

ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 3 (T.1)
2021



Salzburg, Austria

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2021) ISSUE 3 (T.1), 152 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

Olga Bermant-Polyakova, PhD, Israel

Tatyana Fedotova, PhD, Professor, Ukraine

Alla Gabidullina, PhD, Professor, Ukraine

Pavel Gorev, PhD, Associate Professor, Russia

Mariya Greb, PhD, Associate Professor, Ukraine

Natalya Korableva, PhD, Associate Professor, Ukraine

Nikolay Kotryahov, PhD, Professor, Russia

Kanat Lakbaev, PhD, Associate Professor, Kazakhstan

Galina Nekrasova, PhD, Professor, Russia

Aleksander Nosov, PhD, Professor, Russia

Gennadiy Senkevich, PhD, Associate Professor, Ukraine

Samvel Sukiasyan, PhD, Professor, Armenia

Eugene Vechtomov, PhD, Professor, Russia

Elena Visotskaya, PhD, Professor, Ukraine

EDITORIAL ADDRESS

SEEBURGSTRASSE 7,
5201 SEEKIRCHEN AM WALLERSEE,
SALZBURG, AUSTRIA
PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.

Editorial opinion can differ from opinion of authors.

If reprinted, the reference to the journal is required.

© All Rights Reserved

Printed in Austria, 2021



CONTENTS

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ахметова Фания Харисовна, Головина Анастасия Михайловна
5-17

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ:
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ»

Бахтиярова Ольга Николаевна, Птицына Инга Вячеславовна,
Подзорова Марина Ивановна
18-24

АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ И ГЕОМЕТРИЯ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Безверхний Николай Владимирович, Грибов Александр Фёдорович,
Хорькова Нина Григорьевна,
25-30

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ИЗЛОЖЕНИЯ РАЗДЕЛОВ
ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Белоусов Алексей Иванович
30-37

О МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ
И ПРОВЕРКУ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Бирюков Олег Николаевич, Хасанов Наиль Алфатович
38-44

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРАВИЛА БЕРНУЛЛИ-ЛОПИТАЛЯ
ДЛЯ РАСКРЫТИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Велищанский Михаил Александрович, Кавинов Алексей Владимирович
45-54

ПРИМЕНЕНИЕ SKYPE И ОНЛАЙН-ДОСКИ IDROO
ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ДИСТАНЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Вергазова Ольга Бухтияровна
54-61

ДАТЧИКИ ТОЧНОГО ГИДИРОВАНИЯ.

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ
НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Вергазова Ольга Бухтияровна, Королев Евгений Алексеевич,
Якушева Ольга Юрьевна
62-66

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Виноградова Марина Станиславовна, Кандаурова Ирина Евгеньевна,
Ткачева Ольга Сергеевна
66-79

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ КВАДРОКОПТЕРА

НА ОСНОВЕ MATLAB SUPPORT PACKAGE FOR PARROT DRONES
Глазков Тимур Владимирович, Решмин Сергей Александрович
79-85

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
(НАСЫЩЕННЫЙ ПАР И ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА)

ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ И СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ

Грибов Александр Фёдорович, Краснов Игорь Константинович

86-92

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ МЕТОДИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА,
СВЯЗАННЫХ С ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович

93-98

О МЕТОДОЛОГИИ ПРЕПОДАВАНИЯ ОСНОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ
ДЛЯ РАБОТЫ С ЛИНЕЙНЫМИ МАТРИЧНЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ
ПАКЕТА ROBUST CONTROL TOOLBOX СРЕДЫ МАТЛАВ

Кавинов Алексей Владимирович, Велищанский Михаил Александрович

98-109

ВИРТУАЛЬНАЯ РЕАЛЬНОСТЬ

В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ СОВРЕМЕННОГО ВУЗА

Подзорова Марина Ивановна, Птицына Инга Вячеславовна,

Бахтиярова Ольга Николаевна

109-118

ПОДГОТОВКА ИНЖЕНЕРОВ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XVIII ВЕКА:
ПРЕПОДАВАНИЕ ПО УЧЕБНИКУ ВЕЛЬЯШЕВА-ВОЛЫНЦОВА И. А.

«АРТИЛЛЕРИЙСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ: ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ БЛАГОРОДНОГО ЮНОШЕСТВА»

Птицына Инга Вячеславовна, Бахтиярова Ольга Николаевна,

Подзорова Марина Ивановна, Птицына Елена Владимировна

119-125

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫБОРА ФОРМ ЗАДАНИЙ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ТРИГОНОМЕТРИИ

Санаева Татьяна Александровна

126-130

О ПРОВЕДЕНИИ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ
«ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Хасанов Наиль Алфатович, Бирюков Олег Николаевич

131-138

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА В ФОРМЕ ПОНТРЯГИНА»

В РАМКАХ КУРСА «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Хорькова Нина Григорьевна

138-145

О КЛАССИФИКАЦИИ ЛАГРАНЖИАНОВ,
ОБЛАДАЮЩИМИ ЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА,
И ГЕНЕРИРОВАНИИ ЗАДАНИЙ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Хорькова Нина Григорьевна, Чигирева Ольга Юрьевна

146-151

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Аннотация

В статье продемонстрированы практические приемы построения графиков различного уровня сложности. На примере тригонометрических функций разобраны основные линейные преобразования, позволяющие свободно оперировать графиками. Заметим, что линейные преобразования можно применить и для других классов функций, а не только для тригонометрических. Цель работы заключается в том, чтобы показать, как максимально быстро и просто можно построить график сложной функции с помощью основных линейных преобразований. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям первого курса.

Ключевые слова

тригонометрические функции, графики функций, линейные преобразования

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Введение

В инженерной практике с построением графиков функций приходится встречаться очень часто. При изучении таких предметов, как сопротивление материалов, теория упругости, гидравлика, электротехника, радиотехника, к построению графиков функций приходится прибегать буквально на каждом шагу.

Поэтому студентам, особенно технических специальностей, будет полезен материал этой статьи.

Итак, продолжим цикл статей, посвященных методам построения графиков различных однозначных и многозначных функций.

Ранее в работах [1-7] были изложены принципы построения графиков **линейных** и **квадратичных** функций, содержащих знак модуля. В них были рассмотрены общие схемы построения, а также методы разбиения функции на отдельные уравнения и разбиения координатной плоскости на несколько областей.

В [8] был предложен совершенно иной подход применительно к построению графиков функций. А именно, на примерах задач были показаны два способа решения поставленных задач: аналитический и графический, с применением среды MathCAD.

Было продемонстрировано, как привлечение программных средств повышает скорость решения задач. В работе была отмечена целесообразность обучения различным способам решения задач.

В [9,10] были рассмотрены методы построения графиков однозначных и многозначных **дробно-линейных функций**, содержащих знак модуля в правой части своего аналитического задания.

В данной статье перейдем к рассмотрению другого типа функций, а именно **тригонометрических**, а также разберем вопрос линейных преобразований применительно к этому классу функций.

Тригонометрические функции и их графики

К основным тригонометрическим функциям относят следующие: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Рассмотрим подробно каждую из этих функций. Начнем с функции $y = \sin x$. Областью определения данной функции является вся числовая ось. Область значений - отрезок $[-1,1]$. Графиком данной функции является синусоида.

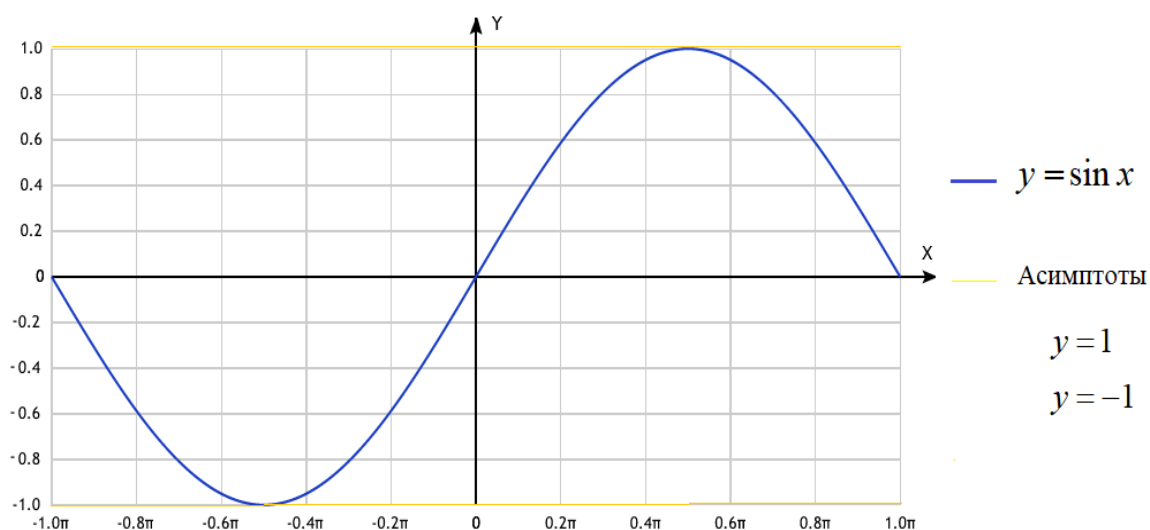


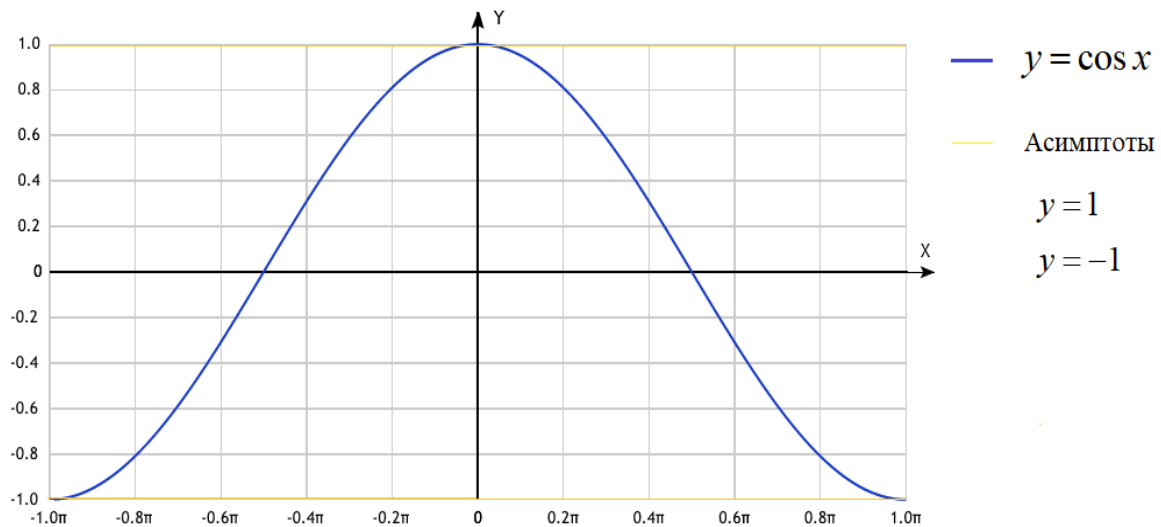
Рис. 1. График функции $y = \sin x$

Напомним, что функция $y = \sin x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$, а также нечетной, следовательно ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = \cos x$ обладает аналогичными свойствами:

- 1) $D(y) := (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(y) := [-1; 1]$;
- 3) $y = \cos x$ периодическая с периодом $T = 2\pi$;
- 4) $y = \cos x$ четная, т.е. график функции симметричен относительно оси ординат.

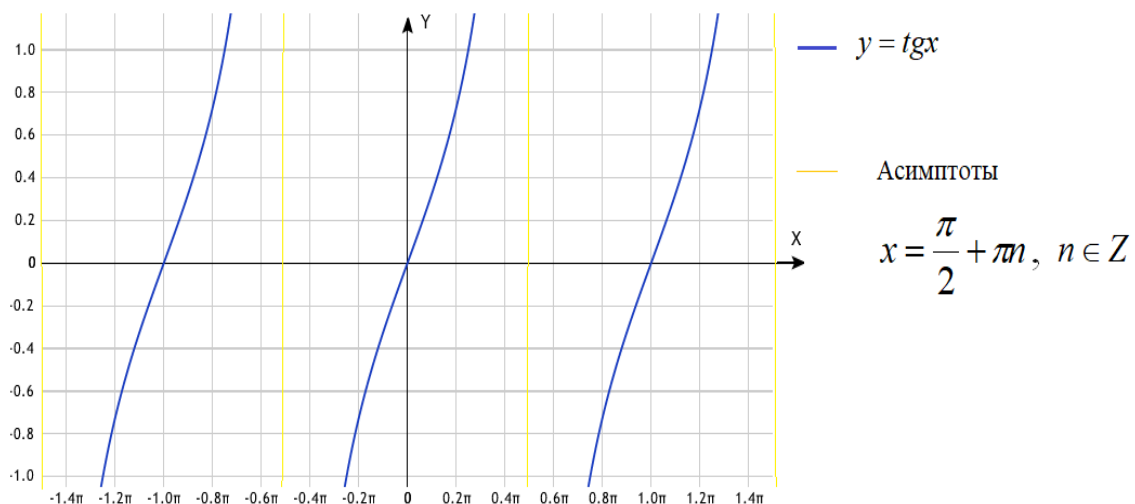
Графиком функции $y = \cos x$ является косинусоида.

