена на английский, французский, испанский, итальянский и португальский языки. Её авторами были преподаватели, в разное время работавшие на кафедре «Высшая математика» МВТУ. Этот задачник и сегодня является одним из основных учебников в преподавании высшей математики во всех технических вузах России.

В 1966 году вышло в свет первое издание книги «Курс высшей математики» Фролова С.В. и Шостакова Р.Я., которая в дальнейшем была переиздана. Учебник являлся эталоном учебника по высшей математике для ВТУЗов, содержащий все основные разделы высшей математики, изучаемые в технических вузах. Эту книгу отличала ясность и доступность изложения материала, что порождало дополнительную мотивацию студентов к изучению предмета.

Студенты МВТУ им. Баумана, будущие инженеры и конструкторы получали обширные и фундаментальные знания в области математики, включая самые передовые достижения науки на тот момент времени. Тесное взаимодействие учёных-математиков и инженеров в разработке программ различных дисциплин, преподаваемых во втузах приводило к феноменальным результатам: студенты и выпускники с огромным энтузиазмом участвовали в научных исследованиях и в самых современных проектах.

Наступил XXI век, технологии шагнули в другую эпоху, а вопрос интеграции математического и инженерного образования во ВТУЗах не только не закрыт, а приобретает новый смысл и особую важность.

По мнению российских математиков В.П. Рыжова [18] и Д.Л. Сапрыкина [19], концепция инженерного образования начала XXI века претерпела изменения. Сегодня она приближается к классическому типу образования, сформировавшемуся в XIX веке и получившему существенное развитие в начале XX века. Особенности такого

образования - это сочетание науки и практики, теории и эксперимента, логики и интуиции. Эти черты и сейчас считаются показателями образованности инженера. В связи с этим перед высшим профессиональным образованием встала задача подготовки специалиста нового типа, гармонично развитого, творчески мыслящего, идущего в ногу со временем. Данную проблему можно решить путём слияния естественных, технических, математических и гуманитарных наук. Решение этой проблемы является главной задачей педагогики высшей школы.

Владимир Игоревич Арнольд, советский и российский математик, в своих работах по методологии математики обвинял современное математическое образование в отрыве от реалий и разрушении системных связей. Автор писал: «Продолжающийся более полувека процесс алгебраизации и аксиоматизации математики привёл к опасному разрыву между языком современной математической литературы и естествознанием» [20]. Выдающийся учёный полагал, что математика является содержательной наукой об устройстве природы и окружающей действительности. Отход от таких представлений, по мнению В.И. Арнольда, лишает мотивации студентов к изучению математики. При отсутствии мотивации мы получаем плохой результат: изучать что-то, не зная зачем, очень трудно, чаще всего, психологически невозможно. Получаем вывод: «Попытки обойтись без вмешательства физики и реальности в математику - сектанство и изоляционизм, разрушающий образ математики как полезной человеческой деятельности в глазах всех разумных людей» [21]. Выводы В.И. Арнольда о современном математическом образовании и его предложения по его реформированию созвучны с подобными суждениями Анри Пуанкаре. Поэтому современный математик часто цитировал Пуанкаре в своих работах, указывая на то, что во Франции его идеи незаслуженно забыты. Арнольд считает, что отход от методологических принципов Пуанкаре является причиной недостатков современного математического образования.

Современный инженер - это человек, сочетающий в себе не только технические и математические знания, а специалист, следящий за тенденциями развития страны, отрасли промышленности, в которой он работает, разбирающийся в экономике и рынке. Этот человек, умеющий работать в команде.

Заключение

История показывает, что вопрос организации математического образования для инженеров всегда стоял остро, являясь темой для дискуссий учёных и педагогов. Идеи, изложенные более 200 лет назад, не утратили своей актуальности и сегодня. XXI век поставил вопрос о преобразовании форм и методов обучения математике будущих инженеров на первый план. Результаты нашего исследования подтверждают полезность исторического подхода к изучению этой проблемы.

За двухвековой период истории инженерного образования накопился значительный методический опыт обучения математике инженеров. За эти годы появились учебники, созданные математиками, физиками и инженерами, отображающие их взгляд на уровень знаний и компетенций, которыми должны обладать будущие инженеры. Были специально разработаны организационно-методические модели, целью которых является адаптировать преподавание математики под запросы инженерной науки и практической деятельности.

Если говорить о современном математическом образовании инженера, то можно сформулировать следующие дидактические принципы, которые должны лечь в его основу:

принцип целеполагания. В его основе лежит учёт профессиональных интересов инженера, его психологические особенности;

принцип синтеза фундаментального и прикладного научного образования инженеров;

принцип «индукции»;

принцип преобладания синтетического подхода над аналитическим.

Эти принципы неразрывно связаны с решением задачи интеграции математического и инженерного обучения. Их формулировка и практическая применимость была продиктована и проверена историей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. - М.: Просвещение, 1982. - Ч. 1. - 208 с.
2. Болибрух А.А. Воспоминания и размышления о давно прошедшем. - М.: МЦНМО, 2013. - 128 с.
3. Крылов А. Н. Собрание трудов / А. Н. Крылов. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936-1956. - Т. 1, ч. 2. - URL: <http://ilib.mccme.ru/krylov/>
4. Мрочек В. Педагогика математики. Исторические и методические этюды / В. Мрочек, Ф. Филиппович. - СПб. 1910. - 384 с.
5. Колмогоров А.Н. «Математика» / БСЭ, 1-е изд., т. 38, 1938, с. 380.
6. Вентцель Е.С. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе / Е.С. Вентцель // Математики о математике. - М.: Знание, 1982. - С. 37-54.
7. Пуанкаре А. О науке / А. Пуанкаре. - М.: Наука, 1983. - 560 с.
8. Там же
9. Там же
10. Там же
11. Там же
12. Выгодский М.Я. Возникновение дифференциальной геометрии: вводная статья к книге / М.Я. Выгодский // Приложения анализа к геометрии / Г. Монж. - М.; Л.: ОНТИ, 1936. - С. 12-70.
13. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф. Клейн. - М.: Наука, 1989. - 456 с.
14. Там же
15. Там же
16. Бугаев Н.В. Математика как орудие научное и педагогическое / Н. В. Бугаев // Математический сборник. - 1868. - Т. 3, № 4. - С. 183-216.
17. Философия техники: история и современность. - М.: ИФ РАН, 1997. - 283 с.
18. Рыжов В.П. Инженерное творчество и проблемы современного инженерного образования / В.П. Рыжов // Открытое образование. - 2005. - № 5. - С. 80-84.
19. Сапрыкин Д.Л. Инженерное образование в России: история, концепции, перспективы / Д.Л. Сапрыкин // Высшее образование в России. - 2012. - № 1. - С. 125-134.
20. Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сёстры? / В. И. Арнольд // Успехи физических наук. - 1999. - Т. 169, № 12. - С. 1311-1322.
21. Арнольд В.И. О преподавании математики / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. - 1998. - Т. 53, № 1. - С. 229-234.

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
marinatichomirova@hotmail.com

Olga N. Bakhtiyarova,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
olga-bakh06@mail.ru

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru

Modeling neural networks in the course of computer science

Abstract. The relevance of this work is due to the fact that engineering education today requires reforms, the content of which should be a combination of classical traditions and the most modern approaches, a connection between theory and practice. This activity can be based on both historical experience and a modern view of mathematical education in the training of engineers. The purpose of the work: based on the parallels between education in the past and modern education of a future engineer, to show the urgent need to integrate mathematics into engineering sciences, as well as the special importance of the practical part in the educational process. This work can be useful in drawing up curricula and programs, writing textbooks and teaching materials, and preparing lectures and practical classes at a technical college.

Keywords: mathematics, engineering education, fundamental education, integration.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Аннотация

Актуальность статьи обусловлена тем, что студенческие олимпиады по высшей математике помогают студентам технических вузов углублять теоретические знания и практические навыки. Цель данной статьи - проанализировать особенности трех этапов олимпиады, методы привлечения студентов к участию в олимпиадах и их поощрения, организации соревнований и проверки работ; сравнить особенности проведения олимпиад различными организаторами, а также сравнить очную и дистанционную формы соревнования. Результатами этой статьи являются рекомендации по улучшению проведения математических олимпиад и оценка их влияния на успехи студентов в учебе и в научной работе. Приведены примеры комплектов олимпиадных заданий.

Ключевые слова

олимпиада по высшей математике, творческое мышление,
тематика задач, поощрение

АВТОРЫ

Пугачев Олег Всеволодович,

доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
opugachev@bmstu.ru

Павловский Ян Юрьевич,

ассистент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва

Введение

Всероссийская студенческая олимпиада по высшей математике (ВСОМ) для технических вузов помогает студентам углублять теоретические знания и практические навыки по математике [1]. Студенты соревнуются и во владении базовыми знаниями, и в умении решать нестандартные задачи. В комплекты олимпиадных заданий входят задачи по разделам математики, изучаемым во всех технических вузах: аналитической геометрии, линейной алгебре, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных, рядам, дифференциальным уравнениям, функциям комплексного переменного, комбинаторике и теории вероятностей, и не входят задачи по таким предметам, как дифференциальная геометрия, вариационное исчисление и функциональный анализ, поскольку они изучаются лишь на многих технических специальностях.

Ежегодно ВСОМ проходит в три этапа:

1. внутривузовский (отборочный),
2. региональный (городские, областные, межрегиональные),
3. всероссийский.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим разнообразные проблемы, связанные с математическими олимпиадами: составление и подбор задач для разных этапов, поощрение студентов участвовать в олимпиадах, организацию соревнований разного уровня и проверки работ студентов.

Первый этап (отборочный)

Внутривузовская олимпиада по математике среди студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана прежде проходила в один тур (в начале весеннего семестра), но с 2012 года проводится в два тура: в начале ноября и в конце февраля. Отдельно соревнуются студенты первого курса и со второго по пятый курс. На каждом туре даются по семь задач, из которых первые четыре или пять предназначены для всех студентов, а последние три или две различны для первокурсников и более старших студентов. На решение задач дают четыре академических часа с добавлением перерывов (если олимпиада проводится в лекционной аудитории) или три с половиной астрономических часа (если проводится в читальном зале). Приглашаются все желающие, при этом не обязательно участвовать в обоих турах.

Все работы отборочного этапа олимпиады проверяют составители задач. Для объективности проверки работы шифруются. Список участников с их шифрами и контактными данными хранится на кафедре в сейфе, который открывают только после подведения итогов и распределения призовых мест. Итоги подводятся за два–четыре дня и размещаются на сайте www.baumo.my1.ru/1.htm. В апелляции нет необходимости, так как в интересах организаторов правильно подобрать сильную сборную команду, а не подыграть тому или ному факультету.

Подготовка задач для внутривузовского этапа

Руководитель сборной команды студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана - профессор кафедры ФН-2 О.В. Пугачев хранит секретный банк задач, который регулярно пополняется и расходуется по мере необходимости. Задачи без решений впервые печатаются на раздаточных листках на внутривузовском этапе олимпиады, затем вечером того же дня размещаются на упомянутом сайте, где они пять-шесть дней доступны с решениями. Коллекция олимпиадных задач без решений (начиная с 2005 года) доступна всегда и всем.

Задачи, хранящиеся в банке, классифицированы по предметам и по уровню сложности. Это сделано для того, чтобы при составлении комплекта задач для каждого из двух туров внутривузовской олимпиады соотношение разных разделов математики примерно отвечало усредненному их соотношению по городским, межрегиональным и всероссийским олимпиадам, представленному в таблице 1.

Таблица 1

Темы задач \ Место проведения	пределы	рекурсия	производные	экстремумы	интегралы	комбин. и теор.вер.	арифметика	уравнения	функц. уравнения	аналит. геометрия	матрицы	дифф. уравнения	ряды	кратные интегралы	ТФКП	всех задач
Зеленоград	13	19	6	5	17	10	6	9	15	19	39	13	14	9	14	208
Тверь	3	3	1	6	8	3	1	8	4	6	7	7	8			65
Рязань	7	1	12	4	6	7	4	5	2	8	7	11	9	1	4	88
Ярославль	7	3	9	14	17		1	5	6	18	12	15	13	4	3	127
Якутск	6	6	4	25	12	10	21	12	15	32	22	5	7		13	190
Калининград	2		1		2	3	1		1	3	2	2	1		2	20
всего	38	32	33	54	62	33	34	39	43	86	89	53	52	14	36	698
%	5	5	5	8	9	5	5	6	6	12	13	8	7	2	5	100

Приведем комплект задач, предлагавшихся студентам-бауманцам на отборочном туре 29 февраля 2024 года.

1. При всех натуральных n найти сумму $\sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{3n-k}{2n+k}$.

2. Найти наибольшую возможную площадь четырехугольника, содержащегося в плоской фигуре $D = \{x^2 + y^2 - xy \leq 1 \leq x + y\}$.

3. Найти интеграл $\int_0^1 \frac{x^3 + 6x^2 + 8x}{x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 40x + 50} dx$.

4. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $2f(x) + f\left(\frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}\right) = x$

на всей числовой оси, кроме конечного множества точек.

5. (для 1 курса). Построить последовательность a_1, a_2, a_3, \dots со значениями 0, 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_1| + \dots + |a_n|}{a_1 + \dots + a_n} = \sqrt{2}.$$

-1, такую, что

6. (для 1 курса). Найти кратчайшее расстояние между графиками $y = \cos \operatorname{arcsin} x$ и $y = \operatorname{arcsin} \cos x$.

7. (для 1 курса) Дана система уравнений

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3, \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

где коэффициенты a, b, c различны. Найти x .

5. (для 2–5 курсов). Найти 500-ю цифру после запятой в дроби $1/998001$.

6. (для 2–5 курсов). На комплексной плоскости найти площадь области, в которую перейдет круг $D = \{|z-2| < 1\}$ при отображении функцией $w(z) = z^3$.

7. (для 2–5 курсов). Чтобы долететь до банки меда ценностью 100 руб., Винни-Пух должен надуть хотя бы два шарика. Шарик стоит 10 руб., но с вероятностью $1/3$ лопнет. В нору, где продаются шарики, можно зайти только один раз, и в норе надувать нельзя. Сколько шариков надо купить, чтобы максимизировать математическое ожидание выигрыша?

Агитация

Студентов можно привлечь к математической олимпиаде разными способами. Основной, хотя не самый эффективный - объявить об олимпиаде во время лекции по математике, для этого все лекторы математических кафедр получают текст объявления, в котором указано время и место проведения мероприятия и дан адрес сайта, где студенты узнают подробности. Большую роль играет и общение студентов между собой.

Чтобы повысить интерес студентов-бауманцев к математическим олимпиадам, работает вышеназванный сайт, где представлена информация о прошедших и предстоящих олимпиадах, задачи различных математических олимпиад (без решений) и результаты участия студентов в них, а также фотографии из поездок. На сайте дана ссылка на группу ВКонтакте, которую ведет И.В. Баранов - в студенческие годы активный участник математических олимпиад, в настоящее время преподаватель кафедры ФН-1 и тренер сборной команды студентов-бауманцев.

Сборная команда из десяти–двенадцати первокурсников и восьми–десяти студентов второго–пятого курсов формируется с учетом олимпиадных рейтингов. Студенты получают стартовые рейтинги по результатам отборочных туров, в дальнейшем рейтинги корректируются с учетом успехов на олимпиадах второго и третьего этапов. Таблица рейтингов доступна лишь руководителю и его помощникам, вышедшим из студенческого возраста.

Второй этап (региональный)

Вся сборная команда участвует во втором этапе ВСОМ. Для студентов технических вузов Москвы и Московской области это Московская городская математическая олимпиада, которая ежегодно проводится в апреле в Зеленограде в МИЭТ [2]. На решение четырех задач (более сложных, чем на других олимпиадах) дают четыре астрономических часа. Соревнуются отдельно первокурсники и студенты второго–пятого курсов. Уезжают они в тот же день, и апелляция не проводится. Командный итог вычисляется как сумма пяти лучших результатов первокурсников и пяти лучших результатов второго–пятого курсов.

Проверка работ нескольких сотен студентов силами одних преподавателей МИЭТ занимает две-три недели, поэтому итоги городской олимпиады могут повлиять на состав сборных команд на третий этап олимпиады лишь в том случае, если он будет проходить в следующем учебном году.

Вот как выглядели комплекты задач Московской городской математической олимпиады в апреле 2023 года.

Для 1 курса

1. Найти координаты фокуса параболы, дуга которой задана уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2. Являются ли многочлены $f_k(x) = x^{n-1} - \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq k} (x - j)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

линейно зависимыми?

3. Вычислить $\int_0^{+\infty} [x] e^{-x} dx$ (здесь $[x]$ = целая часть числа x).

4. Последовательность (x_n) такова, что $|x_1| < 2023$ и $x_{n+1} = |2 - x_n|$ при $n \geq 1$. Доказать, что величина $x_{2023} + x_{2024}$ не зависит от x_1 , и вычислить ее.

Для 2–5 курсов

1. В n -мерном кубе рассматриваются точки пересечения отрезков, соединяющих вершины. Сколько всего таких точек, не являющихся вершинами?

2. Последовательность (x_n) такова, что x_1 – рациональное число из отрезка $[0, 1]$, и

$x_{n+1} = ||3x_n - 2| - 1|$ при $n \geq 1$. Доказать, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

3. Сколько различных частных производных k -го порядка имеет функция $f(x_1, \dots, x_n) = \exp(x_1 + 2x_2 + \dots + 2^{n-1}x_n)$?

4. Существует ли взаимно однозначное отображение f множества натуральных чисел в себя, такое, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$ сходится?

Третий этап (всероссийский)

Финальный этап ВСОМ проводят несколько вузов, и в один год (и даже в один семестр) студент имеет право принять участие в нескольких математических олимпиадах такого уровня, но получить премию может лишь один раз. Каждый вуз-организатор самостоятельно определяет правила соревнований.

Поскольку к проверке работ привлекают руководителей приезжих команд, предварительные итоги удается подвести уже вечером того дня, когда выполнялись олимпиадные задания. Ночью вывешивают таблицу предварительных итогов. На следующее утро проходит апелляция, а вечером или на следующий день - награждение.

Сравним особенности третьего этапа ВСОМ в нескольких технических и военных вузах, где команда МГТУ им. Н.Э. Баумана участвовала в недавние годы.

Ярославль

Всероссийская студенческая олимпиада организуется в ЯГТУ поздней осенью [3]. Соревнуются отдельно студенты физико-математических, технических и экономических специальностей. Комплекты задач для них, как правило, одинаковые (от 7 до 12 задач), но в любом случае подводятся не только общий итог, но и отдельные итоги по специальностям.

Формально численность команд не ограничена, но используется формула, способствующая тому, чтобы вузы ограничивали численность своих команд: командный итог складывается из двух лучших результатов студентов и среднего балла всех студентов команды.

Рязань

Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина (РГРТУ) проводит ВСОМ в апреле. Студенты технических, физико-математических и экономических специальностей также соревнуются отдельно. Комплекты задач для них одинаковые, но подводятся и отдельные итоги по специальностям.

Численность команд не ограничена, но используется такая же формула командного итога, как в Ярославле.

В составлении комплектов задач (дают 11–13 задач) участвуют не только организаторы олимпиады, но и руководители приглашенных команд, благодаря чему проверка работ студентов занимает меньше времени.

С 2021 года математическая олимпиада в Рязани стала физико-математической, доля задач по физике около 30%.

Тверь

Олимпиада организуется в конце января Военной академией воздушно-космической обороны имени маршала Советского Союза Г.К. Жукова. Курсанты высших военно-учебных заведений участвуют не только во Всеармейских олимпиадах по математике [4], но и успешно соревнуются со студентами технических специальностей.

Численность команды ограничена пятью учащимися. Главная особенность тверской олимпиады в том, что она состоит из двух туров: личного (первый день, четыре астрономических часа) и командного (второй день, от одного до двух астрономических часов, студенты каждой команды решают задачи вчетвером). Командный итог складывается из баллов, набранных каждым студентом лично, и баллов, набранных всей командой во втором туре.

Дистанционные олимпиады

С 2020 года некоторые вузы (особенно отдаленные - якутский, калининградские) начали проводить ВСОМ в дистанционном формате. В каждом вузе-участнике выделяется аудитория, где студенты решают задачи, присланные по электронной почте, под наблюдением сотрудников своего вуза.

Строго говоря, такой формат конкурса вряд ли можно назвать подходящим для сравнения способностей студентов разных вузов, так как технически трудно уследить

за всем происходящим в аудиториях, и приходится полагаться на честность руководителей команд. Но для сравнения способностей студентов одного вуза, для их собственной оценки своих способностей и для тренировки дистанционные олимпиады ничем не уступают очным.

Решение задач

Авторами большинства задач для третьего тура являются преподаватели из вуза-организатора. Задачи должны быть нестандартными, но при этом не требовать от студента знаний, лежащих за рамками пройденного курса математики. Формулировка каждой задачи обязана быть четкой и не допускать двусмысленного понимания. Не менее важно, чтобы комплект задач, даваемых на третьем туре ВСОМ, был недоступен посторонним до дня его проведения включительно.

На решение комплекта задач студентам дают четыре астрономических часа. При этом запрещается использовать свою литературу и конспекты. Организаторы могут раздать студентам стандартные справочники. Очень важно проследить, чтобы студенты не имели портативных электронных устройств и не могли заглядывать в чужие работы. Для этого студентам дают посадочные талоны на строго определенные места в нескольких залах.

В качестве примера приведем задачи личного тура тверской олимпиады 3 февраля 2024 года.

1. Сколько есть пар чисел x и y , для которых выполняется матричное равенство

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

2. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется по плоскости так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина?

3. Доказать сходимость и найти предел последовательности:

$$a_1 = 7, \quad a_2 = 7 + \frac{1}{7}, \quad a_3 = 7 + \frac{1}{7 + \frac{1}{7}}, \dots$$

4. Доказать неравенство $2\sqrt{2} \leq \int_0^1 \frac{4^x}{1+x} dx + 2 \int_0^1 \frac{(1+x)dx}{4^x} \leq 3$.

5. При каком $\alpha > 0$ выполняется данное равенство:

$$\frac{\ln 2}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{x^4} dx}{x^3 \sin^2 x + \sqrt{e^{2x^4} + x^6 \sin^4 x + e^{x^4}}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{e^x + \alpha(\cos x - \sin x)} ?$$

6. Решить дифференциальное уравнение: $x^3(xy)'' - 4x^2y' + 3y = 0$.

7. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

8. Есть 7 команд, различных по силе, в первом туре случайным образом выбирают две из них. После первого тура из оставшихся команд случайным образом выбирают команду, которая играет с победителем, и т.д. Известно, что команда одержала победы в двух первых турах. Какова вероятность того, что она победит и в третьем туре?

Проверка работ

Чтобы сделать проверку удобнее и обеспечить ее объективность, сданные работы шифруют, а затем решения каждой задачи всеми участниками складывают в отдельные стопки. Каждую задачу во всех работах проверяет подкомиссия из двух или трех преподавателей. Максимальный балл за задачу заранее назначается ее автором, но детальные критерии оценки, за какое продвижение в решении задачи сколько баллов давать, согласуются подкомиссией в процессе проверки. После того, как все работы проверены, вычисляют итоговые баллы и составляют таблицу предварительных итогов. Только после этого шифры в таблице заменяют личными данными участников.

Описанный алгоритм проверки работ применяется на всех известных нам ВСОМ. Однако, можно внести одно улучшение (которое давно применяется на Бауманских олимпиадах отборочного тура): не назначать заранее баллы за задачу, поскольку заранее неизвестно, насколько трудна какая задача. Разумнее определять ценность задачи по итогам проверки, а во время проверки применять относительные баллы. Более сложная задача должна цениться выше, но не настолько, чтобы перевешивать более двух других задач, так как студент может хорошо знать какой-то раздел математики, но отставать в других.

Апелляция

Желающих апеллировать может оказаться настолько много, что за отведенное на апелляцию время не всем желающим удастся попасть на нее. Оптимальное решение этой проблемы: пускать студентов на апелляцию в порядке убывания предварительной суммы баллов, поскольку изменение результатов именно в верхней части итоговой таблицы может повлиять на расстановку победителей. Чтобы апелляция шла без затруднений со стороны преподавателей, в апелляционную комиссию должно входить хотя бы по одному преподавателю из каждой подкомиссии по проверке задач.

Поощрение участников ВСОМ

Студентам редко удается получать премии за успехи в математических олимпиадах, но есть и другие методы поощрения. Студентам-бауманцам за успехи в тех или иных этапах ВСОМ начисляются призовые баллы, которые по приказу декана факультета фундаментальных наук (ФН) прибавляются к баллам на зачетах и экзаменах по математическим предметам. Для студентов особенно важно, что дипломы за успехи в математических олимпиадах учитываются при приеме в магистратуру и аспирантуру.

Заключение

Математические олимпиады развивают способности к решению нестандартных задач, что помогает студентам в учебе и в дальнейшем в научной работе. Результаты олимпиад помогают выявить хорошо освоивших знания и творчески мыслящих студентов [5, 6]. Многие из них успешно продолжают учебу в аспирантуре. Например, сотрудники кафедр ФН-2 и ФН-1 - выпускники МГТУ им. Н.Э. Баумана М.Е. Яковлев, А.О. Багапш, И.В. Баранов в студенческие годы активно участвовали во всероссийских олимпиадах по высшей математике.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Власова Е.А., Попов В.С., Пугачев О.В. О математических олимпиадах для студентов технических вузов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. 2017. № 3. С. 108-119. DOI: 10.18384/2310-7251-2017-3-108-119.
2. Кожухов И.Б., Свентковский В.А., Соколова Т.В. Московские городские студенческие олимпиады по математике за 1996 - 2009 гг. М.: Техполиграфцентр, 2010. 230 с.
3. Ройтенберг В.Ш., Оленикова Ю.К., Сидорова Л.А. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ. Ярославль, Издательство ЯГТУ, 2012. 128 с.

4. Лукьянов В.Д., Спектор В.Е., Фаллер О.В. XVII Всеармейская олимпиада по математике для курсантов высших военно-учебных заведений Министерства обороны Российской Федерации // Математика в высшем образовании. 2012. №10. С. 67-77.
5. Рахманкулова Г.А., Мустафина Д.А., Суркаев А.Л., Светличная В.Б., Матвеева Т.А., Ребро И.В., Сухова Т.А. Внутривузовские студенческие физико-математические олимпиады как средство формирования компетенций у студентов технического вуза // Современные наукоемкие технологии. - 2020. - № 9. - С. 209-214; URL: <https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=38243> (дата обращения: 23.03.2024).
6. Дударева Н.В., Бодряков В.Ю. Студенческие математические олимпиады и конкурсы в УрГПУ как неформальный индикатор уровня и инструмент мотивации к углублению предметной подготовки будущих учителей. Педагогическое образование в России. 2021. № 3 119. С. 119-135.

Oleg V. Pugachev,

Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

opugachev@bmstu.ru

Yan Yu. Pavlovskiy,

Assistant, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Comparative analysis of All-Russian Olympiads on higher mathematics for technical students

Abstract. Olympiads on higher mathematics help technical students to extend their theoretical knowledge and practical skills. Our purpose is to analyze details of the three stages of students' mathematical Olympiads in Russia, methods of encouraging the students to take part therein, organization of the competition and checking the students' works; to compare peculiarities of organizing the Olympiad in various institutes, and to compare auditoria and distant forms of the competition. As outcome we give recommendations to improve organization of mathematical Olympiads, and evaluate their effect upon academic performance of students and their future scientific activity. We give examples of sets of tasks offered in some Olympiads.

Keywords: Olympiad on higher mathematics, creative thinking, subjects of tasks, encouragement.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПРОЦЕССА ПРОВЕДЕНИЯ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УРОВНЯ ДЕТАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЕГО ПОЛЕТА

Аннотация

В работе освещаются некоторые особенности методики преподавания процесса проведения сравнительного анализа моделирования процесса управления квадрокоптера в зависимости от уровня детализации математической модели динамики его полета, что актуально при работе со студентами инженерных и технических специальностей. Для определенности в рамках работы были рассмотрены случаи синтеза программного управления в терминах сил и моментов, а также в терминах напряжений, задающих скорости вращения винтов беспилотных летательных аппаратов. Целью работ являлось, с одной стороны - решение задачи синтеза программного управления БПЛА, с другой - формирование алгоритма эффективного взаимодействия преподавателя со студентом. Для разбираемых случаев программных траекторий представлен план проведения научной работы, включающий сравнение результатов моделирования в рамках реализации программной траектории.

Ключевые слова

методика преподавания, математическое моделирование, программное управление, динамика квадрокоптера

АВТОРЫ

Ряхимов Ринат Равильевич,
студент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ryakhimov.rinat@gmail.com

Кустов Аркадий Юрьевич,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
arkadiykustov@yandex.ru

Введение

При работе со студентами технических специальностей, особенно на старших курсах, в рамках проводимых ими курсовых и дипломных работ по теории автоматического управления (ТАУ) или математическому моделированию, зачастую выдается задание, заключающееся в составлении математической модели того или иного технического объекта с описанием особенностей его функционирования и дальнейшем решении задачи синтеза управления и моделирования его поведения при заданном воздействии. Требования, предъявляемые к студенту, включают самостоятельное (за исключением возможности консультации у преподавателя) выполнение этой работы, и с первого шага - составление системы уравнений, описывающих исследуемые динамические процессы - у студента могут возникнуть проблемы. Как правило, их причиной является отсутствие четкого понимания плана проведения всей работы, а также

нехватка навыка ее организации. На примере решения студентом третьего курса задачи синтеза программного управления для четырехвинтового беспилотного летательного аппарата (БПЛА) продемонстрирована эффективность методики взаимодействия между студентом и преподавателем, позволившая не только выделить для студента основные этапы его работы, но и помочь ему практически самостоятельно выполнить всю работу. Причиной выбора в качестве задачи той, что рассматривается в данной работе, можно назвать следующую: в наши БПЛА дни получили широкое применение во многих сферах: они выполняют транспортные функции (перевозка различных весов и грузов), функции фото- и видеосъемки, логистические и навигационные функции.

Особенности устройства квадрокоптера, связанные с наличием нескольких тяговых двигателей, и необходимость постоянной стабилизации аппарата в пространстве предъявляют существенные требования к работе систем управления. К простейшим задачам управления БПЛА относят построение программного управления, реализующего полет по заранее известной траектории. На решение этой задачи ключевое влияние оказывают степень детализации математической модели и множество ограничений, накладываемых на управление, и требований к точности реализации траектории. В данной статье в части технических результатов приводится решение задачи программного управления БПЛА в двух вариантах детализации его математической модели с последующим сравнительным анализом. В заключении представлено описание результатов, полученных при рассмотрении поставленной задачи анализа, а также алгоритм, отражающий основные шаги взаимодействия студента, выполнявшего данную работу, с преподавателем.

Методология и результаты исследования

При постановке любой задачи (предполагается, что задача поставлена преподавателем, а решение оставлено за студентом) необходимо донести до исполняющего работу основные элементы научного метода исследования, на основе которого и будут выстроены шаги решения отдельных этапов задачи.

По определению, математическое моделирование есть изучение объекта посредством математических моделей, отражающих в виде точных математических формул те или иные закономерности, наблюдаемые в оригинале. Ввиду сказанного, решение любой задачи управления начинается с составления математической модели объекта управления. Следовательно, в разбираемом случае - управление полетом БПЛА - реализация закона управления будет неотрывно наследовать свойства решений системы уравнений, описывающих динамику объекта. Существуют несколько подходов к исследованию математической модели объекта БПЛА. Далее приведены некоторые из них:

1. *Модель с управлением в терминах сил и моментов.* Преимущества: легко составляемая и легко исследуемая модель; недостатки: сложности реализации на реальном объекте, отсутствие учета многих ограничений.

2. *Модель с управлением в терминах напряжений, подаваемых на электродвигатели квадрокоптера.* Преимущества: учет колебательный контур моторов БПЛА, учет многие ограничения физического и аппаратного уровня, связанные с мощностями нашего реального объекта; недостатки: более сложная математическая модель (увеличение количества уравнений при сохранении размерности вектора управления).

3. *Модель с цифровым уровнем детализации.* Преимущества: самый глубокий уровень детализации; недостатки: излишне сложная модель как для составления, так и для исследования.

В данной работе внимание уделялось первым двум вариантам степеней детализации математических моделей.

Далее, после понимания общей идеи управления БПЛА, студент должен приступить к непосредственному выполнению одного из основных этапов - собственно составлению математической модели исследуемого процесса в рамках сделанных предположений.

При составлении математической модели движения БПЛА как твердого тела в пространстве вводятся две системы координат (СК): инерциальную (неподвижную, связанную с землей) и неинерциальную (подвижную, связанную с телом), см. рис. 1. Немаловажную роль играют вводимые предположения:

1. Центр неинерциальной системы координат совпадает с центром масс (иначе - см. теорему Гюйгенса-Штейнера).
2. Оси неинерциальной системы координат направлены вдоль главных осей инерции (иначе - см. задачу о собственных значениях матрицы тензора инерции).

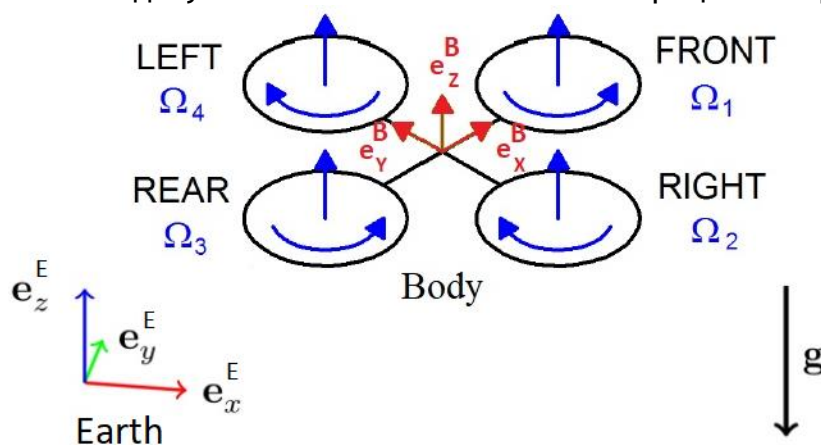


Рис. 1. Введенные системы координат.

Обычно составление математической модели объекта управления разбивается на три части: механическую, кинематическую и динамическую, и на каждом этапе происходит учет соответствующих физических закономерностей.

Является крайне желательным образование у студента «широкой» степени понимания вопроса, т.е. каждой отдельной части задачи должно быть посвящено достаточное количество времени, а работа, выполненная на каждом из этапов, сопровождается некоторыми пояснениями как самого процесса решения, так и его места в работе в целом.

На первом этапе была выбрана степень приближения звеньев БПЛА их алгебро-геометрическим аналогом: цилиндрами, сферами, конусами и т.д. (см. рис. 2), после чего производится вычисление напрямую требуемых характеристик (масса, размеры и пр.).

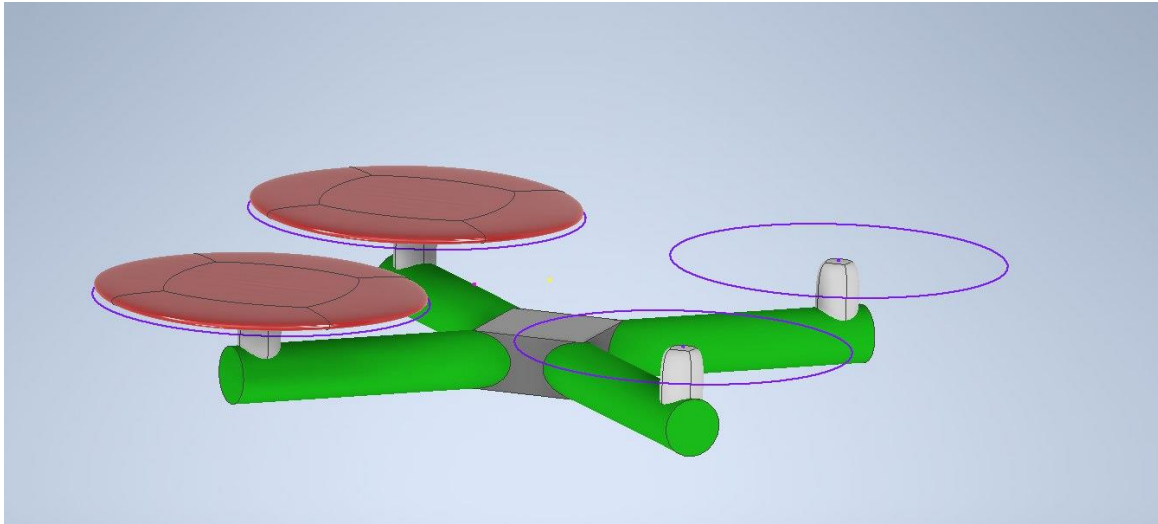


Рис. 2. Упрощенная механическая модель БПЛА.

Для рассматриваемого объекта оси связанной системы координат сонаправлены главным осям инерции. В силу высокой симметричности модели, матрицу тензора инерции в выбранной неинерциальной системе координат будем считать диагональной (наибольшие отличия от нулей будут в элементах J_{xy} и J_{yx} , но даже они не сильно повлияют на результаты моделирования при использовании диагональной матрицы):

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Для центральной коробки, несущей бортовую аппаратуру, и аккумулятора (куб и прямоугольный параллелепипед) составляющие моменты инерции вычисляются по следующим соотношениям (полученные матрицы тензоров инерций далее умножаются на матрицу поворота для согласования с выбранной подвижной системой координат):

$$\begin{cases} J_{XX}^{(1,2)} = M \left(\frac{W^2}{12} + \frac{H^2}{12} + D^2 \right) \\ J_{YY}^{(1,2)} = M \left(\frac{L^2}{12} + \frac{H^2}{12} + D^2 \right) \\ J_{ZZ}^{(1,2)} = M \left(\frac{L^2}{12} + \frac{W^2}{12} \right) \end{cases} \quad (2)$$

где M - масса звена, W - ширина, L - длина, H - высота, D - расстояние от ЦМ звена до плоскости $Ox_b y_b$. Для одного луча БПЛА или одного двигателя, принятого за цилиндр с равномерно распределенной плотностью (остальные части вычисляются, исходя из геометрии и высокой симметричности модели) соответствующие элементы матрицы тензора инерции равны

$$\begin{cases} J_{XX}^{(3,4)} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + D^2 \right) \\ J_{YY}^{(3,4)} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + L^2 + D^2 \right) \\ J_{ZZ}^{(3,4)} = M \left(\frac{R^2}{2} + L^2 \right) \end{cases} \quad (3)$$

где M - масса цилиндра, R - радиус, H - высота, D - расстояние от ЦМ звена до плоскости $Ox_b y_b$, L - расстояние от ЦМ звена до оси Oz_b . Для одного винта БПЛА, принимающегося при вращении за плоский цилиндр с переменной плотностью

(остальные части вычисляются, исходя из геометрии и высокой симметричности модели) значения инерций вычисляются так:

$$\begin{cases} J_{XX}^{(5)} = M \left(\frac{R^2}{6} + \frac{H^2}{12} + D^2 \right) \\ J_{YY}^{(5)} = M \left(\frac{R^2}{6} + \frac{H^2}{12} + L^2 + D^2 \right) \\ J_{ZZ}^{(5)} = M \left(\frac{R^2}{3} + L^2 \right) \end{cases} \quad (4)$$

где M - масса цилиндра, R - радиус, H - высота, D - расстояние от ЦМ звена до плоскости $Ox_b y_b$, L - расстояние от ЦМ звена до оси Oz_b . Таким образом, матрица тензора инерции тела будет представлять собой сумму матриц тензоров инерций каждого его звена.