Рис. 2. График функции $y = \cos x$

Перейдем теперь к построению графика функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. По определению $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, следовательно, областью определения тангенса является вся числовая ось, за исключением точек, в которых функция $y = \cos x$ обращается в нуль. С учетом периода, получаем, что $D(y) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}$, $n \in Z$. Таким образом, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ являются вертикальными асимптотами. Областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является вся числовая ось.

Напомним еще несколько свойств функции $y = \operatorname{tg} x$:

- 1) периодическая с периодом $T = \pi$ (это видно из графика);
- 2) нечетная, т.е. график функции симметричен относительно начала координат. График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вид:

Рис. 3. График функции $y = \operatorname{tg} x$

Аналогичными свойствами обладает и функция $y = \operatorname{ctgx}$. По определению $y = \operatorname{ctgx} = \frac{\cos x}{\sin x}$, следовательно, областью определения функции $y = \operatorname{ctgx}$ является вся числовая прямая, за исключением точек, в которых функция $y = \sin x$ будет обращаться в нуль. Итак, $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, прямые $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ являются вертикальными асимптотами. Областью значений функции $y = \operatorname{ctgx}$ является вся числовая ось.

Напомним еще несколько свойств функции $y = \operatorname{ctgx}$:

- 1) периодическая с периодом $T = \pi$ (это видно из графика);
 - 2) нечетная, т.е. график функции симметричен относительно начала координат.
- График функции $y = \operatorname{ctgx}$ имеет вид:

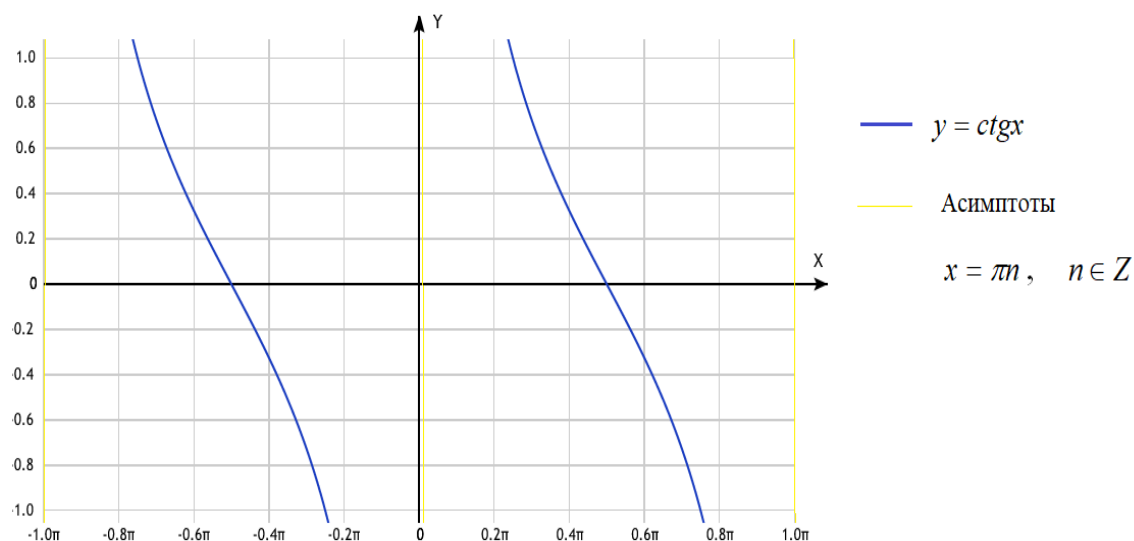


Рис. 4. График функции $y = \operatorname{ctgx}$

Построение графиков тригонометрических функций с помощью линейных преобразований

В этом разделе рассмотрим графики функций, которые получаются из приведенных выше с помощью основных линейных (геометрических) преобразований:

- 1) масштабирование (сжатие или растяжение) вдоль какой-либо из осей (абсцисс, ординат);
- 2) симметричное (зеркальное) отражение относительно какой-либо из координатных осей;
- 3) параллельный перенос (сдвиг) вдоль какой-либо из координатных осей.

Рассмотрим функцию вида: $y = af(bx + c) + d$. Разберем на примерах, как указанные преобразования можно применить к тригонометрическим функциям и выясним, какой из коэффициентов a , b , c , d за какое именно преобразование отвечает.

Пример 1. Построить график функции $y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) - 2$. Здесь $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$, $d = -2$.

Цепочка преобразований графика функции $y = \sin x$ следующая:

$$y = \sin x \rightarrow y = 3\sin x \rightarrow y = 3\sin \frac{1}{2}x \rightarrow y = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) \rightarrow y = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) - 2.$$

Графическая иллюстрация этапов построения:

1 шаг. $y = \sin x$. Период $T = 2\pi$, точка максимума $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$, точка минимума $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2 шаг. $y = 3\sin x$. Период $T = 2\pi$, точка максимума $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 3\right)$, точка минимума $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -3\right)$. То есть амплитуда колебаний функции $y = \sin x$ возрастает в три раза.

3 шаг. $y = 3\sin \frac{1}{2}x$. Период $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, точка максимума $(\pi + 2\pi k, 3)$, точка минимума $(-\pi + 2\pi k, -3)$, $k \in \mathbb{Z}$.

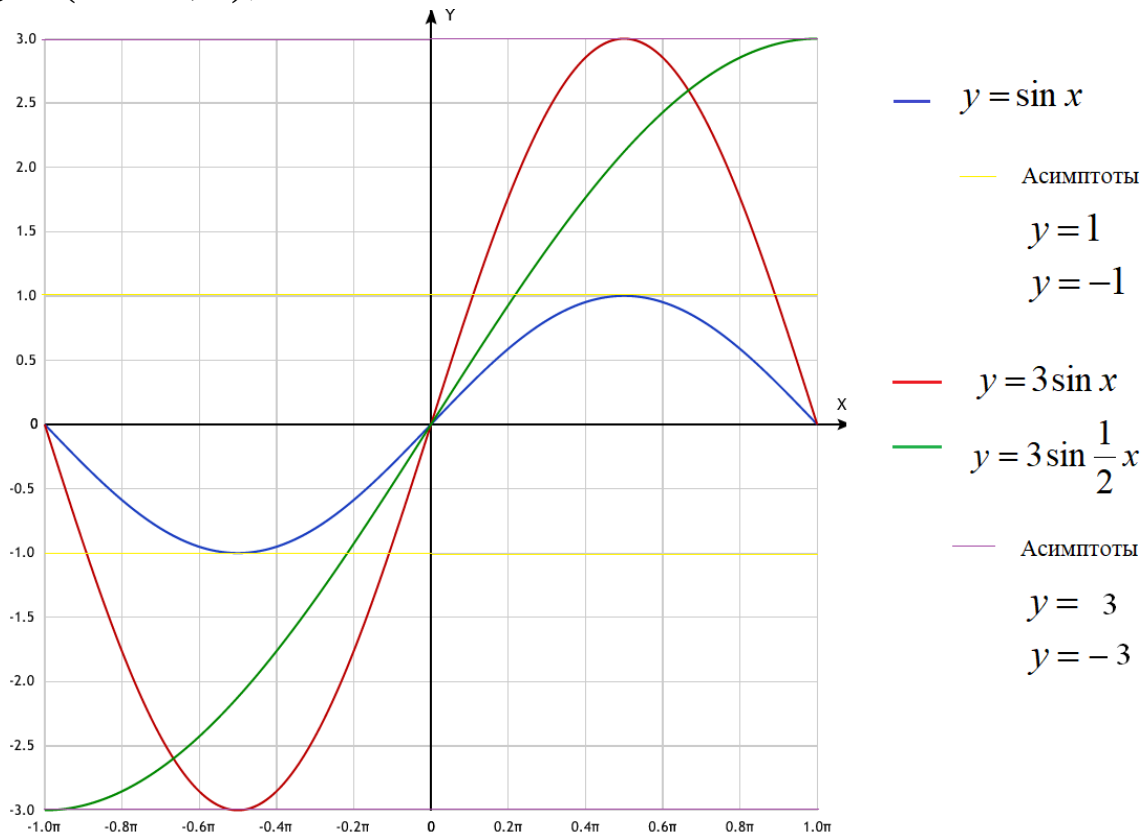


Рис. 5. Графики функций $y = \sin x$, $y = 3\sin x$, $y = 3\sin \frac{1}{2}x$

Таким образом коэффициент b отвечает за растяжение графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Ox . Если $b > 1$, то график сжимается, если $0 < b < 1$, то график растягивается. Наименьший положительный период функций $y = a\sin bx$ вычисляется по формуле $T = \frac{2\pi}{b}$, где в числителе стоит основной период функции $y = \sin x$, а в знаменателе коэффициент, стоящий перед аргументом x .

4 шаг. $y = -3\sin \frac{1}{2}x$. Для того, чтобы построить этот график, необходимо график

функции $y = 3\sin \frac{1}{2}x$, построенный на третьем шаге, отразить симметрично относительно оси абсцисс (т.е. поменять местами положительные и отрицательные значения функции y). Период при этом остается таким же $T = 4\pi$. А точки максимума и минимума меняются местами: точка максимума $(-\pi + 4\pi k, 3)$, $k \in \mathbb{Z}$; точка минимума $(\pi + 2\pi k, -3)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5 шаг. $y = -3\sin \frac{1}{2}(x-3)$. Для того, чтобы построить указанный график нужно

сдвинуть предыдущий график $y = -3\sin \frac{1}{2}x$ на три единицы вправо. Наименьший положительный период при этом сохраняется, т.е. $T = 4\pi$, а точки максимума и минимума переходят в следующие: максимум - $(-\pi + 3 + 4\pi k, 3)$, $k \in \mathbb{Z}$; минимум - $(\pi + 3 + 4\pi k, -3)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6 шаг. $y = -3\sin \frac{1}{2}(x-3) - 2$. Для того, чтобы построить данный график нужно

предыдущий график функции $y = -3\sin \frac{1}{2}(x-3)$ сместить на две единицы вниз. Наименьший положительный период при этом не меняется: $T = 4\pi$, а точки максимума и минимума переходят в следующие точки: максимум - $(-\pi + 3 + 4\pi k, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$; минимум - $(\pi + 3 + 4\pi k, -5)$, $k \in \mathbb{Z}$.

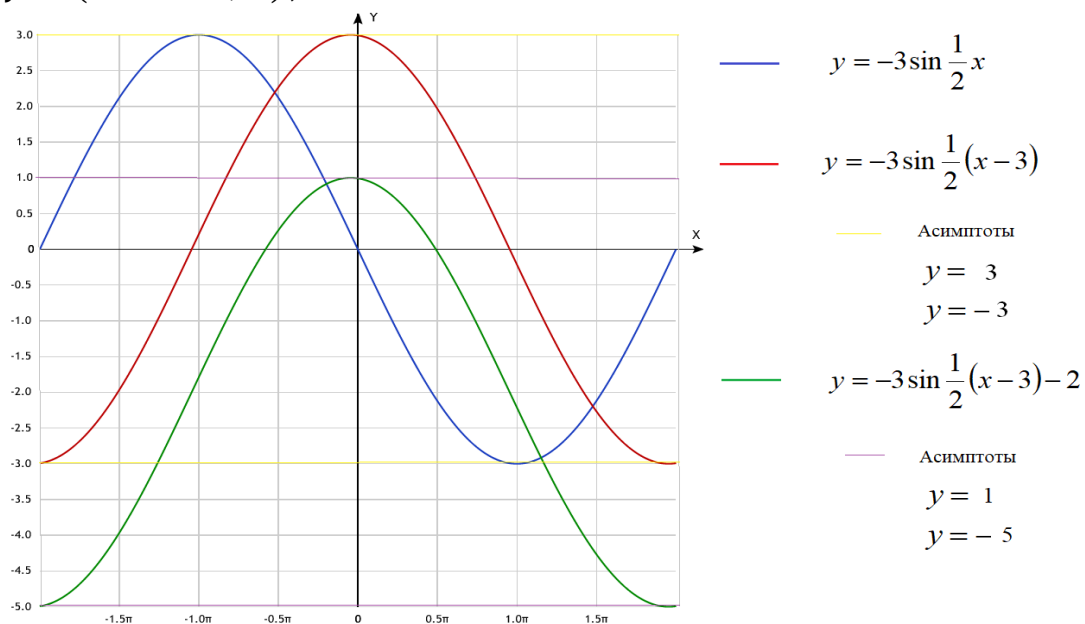


Рис. 6. Графики функций $y = -3\sin \frac{1}{2}x$, $y = -3\sin \frac{1}{2}(x-3)$, $y = -3\sin \frac{1}{2}(x-3) - 2$

Итак, подведем итог: получается, что коэффициент a отвечает за амплитуду колебаний синуса, коэффициент b за сжатие/растяжение графика, коэффициент c за сдвиг по оси абсцисс, а коэффициент d за сдвиг по оси ординат.