Работа на первом этапе сопровождалась как изучением студентом литературы по данному вопросу, так и непосредственной практической работой с БПЛА (в данном случае заключающейся в проведении замеров длин, масс и т.д.), в ходе чего у студента развивалось всестороннее - теоретическое и практическое - понимание вопроса

На втором этапе на основе выбранных систем обобщенных координат устанавливается связь отдельных звеньев между собой. Результатом является уравнение, описывающее связь вектора скорости \dot{x}_e в инерциальной СК с вектором скорости V_b в неинерциальной СК.

$$\dot{x}_e = P(\varphi_e) V_b, \quad (5)$$

где вектор x_e содержит информацию о линейных координат и углах в инерциальной СК:

$$x_e = [X \ Y \ Z \ \varphi \ \theta \ \psi]; \quad (6)$$

аналогично вектор V_b содержит информацию о линейных и угловых скоростях в неинерциальной СК:

$$V_b = [V_b^X \ V_b^Y \ V_b^Z \ p \ q \ r]; \quad (7)$$

а матрица перехода $P(\varphi_e)$ является блочно-диагональной:

$$P(\varphi_e) = \begin{bmatrix} R(\varphi_e) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & Q(\varphi_e) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где блок $0_{3 \times 3}$ - матрица 3-го порядка с нулевыми элементами, а $R(\varphi_e)$ и $Q(\varphi_e)$ - матрицы перехода для линейных и угловых составляющих соответственно, определяемые следующими выражениями:

$$R(\varphi_e) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\varphi & s_\psi s_\theta + c_\psi s_\theta c_\varphi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\theta + s_\psi s_\theta s_\varphi & -c_\psi s_\theta + s_\psi s_\theta c_\varphi \\ -s_\theta & c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$Q(\varphi_e) = \begin{bmatrix} 1 & s_\varphi t_\theta & c_\varphi t_\theta \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & \frac{s_\varphi}{c_\theta} & \frac{c_\varphi}{c_\theta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Для упрощения формы записи (9) и (10) использовались обозначения:

$$s_\varphi = \sin \varphi; \quad c_\varphi = \cos \varphi; \quad t_\varphi = \tan \varphi.$$

На заключительном этапе происходит непосредственное составление системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику полета квадрокоптера. Модель представлена 3 уравнениями второго порядка в инерциальной системе координат (задающих поступательное движение центра масс квадрокоптера) [1]:

$$m \ddot{x}_e = F_e, \quad (11)$$

где m – масса квадрокоптера, F_e – вектор совокупной силы; и 3 уравнения первого порядка в неинерциальной системе отсчета (отвечающих за вращение тела относительно его центра масс):

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b) = M_b, \quad (12)$$

где ω_b – угловая скорость центра масс БПЛА в неинерциальной СК, M_b – совокупный момент сил.

Итак, природа сил и моментов представляет собой следующую сумму:

$$f_b = f_{b,1} + f_{b,2} + f_{b,3} \quad (13)$$

– влияние силы тяжести:

$$f_{b,1} = ((0 \ 0 \ -mg)R(\varphi_e) \ 0 \ 0 \ 0)^T; \quad (14)$$

– прямое влияние подъемных сил:

$$f_{b,2} = (0 \ 0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T; \quad (15)$$

– влияние гироскопического момента от пропеллеров: ?

$$f_{b,3} = (0 \ 0 \ 0 \ (J_M E \omega_b \)^T)^T; \quad (16)$$

где g – гравитационная константа, u_i – составляющие вектора управления, – вектор скоростей вращения винтов, J_M – полный момент инерции мотора относительно оси вращения.

Таким образом, с помощью формализма Ньютона-Эйлера получена система из 6-ти дифференциальных уравнений в гибридной (*Earth-Body*) системе координат. Выбор такой гибридной системы координат обоснован с практической точки зрения: значения угловых скоростей удобнее получать в неинерциальной системе отсчета (измерения на борту легче конвертируются в подвижную систему, матрица тензора инерции не изменяется во времени), а линейных составляющих – в неподвижной системе (для вычисления реального положения объекта относительно земли).

$$\begin{cases} \ddot{x} = (s_{\varphi_e} s_{\psi_e} + c_{\varphi_e} s_{\theta_e} c_{\psi_e}) \frac{u_1}{m} \\ \ddot{y} = (-s_{\varphi_e} c_{\psi_e} + c_{\varphi_e} s_{\theta_e} s_{\psi_e}) \frac{u_1}{m} \\ \ddot{z} = -g + c_{\varphi_e} c_{\theta_e} \frac{u_1}{m} \\ \dot{p} = \frac{J_{YY} - J_{ZZ}}{J_{XX}} qr - \frac{J_M}{J_{XX}} q\Omega + \frac{u_2}{J_{XX}} \\ \dot{q} = \frac{J_{ZZ} - J_{XX}}{J_{YY}} pr + \frac{J_M}{J_{YY}} p\Omega + \frac{u_3}{J_{YY}} \\ \dot{r} = \frac{J_{XX} - J_{YY}}{J_{ZZ}} pq + \frac{u_4}{J_{ZZ}} \end{cases} \quad (17)$$

Перед переходом к заключительному этапу студенту можно предложить провести моделирование полета БПЛА в соответствии с полученной системой (17) при произвольных (но разумных с некоторых позиций) управлениях и описать качественно наблюдаемое движение виртуальной копии.

В качестве управления в первом случае рассматриваются подъемные силы и гироскопические моменты от пропеллеров, т.е. управление БПЛА осуществляется в терминах сил и моментов. Во втором случае к предложенной выше системе дифференциальных уравнений добавляются дополнительные системы, определяющие вектор управления (18) и описывающие электродинамику моторов (19) [2]:

$$\begin{cases} u_1 = c_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ u_2 = c_1 c_2(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2) \\ u_3 = c_1 c_2(-\Omega_1^2 + \Omega_3^2) \\ u_4 = c_3(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{cases} \quad (18)$$

где c_1 – коэффициент тяги, c_2 – длина луча БПЛА, c_3 – коэффициент сопротивления (вывод c_1, c_3 описан в [3]);

$$\dot{\Omega}_i = \alpha\Omega_i + \beta\Omega_i^2 + \gamma V_i, \quad (19)$$

где α, β, γ - константы, определяющие электродинамику моторов; V - вектор напряжения.

Для этих двух случаев было синтезировано программное управление, реализующее заданную траекторию (без учета аэродинамической составляющей сил сопротивления) [4]. На данном этапе также стоит упомянуть про введенные предположения:

1. Программная траектория - полином, отвечающий заданным граничным условиям.

2. Программная траектория может быть реализована (нереализуемые случаи не рассматриваются).

На примере простейшей траектории - взлета на заданную высоту - проведем сравнительный анализ результатов моделирования. При взлете на высоту заметим, что единственной ненулевой составляющей (18) будет u_1 , что в терминах напряжений означает равенство напряжений V_i на электродвигателях БПЛА (равенство скоростей вращения винтов i). Отличие синтеза управления, реализующего простейшую и более сложную траекторию, лишь состоит в количестве используемых уравнений (18) и (19), в остальном - всё идентично. Идея синтеза управления представлена ниже:

1. В терминах сил и моментов:

$$z_e(t) = z_e^*(t) \Rightarrow U_1^* = \frac{m(\ddot{z}_e^* - g)}{c_{\varphi_e} c_{\theta_e}} \quad (20)$$

То есть необходимо задать такой вектор управления $U = (U_1^* \ 0 \ 0 \ 0)$ для реализации заданной траектории $z_e^*(t)$.

2. В терминах напряжений на моторах БПЛА:

$$\begin{cases} u_1 = c_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \dot{\Omega}_i = \alpha\Omega_i + \beta\Omega_i^2 + \gamma V_i, \quad i = \overline{1,4} \end{cases} \Rightarrow \quad (21)$$

$$V_i^* = -\frac{m\beta(\ddot{z}_e^* + g)}{4c_1\gamma c_{\varphi_e} c_{\theta_e}} + \frac{1}{\gamma}(\dot{\Omega}_i - \alpha\Omega_i), \quad i = \overline{1,4} \quad (22)$$

То есть необходимо подать такой вектор напряжения V^* на моторы БПЛА для реализации заданной траектории $z_e^*(t)$.

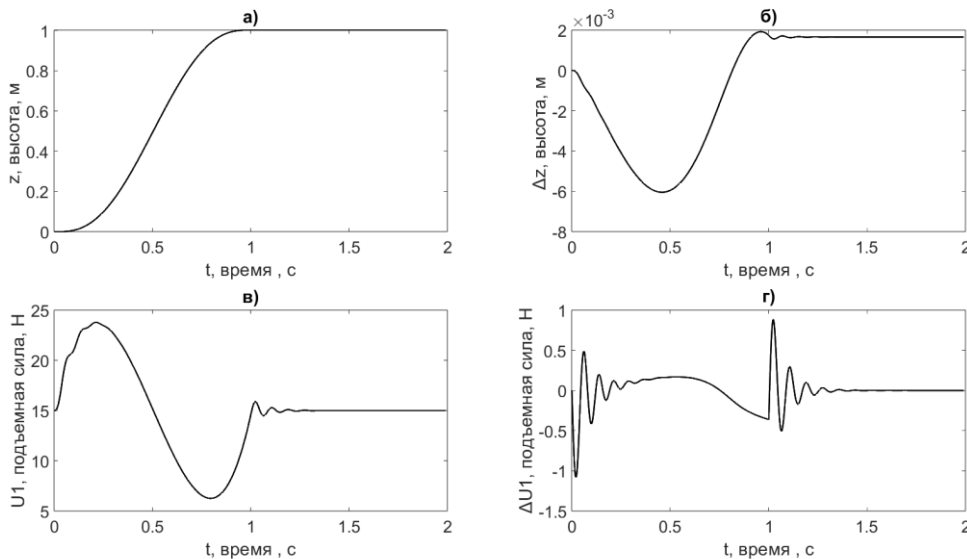


Рис. 3. Графики функций времени: а) высоты; б) разности высот для двух случаев; в) синтезированного управления в терминах напряжений г) разности управлений для двух случаев

Результаты моделирования взлета на заданную высоту представлены на рисунке 3. Проведенный сравнительный анализ позволяет сделать вывод, что при решении

задачи реализации программного управления выбор детализации математической модели (между рассмотренными случаями), на первый взгляд, не играет существенной роли (см. рис. 3.б) - в некоторый момент времени при взлете на высоту 1 метр разность траекторий составляет до 6 мм. Но не стоит забывать, что рассматривается вариант простой траектории, малых скоростей и простейшей задачи теории автоматического управления, в противном случае - разница может быть намного существеннее. Более того, и с практической точки зрения, добавление в систему уравнений (18) и (19) оправдано, так как такая модель более точно описывает поведение реального объекта, учитывает колебательный контур электродвигателей БПЛА (см рис. 3.г) и позволяет накладывать ограничения на управление в зависимости от мощности нашего аппарата. Данная работа может быть использована как наглядное пособие проведения работ студентом третьего курса по предмету теория автоматического управления и математическое моделирование.

Заключение

В работе были рассмотрены две математические модели полета БПЛА: в терминах сил и моментов и в терминах напряжений, задающих скорости вращения винтов. Для каждой из них решена задача синтеза программного управления, реализующего движение БПЛА по заданной траектории. На примере реализации заданной траектории было проведено исследование влияния степени детализации его математической модели. Работа выполнялась с целью привития студенту основных навыков, необходимых для самостоятельного выполнения аналогичной работы в будущем. По ходу выполнения работы отдельные ее этапы были описаны с точки зрения методологии преподавания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Fossen, T.I. , Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control, Wiley , 2011, P. 600.
2. M. Alakula. Power Electronic Control in Electrical Systems. 2002. P. 451.
3. E.L. Houghton and P.W. Carpenter. Aerodynamics for Engineering Students. Butterworth-Heinemann, 2003. P. 614.
4. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов, Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015 . - № 2. С.101-114.
5. Медунецкий В.Н., Силаева К.В. Методология научных исследований. НИУ ИТМО, 2016. - 55 стр.

Rinat R. Ryakhimov,

Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
ryakhimov.rinat@gmail.com

Arkadiy Yu. Kustov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
arkadiykustov@yandex.ru

Methodology for teaching the process of conducting a comparative analysis of the quadrotor control modeling results depending on the mathematical model of its flight dynamics

Abstract. In the paper, some specifics of methodology for teaching the process of conducting a comparative analysis of modeling the control process of a quadcopter depending on the detalization level of the mathematical model of its flight dynamics, which is important when working with students of engineering and technical specialties. Within the framework of the current research activity, two cases of program control problem in terms of forces and moments, as well as in terms of voltages setting the rotation speed of the propellers of unmanned aerial vehicles were considered. The goal of the work is, on the one hand, to solve the problem of synthesizing the program control for a UAV, and on the other, to form an algorithm for effective interaction between a teacher and a student. For the considered cases of program trajectories, a plan for carrying out scientific work is presented, including a comparison of modeling results within the framework of the implementation of the program trajectory.

Keyword: scientific methods, mathematical modeling, program control, quadcopter dynamics.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ В РАМКАХ ИЗУЧЕНИЯ КУРСА МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Аннотация

Актуальность статьи обусловлена возрастающей популярностью вычислительных методов. Решать физические задачи исключительно аналитическими методами не представляется возможным. Встречаются случаи, когда проще отыскать решение численно, нежели аналитически. Общая идея численных методов заключается в замене непрерывной среды её дискретным аналогом: в рассматриваемой области, где ищут решение, вводят разностную сетку с определёнными шагами по времени и пространству. Цель данной работы – обучить решению задачи о теплопроводности в цилиндрических координатах в рамках курса методов вычислений, который изучается студентами старших курсов физико-математических и технических специальностей, продемонстрировать возможность и наглядность интегро-интерполяционного метода при решении задач математической физики. Представлены переход из декартовых координат, описание используемого численного метода, проведены сравнения и верификация результатов вычислительных экспериментов.

Ключевые слова

уравнения параболического типа, уравнение теплопроводности, численные методы в обучении, применение интегро-интерполяционного метода, разностные схемы, метод конечных разностей, вычислительные алгоритмы, C++, Wolfram Mathematica

АВТОРЫ

Титов Александр Дмитриевич,
аспирант

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
titov.alex31@yandex.ru

Забелина Светлана Борисовна,

кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

Введение

Уравнение теплопроводности – дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое описывает распределение температуры в заданной области пространства и ее изменение во времени. Является уравнением параболического типа. Имеет обширное применение. [1] Исследование физических процессов методом конечных разностей подразумевает замену непрерывной среды ее дискретным аналогом. Такая замена может быть выполнена различными способами и для исходной дифференциальной задачи существует практически неограниченное семейство разностных схем. В связи с этим возникает проблема отбора схем, обладающих необходимыми свойствами. Определяющую роль в оценке качества вычислительного

алгоритма играют требования аппроксимации, устойчивости и сходимости. Эти фундаментальные понятия носят асимптотический характер. При достаточной гладкости решения они предполагают стремление шагов разностной сетки к нулю. Для линейных задач из аппроксимации и устойчивости схемы вытекает ее сходимость. При численном решении конкретных физических задач, помимо обычных требований аппроксимации, сходимости, устойчивости, для оценки качества разностных алгоритмов необходимо привлекать дополнительные соображения. Одним из таких критериев качества, который следует учитывать при выборе разностного алгоритма, является принцип консервативности схем, физического содержания задачи. Исходная физико-математическая постановка задачи представляет собой запись законов сохранения, определяющих рассматриваемый процесс. Принцип консервативности состоит в том, что в дискретной модели среды выполняются разностные аналоги этих законов сохранения. [2]

Уравнения параболического типа сложно решить аналитически, поэтому прибегают к численным методам. Для решения можно применить методы конечных разностей. В этой работе рассматривается задача о распространении тепла в бесконечном цилиндре. Обладает цилиндрической симметрией, поэтому понадобится краевое условие на оси цилиндра, которого нет в исходной физической постановке задачи. Поскольку в однородной среде максимум и минимум температуры достигается на границе области, то на оси цилиндра будет оправдано условие $u_r(r=0) = 0$. [3]

В данной статье рассматривается возможность решения задачи теплопроводности интегро-интерполяционным методом, изучаемым студентами старших курсов в рамках курса «Методы вычислений». Этот метод является одним из основополагающих в данной дисциплине, поскольку на его основе построено множество методов для численного моделирования физических задач, которые связаны с уравнениями в частных производных. Зачастую интегро-интерполяционный метод преподавательский состав излагает на примерах уравнений в декартовых координатах. Однако, с помощью дополнительных преобразований его можно осваивать и на уравнениях в других координатах, тем самым демонстрируя его обширность и многообразие. Изложенная методика использования метода позволяет выполнять различного рода лабораторные работы и курсовые проекты.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим задачу о распространении тепла в бесконечном сплошном цилиндре. Запишем уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta t + q, \quad (1)$$

где $u(x, y, z, t) = u(x, y, t)$ температура среды, $k = k(x, y)$ – параметр теплопроводности, t – время, Δ – оператор Лапласа, q – источник. Нужно данное уравнение представить в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , учитывая, что $u = u(r)$ и $k = k(r)$. Полученное уравнение решить с помощью интегро-интерполяционного метода. Известно, что $u(x, y, z, 0) = u_0$; $k \frac{\partial u}{\partial n}(r=R) = P(t)$ – функция потока (также реализовать случай, когда вместо последнего условия дано $u(x, y, z, 0) = u(r=R, \varphi, t) = U_1$, где U_1 является фиксированным значением).

В первую очередь стоит отметить, что цилиндрическая система координат является одной из многих трёхмерных систем координат, для которой существуют законы преобразования координат между цилиндрической системой координат и другими системами. Закон преобразования координат от цилиндрических (r, φ, z) к декартовым (x_1, x_2, x_3) выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \varphi. \\ x_3 = z \end{cases}$$

Значит, $u = u(r \cos \varphi) = u(r, \varphi)$, $k = k(r \cos \varphi) = k(r, \varphi)$. Но по условию задачи, при составлении уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах частными производными по углу можем пренебречь (принимая $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$, где f – любая функция, имеющая частную производную). То есть $u = u(r)$, $k = k(r)$.

В уравнение теплопроводности (1) входит оператор Лапласа. В свою очередь он эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции, то есть $\Delta = \text{div grad}$. Потому запишем дивергенцию в цилиндрической системе координат.

Воспользуемся формулой:

$$\text{div}(A) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 H_2 H_1) \right),$$

где H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ламе.

Для нахождения коэффициентов Ламе запишем квадрат дифференциала длины кривой

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Метрический тензор g_{ij} имеет вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\sqrt{g_{ii}} = H_i$, $i = 1, 2, 3$, то $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$.

Значит, в цилиндрической системе координат дивергенцию можно записать следующим образом:

$$\text{div } A(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z).$$

Дивергенция от $k \frac{\partial u}{\partial x}$ в цилиндрической системе координат запишется так (учитывая, что $x = x(r, \varphi)$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Пренебрегая вторым слагаемым (по постановке задачи), получится, что уравнение (1) будет преобразовано к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial u}{\partial r} \right) + q, \quad (2)$$

а граничные условия запишутся в следующем виде: $k \frac{\partial u}{\partial r} = P_0 = 0$ (при $r = 0$);

$k \frac{\partial u}{\partial r} = P(t)$ (при $r = R$); $u(R, t) = U_1 = \text{const.}$ [4]

Для полученного уравнения обозначим разностную схему. Для её составления применим интегро-интерполяционный метод. [5]

Запишем уравнение (2) в виде: $ru_t = (kru_r)_r + qr$. Введём в $\Omega_T = \{0 \leq r \leq R; 0 \leq t \leq T\}$ сетку: $\omega_h = \{r_i = i \cdot h; i = 0, \dots, N; h = \frac{R}{N}\}$ – равномерная сетка с шагом h на отрезке $0 \leq r \leq R$; $\omega_\tau = \{r_i = j \cdot \tau; j = 0, \dots, N_0; \tau = \frac{R}{N_0}\}$ – равномерная сетка с шагом τ на отрезке $0 \leq t \leq T$. Введём обозначения: $h_i = r_i - r_{i-1}$, где $1 \leq i \leq N$, $r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$, где

$0 \leq i \leq N - 1$, $\bar{h}_i = r_{i+1/2} - r_{i-1/2}$, где $1 \leq i \leq N - 1$, $\bar{h}_0 = h_0/2$, $\bar{h}_N = h_N/2$, $\tau = t_{j+1} - t_j$ (в случае равномерной сетки $\bar{h}_i = h_i = h$).

Запишем баланс тепла на интервале $[r_{i-1/2}; r_{i+1/2}]$:

$$\begin{aligned} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (ru_t - (kru_r)_r - qr) dr dt = 0 &= -I_1 + I_2 - I_3 = \\ &= - \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} qr dr dt + \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} ru_t dr dt - \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (kru_r)_r dr dt \end{aligned}$$

Последовательно вычислим каждый из интегралов I_1 , I_2 , I_3 :

$$I_1 = \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \tau qr dr \approx \bar{h}_i \tau q(r_i) r_i = \bar{h}_i \tau q_i r_i;$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} r_i u_t dr dt = \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} r_i (u(r, t_{j+1}) - u(r, t_j)) dr = \bar{h}_i r_i (u(r_i, t_{j+1}) - u(r_i, t_j)) \approx \\ &\approx \bar{h}_i r_i (\hat{y}_i - y_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(k \left(r_{i+1/2} \right) r_{i+1/2} u_t \left(t, r_{i+1/2} \right) - k \left(r_{i-1/2} \right) r_{i-1/2} u_t \left(t, r_{i-1/2} \right) \right) dt = \\ &= r_{i+1/2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k \left(r_{i+1/2} \right) u_t \left(t, r_{i+1/2} \right) dt - r_{i-1/2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} k \left(r_{i-1/2} \right) u_t \left(t, r_{i-1/2} \right) dt = \\ &= r_{i+1/2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} W \left(t, r_{i+1/2} \right) dt - r_{i-1/2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} W \left(t, r_{i-1/2} \right) dt, \end{aligned}$$

где $W(r, t) = k(r)u_r$.

Следует отметить, что

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} u_r dr = y_i - y_{i-1} = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{W(r, t)}{k(r)} dr = W \left(r_{i-1/2}, t \right) \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{1}{k(r)} dr.$$

Значит,

$$W \left(r_{i-1/2}, t \right) = \frac{1}{\int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{1}{k(r)} dr} = a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i},$$

где $a_i = \left(\frac{1}{h_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{1}{k(r)} dr \right)^{-1}$.

Тогда I_3 можно свести к виду

$$I_3 = r_{i+1/2} \tau \tilde{W} \left(r_{i+1/2}, t_{j+1} \right) - r_{i-1/2} \tau \tilde{W} \left(r_{i-1/2}, t_{j+1} \right) = \tau \left(r_{i+1/2} a_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h_{i+1}} - r_{i-1/2} a_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h_{i+1}} \right).$$

Стоит отметить, что \tilde{W} и y являются сеточными аналогами функций W и u соответственно.

Получается следующее разностное уравнение:

$$\bar{h}_i r_i (\hat{y}_i - y_i) = \bar{h}_i \tau r_i q_i + \tau \left(r_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h_{i+1}} - r_{i-\frac{1}{2}} a_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h_{i+1}} \right), \quad 0 < i < N.$$

Для вычисления коэффициента a_i можно использовать формулу:

$$a_i = \frac{1}{2} (k(r_i) - k(r_{i-1})), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Для аппроксимации левого граничного условия проинтегрируем уравнение (2) по прямоугольнику $r_0 \leq r \leq r_{1/2}$; $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_{1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (ru_t - (kru_r)_r - qr) dr dt = \\ = - \int_{r_0}^{r_{1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} qr dr dt + \int_{r_0}^{r_{1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} ru_t dr dt - \int_{r_0}^{r_{1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (kru_r)_r dr dt = 0. \end{aligned}$$

На левой границе получается следующее разностное уравнение:

$$\frac{h}{2} r_0 (\hat{y}_0 - y_0) = \frac{h}{2} r_0 \tau q_0 + \tau \left(r_{\frac{1}{2}} a_1 \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} - r_0 P_0 \right).$$

Для аппроксимации правого граничного условия проинтегрируем уравнение (2) по прямоугольнику $r_{N-1/2} \leq r \leq r_N$; $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \int_{r_{N-1/2}}^{r_N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (ru_t - (kru_r)_r - qr) dr dt = \\ = - \int_{r_{N-1/2}}^{r_N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} qr dr dt + \int_{r_{N-1/2}}^{r_N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} ru_t dr dt - \int_{r_{N-1/2}}^{r_N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (kru_r)_r dr dt = 0. \end{aligned}$$

На правой границе получается следующее разностное уравнение:

$$\frac{h}{2} r_N (\hat{y}_N - y_N) = \frac{h}{2} r_N \tau q_N + \tau \left(r_N P(t) - r_{N-1/2} a_N \frac{\hat{y}_N - \hat{y}_{N-1}}{h} \right).$$

Таким образом, разностная схема получена. Её можно записать в виде системы сеточных уравнений:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad 0 \leq i \leq N,$$

где $A_i = -\frac{1}{h} \tau r_{i-1/2} a_i$; $C_i = -(\bar{h} r_i + \tau r_{i+\frac{1}{2}} \frac{a_{i+1}}{h} + \tau r_{i-\frac{1}{2}} \frac{a_i}{h})$; $B_i = -\frac{1}{h} \tau r_{i+1/2} a_{i+1}$;

$F_i = -\bar{h} r_i (\tau q_i + y_i)$ при $0 \leq i \leq N$.

В случае $i = 0$: $A_0 = 0$; $B_0 = \frac{\tau}{h} r_{1/2} a_1$; $C_0 = -\frac{h}{2} r_0 - \frac{\tau}{h} r_{1/2} a_1$;

$F_0 = -(\tau r_0 P_0 - \frac{h}{2} (\tau q_0 + y_0))$.

В случае $i = N$: $A_N = -\frac{\tau}{h} r_{N-1/2} a_N$; $B_N = 0$; $C_N = -\frac{h}{2} r_N - \frac{\tau}{h} r_{N-1/2} a_N$;

$F_N = -\frac{h}{2} r_N y_N - \frac{h}{2} r_N q_N \tau - \tau r_N P(t)$.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался метод прогонки. [6] Для данного метода и всех сопутствующих моментов, связанных с осуществлением расчётов, была подготовлена программа на языке C++. Было проведено моделирование для двух материалов.

Рассмотрим распространение тепла в алюминиевом цилиндре. Коэффициент теплопроводности алюминия является постоянной величиной и равен $8.418 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$. Начальная температура $u_0 = 20 \text{ К}$, источник $q = 0$, радиус $R = 0.05 \text{ м}$, в качестве потока на правом конце взята функция $P(t) = 2 \cdot 10^{-4}$, $0 < t < T$, $T = 100 \text{ с}$.

На рисунках 1-4 приведены распределение тепла в алюминиевом цилиндре с нагреваемой боковой поверхностью (шаг по радиусу составляет $h = 10^{-4} \text{ м}$, шаг по

времени $\tau = 1$ с, при времени $T = 0.02$ с шаг по времени $\tau = 0.01$ с). Видно, что тепло проникает вглубь цилиндра, и в его центре температура повышается.

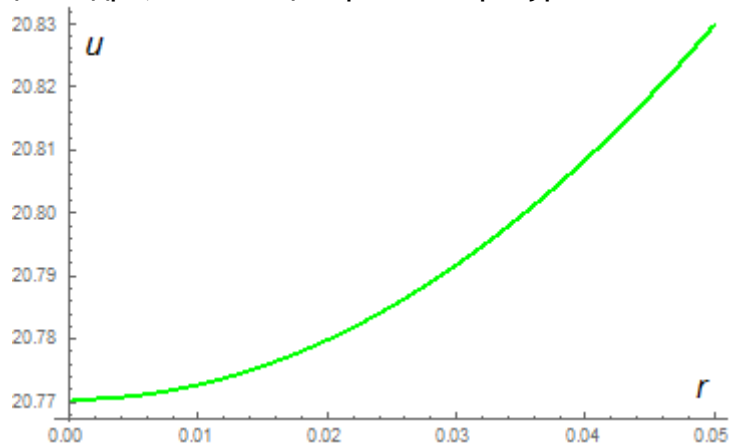


Рис. 1. Распределение тепла в алюминиевом цилиндре в момент времени $T = 100$ с.

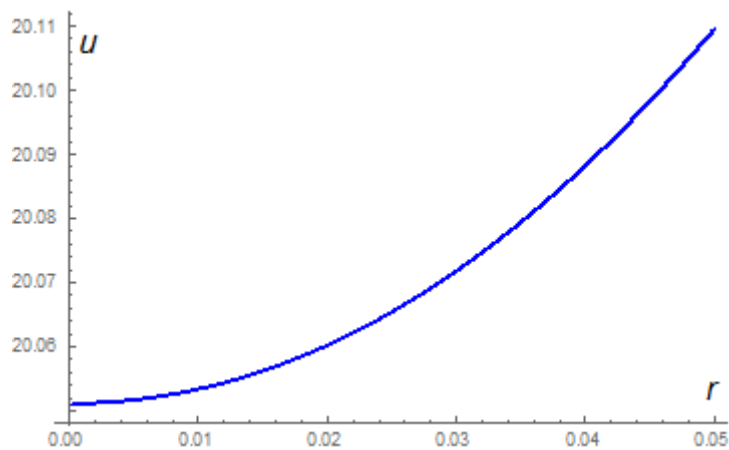


Рис. 2. Распределение тепла в алюминиевом цилиндре в момент времени $T = 10$ с.

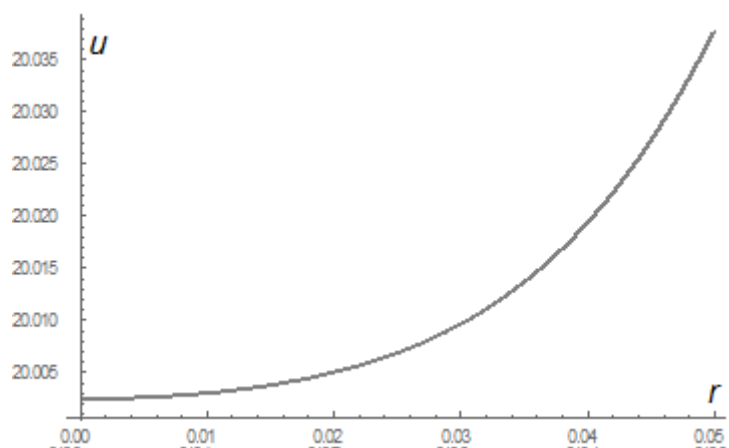


Рис. 3. Распределение тепла в алюминиевом цилиндре в момент времени $T = 2$ с.

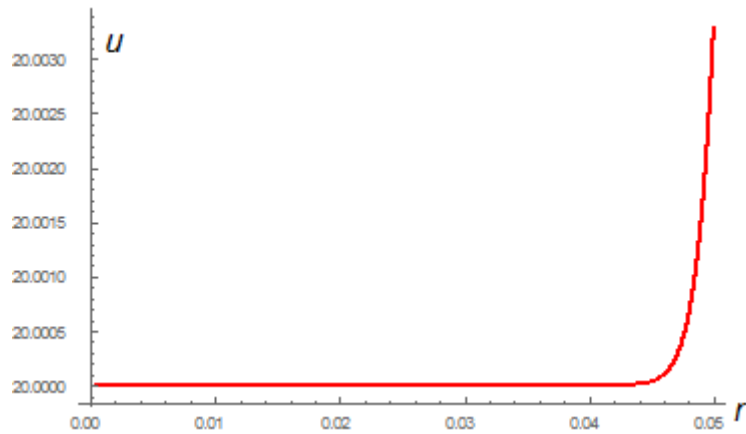


Рис. 4. Распределение тепла в алюминиевом цилиндре в момент времени $T = 0,02$ с.

Рассмотрим ещё один материал для сравнения скорости распространения тепла. В качестве примера исследуем распространение тепла в железе, у которого коэффициент температуропроводности составляет $2.3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Распространение тепла в железном цилиндре представляют зависимости, изображенные на рисунках 5-8.

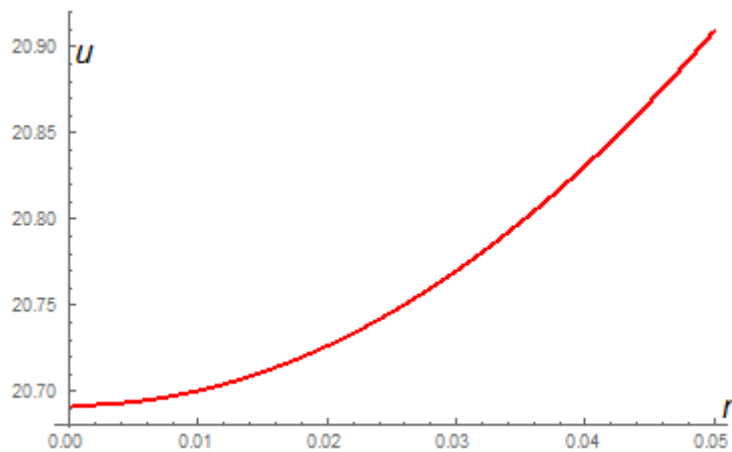


Рис. 5. Распределение тепла в железном цилиндре в момент времени $T = 100$ с.

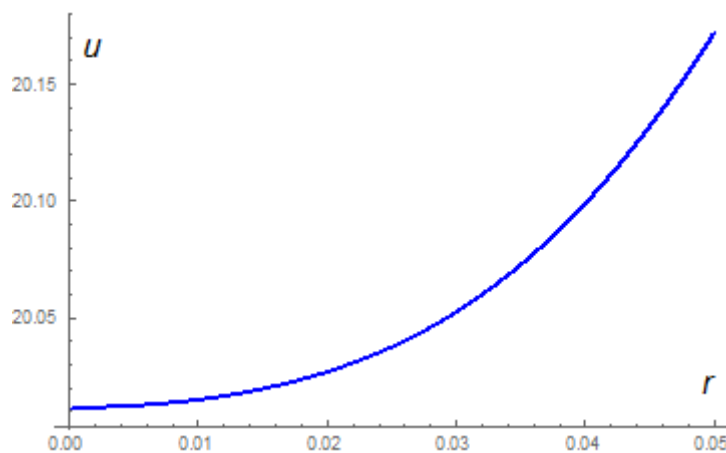


Рис. 6. Распределение тепла в железном цилиндре в момент времени $T = 10$ с.

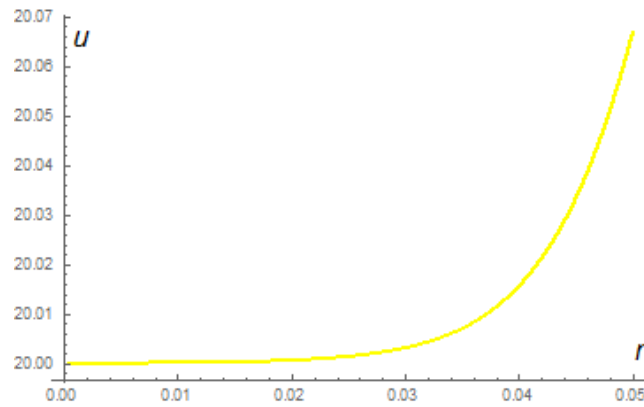


Рис. 7. Распределение тепла в железном цилиндре в момент времени $T = 2$ с.

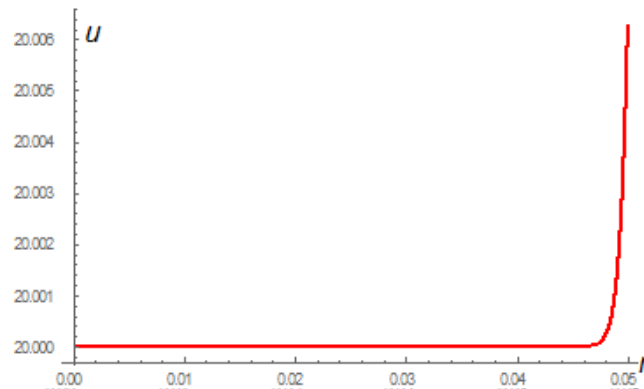


Рис. 8. Распределение тепла в железном цилиндре в момент времени $T = 0,02$ с.

Рассмотрим распределение тепла в алюминиевом и железном цилиндрах на одной координатной плоскости (см. рисунок 9), можно убедиться, что тепло быстрее распространяется в алюминии (видно, что центр цилиндра быстрее прогревается). Результаты не противоречат физике процесса, потому что у алюминия коэффициент температуропроводности выше, чем у железа.

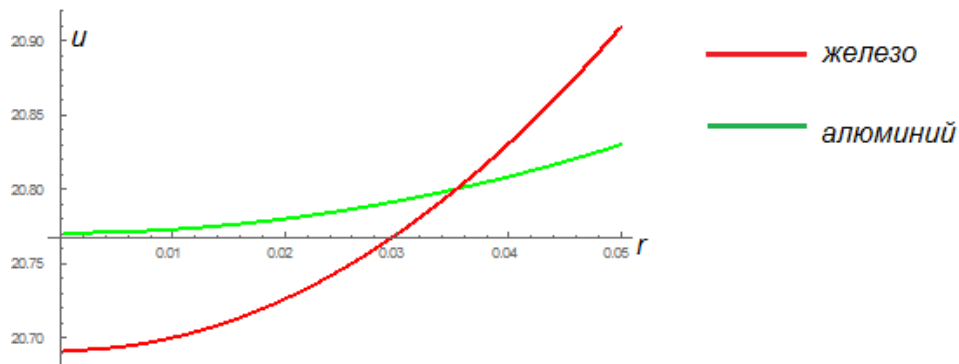


Рис. 9. Распределение тепла в цилиндрах в момент времени $T = 100$ с.

Стоит отметить, что физическая диффузия (для обоих веществ) имеет порядок 10^{-5} . Потому схемная диффузия (то есть отношение $\frac{h^2}{\tau}$) должно быть много меньше 10^{-5} , чтобы передать физический аспект процесса. В противном случае могут возникнуть неточности передачи.

Для рассматриваемой задачи аналитическое решение неизвестно, поэтому для исследования сходимости рассмотрим серию расчётов на последовательности сеток

с шагом $h = 5 \cdot 10^{-7}$ м, $h/2$, $h/4$, $h/8$. И получим, что на любой момент времени результаты расчётов на этих сетках практически не различимы. При этом, например, на момент времени $T = 100$ с $||y_h - y_{0.5h}|| = 3.74 \cdot 10^{-4}$; $||y_{0.5h} - y_{0.25h}|| = 1.54 \cdot 10^{-4}$; $||y_{0.25h} - y_{0.125h}|| = 9.76 \cdot 10^{-5}$. Результаты не противоречат предположению о сходимости.

Далее опишем исследование выхода на стационар. Здесь предполагается, что $u(r, t)$ с течением времени будет меняться все медленнее, то есть в пределе при $t \rightarrow \infty$ распределение температуры $u(r, t)$ становится стационарным (температура перестанет зависеть от времени).