Рассмотрим теперь аналогичные примеры для других тригонометрических функций.

Пример 2: Построить графики функций а) $y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x) - 1$;

б) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x\right) + \frac{\pi}{3}$;

в) $y = 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \frac{\pi}{4}$.

Построим сначала график функции а) $y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x) - 1$. Здесь $a = \frac{3}{2}$, $b = -2$, $c = 2$, $d = 1$.

Цепочка преобразований графика функции $y = \cos x$ следующая:

$$y = \cos x \rightarrow y = \frac{3}{2} \cos x \rightarrow y = \frac{3}{2} \cos 2x \rightarrow y = \frac{3}{2} \cos(-2x) \rightarrow y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x) \rightarrow y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x) + 1$$

1 шаг: $y = \cos x$, $T = 2\pi$, максимум - $(2\pi, 1)$, $n \in \mathbb{Z}$; минимум - $(\pi + 2\pi, -1)$, $n \in \mathbb{Z}$

2 шаг: $y = \frac{3}{2} \cos x$. Расширяем амплитуду колебаний косинуса. $T = 2\pi$, максимум - $\left(2\pi, \frac{3}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; минимум - $\left(\pi + 2\pi, -\frac{3}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3 шаг: $y = \frac{3}{2} \cos 2x$. Сжимаем график функции $y = \frac{3}{2} \cos x$ относительно оси Ox . $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, максимум - $\left(\pi, \frac{3}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; минимум - $\left(\pi, -\frac{3}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

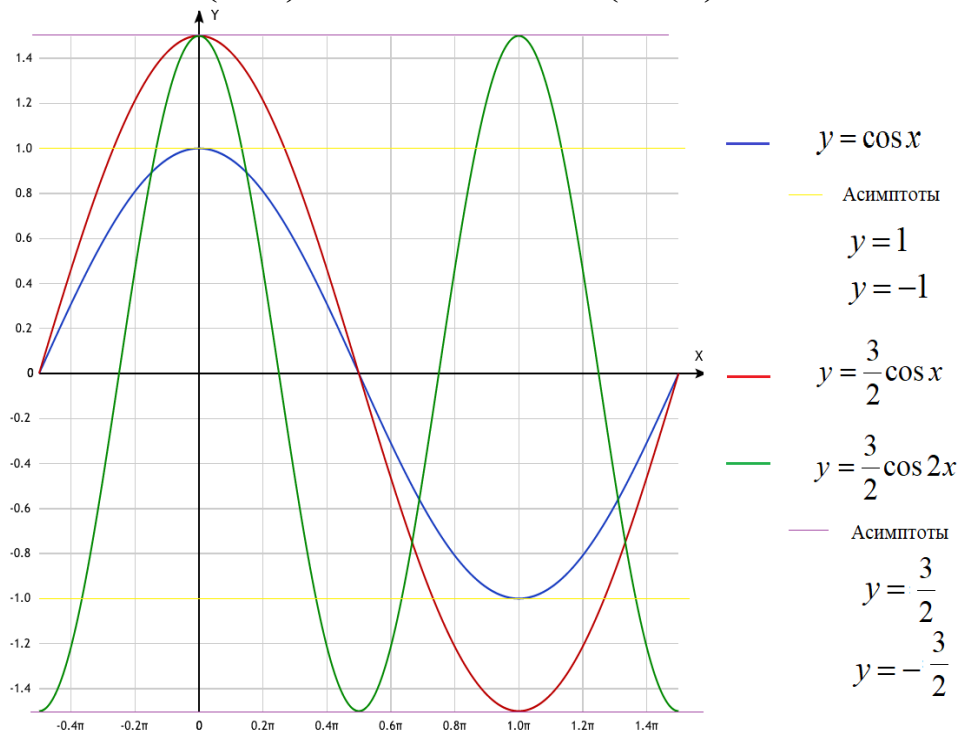


Рис. 7. Графики функций $y = \cos x$, $y = \frac{3}{2} \cos x$, $y = \frac{3}{2} \cos 2x$

4 шаг: Пользуемся свойством четности функции $y = \cos x$, получаем $y = \frac{3}{2} \cos(-2x) = \frac{3}{2} \cos 2x$. Следовательно, предыдущий график является также графиком функции $y = \frac{3}{2} \cos(-2x)$.

5 шаг: $y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x)$. Вновь пользуясь свойством четности функции $y = \cos x$, получаем: $y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x) = \frac{3}{2} \cos(-(2x - 2)) = \frac{3}{2} \cos(2x - 2) = \frac{3}{2} \cos 2(x - 1)$. Сдвигаем график последней функции $y = \frac{3}{2} \cos(2x)$ на единицу вправо. $T = \pi$, максимум - $\left(1 + 2\pi, \frac{3}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; минимум - $\left(1 + \pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6 шаг: $y = \frac{3}{2} \cos 2(x - 1) + 1 = \frac{3}{2} \cos(2x - 2) + 1$. Для построения этого итогового графика сдвигаем график, построенный на пятом шаге на единицу вверх. $T = \pi$, максимум - $\left(1 + \pi, \frac{5}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; минимум - $\left(1 + \pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

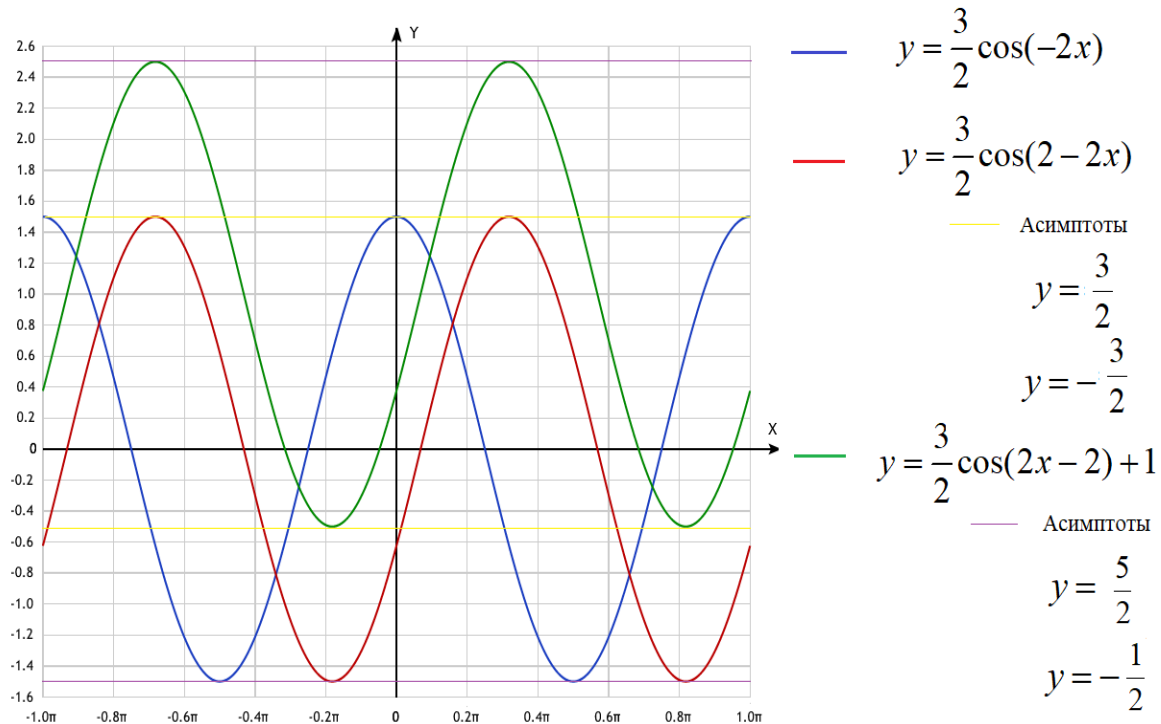


Рис. 8. Графики функций $y = \frac{3}{2} \cos(-2x)$, $y = \frac{3}{2} \cos(2 - 2x)$, $y = \frac{3}{2} \cos(2x - 2) + 1$

На этом задача преобразования графика тригонометрической функции $y = \cos x$ заканчивается.

б) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x\right) + \frac{\pi}{3}$. Здесь $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{\pi}{3}$, $d = \frac{\pi}{3}$.

Цепочка преобразований графика функции $y = \operatorname{tg} x$ следующая:

$$y = \operatorname{tg} x \rightarrow y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \rightarrow y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2}{3} x \rightarrow y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2}{3} x \rightarrow y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(-\frac{2}{3} x \right) \rightarrow y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(-\frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} x \right) + \frac{\pi}{3}.$$

1 шаг: $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$, $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 шаг: $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Так как коэффициент $a = \frac{1}{2} < 1$, то производим сжатие графика функции $y = \operatorname{tg} x$ в два раза вдоль оси ординат. Период и область определения при этом не меняются. $T = \pi$, $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 шаг: $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2}{3} x$. Так как коэффициент $b = \frac{2}{3} < 1$, то производит растягивание графика функции $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{b}$ раз, то есть в $\frac{3}{2}$ раза. Период и область определения при этом изменяются $T = \frac{\pi}{b} = \frac{3}{2} \pi$, $D(y) = \left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2} \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

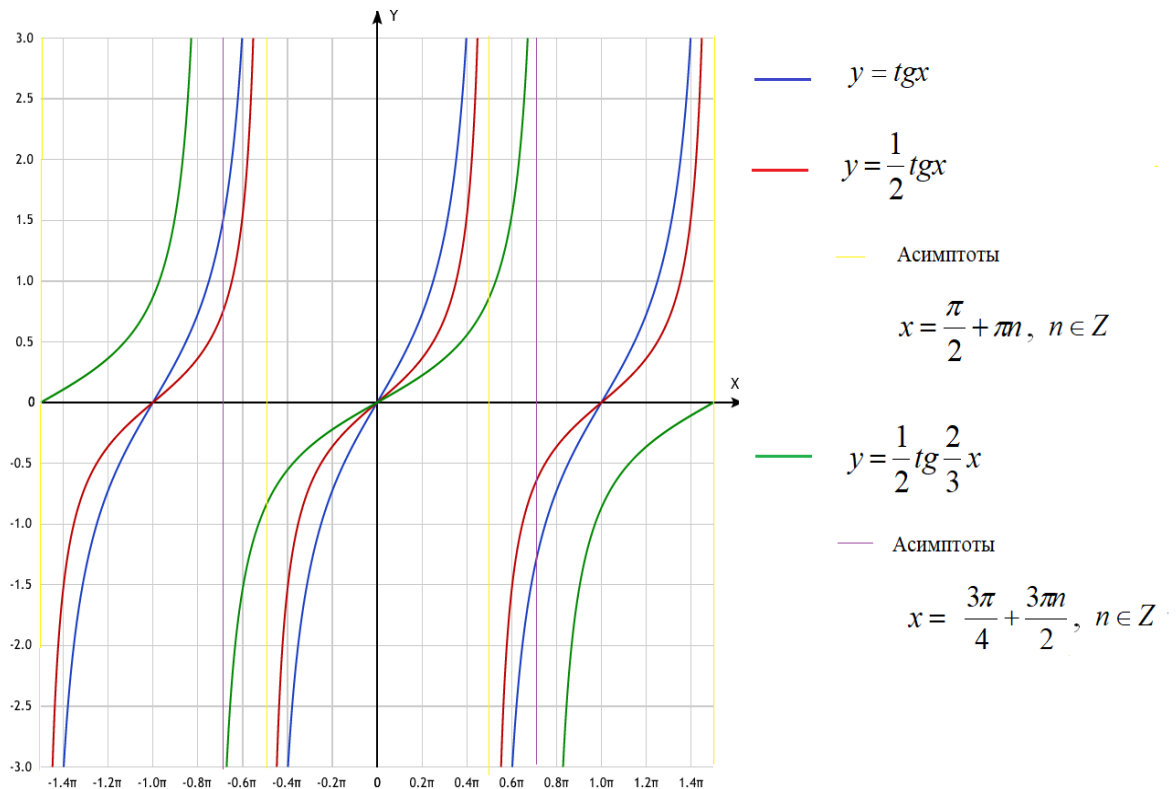


Рис. 9. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2}{3} x$

4 шаг: $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2}{3} x$. Симметрично отображаем последний график относительно оси абсцисс. Период и область определения при этом не меняются.