Критерием выхода на стационар служит соотношение $||\frac{\hat{y}-y}{\tau}|| < \varepsilon$, то есть скорость процесса изменяется и должна с течением времени стать меньше определенного значения. При такой постановке время, когда данное условие будет соблюдено, можно считать временем выхода на стационар.

Рассмотрим задачу, когда при $R = 0.05$ м (на боковой поверхности) задано условие нулевой температуры (то есть $u(R, t) = U_0 = 0$). Значение источника $q = 8$. Тогда при выходе на стационар зависимость температуры от времени имеет вид: $u(r) = \frac{q(R^2 - r^2)}{4K}$. [7] Стационарное решение приведено на рисунке 10 (исследовано распределение тепла в алюминиевом цилиндре).

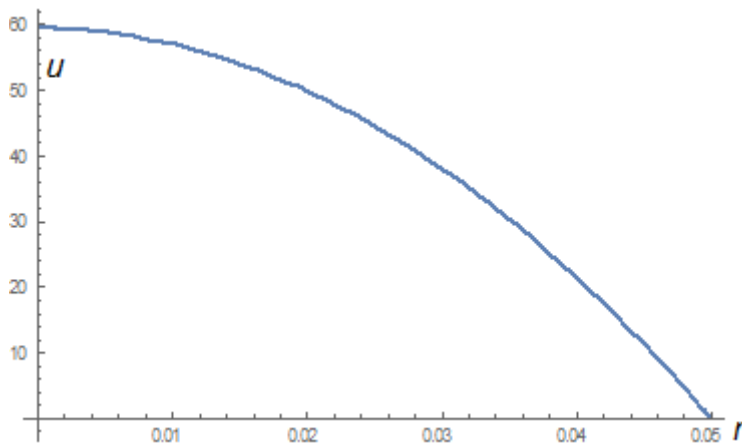


Рис. 10. Стационарное распределение температуры.

Результат численного решения данной задачи приведено на рисунке 11. Выход на стационар произошёл через $t = 89$ с; взято значение $\varepsilon = 10^{-6}$.

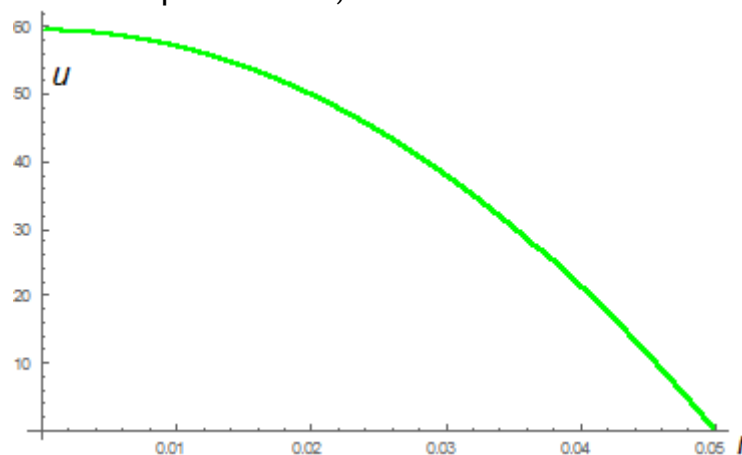


Рис. 11. Численный результат. Распределение температуры в алюминиевом цилиндре.

Совместив точное и численное решение, будем наблюдать следующее (см. рисунок 12).

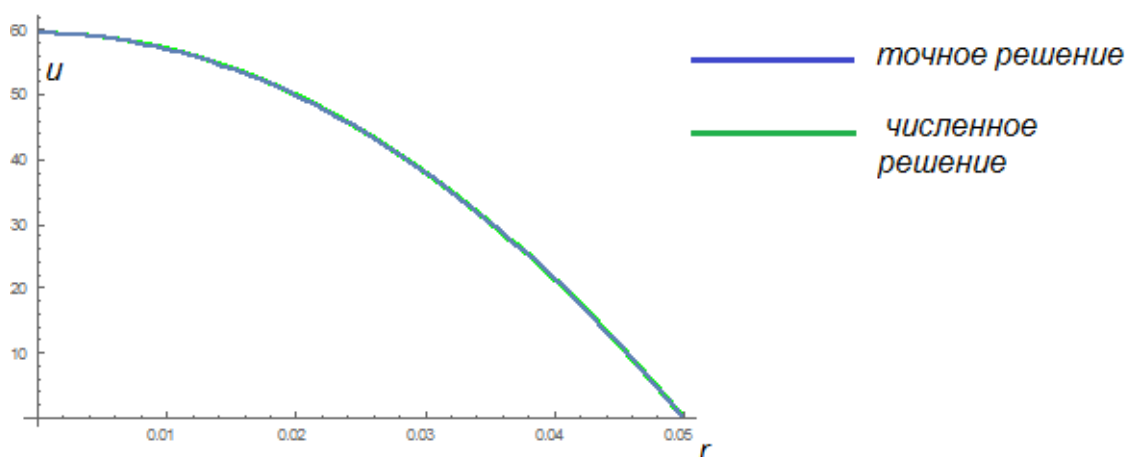


Рис. 12. Стационарное решение.

Проведём исследование на сходимость, исходя от знания точного решения. В таблицах 1-2 приведены значения погрешностей численного и точного решения в зависимости от значений h и τ :

Таблица 1.

Исследование погрешности при $\tau = 1$ с.

Шаг h	Норма погрешности
$5 \cdot 10^{-7}$ м	$5.86691 \cdot 10^{-9}$
$2.5 \cdot 10^{-7}$ м	$5.66199 \cdot 10^{-9}$

Таблица 2.

Исследование погрешности при $\tau = 2$ с.

Шаг h	Норма погрешности
$5 \cdot 10^{-7}$ м	$5.02942 \cdot 10^{-9}$
$2.5 \cdot 10^{-7}$ м	$4.82576 \cdot 10^{-9}$

Приведём таблицу зависимость времени выхода на стационар от шага τ (см. таблицу 3); величина шага τ определяет полноту правильности передачи физического процесса на временных слоях:

Таблица 3.

Зависимость времени выхода на стационар от шага τ .

Значение шага τ	Время
1 с	89
0.5 с	84.5
0.1 с	80.8
0.05 с	80.35
0.01 с	79.99
0.005 с	79.94

Таким образом, можно заключить, что расчет идёт верно с математической точки зрения. И результаты расчетов не противоречат физике процесса.

Заключение

С помощью интегро-интерполяционного метода численно решена задача о распространении тепла в бесконечном цилиндре для разных веществ: с нагреваемой боковой поверхностью и с внутренними источниками тепла при постоянной температуре

на боковой поверхности. Построена консервативная схема. Для проведения расчетов была составлена программа на языке C++, визуализация данных осуществлялась с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Проведены тестовые расчеты, позволившие верифицировать качества разностной схемы и программы (в частности, исследован выход на стационар). Используемый подход является приемлемым при выполнении типовых расчетов, лабораторных работ и курсовых проектов по дисциплине «Методы вычислений» по темам, касающиеся математического моделирования физических процессов. Этот курс изучается студентами старших курсов физико-математических и технических специальностей. Также возможно освоение изложенной методики при самостоятельном прохождении данного курса.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. — 364 с.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. — 591 с.
3. Марчевский И.К., Щерица О.В. Численные методы решения задач математической физики. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 64 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Издательство «Наука», 1977. — 734 с.
5. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Указ. Соч.
6. Марчевский И.К., Щерица О.В. Указ. Соч.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. — М.: Издательство «Наука», 1964. — 488 с.

Alexander D. Titov,

Graduate Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

titov.alex31@yandex.ru

Svetlana B. Zabelina,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

zabelina_sb@mail.ru

Application of the integration-interpolation method in teaching the solution of the problem of heat distribution in an infinite cylinder within the framework of studying a course of numerical methods

Abstract. The relevance of the article is due to the increasing popularity of computational methods. It is not possible to solve physical problems exclusively by analytical methods. There are cases when it is easier to find a solution numerically than analytically. The general idea of numerical methods is to replace a continuous medium with its discrete analog: in the area under consideration, where a solution is being sought, a difference grid with certain steps in time and space is introduced. The purpose of this work is to teach how to solve the problem of thermal conductivity in cylindrical coordinates as part of a course of calculation methods, which is studied by senior students of physics, mathematics and engineering, to demonstrate the possibility and clarity of the integro-interpolation method when solving problems of mathematical physics. The transition from Cartesian coordinates is presented, a description of the numerical method used, comparisons and verification of the results of computational experiments are carried out.

Keyword: parabolic equations, heat equation, numerical methods in teaching, application of the integro-interpolation method, difference schemes, finite difference method, computational algorithms, C++, Wolfram Mathematica.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ПЕРЕВОДЕ АНГЛИЙСКИХ НАУЧНЫХ ТЕКСТОВ СТУДЕНТАМИ ВУЗОВ

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена повышением требований к уровню иноязычной профессиональной коммуникативной компетенции выпускников вузов. Цель работы - выявить основные ошибки, встречающиеся при переводе научных текстов на английский язык. Выявлено происхождение большинства ошибок по причине бессознательной трансформации языковых привычек и структур родного языка на язык перевода. Результаты работы могут быть использованы при написании статей на английском языке.

Ключевые слова

английский язык, орфографические ошибки, грамматические ошибки, ложные друзья переводчика

АВТОРЫ

Уткина Надежда Вениаминовна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
utkina-nv@yandex.ru

Голубев Алексей Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана»;
старший научный сотрудник лаборатории механики систем
ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук», г. Москва
v-algolu@hotmail.com

Введение

Несмотря на обилие самых разнообразных словарей и учебников по английскому языку, при переводе научных текстов многие обучающиеся допускают достаточное количество ошибок. В данной статье мы попытаемся систематизировать такие «common errors», “frequent mistakes”, “false friends” или “blunders” английского языка, знание которых будет весьма полезно при написании научных английских текстов. Необходимо отметить, что большинство ошибок происходит по причине бессознательной трансформации языковых привычек и структур родного языка на язык перевода. Подобные ошибки можно разделить на шесть групп. Рассмотрим каждую в отдельности.

Методология и результаты исследования

Орфографические ошибки. В качестве наиболее распространённых орфографических ошибок можно выделить следующие: «a appropriate method» вместо «an appropriate method», «a effort» вместо «an effort», «a-influence» вместо «an influence», «a opportunity» вместо «an opportunity», «pratection» вместо «protection», «depend» вместо «depend», «accommodate» вместо «accommodate», «prøeve» вместо «prove»,

«~~alright~~» вместо «all right», «~~recieve~~» вместо «receive», «~~loose~~» вместо «lose» («lose» является прилагательным и обозначает «свободный», «несвязанный», а «lose» имеет значение «терять»), «~~ocurring~~» вместо «occurring», «~~prefering~~» вместо «preferring», «~~procede~~» вместо «proceed», «~~seperate~~» вместо «separate» «~~symetry~~» вместо «symmetry». Как видно из примеров, много ошибок встречается в словах греческого происхождения.

Неправильное использование единственного и множественного числа имен существительных. Рассмотрим такое английское существительное как «difficulty - трудность». При переводе обучающиеся обычно используют его следующим образом: «Universities have difficulties to attract and keep top scientists» или «We were confronted with the difficulty to have to find the disturbance». Правильнее здесь будет сказать «University have difficulty in attracting and keeping top scientists» и «We were confronted with the difficulty of having to find the disturbance». Слово «трудности» в английском языке следует лучше употреблять в единственном числе и с предлогами «in» и «of», данное существительное может использоваться и во множественном числе, но без предлога. Например, «Certain difficulties are likely to be encountered» или «A number of difficulties arose at the beginning of the study» [1].

Ошибки возникают в том числе и при употреблении неисчисляемого собирательного существительного «equipment - оборудование». В зависимости от смысла после него может использоваться глагол как во множественном числе, так и в единственном. Множественное число используется, если имеются в виду отдельные единицы оборудования, а единственное число используется, если оборудование выступает как единое целое. Данное существительное не принимает окончания -s для образования множественного числа. Для использования «equipment» как исчисляемого существительного употребляется «a piece of equipment», а не «equipments».

Неверно используется существительное «information», его употребляют во множественном числе, хотя правильнее будет сказать «Much more information is desirable», «We need some information about smh», «The most current information indictes that...».

В научном стиле «less» ассоциируется с существительным в единственном числе, а «fewer» - с существительным во множественном числе, как показано в следующем сопоставлении.

less information	fewer atoms
less money	fewer data
less research	fewer gases
less probability	fewer people

В разговорной речи такое сочетание, как «less students» вполне допустимо, в то время как в письменной речи нет.

Очень часто некорректно используются выражения «a number of» и «the number of», хотя правило совершенно несложное, достаточно его просто знать. Выражение «a number of» переводится как «НЕСКОЛЬКО» и требует употребления глагола во множественном числе. «A number of engineers has have suggested that...». Выражение «the number of» переводится как «КОЛИЧЕСТВО» и требует употребления глагола в единственном числе: «The number of people, who applied for the job, was enormous. - Количество людей, подавших заявку на работу, было огромным». Таким образом, если подлежащее по смыслу множественно, даже если оно единично по форме, то сказуемое должно стоять в множественном числе (Constructio ad sensum).

Подобно существительному «experience» и прежде всего существительному «information», слово «progress» не имеет множественного числа, поскольку в исключительных случаях обозначает «королевскую экскурсию по королевству с целью

осмотра». В таком значении существительное встречается весьма редко, поэтому мы встречаем следующие употребления в предложении: «There is progress in our work», «Much progress has been made in the last few years».

«Advance» как второй вариант наряду с «progress» ведет себя совершенно иначе, поскольку оно может быть исчисляемым существительным и имеет неопределенный артикль перед ним, то данное существительное может употребляться во множественном числе. Например, «The development of this gauge was a major advance», «Recent advances have improved the situation in cancer research».

Поскольку в русском языке мы никогда не задумываемся об употреблении наречия «много», делаем это бессознательно, поэтому и переносим свои языковые привычки на английский язык. Однако английский язык требует полной конгруэнтности в количестве:

much controversy	many controversies
much discussion	many discussions
much effort	many efforts
much trouble	many troubles

Примечательно, что «a lot of» подходит для существительных как единственном, так и во множественном числе.

Разделение «this» и «these» происходит по принципу деления единственного и множественного числа соответственно.

this condition	these conditions
this quantity	these quantities
this study	these studies

Таким образом возможны только варианты «this is» и «these are». И еще один важный момент: правильное произношение этих двух слов с большей вероятностью гарантирует и их правильное использование.

Существительное «work» в значении «научная работа или научные работы», «исследование или исследования» в английском языке всегда употребляется в единственном числе. В русском языке мы говорим и «научная работа» и «научные работы», поэтому при переводе с русского на английский язык здесь легко можно сделать ошибку. Например, «I do ~~works~~-work on Material Sciences». «Advantages was taken of the results of prior ~~works~~ work». «A brief review of the published ~~works~~ work in the field is given» [2].

Неправильное использование неопределенного артикля. Если в толковом словаре английского языка существительное помечено как «U» или «N-UNCOUNT», то оно не употребляется с неопределенным артиклем «a» или «an» и не образует множественного числа. Объяснение скрывается в более сложном числовом характере английский неопределенного артикля (т.е. «один», «одно», «одна», «одни» и не «два» или еще больше). Например, для носителя английского языка правильным будет только предложение: «Pollution of the substance has serious consequences». Единичное (и, следовательно, исчисляемое) загрязнение как само вещество в английском языке предпочтительнее называть «pollutant», «impurity» или «contaminant». Освоить данные тонкости помогут только словари, разделяющие английские существительные на неисчисляемые и исчисляемые, а также наблюдательность, опыт и определенный уровень интуиции.

Необходимо отметить, что иногда ситуация усложняется, потому что многие слова, такие как «accuracy», «behavior», «potential» и т.п., могут быть помечены в

словаре как неисчисляемые, однако в научном контексте встречаются во множественном числе. В данном случае «плюралистическое мышление» побеждает. Множественное число таких существительных как «accuracies», означает несколько степеней или случаев точности, а «behaviours» — это просто разные формы поведения. В качестве других примеров добавить еще такие существительные как «potentials», «solubilities», «loadings».

Слово «both» не допускает наличия какого-либо артикля непосредственно перед ним. Далее приведем различные варианты употребления данного слова: «both experiments», «both the experiments», «both of the experiments», «the two experiments».

В предложения «He speaks a good English», «He speaks English well», «He speaks good English» наглядно показано, что существительное «язык» в буквальном смысле не исчисляемое.

Слово «most» в значении «большинство» (в основном перед существительными во множественном числе) не может иметь определенного артикля «the» перед ним. Например, «most groups of interviewees», «in most cases», «for most practical purposes». Кроме того, есть еще следующая возможность: «most of the materials», «in most of the cases». Однако следует отметить, что в превосходной степени перед прилагательным стоит определенный артикль и «most». Например, «the most important categories», «the most exciting developments».

Следующее слово «society» в значении «общество», «положение» понимается как неисчисляемое абстрактное существительное и поэтому может использоваться без определенного артикля, о чем свидетельствуют три примера: «The impact of science on society has grown», «The products of science and technology have in large part determined the structure of modern society», «The scope of the number concept has expanded during the history of the development of society».

Если слова «yesterday's», «today's», «tomorrow's» используются в качестве временных родительных падежей перед существительными, то некоторые артикли не будут использоваться. Например, «~~the~~ today's aero-engines» - «today's aero-engines» [3].

Некорректное употребление предлогов. Служебные слова, которые связывают части речи между собой, многообразны и многозначны. Прямой перевод на русский язык очень часто не совпадает с английским, поэтому очень важно знать правила применения данного предлога в определенном контексте. В некоторых случаях предлоги дословно и не переводятся. Неправильный перевод предлога искажает смысл высказывания и приводит к недопониманию в общении. Например, «We discuss ~~about~~ the application of sth» вместо «We discuss the application of sth». Глагол «discuss» не имеет предлога после себя, тогда как существительное «discussion» допускает после себя множество предлогов. Например, «our discussion about/as to/of/on smth». «An example ~~for~~ the utility of this approach» вместо «An example of the utility of this approach». «Some irregularities have been noticed ~~by~~ several samples» вместо «Some irregularities have been noticed in several samples». «~~By~~ higher temperature performance became erratic» вместо «At higher temperature performance became erratic». «~~By~~ this equation a different method of solution must be used» вместо «For this equation a different method of solution must be used». «Incorporation of carbon is characteristic ~~for~~ this technique» вместо «Incorporation of carbon is characteristic of this technique». «Thermal radiation is independent ~~from~~ heat-transmitting matter» вместо «Thermal radiation is independent of heat-transmitting matter». «The function is differentiable ~~in~~ any given point» вместо «The function is differentiable at any given point». «We are updating our research program in the moment» вместо «We are updating our research program at the moment». «These measures can be roughly divided ~~in~~ three categories» вместо «These measures can be roughly divided into three categories». «From this follows that the problem has no solution» вместо «It follows from this the problem has no solution/From this it follows

that the problem has no solution». Иногда ошибки допускаются при прямом переносе русского языка на язык перевода. Например, «to depend ~~from~~» вместо «to depend on», «~~on~~ the conference» вместо «at the conference» [4].

Грамматические ошибки. Наиболее часто данный тип ошибок встречается в следующих темах: порядок слов, времена глаголов, вспомогательные глаголы, пассив, инфинитив, герундий, местоимения.

Очень часто неправильно используется будущее время вместо настоящего в придаточных предложениях условия. Например, «When ice crystals ~~will~~ form, they have definite positions» вместо «When ice crystals form, they will have definite positions».

Ошибки возникают и при употреблении «Past Simple», часто путают его с временем «Present Perfect». Например, «Last year I have attended half a dozen conferences» вместо «Last year I attended half a dozen of conferences».

Модальные глаголы и их эквиваленты тоже служат источником ошибок. Например, «Who ~~shall~~ assess the value of our findings?» вместо «Who is to assess the value of our findings?» «You must not pay for the meal. It is on the organizers» вместо «You need not pay for the meal. It is on the organizers». «The metal worker must can identify a lot of metals and alloys». «The metal worker must be able to identify a lot of metals and alloys».