5 шаг: $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}x\right)$. Для того чтобы построить график данной функции, нужно

отразить график, построенный на предыдущем шаге относительно оси ординат. Можно поступить и по-другому. Воспользуемся свойством нечетности функции тангенса.

В этом случае верно равенство: $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\frac{2}{3}x$. График функции

$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\frac{2}{3}x$ был построен на третьем шаге. Таким образом, график функции

$y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}x\right)$ полностью совпадает с графиком функции $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\frac{2}{3}x$.

6 шаг: $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Сдвигаем график функции $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}x\right)$ на $\frac{\pi}{2}$

вправо. Наименьший положительный период и область определения функции при этом не меняются.

7 шаг: $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{3}$. Сдвигаем график, построенный на шестом шаге

на $\frac{\pi}{3}$ вверх. Период и область определения при этом не меняются.

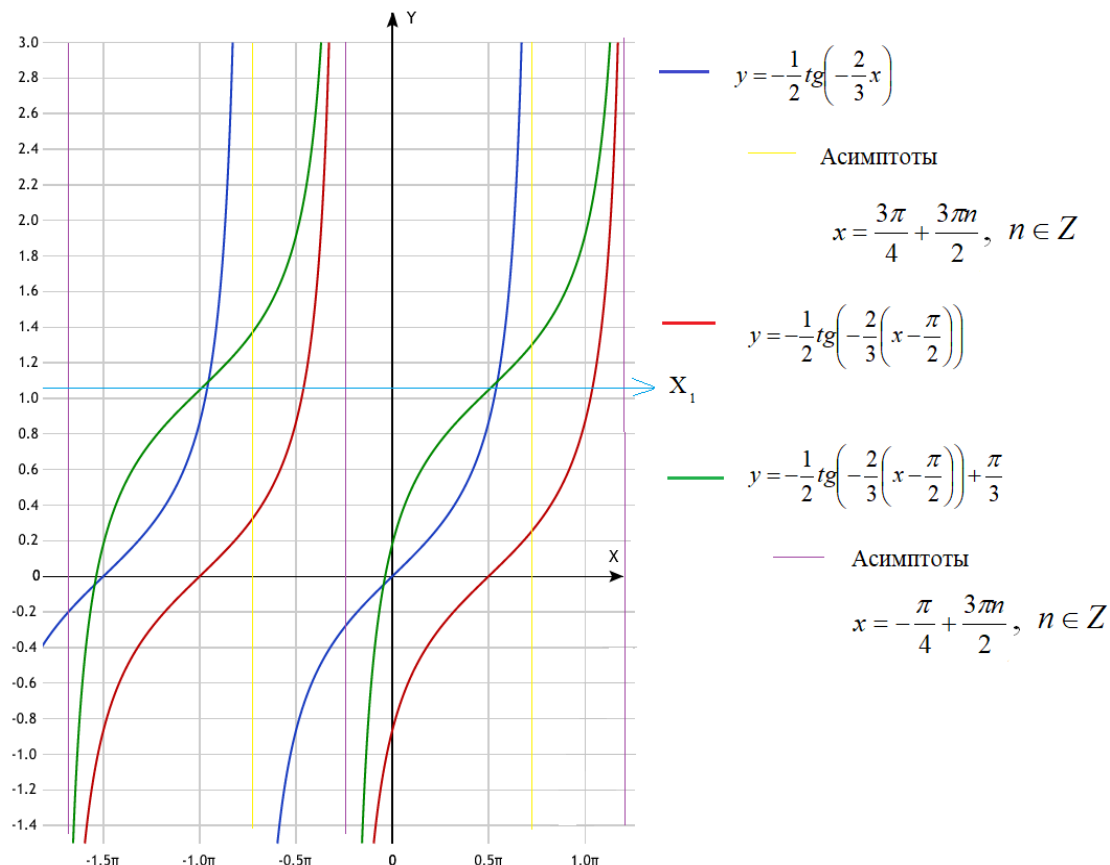


Рис. 10. Графики функции $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2x}{3}\right)$, $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{3}$

На этом задача преобразования графика тригонометрической функции $y = \operatorname{tg}x$ заканчивается.

в) $y = 2ctg\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \frac{\pi}{4}$. Здесь $a = -2$, $b = 3$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = -\frac{\pi}{4}$.

Цепочка преобразований графика функции $y = ctgx$ следующая:

$$y = ctgx \rightarrow y = 2ctgx \rightarrow y = 2ctg3x \rightarrow y = 2ctg3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow y = 2ctg3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{4}$$

1 шаг: $y = ctgx$, $T = \pi$, $D(y) = (\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 шаг: $y = 2ctgx$. Сжимаем график $y = ctgx$ вдоль оси Ox так как $a = 2 > 1$. Период и область определения при этом не меняются.

3 шаг: $y = 2ctg3x$. Так как коэффициент $b = 3 > 1$, то производится растяжение графика функции $y = 2ctgx$ вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{b}$ раз, то есть в $\frac{1}{3}$ раз. Период и область определения при этом изменяются $T = \frac{\pi}{3}$, $D(y) = \left(\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

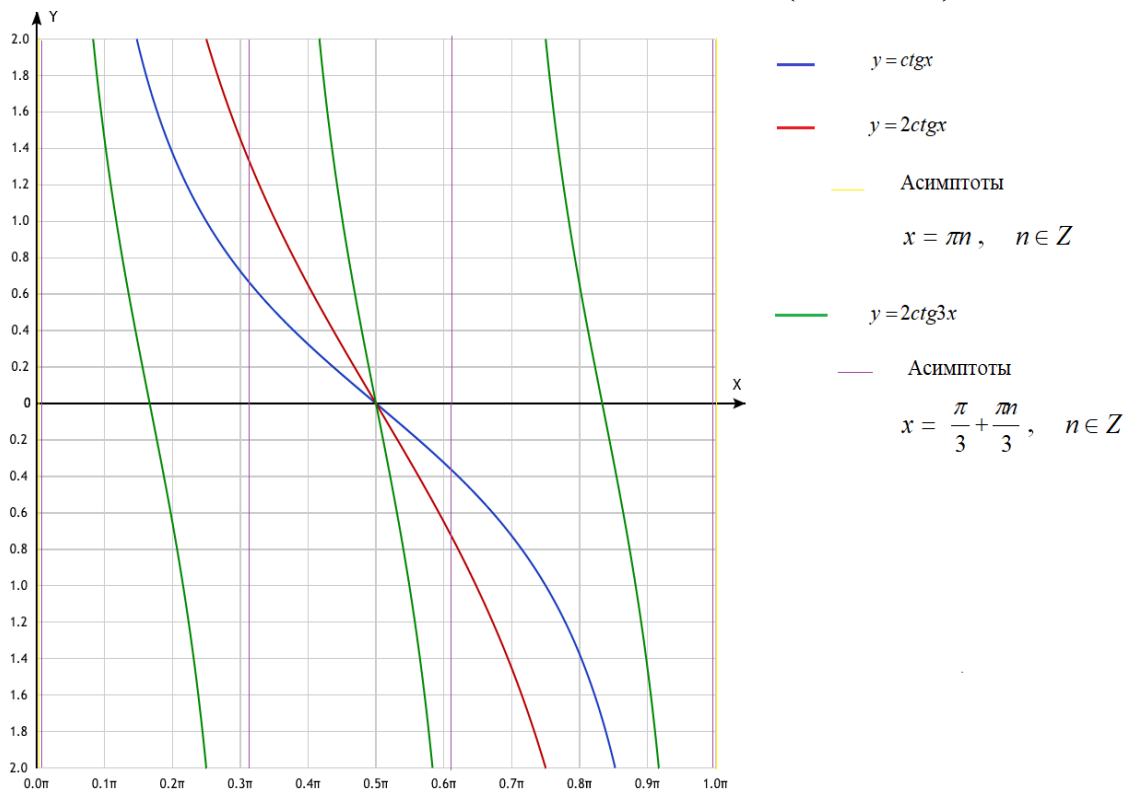


Рис. 11. Графики функций $y = ctgx$, $y = 2ctgx$, $y = 2ctg3x$

4 шаг: $y = 2ctg3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Сдвигаем график функции $y = 2ctg3x$ на $\frac{\pi}{6}$ влево. Период и область определения при этом не изменяются.

5 шаг: $y = 2ctg3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{4}$. Сдвигаем график, построенный на предыдущем шаге на $\frac{\pi}{4}$ вниз. Период и область определения при этом не изменяются.

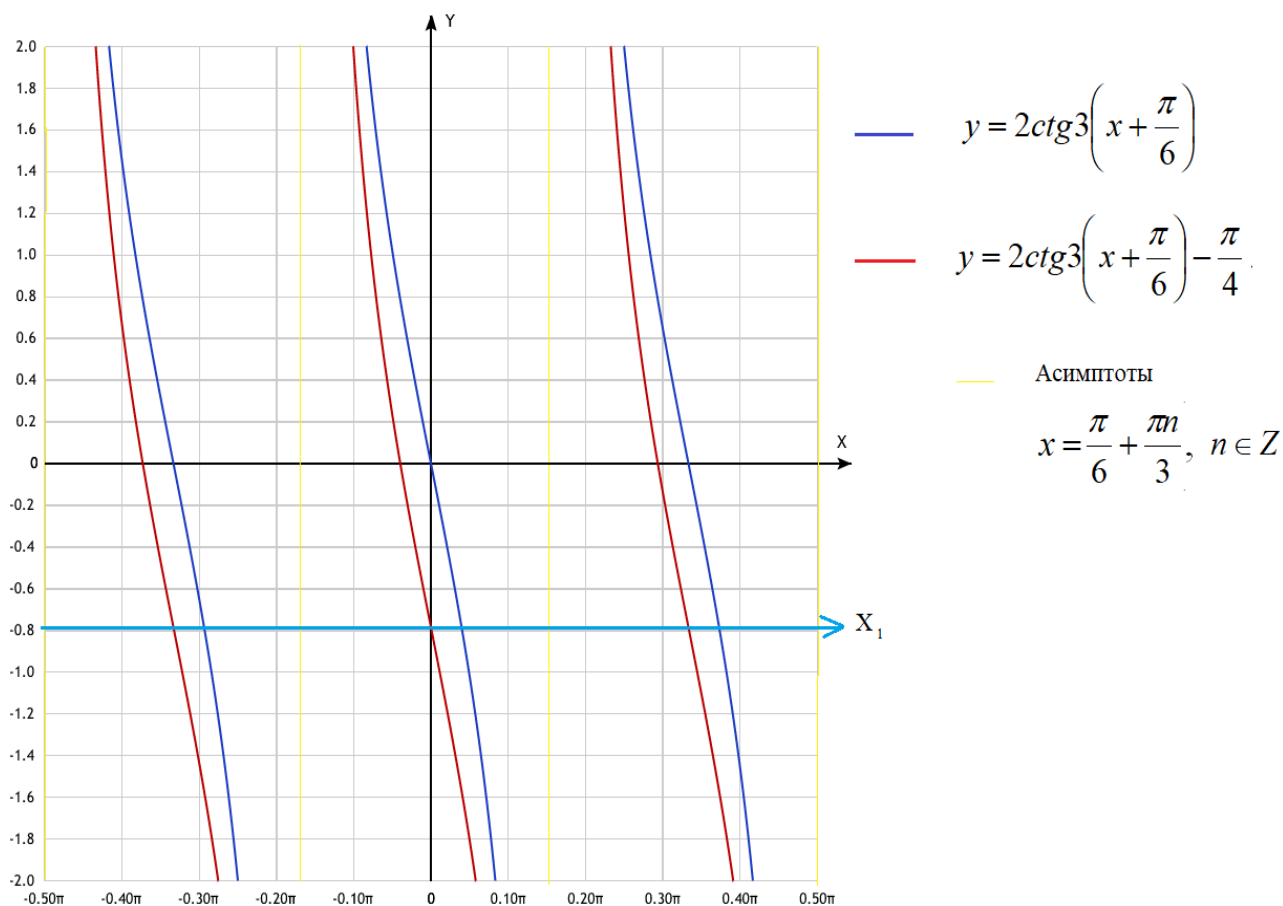


Рис. 12. Графики функций $y = 2ctg3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = 2ctg3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{4}$

На этом задача преобразования графика тригонометрической функции $y = ctgx$ заканчивается.