При использовании глагола «to allow» в английском языке обязательно должно быть указано лицо, которому что-то разрешено. Игнорирование данного правила приводит к ошибочному переводу. Например, «Our studies allow to answer some key questions» вместо «Our studies allow us to answer some key questions».

После глагола «want» неправильно используют местоимение «that», например, «The chairman wanted ~~that~~ his statement was translated into English» вместо «The chairman wanted his statement to be translated into English».

Некорректно используется инфинитив после некоторых существительных вместо герундия. Например, «Our next task is to work out a method to calculate this triple integral» вместо «Our next task is to work out a method of calculating this triple integral». Неправильно также употребляется инфинитив после английского существительного «possibility». Например, «The possibility to extract energy from agricultural produce is being considered» вместо «The possibility of extracting energy from agricultural produce is being considered». Если мы вообще хотим или должны использовать слово «possibility», то оно должно употребляться с предлогом «of» и герундием. Мы должны быть осторожны со словами «possible» и «possibility». Слова «may» и «might» лучше подходят для выражения возможности и вероятности. «Possibility» для носителя языка — это слово, обозначающее экзистенциальную возможность, в то время как «opportunity» и «chance» — это конкретно существующая возможность. Например, «The method gives us the opportunity to obtain similar results». «The possibility of concluding our research effort is still present».

В английском языке есть разница между «to» как приставка и «to» как частица инфинитива. В первом случае после «to» требуется форма «ing» (герундий как замена существительному), а после «to» в качестве частицы инфинитива — инфинитив с «to». Например, «I am looking forward ~~to meet~~ you again» вместо «I am looking forward to meeting you again».

Приведем еще несколько примеров, иллюстрирующие данного рода ошибки. «The controversy is unlikely to be settled ~~in the next time~~» вместо «The controversy is unlikely to be settled in the near future». «Much progress has been made ~~in the last time~~» вместо «Much progress has been made recently/lately/of late». «In the ~~next years~~ we can look forward to the further expansion of IT» вместо «In the next few years we can look forward for the further expansion of IT». «The problem was ~~at first~~ considered by X» вместо «The problem was first considered by X». «The article ~~bases~~ on the author's re-

search» вместо «The article is based on the author's research» «What means this expression?» вместо «What does this expression mean?» «Who does know where is the conference building?» «Who knows where the conference building is». «The two institutes will cooperate in research». «The two institutes want to cooperate in research [5].

Так называемые «ложные друзья» переводчика. Это слова в иностранном языке общего происхождения, которые могут писаться и произноситься одинаково, как и в родном языке, однако они имеют другое значение. Неверный перевод таких «друзей» может привести к неправильному пониманию и переводу текста. Важно знать о таких «подводных камнях» при переводе текстов на английский язык. Например, легко ошибиться при написании следующих предложений: «New approaches are actually under discussion» вместо «New approaches are currently under discussion». «Can you bring me to the airport?» вместо «Can you take me to the airport?» «We must control the answer» вместо «We must check the answer». «The economical criteria of cost and price played a major role» вместо «The economic criteria of cost and price played a major role».

Очень важно так же знать псевдоэквивалентные термины, представляющие собой пары слов двух языков, схожих в плане выражения, но полностью или частично несовпадающих в плане содержания и относящихся к высокому уровню трудности усвоения лексики. Например, «spindle revolution» могут перевести как «революция шпинделя», а не «вращение шпинделя». При переводе термина «автоматическое управление» ошибочно используют «management» вместо «control». «Fabric» - это слово обозначает на английском языке «ткань», а иногда его переводят как «фабрика». «Фабрика» в английском языке - «factory». «Sensible» переводиться в английском языке как «разумный», «осмотрительный», однако его иногда неправильно переводят как «чувствительный». «Чувствительный» в английском языке будет «sensitive». Следующее слово, которое переводят неверно, это слово «data». Для некоторых это «дата», а не «данные».

Заключение

Таким образом, основная причина, по которой совершаются вышеуказанные ошибки - это явная недооценка сложности английского языка, который на самом деле сложный и коварный. Зная данные типичные ошибки, можно избежать их при написании научного текста на английском языке.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Legler, B. Sciencenglish. - Bock, 2001. - 527 p.
2. Bailey, S. Academic Writing, London, - 2000, - 135 p.
3. Hrdina, R. Scientific English. Langenscheidt Fachverlag, - 2006, - 152 p.
4. Skert, T. Writing Scientific English. Wien, - 2009. - 254 p.
5. Glaser, R. Fachtextorten in Englischen. - Tubingen, Gunter Narr Verlag, 2005, - 203 S.

Nadezhda V. Utkina,

Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
utkina-nv@yandex.ru

Alexey E. Golubev,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bau-man Moscow State Technical University, Senior researcher, ishlinisky institute for problems in mechanics of Russian academy of science, Moscow

v-avgolu@hotmail.com

Typical mistakes of graduates in the translation of English scientific texts

Abstract. The relevance of the study is due to the increased requirements for the level of foreign-language professional communicative competence of university graduates. The purpose of the work is to identify the common errors in the translation of scientific texts into English. The origin of most errors has been revealed due to the unconscious transformation of language habits and structures of the native language into target language. The results of the work can be used when writing papers un English.

Keyword: scientific English, spelling mistakes, grammatical errors, false friends.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ»

Аннотация

Знание неопределенных интегралов и умение их вычислять является одной из важных компетенций студентов инженерных специальностей вузов. Цель данной работы - помочь в формировании у студентов навыков интегрирования тригонометрических функций. Для этого в работе рассмотрены различные методы интегрирования, приведены многочисленные примеры, даны ценные указания. Материалы статьи могут быть полезными для самостоятельной работы студентов, а также преподавателям при подготовке к проведению практических занятий по данному разделу математики.

Ключевые слова

методические особенности преподавания отдельных вопросов высшей математики, неопределенный интеграл, тригонометрические функции

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Введение

Одним из важных навыков для студента, приобретаемого в процессе изучения математического анализа, является навык нахождения неопределенных интегралов. Понятие неопределенного интеграла является одним из основных математических понятий, поскольку имеет различные геометрические приложения, применяется для решений дифференциальных уравнений, задач механики, а также многих физических задач.

Интегрирование тригонометрических функций является важной частью темы нахождения неопределенных интегралов, поскольку изучение дальнейших разделов математического анализа и других предметов высшей математики подразумевает наличие у студентов умения интегрировать многие виды тригонометрических функций. Такие знания пригодятся, например, при использовании криволинейных координат для вычисления двойных [1] или тройных интегралов [2], при разложении функций в тригонометрический ряд Фурье [3], при решении дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Методология и результаты исследования

Раздел «интегральное исчисление функций одного переменного» обычно идет в курсе математического анализа, ей предшествуют разделы «предел и непрерывность»

и «дифференциальное исчисление функций одного переменного». Теме «интегрирование тригонометрических функций» в этом разделе предшествуют темы «замена переменной в неопределенном интеграле», «интегрирование по частям» и «интегрирование рациональных дробей». На эту тему выделяется в зависимости от сложности и продолжительности курса от двух до четырёх часов. При этом предполагается, что студенты хорошо знают предыдущие темы, поэтому необходимо их повторить.

Теоретический материал [4,5], примеры решения задач [6,7], задачи для самостоятельного решения преподаватель может разместить на своем сайте, персональной странице официального сайта вуза или использовать облачные технологии, чтобы любой из студентов имел доступ ко всем материалам в любое удобное время. Делать это следует за некоторое время до проведения практических занятий.

Перед изучением данного вопроса преподаватель организует подготовительную работу аудиторного или внеаудиторного характера по активизации знаний ранее изученных вопросов, необходимых для успешного освоения данной темы. В результате подготовительной работы студент должен повторить следующие темы, определения и теоремы: производная функции, дифференциал, таблица производных основных элементарных функций, таблица неопределенных интегралов основных элементарных функций, замена переменного в неопределенном интеграле, интегрирование по частям, интегрирование подстановками, интегрирование рациональных дробей.

Многие функции тригонометрических аргументов не имеют элементарных первообразных, например, $\int \sqrt{\sin x} dx$ или $\int \sqrt{\cos x} dx$. Поэтому следует выделять классы интегрируемых тригонометрических функций.

Интегрирование произведений синусов и косинусов кратных аргументов. Для нахождения интегралов вида $\int \sin(kx) \cos(mx) dx$, $\int \sin(kx) \sin(mx) dx$ или $\int \cos(kx) \cos(mx) dx$ целесообразно использовать следующие тригонометрические равенства:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 1. Вычислим $\int \cos 9x \cos 5x dx$.

Имеем:

$$\int \cos 9x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int \cos 4x dx + \frac{1}{2} \int \cos 14x dx = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{28} \sin 14x + C.$$

Интегрирование следующих функций также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения:

$$1) \int \sin 5x \cdot \cos 3x dx; 2) \int \sin 10x \cdot \sin 15x dx; 3) \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx;$$

$$4) \int \cos x \cdot \cos^2 3x dx; 5) \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$$

Интегрирование функций вида $\sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x$.

1. Если хотя бы одно из чисел α или β нечетное положительное целое число, допустим, что α , тогда $(\alpha - 1)/2$ - целое неотрицательное число и поэтому:

$$\int \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx = - \int \sin^{\alpha-1} x \cos^\beta x d \cos x = - \int (1 - \cos^2 x)^{\frac{\alpha-1}{2}} \cos^\beta x d \cos x.$$

Далее, после замены $t = \cos x$, получаем сумму табличных интегралов вида $\int t^a dt$. Если β - нечетное положительное целое число, то рассуждения аналогичные.

Пример 2. Вычислим $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

Имеем:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} d \sin x = \int \frac{1}{\sqrt{\sin x}} d \sin x - \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} d \sin x = 2\sqrt{\sin x} + \frac{2}{5} \sqrt{\sin^5 x} + C.$$

2. Если оба числа α и β - четные неотрицательные числа, то помогут формулы понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Пример 3. Вычислим $\int \sin^6 x dx$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 x + \cos^3 x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + \\ &+ \frac{3}{8} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \frac{d \sin 2x}{2} = \frac{5}{16} x - \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

3. Если $\alpha + \beta = -2n$, где n - натуральное число, то есть $\alpha + \beta$ - отрицательное натуральное четное число, то целесообразно использовать подстановку $t = \operatorname{tg}(x)$, при этом $\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x) = dt$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. И тогда:

$$\begin{aligned} \int \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx &= \int \operatorname{tg}^\alpha x \cdot \cos^{\alpha+\beta} x dx = \int \operatorname{tg}^\alpha x \frac{dx}{\cos^{2n} x} = \int \operatorname{tg}^\alpha x \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\cos^{2n-2} x} = \\ \int \operatorname{tg}^\alpha x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{n-1} d(\operatorname{tg} x) &= \int t^\alpha (1 + t^2)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислим $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^{11} x}} dx$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^{11} x}} dx &= \int \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^8 x}} dx = \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \int (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{7}{2}}) dt = \\ &= \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9} t^{\frac{9}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + \frac{2}{9} \sqrt{\operatorname{tg}^9 x} + C. \end{aligned}$$

4. Если числа α и β целые и одно из них нечетное и отрицательное, например, $\alpha = -2n + 1$, то такой интеграл можно свести к интегралу от рациональной дроби, который в любом случае имеет элементарные первообразные [8], следующим образом:

$$\int \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx = -\int \sin^{-2n} x \cdot \cos^\beta x d \cos x = -\int \frac{\cos^\beta x}{(1 - \cos^2 x)^n} d \cos x = -\int \frac{t^\beta}{(1 - t^2)^n} dt.$$

Если β - нечетное и отрицательное, то рассуждения аналогичные.

Пример 5. Вычислим $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$.

Имеем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} d \sin x = \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln |\cos x - 1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{4} \ln |\cos x + 1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} + C.$$

Интегрирование следующих функций также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения:

$$1) \int \sin^3 x dx; 2) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx; 3) \int \cos^4 \frac{x}{2} dx; 4) \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^6 x}; 6) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^6 x}; 7) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}; 8) \int \frac{dx}{\sqrt{\cos x \cdot \sin^3 x}};$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^5 x}; 10) \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} dx.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка. Любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция своих аргументов, может быть сведен к интегралу от рациональной дроби, при помощи универсальной тригонометрической подстановки $t = tg(x/2)$, при этом используются формулы:

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2tg\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)) = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctg(t) \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 6. Вычислим $\int \frac{dx}{3-2\sin x + \cos x}$.

Имеем:

$$\int \frac{dx}{3-2\sin x + \cos x} = \int \frac{2dt}{\left(3-2\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{4-4t+2t^2} = \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2+1} =$$

$$= arctg(t-1) + C = arctg\left(tg\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + C.$$

Если выполнено равенство $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то выгодно применить подстановку $\cos x = t$, а если выполнено равенство $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановку $\sin x = t$.

Пример 7. Вычислим $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x + 4}$.

Имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x + 4} = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -d \cos x \end{array} \right| = -\int \frac{1-\cos^2 x}{5+\cos^2 x} d \cos x = \int \frac{t^2-1}{t^2+5} dt = \int \left(1 - \frac{6}{t^2+5}\right) dt =$$

$$t - \frac{6}{\sqrt{5}} arctg \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \cos x + \frac{6}{\sqrt{5}} arctg \frac{\cos x}{\sqrt{5}} + C.$$

Если подынтегральная функция содержит $\sin x$ и $\cos x$ только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку $t = tg(x)$.

Пример 8. Вычислим $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x}$.

Имеем:

$$\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x} = \int \frac{1}{4 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 7} dx = \int \frac{dtg(x)}{4tg^2 x - 7} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{7}{4}} = \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{7}/2}{t + \sqrt{7}/2} \right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{28} \ln \left| \frac{tg(x) - \sqrt{7}/2}{tg(x) + \sqrt{7}/2} \right| + C.$$

Также подстановки $t = tg(x)$ следует использовать при интегрировании рациональных функций $R(tg(x))$, при этом получается интеграл от рациональной дроби

$$\int \frac{R(t)}{t^2 + 1} dt.$$

Пример 9. Вычислим $\int (tg^4 x + tg^3 x + 2) dx$.

Имеем:

$$\int (tg^4 x + tg^3 x + 2) dx = \int \frac{t^4 + t^3 + 2}{t^2 + 1} dt = \int \left(t^2 + t - 1 - \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{3}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - t -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} + 3 \arctg t = \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{1}{2} tg^2 x - tg x - \frac{1}{2} \ln(tg^2 x + 1) + 3x + C.$$

Интегрирование следующих функций также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения:

- 1) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$; 2) $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$; 3) $\int \frac{dx}{4 - 3 \sin x + \cos x}$; 4) $\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$;
- 5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8 \sin x \cos x + 12 \cos^2 x}$; 7) $\int \frac{1 + tg x}{1 - tg x} dx$;
- 8) $\int tg^5 x dx$; 9) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 4} dx$; 10) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

Замечание. Важно не забывать, что универсальная тригонометрическая подстановка применима на промежутках, входящих в интервал $(-\pi, \pi)$, а подстановка $t = tg(x)$ на промежутках, входящих в интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Применять эти подстановки для решения задач на других промежутках интегрирования нужно крайне осторожно.

Интегрирование некоторых других тригонометрических функций. Функции вида $P_n(x) \cos kx$ и $P_n(x) \sin kx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n интегрируются по частям.

Пример 10. Вычислим $\int (x^2 + 3x + 2) \cos 2x dx$.

Имеем:

$$\int (x^2 + 3x + 2) \cos 2x dx = \int (x^2 + 3x + 2) d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) \sin 2x - \frac{1}{2} \int (2x + 3) \sin 2x dx =$$

$$\frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) \sin 2x + \frac{1}{4} \int (2x + 3) d \cos 2x = \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) \sin 2x + \frac{1}{4} (2x + 3) \cos 2x -$$

$$- \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) \sin 2x + \frac{1}{4} (2x + 3) \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Функции вида $R(\sqrt{1-\cos x})$ и $R(\sqrt{1+\cos x})$ можно интегрировать при помощи формул $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ и $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$.

Пример 11. Вычислим $\int \sqrt{(1-\cos x)^3} dx$.

Имеем:

$$\int \sqrt{(1-\cos x)^3} dx = \int \sqrt{8\sin^6 \frac{x}{2}} dx = 2\sqrt{8} \int \sin^3 \frac{x}{2} d\frac{x}{2} = 2\sqrt{8} \int (\cos^2 \frac{x}{2} - 1) d\cos \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{8}}{3} \cos^3 \frac{x}{2} - 2\sqrt{8} \cos \frac{x}{2} + C.$$

Заключение

При организации аудиторной и внеаудиторной работы студентов по теме «Интегрирование тригонометрических функций» можно руководствоваться изложенным материалом. В работе разобраны примеры, указаны наглядные алгоритмы, даны пояснения по организации учебного процесса и решению задач, что позволяют в сжатые сроки и в полном объёме успешно усвоить учебный материал.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Хасанов Н.А., Бирюков О.Н. О проведении занятий на тему «Замена переменных для вычисления двойных интегралов» // Modern European Researches, 2021. - Т. 1, № 3. - Р. 131-138.
2. Хасанов Н.А., Бирюков О.Н. О проведении занятий на тему «Замена переменных для вычисления тройных интегралов» // Modern European Researches, 2022. - Т. 1, № 1. - Р. 133-139.
3. Хасанов Н.А., Бирюков О.Н. Методические аспекты проведения занятий на тему «разложение функций в тригонометрический ряд Фурье» // Modern European Researches, 2023. - Т. 1, № 3. - Р. 135-141.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984, - 640 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб. пособие для втузов. Том 2. - М.: Интеграл-Пресс, 2001, - 544 с.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу для втузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. - М.: Изд-во Астрель, 2004. - 495 с.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московского ун-та, ЧеРо, 1997. - 624 с.
8. Иванков П.Л., Обухов В.П. Интегрирование рациональных дробей и некоторые связанные с этим методические проблемы // Modern European Researches, 2022. - Т. 1, № 1. - Р. 89-95.

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nail_khasanov@mail.ru

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

Methodological aspects of conducting classes on the topic "Integration of trigonometric functions"

Abstract. Knowledge of indefinite integrals and the ability to calculate them is one of the important competencies of university engineering students. The purpose of this work is to help develop students' skills in integrating trigonometric functions. For this purpose, the work examines various methods of integration, provides numerous examples, and gives valuable instructions. The materials in the article may be useful for students' independent work, as well as for teachers in preparing for practical classes in this section of mathematics.

Keyword: methodological features of teaching certain issues of higher mathematics, indefinite integral, trigonometric functions.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Аннотация

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в образовательные стандарты обучения большинства специальностей технических университетов. Целью статьи является обсуждение методики преподавания темы «Законы распределения дискретных случайных величин» с использованием аппарата производящих функций случайных величин. Изложен метод вычисления числовых характеристик случайных величин с помощью производящих функций. Разобраны примеры решения задач. Содержание статьи будет полезно студентам и преподавателям технических университетов.

Ключевые слова

дискретные случайные величины, производящая функция дискретной случайной величины, математическое ожидание, дисперсия, схема испытаний Бернулли

АВТОР

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Введение

Раздел математики «Теория вероятностей» включен в учебные программы подавляющего большинства специальностей технических университетов. В рамках курсов, носящих различные названия («Основы теории вероятностей», «Теория вероятностей и математическая статистика» и др.) студенты технических университетов изучают тему «Законы распределения дискретных случайных величин» в разном объеме. В учебниках по теории вероятностей (см., например, [1]-[4]) также рассматриваются различные примеры законов распределения дискретных случайных величин и методы вычисления их числовых характеристик. В данной работе, следуя [5], излагается метод производящих функций дискретных случайных величин. В рамках курсов, включающих всего 34 часа аудиторных занятий (например, курса «Основы теории вероятностей», изучаемого студентами некоторых специальностей факультета «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана), рассмотрение этой темы, скорее всего, нерационально. Однако, для многих специальностей технических университетов на изучение теории вероятностей выделяется гораздо большее время и в этом случае изучение студентами метода производящих функций дискретных случайных величин представляется целесообразным.