Заключение

В статье были рассмотрены **основные** линейные преобразования, примененные к тригонометрическим функциям, такие как:

- 1) масштабирование (сжатие или растяжение) вдоль какой-либо из осей (абсцисс, ординат);
- 2) симметричное (зеркальное) отражение относительно какой-либо из координатных осей;
- 3) параллельный перенос (сдвиг) вдоль какой-либо из координатных осей.

Однако, к линейным преобразованиям относят не только преобразования самой функции и/или ее аргумента к виду $y = af(bx + c) + d$, но и также преобразования, содержащие модуль аргумента и/или функции.

Таким образом, применение модуля тоже представляет собой линейное (геометрическое) преобразование графика. Поэтому к вопросу построения более сложных однозначных и многозначных тригонометрических функций, содержащих знак модуля, мы еще вернемся в следующих статьях.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Ахметова Ф.Х., Головина А.М. Методика построения графиков линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № 5 (май). – С. 159–170. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/170117.htm>.
2. Ахметова Ф.Х., Головина А.М. Линейная комбинация функций, содержащих знак модуля и методика построения их графиков // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V6. – С. 49–54. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/170138.htm>.
3. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Метод разбиения функции на отдельные уравнения при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V9. – С. 76–81. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/186090.htm>.
4. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V11. – С. 6–11. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/186105.htm>.
5. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Метод разбиения плоскости на несколько областей при построении графиков многозначных линейных функций, содержащих знак модуля // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2018. – № V12. – С. 1–6. – URL: <http://e-koncept.ru/2018/186118.htm>.
6. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков квадратичных функций, содержащих знак модуля // Modern European Researches. – Salzburg, 2019. – Т.1. № 2. – Р. 4-10. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38973139>
7. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков функций, заданных в виде произведения некоторых квадратичных функций, содержащих знак модуля // Modern European Researches. – Salzburg, 2019. – №5. – Р. 4-11. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41478905>
8. Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V9. – С. 77–87. – URL: <http://e-koncept.ru/2017/171024.htm>.
9. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков дробно-линейных функций, содержащих знак модуля // Modern European Researches. - Salzburg, 2020. – Т. 1. № 2. – Р. 5-14. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43596983>
10. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков многозначных дробно-линейных функций, содержащих знак модуля в правой части своего аналитического задания // Modern European Researches. - Salzburg, 2021. – Т. 1. № 2. – Р. 5-17. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46114856>.

Faniya Kh. Akhmetova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

dobrich2@mail.ru

Anastasiya M. Golovina,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

nastya_gm@mail.ru

Plotting trigonometric functions using linear converters

Abstract. The article demonstrates practical techniques for constructing graphs of various levels of complexity. Using the example of trigonometric functions the basic linear transformations are analyzed, which allow you to freely operate with graphs. Note that linear transformations can be applied to other classes of functions, not just trigonometric ones. The purpose of the work is to show how quickly and easily you can build a graph of a complex function using basic linear transformations. The content of the article will be useful for students as well as for first-year teachers.

Key words: trigonometric functions, graphs function, linear transformations.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ: «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ»

Аннотация

Одной из тем при изучении дисциплины «Теория игр и исследование операций» является «Задача о назначениях». В статье рассматривается постановка задачи о назначениях, ее математическая модель, изложен венгерский метод решения задачи. Цель работы: проиллюстрировать особенности метода решения задачи о назначениях в случае минимизации и максимизации целевой функции.

Ключевые слова

пункт отправления, пункт назначения, кандидат, вид работы,
венгерский метод, отмеченные нули

АВТОРЫ

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Введение

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи и относится к классу задач транспортного типа. Ее особенность состоит в том, что в ней количество пунктов отправления (или кандидатов) равно количеству пунктов назначения (или видов работ), а мощность каждого пункта отправления (или кандидата) и пункта назначения (или вида работ) равна единице.

Актуальность решения задачи о назначениях обусловлена тем, что для повышения экономической эффективности работы предприятий математическая модель задачи позволяет формально описать и провести количественный анализ при подборе персонала на вакантные должности, прикреплении пунктов отправления к пунктам назначения, транспорта к одному из маршрутов движения, определении руководителей проектов и научно-исследовательских работ, победителей конкурсных торгов и т. п.

Методология и результаты исследования

Постановка транспортной задачи

Пусть имеется n видов работ и n кандидатов для их выполнения.

Затраты i -го кандидата на выполнение j -го вида работ равны c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Каждый кандидат может быть назначен только на один вид работ, и каждый вид работ может быть выполнен только одним кандидатом. Требуется распределить кандидатов на виды работ, при котором суммарные затраты на выполнение работ будут минимальными [1].

Математическая постановка задачи

Пусть x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ - переменная, значение которой равно 1, если i -й кандидат выполняет j -й вид работы, и 0 - в противном случае.

Среди переменных x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ найти такие, которые доставляют минимум целевой функции [2]

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Условие (2) означает, что каждый i -й кандидат выполняет только одну работу.

Условие (3) означает, что каждая j -я работа может выполняться только одним кандидатом.

Условие (4) означает, что переменные x_{ij} принимают значения 0 или 1.

В целевую функцию (1) входят только те значения c_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$, для которых переменные x_{ij} отличны от 0, т. е. входят затраты, соответствующие назначенным работам.

Затраты кандидатов на выполнение работ запишем с помощью матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы C соответствуют кандидатам, а столбцы матрицы - видам работ.

Примечание. Если в задаче о назначениях необходимо найти переменные x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$, которые доставляют максимум целевой функции, то элементы матрицы C умножают на коэффициент - 1.

Для решения поставленной задачи о назначениях можно использовать венгерский метод, алгоритм которого включает следующие шаги [3, 4].

1. В каждой строке матрицы C находят минимальный элемент и вычитают его из всех элементов строки.

2. В каждом столбце полученной матрицы находят минимальный элемент и вычитают его из всех элементов столбца.

3. Находят строку с одним нулем. Этот нуль заключают в квадрат и называют отмеченным. В столбце, в котором находится отмеченный нуль, все остальные нули зачеркивают и в дальнейшем не рассматривают. Этот шаг продолжают, пока возможно.

4. Находят столбец с одним нулем и отмечают этот нуль. В строке, в которой находится отмеченный нуль, все остальные нули зачеркивают. Этот шаг продолжают, пока возможно.

5. Если после шагов 3 и 4 еще есть неотмеченные нули, то отмечают любой из них, а в строке или столбце, где находится этот отмеченный нуль, все остальные нули зачеркивают.

6. Если в каждой строке и в каждом столбце находится только один отмеченный нуль, то получено оптимальное решение. При этом каждый отмеченный нуль указывает на назначение кандидата на соответствующий вид работ.

В противном случае проводят минимальное количество пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых через все нули матрицы C .

7. Среди незачеркнутых прямыми элементов матрицы C находят минимальный. Этот минимальный элемент вычитают из всех незачеркнутых элементов матрицы C и прибавляют ко всем элементам этой матрицы, находящимся на пересечении прямых.

К полученной матрице применяют описанный алгоритм решения задачи, начиная в шага 3.

Рассмотрим примеры решения задач о назначениях.

Пример 1.

Пусть имеются четыре торговые базы A_1, A_2, A_3, A_4 и четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4 .

Известны расстояния c_{ij} от каждой торговой базы $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ до каждого магазина $B_j, j = 1, 2, 3, 4$, записанные в матрице

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 6 \\ 9 & 5 & 4 & 7 \\ 11 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Расстояние задано в км.

Необходимо прикрепить торговые базы к магазинам так, чтобы суммарное расстояние между ними было минимальным.

Решение.

Согласно приведенному алгоритму решения задачи находим минимальный элемент в первой строке матрицы C (этот элемент равен 6) и вычитаем его из всех элементов этой строки. Затем находим минимальный элемент во второй строке матрицы C (этот элемент равен 4) и вычитаем его из всех элементов этой строки. В третьей строке матрицы C минимальный элемент равен 2, в четвертой строке - 3. Вычитаем эти элементы из всех элементов соответствующих строк.

В результате получаем матрицу C_1

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & 6 \\ 9 & 5 & 4 & 7 \\ 11 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице C_1 находим минимальные элементы в каждом столбце (это элементы 0, 1, 0, 0 соответственно) и вычитаем их из всех элементов соответствующих столбцов.

Получаем матрицу C_2

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В первой строке матрицы C_2 расположен только один нуль. Отмечаем его. Он находится в четвертом столбце, поэтому вычеркиваем все остальные нули в этом столбце.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & \boxed{0} \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 1 & \text{\textcircled{X}} \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

В четвертой строке матрицы C_2 расположен только один нуль. Отмечаем его.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & \boxed{0} \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 5 & 1 & \text{\textcircled{X}} \\ \boxed{0} & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Больше строк с одним нулем в матрицы C_2 нет, но есть только один нуль во втором столбце. Отмечаем его. Он находится во второй строке, поэтому вычеркиваем все остальные нули в этой строке.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & \boxed{0} \\ 5 & \boxed{0} & \text{\textcircled{X}} & 3 \\ 9 & 5 & 1 & \text{\textcircled{X}} \\ \boxed{0} & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Больше нулей в матрице C_2 нет. Полученное распределение отмеченных нулей не является оптимальным, т. к. в третьей строке нет отмеченного нуля.

Поэтому проведем минимальное количество пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых через все нули матрицы C_2 . Таких прямых будет три

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & \boxed{0} \\ \hline 5 & \boxed{0} & \text{\textcircled{X}} & 3 \\ 9 & 5 & 1 & \text{\textcircled{X}} \\ \hline \boxed{0} & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Среди незачеркнутых прямыми линиями элементов матрицы C_2 находим минимальный: $\min\{2, 3, 6, 9, 5, 1\} = 1$.

Этот минимальный элемент вычитаем из всех незачеркнутых элементов и прибавляем ко всем элементам, находящимся на пересечении прямых, т. е. к элементам 3 и 7.

В результате получаем матрицу C_3

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

В первой строке матрицы C_3 расположен только один нуль. Отмечаем его. Он находится в четвертом столбце, поэтому вычеркиваем все остальные нули в этом столбце.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 0 & \text{X} \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

В четвертой строке матрицы C_3 расположен только один нуль. Отмечаем его.

В третьей строке матрицы C_3 расположен только один нуль. Отмечаем его. Он находится в третьем столбце, поэтому вычеркиваем все остальные нули в этом столбце.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ 5 & 0 & \text{X} & 4 \\ 8 & 4 & \boxed{0} & \text{X} \\ \boxed{0} & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Теперь во второй строке матрицы C_3 расположен один нуль. Отмечаем его.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & \boxed{0} \\ 5 & \boxed{0} & \text{X} & 4 \\ 8 & 4 & \boxed{0} & \text{X} \\ \boxed{0} & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Поскольку в матрице C_3 в каждой строке и в каждом столбце находится только один отмеченный нуль, то получено оптимальное решение задачи:

торговую базу A_1 следует прикрепить к магазину B_4 , торговую базу A_2 - к магазину B_2 , торговую базу A_3 - к магазину B_3 , торговую базу A_4 - к магазину B_1 .

При этом для определения суммарного расстояния между прикрепленными торговыми базами и магазинами складываем элементы исходной матрицы C , расположенные на месте отмеченных нулей в матрице C_3 :

$$C = C_{14} + C_{22} + C_{33} + C_{41} = 6 + 5 + 3 + 3 = 17 \text{ км.}$$

Примечание. Возможно, полученное оптимальное решение не является единственным.

Пример 2.

Пусть имеются четыре кандидата A_1, A_2, A_3, A_4 на четыре вакантные должности B_1, B_2, B_3, B_4 .

Эффективность работы каждого кандидата на каждой должности, зависящая от его знания и опыта, задана в матрице C

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 3 \\ 5 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix},$$

где c_{ij} - эффективность работы i -го кандидата на j -й должности.

Необходимо распределить кандидатов на вакантные должности так, чтобы суммарная эффективность их работы была максимальной.

Решение.

Поскольку в задаче необходимо максимизировать целевую функцию, то для решения задачи умножаем элементы матрицы C на -1

$$C_1 = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & -5 & -6 & -10 \\ -6 & -7 & -8 & -3 \\ -5 & -10 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Минимальный элемент в первой строке матрицы C_1 равен -8, во второй строке равен -10, в третьей строке равен -8, в четвертой строке равен -12. Вычитаем эти элементы из всех элементов соответствующих строк.

В результате получаем матрицу C_2

$$C_1 = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & -5 & -6 & -10 \\ -6 & -7 & -8 & -3 \\ -5 & -10 & -12 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -8 \\ -10 \\ -8 \\ -12 \end{matrix} \rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Минимальный элемент в первом столбце матрицы C_2 равен 0, во втором столбце - 1, в третьем столбце - 0, в четвертом столбце - 0. Вычитаем эти элементы из всех элементов соответствующих столбцов.

В результате получаем матрицу C_3

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

В первой и второй строках матрицы C_3 находятся по одному нулю. Отмечаем их.

$$C_3 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 5 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & \boxed{0} \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

В четвертой строке матрицы C_3 имеется только один нуль. Он находится в третьем столбце, поэтому вычеркиваем все остальные нули в этом столбце.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Теперь в третьей строке матрицы C_3 расположен один нуль. Отмечаем его.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Поскольку в матрице C_3 в каждой строке и в каждом столбце находится только один отмеченный нуль, то получено оптимальное распределение кандидатов по должностям:

кандидата A_1 следует назначить на вакантную должность B_1 , кандидата A_2 - на вакантную должность B_4 , кандидата A_3 - на вакантную должность B_2 , кандидата A_4 - на вакантную должность B_3 .

При этом суммарная эффективность кандидатов будет равна

$$C = C_{11} + C_{24} + C_{32} + C_{43} = 8 + 10 + 7 + 12 = 37.$$

Заключение

Задача о назначениях широко используется в прикладной деятельности и имеет множество интерпретаций.

Рассмотрены особенности постановки задачи о назначении и ее математической модели.

Приведенный метод решения позволяет найти оптимальное решение задачи, как в случае минимизации целевой функции, так и в случае ее максимизации.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 916 с.
2. Там же.
3. Там же.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

Olga N. Bakhtiyarova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

olga-bakh06@mail.ru

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

inpt@mail.ru

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

marinatichomirova@hotmail.com

Some methodological aspects of the presentation of the topic: "Solving the assignment problem".

Abstract. One of the topics in the study of the discipline "Game Theory and Operations Research" is the "Assignment problem". The article considers the formulation of the assignment problem, its mathematical model, and describes the Hungarian method for solving the problem. The purpose of the work: to illustrate the features of the method for solving the assignment problem in the case of minimizing and maximizing the objective function.

Key words: departure point, destination point, candidate, type of work, the Hungarian method, marked zeros.

АЛГЕБРА КВАТЕРНИОНОВ И ГЕОМЕТРИЯ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Аннотация

В статье сравниваются два метода решения задачи на построение суммы вращений трёхмерного пространства: прямой геометрический и алгебраический с применением алгебры кватернионов. Второй метод разобран достаточно подробно и позволяет эффективно и быстро решать поставленную задачу. Цель работы - дать теоретическое обоснование для применения свойств кватернионов к решению геометрических задач. Содержание статьи полезно студентам и преподавателям университетов.

Ключевые слова

кватернион, алгебра, норма, преобразование пространства, композиция поворотов

АВТОР

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Грибов Александр Фёдорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@yandex.ru

Введение

Всем обладателям диплома о высшем техническом образовании известны определения понятий преобразования плоскости и пространства, параллельного переноса, осевой и центральной симметрий, а также поворота вокруг оси. Эти понятия приводятся в рамках стандартных курсов геометрии и снабжены теоремами о свойствах введённых понятий и методах вычисления.

Остановимся на последнем из них - повороте пространства вокруг оси. Вычисление результата последовательного вычисления двух и более поворотов является достаточно трудоёмкой задачей. Мы рассматриваем простой с точки зрения вычислений алгебраический метод решения поставленной задачи.

Ограничения по применению этого метода могут быть вызваны отсутствием понятия алгебры над полем в программе ВУЗа и отсутствием достаточного времени для рассмотрения соответствующего теоретического материала. Мы приводим весьма краткое изложение теории, не доказываем теоремы, в результате чего получается сжатый материал, который можно изложить за одно занятие.

Определение кватернионов

Кватернионы были определены Уильямом Гамильтоном. Они нашли множество приложений в математике, механике, физике. Мы рассмотрим их приложения к решению геометрических задач в трёхмерном пространстве.

Определение кватернионов и их арифметика

Определение 1. Кватернионом называется вектор пространства $\mathbb{R}^4$, в котором выбран базис $(1, i, j, k)$. Таким образом, любой вектор пространства $\mathbb{R}^4$ представим в виде $q = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$. Кватернионы можно не только складывать как векторы, но и умножать на действительные числа.

Кроме того, на множестве H кватернионов определена и операция умножения - бинарная операция f , сопоставляющая паре кватернионов третий: $f: H \times H \rightarrow H$. Чтобы задать эту операцию, достаточно определить правила умножения базисных элементов $(1, i, j, k)$, потребовать выполнение дистрибутивности умножения относительно сложения: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, ik = -j, kj = -i$

$$q \cdot r = (a + bi + cj + dk)(x + yi + zj + tk) =$$

$$= ax + ayi + azj + atk +$$

$$+ bxi - by + bzk - btj +$$

$$+ cxj - cyk - cz + cti +$$

$$+ dxk + dyj - dzi - dt =$$

$$= (ax - by - cz - dt) + (ay + bx + ct - dz)i + (az - bt + cx + dj)j + (at + bz - cy + dx)k$$

и потребовать выполнение условия согласованности умножения на число с умножением в кольце $H: (xq)(yr) = (xy)(qr) \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall q, r \in H$

Итак, кватернионы - это кольцо и линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ одновременно, то есть алгебра над полем $\mathbb{R}$.

Если записать кватернион в виде $q = a + v$, где $a \in \mathbb{R}, v = bi + cj + dk$, то $a = \text{Re}(q)$ - действительная часть кватерниона, $v = \text{Im}(q)$ - мнимая часть. В этих обозначениях можно переписать операции над кватернионами в компактном виде.

Итак, пусть $q = a + bi + cj + dk = (a, \vec{u}), r = x + yi + zj + tk = (x, \vec{v})$, тогда

$$q + r = (a + x, \vec{u} + \vec{v})$$

$$\lambda q = (\lambda a, \lambda \vec{u}) \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Легко проверяется следующее свойство операции умножения кватернионов: если $q = a + bi + cj + dk = (a, \vec{u}), r = x + yi + zj + tk = (x, \vec{v})$, то $\text{Re}(qr) = ax - by - cz - dk = ax - \text{Re}(q) \text{Re}(r)$.

Аналогичное свойство имеет место и для мнимых частей произведения кватернионов: $\text{Im}(qr) = a \text{Im}(r) + x \text{Im}(q) + \text{Im}(q) \times \text{Im}(r)$.

В наших компактных обозначениях два последних свойства можно объединить в правило умножения кватернионов: $q \cdot r = (ax - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v})$.

Определение 2. Определим норму кватерниона

$$q = a + bi + cj + dk = (a, \vec{u}): \|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Определение 3. Кватернион, сопряженный с q определяется так:

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk = (a, -\vec{u}).$$

Операция сопряжения кватернионов обладает свойством квазимультипликативности: $\overline{qr} = \overline{r} \overline{q}$, причём именно с перестановкой множителей!

Норма удовлетворяет соотношению $\|q\| = \sqrt{\overline{q}q}$. Как следствие, отсюда находим обратный кватернион: $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$. Кватернион с единичной нормой называется единичным.

Норма обладает следующими свойствами: во-первых, это свойства нормы в обычном нормированном пространстве, во-вторых, $\|qr\| = \|q\|\|r\|$. Следствием последнего свойства является теорема Лагранжа о сумме четырёх квадратов.

Теорема Лагранжа о сумме четырёх квадратов.

$$\|qr\|^2 = \|q\|^2 \|r\|^2 \Rightarrow \forall x, y, z, t, a, b, c, d \in \mathbb{R} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \\ = (at - bx - cy - dz)^2 + (ay - dx + bz + ct)^2 + (ax + bz + ct - dx)^2 + (az + cx + dt - by)^2.$$

Кватернионы и вращения пространства

Теперь рассмотрим приложение кватернионов к решению задач в трёхмерной геометрии. В большинстве случаев приведение пары вращений в трёхмерном пространстве к результату одного вращения - достаточно сложная задача. Можно искать ось вращения для композиции поворотов, затем определять угол поворота. Кватернионы позволяют справиться с этой задачей в пространстве $\mathbb{R}^3$ изящно и с минимумом вычислений.

Чтобы задать преобразование поворота в трёхмерном пространстве, достаточно задать ось вращения и угол поворота. Ось вращения зададим единичным вектором $\vec{u}$, угол обозначим α . Заметим, что пара $(\alpha, \vec{u})$ определяет то же вращение, что и пара $(-\alpha, -\vec{u})$. Повороту, заданному первой парой, сопоставим единичный кватернион $q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{u}$ и покажем, как такое соответствие описывает заданное вращение.

Заметим, что из приведённых выше свойств нормы кватернионов вытекает

Следствие 1. Множество единичных кватернионов с операцией умножения образует группу.

При этом любой единичный кватернион $q = (a, \vec{u})$ можно записать в виде $q = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\vec{u}_1$, поскольку из соотношения $a^2 + \|\vec{u}\|^2 = 1$ следует существование соответствующего угла $\varphi \in [0; 2\pi]$: $a = \cos(\varphi), \|\vec{u}\| = \sin(\varphi)$. Нормируем вектор $\vec{u}$: $\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\|\vec{u}_1\| = 1$. Отсюда получаем представление $q = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\vec{u}_1$.

Выберем в качестве направляющего вектора оси вращения, проходящей через начало координат, вектор $\vec{u}_1$. Докажем, что для описания в терминах кватернионов поворота вокруг оси с направляющим вектором $\vec{u}_1$ на угол α в качестве φ надо взять

$\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Тогда данному вращению будет соответствовать кватернион

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{u}_1.$$

Теорема 1. Пусть $q = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\vec{u}_1$ - единичный кватернион, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Тогда отображение $f: \vec{w} \rightarrow q\vec{w}q^{-1}$ является поворотом пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг оси с направляющим вектором $\vec{u}_1$ на угол $\alpha = 2\varphi$.

Лемма 1. Прямая с направляющим вектором $\vec{u}_1$ переходит в себя при преобразовании $f: \vec{w} \rightarrow q\vec{w}q^{-1}$.

Заметим, что $q^{-1} = \cos(\varphi) - \sin(\varphi)\vec{u}_1$.

Лемма 2. Пусть $\vec{u}_1$ - единичный вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть вектор $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ перпендикулярен вектору $\vec{u}_1$. Тогда при умножении $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ как кватерниона с нулевой скалярной частью на кватернион $q = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\vec{u}_1$ слева получаем результат поворота вектора $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ вокруг оси $\vec{u}_1$ на угол φ .

Следствие 2. Умножение вектора $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ из условия леммы 2 справа на кватернион q^{-1} поворачивает $\vec{w}$ на тот же угол.

В доказательстве леммы 2 надо использовать равенство $qw = w\cos(\varphi) + w\sin(\varphi)$, где w - вектор в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{u}_1$, образующий с w прямой угол (рис.1).

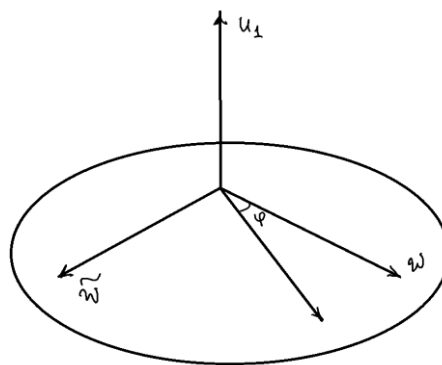


Рис. 1

Кроме того, надо использовать свойства действительной и мнимой частей произведения кватернионов и геометрический смысл векторного произведения.

Лемма 3. Преобразование $f: \vec{w} \rightarrow q\vec{w}q^{-1}$ осуществляет поворот плоскости, перпендикулярной оси с направляющим вектором $\vec{u}_1$ на угол α .

Из леммы 2 и следствия 2 вытекает справедливость леммы 3: при последовательном выполнении умножений слева на q и справа на q^{-1} суммарный угол поворота равен 2φ .

Справедливость теоремы 1 вытекает из лемм 1 и 3.

Приложение кватернионов к геометрии

С помощью результата, сформулированного в теореме 2, можно решить следующую геометрическую задачу.

Задача. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$. Выполним повороты вокруг оси l_1 на угол φ_1 , а затем вокруг оси l_2 на угол φ_2 . Найти ось и угол суммарного поворота.

Решение. Обозначим направляющие векторы осей поворотов v_1, v_2 . Зафиксируем произвольный вектор $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

При первом повороте вектор $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ отобразится в вектор $\vec{w}_1 = q_1 w q_1^{-1}$. Здесь $q_1 = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \vec{v}_1$ - единичный кватернион с направляющим вектором оси l_1 в качестве векторной части.

Результатом второго поворота, применённого уже к вектору $\vec{w}_1 = q_1 w q_1^{-1}$, будет вектор $\vec{w}_2 = q_2 w_1 q_2^{-1} = q_2 (q_1 w q_1^{-1}) q_2^{-1} = (q_2 q_1) w (q_2 q_1)^{-1}$.