Методология и результаты исследования

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, множество возможных значений которой является конечным или счётным. Основным законом

распределения дискретной случайной величины является ее *ряд распределения*, представляющий собой таблицу, состоящую из двух строк, в первой строке которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а под ними во второй строке - вероятности, с которыми случайная величина принимает эти значения. При этом, как правило, в верхней строке не указывают те значения, которые случайная величина принять не может (принимает с вероятностью, равной нулю). Однако не всегда это бывает удобным. Далее мы будем рассматривать только дискретные случайные величины, принимающие целочисленные неотрицательные значения. Для таких величин удобно считать рядом распределения таблицу вида

0	1	2	...	k	...
p_0	p_1	p_2	...	p_k	...

в которой вероятности $p_k = P\{X = k\}$ могут обращаться в ноль. *Производящей функцией* случайной величины с данным рядом распределения называется функция $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ действительного аргумента t . В случае, когда случайная величина X принимает конечное число значений (остальные вероятности p_k равны нулю), производящая функция $\varphi(t)$ является многочленом, в случае бесконечного числа значений выражение $\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ представляет собой степенной ряд и возникает вопрос о его области сходимости. Заметим, что $\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, то есть ряд будет сходиться при $t = 1$, и, по признаку сравнения, при $|t| \leq 1$. В литературе (см., например, [6]) обычно указывают в качестве области, на которой рассматривают производящую функцию $\varphi(t)$, промежуток $0 < t \leq 1$. В данном промежутке степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. В руководствах по теории вероятностей вопросы о сходимости ряда и возможности его дифференцировать обычно не обсуждаются. На занятиях же этот вопрос можно рассмотреть, продемонстрировав преемственность преподавания различных математических дисциплин. Отметим также, что в курсах по рядам обычно доказывают теорему о почленном дифференцировании степенного ряда внутри интервала сходимости (см., например, [7]). Поэтому вопрос о дифференцировании степенного ряда на конце интервала сходимости заслуживает обсуждения.

Производящая функция дискретной случайной величины может быть использована для вычисления числовых характеристик этих величин. Можно показать, что начальные и центральные моменты любых порядков дискретной случайной величины можно выразить через производные производящей функции $\varphi(t)$ при $t = 1$. Приведем вывод формул для математического ожидания (первый начальный момент) и дисперсии (второй центральный момент) как наиболее часто используемых числовых характеристик случайной величины ([8]). Вычислим первую производную производящей функции: $\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k t^{k-1}$. Следовательно, при $t = 1$ имеем

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M[X].$$

Затем найдем вторую производную производящей функции:

$$\varphi''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2}.$$

Подставим $t = 1$:

$$\varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \alpha_2 [X] - \varphi'(1),$$

где $\alpha_2 [X] = \varphi''(1) + \varphi'(1)$ - второй начальный момент. Следовательно, формула для дисперсии примет вид:

$$D[X] = \alpha_2 [X] - (M[X])^2 = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2.$$

С помощью полученных формул легко находятся математические ожидания и дисперсии биномиального распределения, распределения Пуассона и геометрического распределения. Именно эти распределения приводятся обычно в качестве примеров распределений дискретных случайных величин. Вычисление числовых характеристик перечисленных распределений проводится на лекции. Подчеркнем еще раз, что формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии через производящую функцию применяются только для дискретных случайных величин, принимающих целочисленные неотрицательные значения.

Для закрепления результатов изучения данной темы целесообразно решить на семинаре несколько задач на эту тему и (или) дать студентам индивидуальное домашнее задание. Обычно студентам предлагается текстовая задача с описанием ситуации, для которой они должны выбрать подходящую математическую модель, введя некоторую случайную величину. Затем для этой случайной величины студенты строят ряд распределения, находят функцию распределения, числовые характеристики и вычисляют вероятность некоторого события, определяемого этой случайной величиной. Примеры дискретных случайных величин для составления задач можно связать с биномиальной схемой испытаний (схемой Бернулли). Напомним, что классической биномиальной схемой испытаний называется последовательность n независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода (появление некоторого события A , которое называют «успехом», или появление противоположного события \bar{A} - «неудачи»), причем вероятность появления события A во всех опытах постоянна и равна p , вероятность появления события \bar{A} равна $q = 1 - p$. В задачах можно использовать следующие случайные величины: X_1 - число «успехов» в серии из n испытаний по схеме Бернулли (имеет биномиальное распределение), X_2 - число испытаний до первого появления «успеха» или число безуспешных испытаний по схеме Бернулли (имеют геометрическое распределение), X_3 - число испытаний по схеме Бернулли до второго (третьего и т.д.) появления «успеха». Для первых двух случайных величины числовые характеристики обычно вычисляются на лекции. В данной работе обсудим случайную величину X_3 и сначала рассмотрим в общем виде задачу о случайной величине X - число испытаний по схеме Бернулли до второго появления «успеха» (включая испытание, в котором «успех» появился второй раз). Для данной случайной величины найдем ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию, применяя технику производящих функций, которая оказывается полезной в рассматриваемой ситуации.

Начнем с ряда распределения. Вероятность $p_k = P\{X = k\}$ есть вероятность события, состоящего в том, что «успех» появился в испытании с номером k и еще один раз в одном из испытаний с номерами $1, \dots, k - 1$. Такое событие можно представить как сумму попарно несовместных событий $B_1 + \dots + B_{k-1}$, где событие B_i состоит в том, что «успех» появился в двух испытаниях: с номерами $i, (i < k)$ и k . Вероятности всех событий B_i равны $P(B_i) = p^2 q^{k-2}$. Следовательно, $p_k = P\{X = k\} = (k - 1)p^2 q^{k-2}, k \geq 1$. Проверим, что $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, то есть, что из найденных вероятностей можно составить ряд распределения некоторой дискретной случайной величины. Найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (k - 1)p^2 q^{k-2}$ для студентов будет непросто. Используем для проверки производящую функцию:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1)p^2 q^{k-2} t^k = p^2 t^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1)(qt)^{k-2} = p^2 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(qt)^{n-1} = \frac{p^2 t^2}{(1 - qt)^2}.$$

Последнее равенство получено следующим образом. При $|x| < 1$ имеет место разложение

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Продифференцировав это равенство, находим разложение

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}.$$

В нашем случае $|x| = |qt| < 1$, поэтому производящая функция определена при $|qt| < 1$ и в этом интервале можно почленно дифференцировать степенной ряд, определяющий производящую функцию. Следовательно, формулы для математического ожидания и дисперсии будут справедливы. Также теперь легко проверить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k = \varphi(1) = \frac{p^2}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1.$$

Итак, ряд распределения имеет вид

0	1	2	3	...	k	...
0	0	p^2	p^2q	...	$(k-1)p^2q^{k-2}$...

Вычислим математическое ожидание:

$$\varphi'(t) = \frac{2p^2t}{(1-qt)^2} + \frac{2qp^2t^2}{(1-qt)^3}, M[X] = \varphi'(1) = \frac{2p^2}{(1-q)^2} + \frac{2qp^2}{(1-q)^3} = 2 + \frac{2q}{p} = \frac{2(p+q)}{p} = \frac{2}{p}.$$

Вычислим дисперсию:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{2p^2}{(1-qt)^2} + \frac{8p^2qt}{(1-qt)^3} + \frac{6p^2q^2t^2}{(1-qt)^4}, \\ \varphi''(1) &= \frac{2p^2}{(1-q)^2} + \frac{8p^2q}{(1-q)^3} + \frac{6p^2q^2}{(1-q)^4} = 2 + \frac{8q}{p} + \frac{6q^2}{p^2} = \frac{2p^2 + 8pq + 6q^2}{p^2} = \frac{2 + 4q}{p^2}, \\ D[X] &= \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \frac{2 + 4q}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{4}{p^2} = \frac{2q}{p^2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим задачу о случайной величине X - число испытаний по схеме Бернулли до третьего появления «успеха» (включая испытание, в котором «успех» появился третий раз). Аналогично предыдущему случаю вычисляем вероятности

$$p_k = P\{X = k\} = \binom{k-1}{2} p^3 q^{k-3} = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)p^3 q^{k-3}, k \geq 1.$$

Проверку корректности составления ряда распределения снова проведем с использованием производящей функции. Для ее вычисления придется еще один раз продифференцировать разложение функции $\frac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена. Получим:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(k-1)(k-2)p^3 q^{k-3} t^k = \frac{1}{2} p^3 t^3 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(k-2)(qt)^{k-3} = \\ &= \frac{1}{2} p^3 t^3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(qt)^{n-2} = \frac{p^3 t^3}{(1-qt)^3}, \\ \varphi(1) &= \frac{p^3}{(1-q)^3} = 1. \end{aligned}$$

Итак, ряд распределения имеет вид

0	1	2	3	4	...	k	...
0	0	0	p^3	$3p^3q$...	$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)p^3q^{k-3}$...

Найдем математическое ожидание:

$$\varphi'(t) = \frac{3p^3 t^2}{(1-qt)^3} + \frac{3qp^3 t^3}{(1-qt)^4},$$

$$M[X] = \varphi'(1) = \frac{3p^3}{(1-q)^3} + \frac{3qp^3}{(1-q)^4} = 3 + \frac{3q}{p} = \frac{3(p+q)}{p} = \frac{3}{p}.$$

Найдем дисперсию:

$$\varphi''(t) = \frac{6p^3 t}{(1-qt)^3} + \frac{18p^3 q t^2}{(1-qt)^4} + \frac{12p^3 q^2 t^3}{(1-qt)^5},$$

$$\varphi''(1) = \frac{6p^3}{(1-q)^3} + \frac{18p^3 q}{(1-q)^4} + \frac{12p^3 q^2}{(1-q)^5} = 6 + \frac{18q}{p} + \frac{12q^2}{p^2} = \frac{6p^2 + 18pq + 12q^2}{p^2} = \frac{6 + 6q}{p^2},$$

$$D[X] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \frac{6 + 6q}{p^2} + \frac{3}{p} - \frac{9}{p^2} = \frac{3q}{p^2}.$$

Полученные результаты можно обобщить на случай произвольного числа успехов. Пусть случайная величина X - число испытаний по схеме Бернулли до появления «успеха» s раз (включая испытание, в котором «успех» появился s -й раз). Вычисления проводятся по приведенной выше схеме. Сначала вычисляем вероятности и выполняем проверку, используя производящую функцию:

$$p_k = P\{X = k\} = \binom{k-1}{s-1} p^s q^{k-s}, k \geq s, p_0 = p_1 = \dots = p_{s-1} = 0.$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=s}^{\infty} \binom{k-1}{s-1} p^s q^{k-s} t^k = \frac{p^s t^s}{(s-1)!} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k-s)!} (qt)^{k-s} = \\ &= \frac{p^s t^s}{(s-1)!} \sum_{k=s}^{\infty} (k-1)(k-2) \dots (k-s+1) (qt)^{k-s} = \\ &= \frac{p^s t^s}{(s-1)!} \sum_{n=s-1}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-s+2) (qt)^{n-s+1} = \\ &= \frac{p^s t^s}{(s-1)!} \frac{(s-1)!}{(1-qt)^s} = \frac{p^s t^s}{(1-qt)^s}, \\ \varphi(1) &= \frac{p^s}{(1-q)^s} = 1. \end{aligned}$$

Затем вычисляем математическое ожидание

$$\varphi'(t) = \frac{sp^s t^{s-1}}{(1-qt)^s} + \frac{sqp^s t^s}{(1-qt)^{s+1}},$$

$$M[X] = \varphi'(1) = \frac{sp^s}{(1-q)^s} + \frac{sqp^s}{(1-q)^{s+1}} = s + \frac{sq}{p} = \frac{s(p+q)}{p} = \frac{s}{p},$$

и дисперсию

$$\varphi''(t) = \frac{s(s-1)p^s t^{s-2}}{(1-qt)^s} + \frac{2s^2 p^s q t^{s-1}}{(1-qt)^{s+1}} + \frac{s(s+1)p^s q^2 t^s}{(1-qt)^{s+2}},$$

$$\begin{aligned} \varphi''(1) &= \frac{s(s-1)p^s}{(1-q)^s} + \frac{2s^2 p^s q}{(1-q)^{s+1}} + \frac{s(s+1)p^s q^2}{(1-q)^{s+2}} = s(s-1) + \frac{2s^2 q}{p} + \frac{s(s+1)q^2}{p^2} = \\ &= \frac{s(s-1)p^2 + 2s^2 p q + s(s+1)q^2}{p^2} = \frac{s^2(p+q)^2 - s p^2 + s q^2}{p^2} = \\ &= \frac{s^2 - s p^2 + s q^2}{p^2} = \frac{s^2 + s(q-p)(q+p)}{p^2} = \frac{s^2 - s + 2sq}{p^2}, \\ D[X] &= \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \frac{s^2 - s + 2sq}{p^2} + \frac{s}{p} - \frac{s^2}{p^2} = \frac{sq}{p^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $s = 2, 3$ общие формулы дают уже полученные значения.

Заключение

В статье представлена методика преподавания темы «Законы распределения дискретных случайных величин» в рамках курса «Теория вероятностей», изучаемого студентами технических университетов. Данная методика использует аппарат производящих функций дискретных случайных величин. Изложен метод вычисления числовых характеристик случайных величин с помощью производящих функций. Разобраны примеры решения задач.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов - 3-е изд., испр./Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. -и др. - М.: Изд-во МГТУ, 2004. - 456 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - 5-е изд.- М.: Высшая школа, 1998. - 576 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - 7-е изд. - М.: Высшая школа, 2000. - 479 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - 2-е изд. - М.: Высшая школа, 2000. - 480 с.
5. Там же.
6. Там же.
7. Власова Е.А. Ряды. - М.: Изд-во МГТУ, 2000. - 612 с.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Указ. соч.

Nina G. Khorkova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ninakhorkova@bmstu.ru

Some methodological aspects of teaching the topic "Distribution laws of discrete random variables"

Abstract. The discipline "Probability Theory and mathematical Statistics" is included in the educational standards of most specialties of technical universities. The purpose of the article is to discuss the methodology of teaching the topic "Laws of distribution of discrete random variables" using the apparatus of generating functions of random variables. A method for calculating the numerical characteristics of random variables using generating functions is described. Examples of problem solving are considered. The article will be useful for students and teachers of technical universities.

Keywords: discrete random variables, the generating function of a discrete random variable, mathematical expectation, variance, Bernoulli test scheme.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ»

Аннотация

Актуальность данной проблемы обусловлена необходимостью приобретения студентами навыков владения методами математической физики для решения инженерных задач, связанных с проектированием современной техники. Целью работы является помочь студентам приобрести навыки владения математическими методами для дальнейшего их использования в инженерной деятельности. В работе рассмотрен один из аналитических методов решения задач математической физики - метод разделения переменных. На примерах проиллюстрирована общая схема решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности данным методом. Материалы статьи могут быть полезны студентам при изучении дисциплины «Уравнения математической физики», а также преподавателям для подготовки к проведению семинарских занятий.

Ключевые слова

математическое моделирование, математическая модель, уравнение теплопроводности, метод разделения переменных, ряд Фурье, задача Штурма-Лиувилля

АВТОР

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Введение

Математическое моделирование применяется для решения различных прикладных задач [1], важное место в числе которых занимает класс задач о тепловом состоянии твердых тел. В работах, посвященных данной проблеме, используются как аналитические (например, метод интегральных преобразований, метод функции Грина), так и приближенные методы, изучаемые студентами на старших курсах [2,3]. Поэтому важно проиллюстрировать обучающимся на примерах, как с помощью математического моделирования можно решать задачи с прикладным содержанием [4]. В данной работе будут рассмотрены примеры математического моделирования процесса теплопроводности в курсе «Уравнения математической физики» при изучении темы «Решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности методом разделения переменных».

Методология и результаты исследования

В результате освоения курса «Уравнения математической физики» студенты должны *знать* основные этапы математического моделирования и аналитические ме-

тоды, позволяющие решать задачи математической физики, *уметь* определять факторы, влияющие на выбор модели, применять физические законы и математические методы при решении прикладных задач, *владеть* аналитическими методами математической физики для последующего применения их в инженерной деятельности.

Изучению данного курса предшествует освоение студентами следующих разделов высшей математики: «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Ряды Фурье», «Интегральные преобразования».

Для актуализации знаний обучающихся по данным темам можно предложить выполнить следующие задания:

1. найдите решение дифференциального уравнения $y'(t) + a^2y(t) = f(t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$;

2. найдите разложение функции $f(x) = 1 - x$ на отрезке $[0,1]$ в тригонометрический ряд Фурье: а) по синусам, б) по косинусам;

3. восстановите функцию $x(t)$, если ее изображение по Лапласу имеет вид $X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$.

Деятельность преподавателя и студентов на занятии может быть организована следующим образом:

1) на этапе первичного ознакомления с материалом преподаватель рассматривает примеры физических постановок задач, приводящих к исследованию нестационарного процесса теплопроводности; выделяет тип задач, для которого далее излагается метод решения;

2) на этапе формирования навыков владения методом преподаватель приводит пример типовой задачи с анализом решения (задача №1);

3) на этапе практического применения метода преподаватель предлагает студентам, в соответствии с приемом саморегуляции, решить другую задачу данного типа (задача №2);

4) на этапе повторения студенты выполняют домашнее задание (задача №3).

Для проведения семинарского занятия предлагаются задачи, в которых рассматривается процесс распространения тепла в однородном стержне. Далее приведем краткие сведения по теории на основе учебников [5,6].

Уравнение теплопроводности, постановка начального и граничных условий

Напомним, что процесс распространения тепла в однородном стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, когда теплофизические параметры постоянны, описывается уравнением параболического типа

$$\rho c u_t = \lambda u_{xx} + F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

где $u = u(x, t)$ – температура стержня в точке x в момент времени t ; ρ, c, λ – плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности; $F(x, t)$ – объемная плотность источников (стоков).

Начальное условие задает распределение температуры в стержне в момент времени $t = 0$: $u(x, 0) = u_0(x)$.

Для наглядности представления теоретического материала приведем таблицу, в которую включены основные типы условий, описывающих тепловой режим на концах стержня.

Таблица 1.

Тепловой режим на концах стержня

Тип граничного условия		Форма записи
1-го рода:	температура конца стержня изменяется во времени по известному закону	$u(0, t) = \theta_1(t),$ $u(l, t) = \theta_2(t);$
2-го рода:	конец стержня нагревается тепловым потоком с заданной плотностью $q(t)$	$-\lambda u_x(0, t) = q(t),$ $+\lambda u_x(l, t) = q(t);$
3-го рода:	на конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой температуры U_c (коэффициент теплообмена равен α)	$+\lambda u_x(0, t) = \alpha(u(0, t) - U_c),$ $-\lambda u_x(l, t) = \alpha(u(l, t) - U_c).$

Математическая модель нестационарного процесса распространения тепла в стержне включает: уравнение параболического типа; функцию, задающую начальное распределение температуры; условия, описывающие тепловой режим на концах стержня в соответствии с физической постановкой задачи.

Замечание. Помимо линейных моделей, изучаемых в данном курсе, есть и нелинейные модели [7,8], позволяющие более точно описывать исследуемые физические процессы. Например, задача, в которой учитывается зависимость теплофизических параметров от температуры, а также излучение тепла с поверхности тела по закону Стефана-Больцмана, приводит к нелинейной модели.