После выполнения тождественных преобразований в произведении кватернионов, получаем кватернион: $q_2 q_1 = \cos(\beta) + \vec{v} \sin(\beta)$. Таким образом, результирующим является поворот вокруг оси с направляющим вектором $\vec{v}$ на угол 2β .

Доказательство теоремы 1

Докажем, что операция сопряжения вектора-кватерниона $\vec{w}$ кватернионом $z = \cos(\theta/2) + \vec{v}' \sin(\theta/2), \|\vec{v}'\|=1$ состоит в повороте $\vec{w}$ (вместе со всем пространством $\mathbb{R}^3$) на угол θ вокруг оси $\vec{v}'$. Можно сказать, что поворот вокруг мнимой части $\vec{v}'$ кватерниона $z = \cos(\theta/2) + \vec{v}' \sin(\theta/2), \|\vec{v}'\|=1$ происходит в пространстве $\mathbb{R}^3$ чисто мнимых кватернионов.

Во-первых, ось $\vec{v}'$ переходит при операции сопряжения кватернионом $z = \cos(\theta/2) + \vec{v}' \sin(\theta/2), \|\vec{v}'\|=1$ в себя. Для проверки достаточно привести три следующих очевидных факта.

1. При умножении на действительное число $\cos(\theta/2)$ любая прямая, проходящая через 0, переходит в себя.

2. При умножении на чисто мнимый кватернион $\vec{v}'$ кватернионы с ортом $\vec{v}'$ переходят в кватернионы с нулевой мнимой частью. Это объясняется тем, что векторное произведение любого вектора на себя равно нулевому вектору.

3. Умножение справа на кватернион z^{-1} , обратный кватерниону z , обладает теми же свойствами 1 и 2, что и умножение слева на кватернион z . Действительно, обратный кватернион $z^{-1} = \bar{z}$ имеет такой же вид, как и z , но с противоположным знаком при θ .

Итак, первая часть доказательства закончена: утверждение неподвижности оси $\vec{v}'$ вытекает из 1, 2, 3.

Во-вторых, угол поворота вокруг оси $\vec{v}'$ равен θ . Для доказательства применим операцию сопряжения кватернионом $z = \cos(\theta/2) + \vec{v}' \sin(\theta/2), \|\vec{v}'\|=1$ к произвольному чисто мнимому кватерниону $\vec{w}$, принадлежащему ортогональному дополнению орта $\vec{v}'$ в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ чисто мнимых кватернионов.

При умножении $\vec{w}$ на $z = \cos(\theta/2) + \vec{v}' \sin(\theta/2), \|\vec{v}'\|=1$ слева вектор $\vec{w}$ поворачивается в указанном ортогональном дополнении на угол $\theta/2$. Это следует из правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме: аргументы складываются.

Рассмотрим умножение справа на z^{-1} . Чтобы понять, что при таком умножении получаем поворот на $\theta/2$, можно рассуждать так: рассмотрим равенства $\vec{w} z^{-1} = \vec{w} \bar{z} = \overline{\vec{w} z}$ и заметим, что при сопряжении чисто мнимые кватернионы меняют знак. Итак, закончена вторая часть доказательства теоремы 1, и тем самым, теорема 1 доказана.

Заклучение

Материал данной статьи предназначен для поверхностного знакомства алгеброй кватернионов и её приложениями. Цель - изложить материал, уместающийся в рамки одного занятия, по мнению авторов достигнута. Отсутствие некоторых доказательств может быть компенсировано решением соответствующих задач на факультативном уровне.

Интерес к алгебре кватернионов подстёгивают многочисленные приложения этой структуры в геометрии, механике, квантовой физике, компьютерной графике.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гордеев В.Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. Издательство «Сталь» 2016.
2. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике. Минск БГУ 2019.
3. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. Издательство московского центра непрерывного математического образования. Москва 2002.

Nikolai V. Bezverkhny,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

nbezv@mail.ru

Alexander F. Gribov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

alexandr-gribov@list.ru

Nina G. Khorkova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

ninakhorkova@bmstu.ru

Algebra of quaternions and geometry of three-dimensional space

Abstract. The article compares two methods for solving the problem of constructing the sum of rotations of a three-dimensional space: direct geometric and algebraic using the algebra of quaternions. The second method is analyzed in sufficient detail and allows you to solve the task efficiently and quickly. The purpose of the work is to provide a theoretical justification for applying the properties of quaternions to solving geometric problems. The content of the article is useful for university students and teachers.

Keywords: quaternion, algebra, norm, space transformation, composition of rotations.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ИЗЛОЖЕНИЯ РАЗДЕЛОВ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Аннотация

Актуальность рассматриваемых в статье методических проблем обусловлена тем, что теория множеств является фундаментом в построении курса дискретной математики и некоторые ее вопросы требуют тщательной методической проработки. В статье рассматривается одна из важнейших теорем в теории упорядоченных множеств - теорема о неподвижной точке в индуктивно упорядоченном множестве и, на базе этой теоремы, излагается новое доказательство известной в канторовской теории множеств теоремы Шрёдера-Бернштейна о линейности шкалы мощностей. Статья может быть полезна студентам и преподавателям в процессе изложения курса дискретной математики.

Ключевые слова

теория множеств, методические проблемы, упорядоченное множество, мощность множества, непрерывное отображение, неподвижная точка отображения, дискретная математика

АВТОР

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Введение

Методика преподавания теории множеств остается актуальной проблемой, что явствует из анализа совсем недавно опубликованных работ.

Так в статье [1] отмечается важная роль теоретико-множественной базы именно в курсе дискретной математики и предлагается синтез формально-логического и деятельностного подходов в преподавании теории множеств. В работе [2] рассматриваются некоторые наиболее проблемные вопросы в изложении теории множеств. Методики преподавания теории множеств в рамках курса дискретной математики обсуждаются в работе [3] и диссертации [4].

В курсе дискретной математики, читаемой студентам-программистам в МГТУ им. Н.Э. Баумана, особую роль играет теорема о неподвижной точке в индуктивно упорядоченном множестве. Именно на базе этой теоремы выводятся ключевые результаты в теории полуколец ([5], [6]), которая, в свою очередь, служит основой при анализе графов, автоматов и языков. Существенное значение эта теорема имеет и в семантике языков программирования. Простой пример анализа семантики языка программирования с использованием указанной теоремы приведен в [7] (в одном из дополнений к гл. 8).

В данной статье рассматривается понятие индуктивно упорядоченного множества, разбираются важные для дальнейшего изложения примеры, доказывается сама теорема о неподвижной точке, с некоторыми изменениями и уточнениями относительно изложения в [8], и в заключение излагается новое, основанное на упомянутой теореме, доказательство теоремы Шредера-Бернштейна о линейности шкалы мощностей [9]. В известном смысле, это «побочный» результат, но он показывает эффективность теоремы о неподвижной точке как инструмента построения доказательства в различных разделах математики. Кроме того, это доказательство оказывается проще классического (см. предыдущую ссылку), где, в сущности, и доказывается существование неподвижной точки, но для некоторого конкретного отображения.

Статья основана на курсе лекций, читаемых автором и его коллегами в МГТУ им. Н.Э. Баумана студентам программистских специальностей и находится в ряду других научно-методических публикаций автора по данному курсу (см., например, [10], [11]).

Методология и результаты исследования

Методология основана на концепции построения курса дискретной математики, как она представлена в [12]. Теория множеств понимается вполне «наивно» в канторовском духе. Следует заметить, что к моменту изложения теоремы о неподвижной точке студентам известны основные результаты теории множеств и отношений, в том числе, что особенно важно, отношений порядка и упорядоченных множеств.

Индуктивно упорядоченное множество

Упорядоченное множество $A = (A, \leq)$ называется индуктивно упорядоченным (или индуктивным упорядоченным), если

1: оно имеет наименьший элемент

и

2: любая неубывающая последовательность его элементов имеет точную верхнюю грань.

В дальнейшем используется аббревиатура ИУМ.

Рассмотрим некоторые примеры

1) Отрезок числовой прямой с естественным числовым порядком: $([a, b], \leq)$.

В данном случае наименьший элемент - число a (левая граница отрезка), а существование точной верхней грани у любой неубывающей последовательности вытекает из известной теоремы Вейерштрасса, согласно которой любая неубывающая и ограниченная сверху числовая последовательность имеет предел, который в данном случае и оказывается точной верхней гранью последовательности.

2) Множество всех подмножеств произвольного множества M отношением включения: $(2^M, \subseteq)$

Здесь наименьший элемент - пустое множество, а точная верхняя грань произвольной последовательности определяется как

$$\sup A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{x : (\exists n)(x \in A_n)\}.$$

Рассмотрим это подробнее. Здесь уместно и важно показать, как доказывается, что элемент упорядоченного множества является точной верхней гранью последовательности (или подмножества). Сначала доказывается, что это просто верхняя грань. В данном случае это легко усматривается из того, что если элемент $x \in A_n$ для некоторого n , то, просто в силу определения бесконечного объединения множеств, $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Следовательно, это объединение есть верхняя грань последовательности.

Теперь пусть множество B является произвольной верхней гранью рассматриваемой последовательности, то есть для каждого $n \geq 0$ имеет место включение $A_n \subseteq B$.

Тогда, если $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, то для некоторого $n \geq 0$ $x \in A_n$, и, следовательно, $x \in B$, то

есть $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq B$, откуда следует, что данное объединение всех членов последовательности будет наименьшим по включению множеством, содержащим все члены последовательности, то есть будет точной верхней гранью последовательности.

Еще раз обратим внимание на то, что этот супремум определен для любой последовательности множеств, а не только для неубывающей.

3) Множество неотрицательных целых чисел с отношением делимости: $(\mathbb{N}_0, |)$, где по определению $a | b \iff b = ka, k \in \mathbb{N}_0$.

Любая конечная монотонно возрастающая последовательность имеет, очевидно, супремум в виде наибольшего (по делимости) числа этой последовательности.

Если же взять монотонно возрастающую бесконечную последовательность $a_0 | a_1 | \dots | a_n | a_{n+1} | \dots$, то единственное число, которое делится на все члены этой по-

следовательности, будет равно нулю, то есть $\sup a_n = 0$. Отсюда же следует, что упорядоченное множество $(\mathbb{N}, |)$, носитель которого не содержит нуля, уже не будет ИУМ.

Этот пример несколько парадоксален, но поучителен.

Докажем теперь некоторые утверждения об индуктивно упорядоченных множествах.

Лемма 1. Если у произвольной неубывающей последовательности элементов ИУМ отбросить любое конечное число членов, то ее точная верхняя грань не изменится.

Доказательство. Пусть $A = (A, \leq)$ - ИУМ и пусть $\{a_n\}_{n \geq 0}$ - неубывающая последовательность его элементов.

Для некоторого $k > 0$ рассмотрим подпоследовательность $\{a_n\}_{n \geq k}$, убрав тем самым первые $k-1$ членов последовательности. Докажем, что $a \iff \sup_{n \geq 0} a_n = \sup_{n \geq k} a_n$. То, что элемент a является просто верхней гранью «усеченной» последовательности, очевидно. Допустим, что b есть верхняя грань подпоследовательности $\{a_n\}_{n \geq k}$. Тогда для любого $n \geq k$ $a_n \leq b$, но поскольку последовательность $\{a_n\}_{n \geq 0}$ не убывает, то $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \leq b$, то есть элемент b является верхней гранью всей последовательности $\{a_n\}_{n \geq 0}$, откуда $a \leq b$ и $a = \sup_{n \geq k} a_n$.

Утверждение леммы аналогично известной теореме математического анализа, согласно которой предел сходящейся последовательности не изменится, если у последовательности отбросить произвольное число первых членов. Но никогда нельзя забывать, что понятия точной верхней грани неубывающей последовательности ИУМ и понятие предела числовой последовательности - совсем разные вещи.

Отображение $f: A \rightarrow B$ (произвольного) упорядоченного множества $A = (A, \leq)$ в упорядоченное множество $B = (B, \leq)$ называется монотонным, если $(\forall x, y \in A)(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

В условиях предыдущего определения, если множества являются индуктивно упорядоченными, то отображение $f: A \rightarrow B$ называется непрерывным, если для любой неубывающей последовательности $\{x_n\}_{n \geq 0}$ последовательность $\{f(x_n)\}_{n \geq 0}$ образов имеет точную верхнюю грань, причем $f(\sup x_n) = \sup f(x_n)$.

Заметим, что в этом определении априори не предполагается, что последовательность образов не убывает.

Теорема 1. Всякое непрерывное отображение одного ИУМ в другое монотонно.