Метод разделения переменных

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

$$-\alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0, \quad \alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (3)$$

В силу однородности условий (3), для решения задачи (1)-(3) применим метод разделения переменных [9]. Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{a^2} u_t = -L[u] + \frac{1}{a^2} f(x, t), \quad (4)$$

где $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$L[X(x)] = \lambda X(x), 0 < x < l;$$

$$-\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0.$$

Функцию $u(x, t)$ будем искать в форме разложения в ряд Фурье по системе собственных функций $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора L :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (5)$$

где $T_n(t) = \frac{(u, X_n)}{\|X_n\|^2}$ – коэффициенты Фурье функции $u(x, t)$.

Из условия (2) следует, что

$$T_n(0) = \frac{(u_0, X_n)}{\|X_n\|^2} \equiv b_n.$$

Далее умножим уравнение (4) скалярно на функцию $X_n(x)$:

$$\frac{1}{a^2} (u_t, X_n) = -(L[u], X_n) + \frac{1}{a^2} (f, X_n)$$

и воспользуемся свойствами оператора L [10]:

$$(u_t, X_n) = \frac{d}{dt} (u, X_n) = T_n'(t) \|X_n\|^2,$$

$$(L[u], X_n) = (u, L[X_n]) = (u, \lambda_n X_n) = \lambda_n (u, X_n) = \lambda_n T_n(t) \|X_n\|^2.$$

После преобразований получим соотношение

$$\frac{1}{a^2} T_n'(t) \|X_n\|^2 = -\lambda_n T_n(t) \|X_n\|^2 + \frac{1}{a^2} (f, X_n),$$

умножив обе части которого на $\frac{a^2}{\|X_n\|^2}$, $\|X_n\|^2 \neq 0$, приходим к дифференциальному уравнению относительно искомым функций $T_n(t)$:

$$T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = C_n(t), \text{ где } C_n(t) = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2}.$$

Таким образом, получена задача Коши:

$$\begin{aligned} T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) &= C_n(t), \\ T_n(0) &= b_n. \end{aligned}$$

Воспользовавшись методом операционного исчисления [11], находим

$$T_n(t) = b_n \exp\{-a^2 \lambda_n t\} + (\exp\{-a^2 \lambda_n t\}) * C_n(t),$$

где символ « * » означает операцию свертки двух функций, то есть

$$T_n(t) = b_n \exp\{-a^2 \lambda_n t\} + \int_0^t C_n(\tau) \exp\{-a^2 \lambda_n (t - \tau)\} d\tau.$$

Здесь коэффициенты b_n и $C_n(t)$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(u_0, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l u_0(x) X_n(x) dx, \\ C_n(t) &= \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx. \end{aligned}$$

Подставив в ряд (5) найденные функции $T_n(t)$, получим решение исходной задачи.

Примеры заданий на практическое применение метода разделения переменных

Для практической работы студентов, в качестве примера, будут рассмотрены две задачи. Первая задача является базовой, поскольку представляет собой типовую задачу (с однородными граничными условиями). В связи с чем, важно при проведении семинарского занятия не только показать обучающимся применение метода разделения переменных на примере этой базовой задачи, но и подвести их к изучению приемов решения более сложных задач, основываясь на изученном материале. Далее можно перейти к рассмотрению второй задачи (с неоднородными граничными условиями), приемом решения которой является сведение к теперь уже известной студентам задаче (с однородными граничными условиями), особенности решения которой будут рассмотрены в данной работе.

Проиллюстрируем выше сказанное на задачах, предложенных для самостоятельной работы из сборника [12].

Задача №1 (с однородными граничными условиями).

Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l , начальная температура которого равна $u_0(x)$, см. рис.1.

На концах стержня $x = 0$ и $x = l$ температура поддерживается равной нулю.

Найти нестационарное распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$.

В рассматриваемой постановке задачи теплофизические параметры $\rho, c, \lambda - const$.

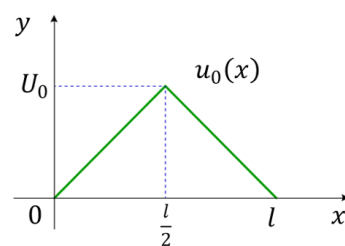


Рис. 1. Начальное распределение температуры в стержне

Решение данной задачи осуществляется преподавателем на основе изложенной ранее общей схемы метода разделения переменных (ориентировочная основа действий, согласно теории П.Я. Гальперина [13]) и представляет собой образец для дальнейшей самостоятельной работы студентов.

При обучении студентов дисциплинам математического цикла важно формировать у них не только профессиональные, но и универсальные компетенции – способности осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. Для достижения данной цели необходимо обучающимся предлагать выполнить нестандартные задания, то есть такие задачи, способы решения которых им неизвестны. В связи с чем, дальнейший ход семинарского занятия может быть следующим.

Сначала преподаватель излагает основную идею решения задачи с *неоднородными* граничными условиями: «искомую функцию представим в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет неоднородным граничным условиям, тогда вторая функция может быть найдена в результате решения начально-краевой задачи с однородными граничными условиями». Поскольку выбор функции, удовлетворяющей заданным краевым условиям, не очевиден, то полезно перед обучающимися поставить задачу: как подобрать такую функцию? Примеры заданий варьируются выбором граничных условий различных типов (см. табл. 1). Приведем некоторые из них: найти $w(x, t)$, если

- 1) $w(0, t) = \varphi_1(t), \quad w(l, t) = \varphi_2(t);$
- 2) $w(0, t) = \varphi_1(t), \quad w_x(l, t) = \theta_2(t), \quad \theta_2(t) \neq 0.$

Выполнение такого задания позволит обучающимся не только научиться видеть проблему, но и находить способы ее решения. В данном случае, опираясь только на знания из курса математического анализа, путем построения логических рассуждений, студенты находят решение поставленной перед ними задачи. После обсуждения полученных результатов можно перейти к рассмотрению задачи по изучаемой теме.

Задача №2 (с неоднородными граничными условиями).

Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l , начальная температура которого равна нулю.

На конце стержня $x = 0$ температура изменяется по закону $u(0, t) = U_0(1 - e^{-\omega t})$, где $\omega > 0, U_0 = const$, а на конце стержня $x = l$ происходит конвективный теплообмен с внешней средой, температура которой равна нулю.

Найти нестационарное распределение температуры в стержне при $t > 0$.

В рассматриваемой постановке задачи теплофизические параметры $\rho, c, \lambda - const$, коэффициент теплообмена равен α .

Для осуществления активной работы студентов на семинаре можно провести фронтальный опрос, подводящий к дальнейшей формулировке математической модели, отвечающей физической постановке данной задачи. Ставя перед обучающимися вопросы: «какие допущения приняты в физической постановке задачи? какое уравнение описывает процесс распространения тепла в стержне? что известно о распределении температуры в стержне в начальный момент времени? какими условиями описывается тепловой режим на концах стержня?» преподаватель показывает как анализировать условие задачи для того, чтобы перейти к математическому описанию рассматриваемого физического процесса.

После записи математической модели переходим к выбору метода решения. Студентам на занятии был изложен метод разделения переменных. Поэтому примером вопроса на понимание нового материала может быть вопрос: «можно ли для решения

задачи применить метод разделения переменных?». Анализируя вид краевых условий, приходим к выводу: условия неоднородные, данную задачу необходимо свести к задаче с однородными условиями; затем, для решения такой задачи, можно применить изученный метод.

Следующий шаг работы с задачей – обобщение и систематизация знаний. На данный момент студенты знают как записать математическую модель процесса распространения тепла в стержне, владеют аналитическим методом решения задачи с однородными условиями, умеют свести задачу с неоднородными краевыми условиями к задаче с однородными условиями. Поэтому можно предложить им выполнить следующее задание: составить схему решения задачи с неоднородными условиями, используя метод разделения переменных. Результат выполнения такого задания представлен на рис. 2. В данной схеме каждый блок проиллюстрирован соответствующим этапом решения приведенной выше задачи.

Схема решения задачи методом разделения переменных

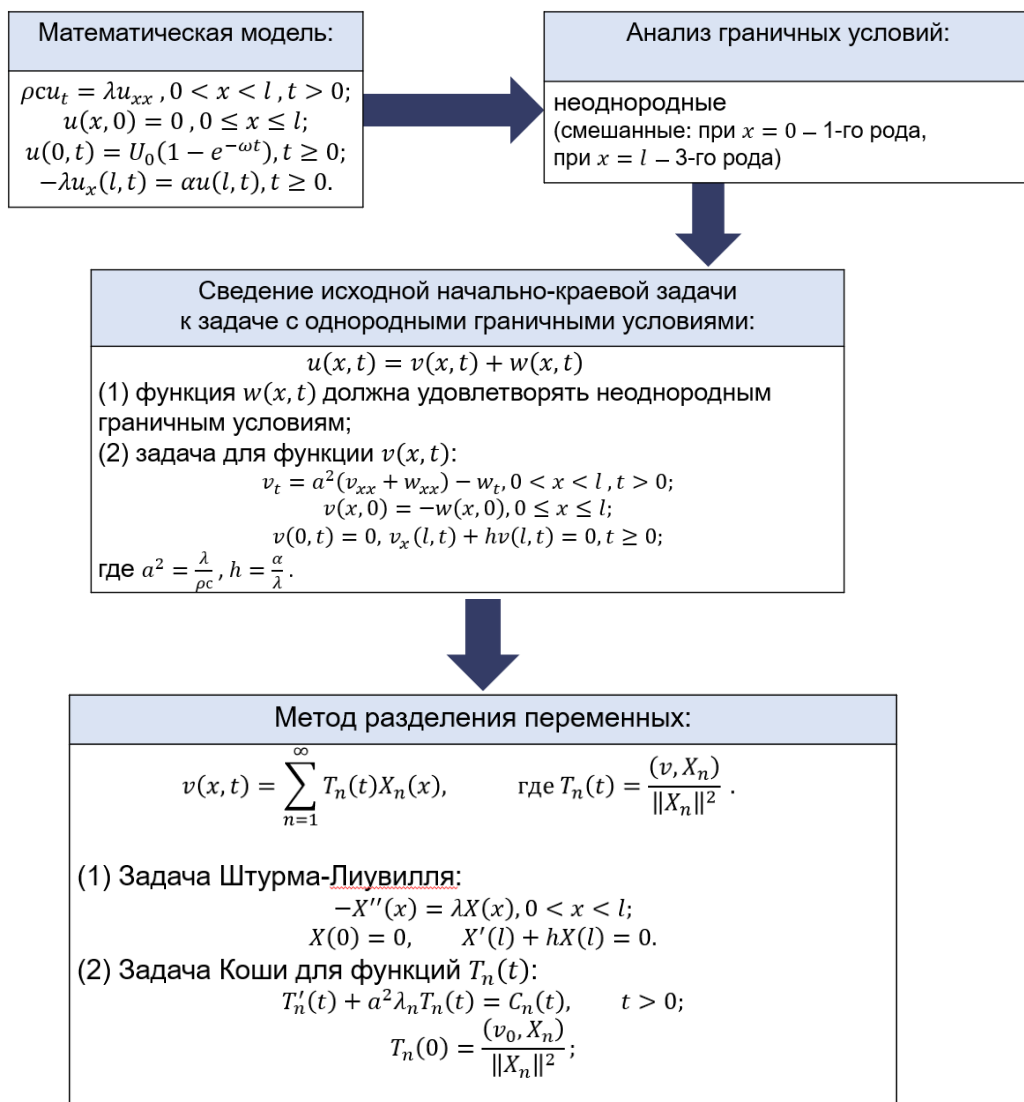


Рис.2. Основные этапы решения задачи №2

Далее акцентируем внимание на те этапы решения задачи, которые вызывают наибольшие трудности при самостоятельной работе студентов.

Во-первых, покажем, как можно подобрать функцию $w(x, t)$ так, чтобы она удовлетворяла краевым условиям исходной задачи, то есть

$$w(0, t) = \varphi(t) \text{ и } w_x(l, t) + hw(l, t) = 0,$$

и имела наиболее простой вид.

Будем искать $w(x, t)$ как произведение двух функций $w(x, t) = g(x)\varphi(t)$, тогда $g(x)$ должна удовлетворять условиям $g(0) = 1$ и $g'(l) + hg(l) = 0$.

Найдем линейную функцию, удовлетворяющую таким условиям.

Пусть $g(x) = kx + b$, тогда определим неизвестные коэффициенты b и k из системы уравнений $\begin{cases} b = 1 \\ k + h(kl + b) = 0 \end{cases}$, в результате имеем $g(x) = 1 - \frac{h}{1+hl}x$.

Таким образом, для данной задачи $w(x, t) = U_0 \left(1 - \frac{h}{1+hl}x\right) (1 - e^{-\omega t})$.

Во-вторых, напомним, что для задачи Штурма-Лиувилля (см. схему на рис. 2) собственные значения и собственные функции имеют вид [14]

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2, \text{ где } \mu_n - \text{положительные корни уравнения } \mu \cos \mu + hl \sin \mu = 0;$$

$$X_n(x) = \sin \frac{\mu_n x}{l}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{\mu_n^2 + hl(1 + hl)}{\mu_n^2 + (hl)^2}.$$

В-третьих, запишем основные этапы решения задачи Коши

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = C_n(t), & t > 0; \\ T_n(0) = 0, \end{cases}$$

где $T_n(0) = 0$ в силу условия $w(x, 0) \equiv 0$;

$$C_n(t) = \frac{(-w_t, X_n)}{\|X_n\|^2} = -\frac{U_0}{\|X_n\|^2} \omega e^{-\omega t} \int_0^l \left(1 - \frac{h}{1+hl}x\right) \sin \frac{\mu_n x}{l} dx = -\frac{U_0 l \omega}{\mu_n \|X_n\|^2} e^{-\omega t}.$$

При вычислении данного интеграла применяется формула интегрирования по частям. Однако возникающие у студентов трудности, как правило, связаны с дальнейшими преобразованиями. Полученное в результате интегрирования выражение, необходимо упростить, учитывая, что μ_n являются корнями уравнения $\mu \cos \mu + hl \sin \mu = 0$.

Для отыскания решения задачи Коши, применим теорему о свертке [15]

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \int_0^t C_n(\tau) \exp\{-a^2 \lambda_n(t - \tau)\} d\tau = \\ &= \frac{U_0 l}{\mu_n \|X_n\|^2} \frac{\omega}{a^2 \lambda_n - \omega} [\exp\{-a^2 \lambda_n t\} - \exp\{-\omega t\}]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v(x, t) = U_0 l^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n \|X_n\|^2} \frac{\omega}{(a\mu_n)^2 - \omega l^2} \left(e^{-\left(\frac{a\mu_n}{l}\right)^2 t} - e^{-\omega t}\right) \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

где μ_n – положительные корни уравнения $\mu \cos \mu + hl \sin \mu = 0$, а формула для вычисления квадрата нормы $\|X_n\|^2$ собственных функций приведена выше.

Для того чтобы записать решение $u(x, t)$ исходной начально-краевой задачи, нужно подставить найденные выше функции в выражение $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$.

Далее приведем примеры заданий на повторение изученного материала [16].

Задача №3 (пример домашнего задания).

Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l , начальная температура которого равна $u_0(x)$, см. рис.3.

На конце стержня $x = 0$ температура поддерживается равной нулю, а температура конца стержня $x = l$ изменяется по закону $u(l, t) = U_0 e^{-\omega t}$, где $U_0 = const, \omega > 0$.

Найти нестационарное распределение температуры в стержне при $t > 0$.

В рассматриваемой постановке задачи теплофизические параметры $\rho, c, \lambda - const$.

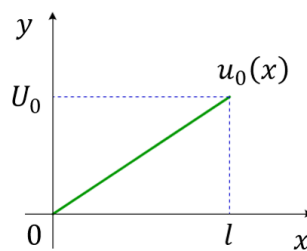


Рис. 3. Начальное распределение температуры в стержне

Для подготовки к рубежному контролю можно рекомендовать выполнить следующее задание: составить схему решения предложенной задачи методом разделения переменных, а затем решить эту задачу.

Задача №4 (пример задачи рубежного контроля).

Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l , начальная температура которого равна нулю.

На конце стержня $x = 0$ температура изменяется по закону $u(0, t) = \varphi(t)$, а на конце стержня $x = l$ температура поддерживается равной нулю.

Найти нестационарное распределение температуры в стержне при $t > 0$.

В рассматриваемой постановке задачи теплофизические параметры $\rho, c, \lambda - const$.

Вариант №1

$\varphi(t) = At$, где $A = const$.

Вариант №2

$\varphi(t) = A \sin t$, где $A = const$.

Заключение

В статье рассмотрены методические аспекты изложения одного из аналитических методов решения задач математической физики – метода разделения переменных. Для успешного освоения студентами данной темы подобраны примеры заданий на практическое применение изучаемого метода. Предложенные для решения задачи с прикладным содержанием позволят создать познавательный интерес у студентов к изучаемой дисциплине и направлены на формирование следующих навыков: формулировать математическую модель для данного физического процесса, обосновывать выбор (возможность применения) метода решения задачи, владеть данным методом для решения прикладных задач в инженерной деятельности.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 496 с.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
3. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с.
4. Егупова М.В. Математическое моделирование как необходимый компонент математического образования школьников // В книге: Практико-ориентированный подход в условиях трансформации образования, Саранск, 2022. С. 6.
5. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
6. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 416 с.

7. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Указ. соч.
8. Чигирёва О.Ю. Математическое моделирование процесса разогрева цилиндрической поверхности движущимся интенсивным источником тепла // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79, №6. С. 31-37.
9. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2019. 576 с.
11. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 228 с.
12. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968. 112 с.
13. Гальперин П.Я. Введение в психологию. М.: Книжный дом «Университет», 1999. 332 с.
14. Феоктистов В.В., Чигирёва О.Ю. Уравнения математической физики и специальные функции: методические указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 45 с.
15. Волков И.К., Канатников А.Н. Указ. соч.
16. Смирнов М.М. Указ. соч.

Olga Yu. Chigiryova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

mkfn12@yandex.ru

Methodological aspects of the presentation of the topic "Solving initial boundary value problems for the equation of thermal conductivity by the method of separation of variables"

Abstract. The relevance of this problem is due to the need for students to acquire skills in mathematical physics methods to solve engineering problems related to the design of modern technology. The purpose of the work is to help students acquire skills in mathematical methods for their further use in engineering. The paper considers one of the analytical methods for solving problems of mathematical physics, the method of separation of variables. The examples illustrate a general scheme for solving initial boundary value problems for the equation of thermal conductivity using this method. The materials of the article can be useful for students studying the discipline "Equations of mathematical Physics" as well as for teachers to prepare for seminars.

Keywords: mathematical modeling, mathematical model, heat equation, method of separation of variables, Fourier series, Sturm-Liouville problem.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «MODERN EUROPEAN RESEARCHES»

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

В статье «Нестандартные комбинации стереометрических фигур» (Безверхний Н. В. Нестандартные комбинации стереометрических фигур / Н.В. Безверхний, А.И. Белоусов // Modern European Researches. - 2022. - Т. 1, № 1. - С. 31-45.) нами была допущена халатность при оформлении списка цитируемой литературы. Мы не сослались на книгу А.Ю. Калинина и Д.А. Терёшина «Стереометрия - 11» издательства «Физматкнига», 2001.

Текст статьи был сформирован по материалам, собранным авторами за 25 лет педагогической деятельности. Подобных материалов за годы работы накопилось достаточно много. Не все сопровождалось ссылками на источники. К сожалению, мы не отследили, что один из фрагментов был сформирован с использованием указанного учебника, и не сослались на источник. Ни в коем случае у нас не было умысла присвоить себе авторство данного фрагмента текста.

Приносим свои искренние извинения авторам учебника.

С уважением, Безверхний Николай Владимирович.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 1 (T.1), 2024
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER

Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE

Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
"Inter-regional center of innovative techniques in education"

Sent for printing 05-04-2024

Circulation 1000

Order 013120/127

© All Rights Reserved, 2024