Доказательство. Пусть $x \leq y; x, y \in A$ (в условиях данных выше определений). Рассмотрим последовательность $x, y, y, \dots, y, \dots$, в которой все элементы, начиная со второго, равны одному и тому же y . Тогда $\sup\{f(x), f(y), f(y), \dots, f(y), \dots\} = \sup\{f(x), f(y)\} = f(\sup\{x, y\}) = f(y)$, в силу непрерывности отображения f , откуда $f(x) \leq f(y)$, то есть отображение монотонно.

Отсюда и следует, что последовательность образов неубывающей последовательности тоже будет неубывающей (для непрерывного отображения).

Из теоремы 1 вытекает также, что понятия непрерывности отображений ИУМ и непрерывности в классическом анализе далеко не тождественны, хотя определенное сходство между этими типами непрерывности и есть.

Основной, и важнейший для приложений, результат теории индуктивно упорядоченных множеств, есть теорема о наименьшей неподвижной точке:

Теорема 2. Всякое непрерывное отображение ИУМ в себя имеет наименьшую неподвижную точку.

Доказательство. Пусть $A = (A, \leq)$ - ИУМ, и $f : A \rightarrow A$ - непрерывное отображение. Обозначим через O наименьший элемент множества A .

Построим последовательность

$$O, f(O), f(f(O)), \dots, f^n(O), \dots,$$

где $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), n \geq 1; f^0(x) = x$ - результат n -кратного применения функции f к элементу x .

Докажем, что эта последовательность не убывает. Так как O наименьший элемент, то $O \leq f(O)$. Если для любого $k \leq n > 0$ предположить, что $f^{k-1}(O) \leq f^k(O)$, то в силу монотонности непрерывного отображения f получим при $k = n$ $f(f^{n-1}(O)) = f^n(O) \leq f(f^n(O)) = f^{n+1}(O)$,

откуда, в силу принципа индукции, для любого $n \geq 0$ имеет место $f^n(O) \leq f^{n+1}(O)$, что и означает неубывание последовательности $\{f^n(O)\}_{n \geq 0}$.

Тогда эта последовательность имеет точную верхнюю грань.

Положим $a = \sup_{n \geq 0} f^n(O)$.

Докажем, что $f(a) = a$.

Имеем:

$$f(a) = f(\sup_{n \geq 0} f^n(O)) = \sup_{n \geq 0} f(f^n(O)) = \sup_{n \geq 0} f^{n+1}(O) = \sup_{n \geq 1} f^n(O) = a$$

На втором шаге этой цепочки используется непрерывность отображения f , а не последнем - лемма 1: вычисляется супремум последовательности, полученной из исходной отбрасыванием нулевого члена.

Итак, доказано существование неподвижной точки отображения f .

Докажем теперь, что это именно наименьшая неподвижная точка.

Пусть для какого-то $b \in A$ выполняется $f(b) = b$. Так как $O \leq b$, то в силу монотонности любого непрерывного отображения

$$f(O) \leq f(b) = b, f(f(O)) \leq f(f(b)) = b, \dots, f^n(O) \leq b$$

для любого $n \geq 0$, и, тем самым, элемент $b \in A$ является верхней гранью исходной последовательности, откуда $a = \sup_{n \geq 0} f^n(O) \leq b$.

Теорема полностью доказана.

Ее доказательство конструктивно, так как дает формулу вычисления наименьшей неподвижной точки любого непрерывного отображения ИУМ в себя.

Теорему о наименьшей неподвижной точке можно трактовать, как утверждение о существовании наименьшего решения уравнения $x = f(x)$ в произвольном ИУМ. Это важно с точки зрения приложений этой теоремы в теории полуколец и основанных на ней методах анализа графов и автоматов ([12], [13]).

Рассмотрим в этой связи такой пример.

В ИУМ всех подмножеств произвольного множества M (см. пример 2 выше) решим уравнение

$$X = (A \cap X) \cup B$$

относительно неизвестного множества X .

Можно доказать, что правая часть этого уравнения $f(X) = (A \cap X) \cup B$ непрерывна (это доказывается в теории полуколец, см., например, [14]).

Вычисляем последовательные приближения к решению:

$f(\emptyset) = B, f(B) = (A \cap B) \cup B = B$, то есть для любого $n \geq 1$ $f^n(\emptyset) = B$. Это и есть наименьшее решение уравнения.

Интересно показать попутно анализ этого уравнения независимым от теоремы о неподвижной точке методом.

Рассматриваемое уравнение можно трактовать, как утверждение о равенстве двух множеств. Используя известный критерий равенства множеств, состоящий в том, что множества равны тогда и только тогда, когда их симметрическая разность пуста, получим:

$$X \Delta ((A \cap X) \cup B) = \emptyset,$$

откуда

$$X \cap ((A \cap X) \cup B) = \emptyset,$$

$$\bar{X} \cap ((A \cap X) \cup B) = \emptyset.$$

Преобразуем 1-е пересечение:

$$X \cap ((A \cap X) \cap \bar{B}) = X \cap (\bar{A} \cup \bar{X}) \cap \bar{B} = X \cap \bar{A} \cap \bar{B} = X \cap \overline{A \cup B} = \emptyset,$$

откуда $X \subseteq A \cup B$.

Далее:

$$\bar{X} \cap ((A \cap X) \cup B) = \bar{X} \cap B = \emptyset,$$

откуда $B \subseteq X$.

Итак, $B \subseteq X \subseteq A \cup B$. Это значит, что любое множество X , удовлетворяющее такому условию (и только такое), будет решением исходного уравнения, а $X = B$ есть решение наименьшее.

Теорема Шредера-Бернштейна

Как известно, два множества называются эквивалентными, или равномощными, если между ними может быть установлено взаимно однозначное соответствие, то есть существует биекция каждого из них на другое. Факт равномощности множеств X и Y обозначается так: $|X| = |Y|$.

Далее, мы пишем $|X| \leq |Y|$ и говорим, что мощность множества X не больше мощности множества Y , если существует инъекция первого во второе.

Теорема Шредера-Бернштейна утверждает линейность шкалы мощностей, а именно:

Теорема 3. Если для двух множеств X, Y имеет место $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

Докажем сначала лемму:

Лемма 2. Для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ и любого семейства подмножеств $(A_i)_{i \in I}$ множества X выполняется:

$$f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i) \text{ и } f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i),$$

Причем, если f - инъекция, то последнее включение превращается в равенство.

Доказательство. Строя логическую цепочку, как принято при доказательстве методом двух включений [15], получим:

$$y \in f(\bigcup_i A_i) \Rightarrow \exists x \in \bigcup_i A_i : y = f(x) \Rightarrow \exists i \exists x \in A_i : y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists i : y \in f(A_i) \Rightarrow y \in \bigcup_i f(A_i)$$

Обратно:

$$y \in \bigcup_i f(A_i) \Rightarrow \exists i : y \in f(A_i) \Rightarrow \exists i \exists x \in A_i : y = f(x) \Rightarrow y \in f(\bigcup_i A_i).$$

Для пересечения первое включение доказывается аналогично (с заменой квантора существования по индексу квантором общности).

Пусть теперь отображение f инъективно, и пусть некоторый $y \in \bigcap_i f(A_i)$. Это значит, что для всякого $i \in I$ имеет место $y \in f(A_i)$, т.е. для всякого $i \in I$ найдется такой x , что $x \in A_i$ и $y = f(x)$. В силу инъективности отображения f такой x единственный, откуда следует, что $x \in \bigcap_i A_i$, и, стало быть, $y \in f(\bigcap_i A_i)$. Таким образом, если отображение f инъективно, то имеет место равенство $f(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f(A_i)$.

Доказательство теоремы 3. Если $|X| \leq |Y|$, то существует инъекция $f: X \rightarrow Y$, а так как $|Y| \leq |X|$, то существует инъекция $g: Y \rightarrow X$. Определим отображение $\varphi: 2^X \rightarrow 2^X$, положив

$$\varphi(A) = \overline{g(f(A))},$$

причем мы пишем $\overline{g(V)}$ вместо $X \setminus g(V)$ и $\overline{f(U)}$ вместо $Y \setminus f(U)$.

Докажем, что это отображение непрерывно по включению (на индуктивно упорядоченном множестве $(2^X, \subseteq)$).

Для произвольной последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ подмножеств X будем иметь:

$$\varphi(\bigcup_n A_n) = \overline{g(f(\bigcup_n A_n))}.$$

В силу леммы 2 и согласно известным тождествам в теории множеств, получим:

$$\begin{aligned} \overline{g(f(\bigcup_n A_n))} &= \overline{g(\bigcup_n f(A_n))} = \overline{g(\bigcap_n \overline{f(A_n)})} = \\ &= \bigcap_n \overline{g(f(A_n))} = \bigcup_n \overline{g(f(A_n))} = \bigcup_n \varphi(A_n) \end{aligned}$$

Итак, отображение φ непрерывно, и, согласно теореме о неподвижной точке, существует наименьшее по включению множество $A^* \subseteq X$, для которого $\varphi(A^*) = A^*$.

Тем самым построено подмножество $A^* \subseteq X$, для которого

$$A^* = X \setminus \overline{g(Y \setminus f(A^*))} = \overline{g(f(A^*))},$$

Откуда

$$\overline{A^*} = g(f(A^*)),$$

и биекция $\psi: X \rightarrow Y$ легко определяется так:

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A^* \\ g^{-1}(x), & x \notin A^* \end{cases}.$$

Теорема доказана.

Заключение

Рассмотрена одна из важнейших теорем в теории множеств - теорема о неподвижной точке в индуктивно упорядоченном множестве, имеющей существенные применения в дискретной математике и в теоретическом программировании.

Основная инновация - доказательство теоремы Шредера-Бернштейна с помощью теоремы о неподвижной точке.

Также оригинальными с точки зрения методики являются некоторые примеры, дополняющие текст базового учебника [16].

Статья может быть полезна студентам и преподавателям в процессе изложения курса дискретной математики.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Величко Ю. А. Когнитивные основы синтеза методик преподавания дискретной математики / Ю. А. Величко // Сибирский учитель. – 2019. – № 3(124). – С. 40-49.
2. Орлов Г. С. О некоторых вопросах, возникающих в процессе изучения теории множеств / Г. С. Орлов // Современные технологии в науке и образовании - СТНО-2019 : Сборник трудов II международного научно-технического форума: в 10 томах, Рязань, 27 февраля – 01 2019 года / Под общей редакцией О.В. Миловзорова. – Рязань: BookJet, 2019. – С. 142-147.
3. Киселева Т. А. Особенности методики преподавания курса дискретной математики в вузе / Т. А. Киселева // Проблемы современного аграрного образования: содержание, технологии, качество : материалы Международной научно-методической конференции, Волгоград, 03–07 мая 2018 года. – Волгоград: Волгоградский государственный аграрный университет, 2018. – С. 233-237.
4. Козоиоров Ю. Н. Построение курса "числовые системы" на основе аксиом теории множеств и методика его преподавания при подготовке учителей математики : специальность 13.00.02 "Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)" : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / Козоиоров Юрий Николаевич. – Москва, 1993. – 18 с.
5. Белоусов, А. И., Ткачев С.Б. Дискретная математика // Учеб. Для вузов – 7-е издание, испр. – Москва : Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2021. – 703 с.
6. Белоусов А. И. О некоторых свойствах полуколец // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2018. – № 3. – С. 35-50. – DOI 10.24108/0318.0001379.
7. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Указ. соч.
8. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Указ. соч.
9. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 112 с.
10. Belousov, A. I. About teaching methods of some sections of graph theory (cycles space of undirected graph) / A. I. Belousov // Modern European Researches. – 2021. – No 1. – P. 4-7.
11. Белоусов А. И., Исмагилов Р.С. Об одном достаточном условии нерегулярности языков // Математика и математическое моделирование. – 2018. – № 4. – С. 1-11. – DOI 10.24108/mathm.0418.0000121.
12. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Указ. соч.
13. Белоусов А. И. (2018). Указ. соч.
14. Белоусов А. И. (2018). Указ. соч.
15. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Указ. соч.
16. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Указ. соч.

Alexey I. Belousov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

al_belous@bk.ru

On some methodological issues in the presentation of sections of set theory in the course of discrete mathematics

Abstract. The relevance of the methodological problems considered in the article is explained by the fact that set theory is the foundation in the construction of a course in discrete mathematics and some of its issues require careful methodological study. The article considers one of the most important theorems in the theory of ordered sets - the fixed point theorem in an inductively ordered set and, on the basis of this theorem, presents a new proof of the well-known Schroeder-Bernstein theorem on the linearity of the cardinality scale in Cantor set theory. The article can be useful for students and teachers in the process of presenting the course of discrete mathematics.

Keywords: set theory, methodical problems, ordered set, cardinality of a set, continuous mapping, fixed point of a mapping, discrete mathematics.

О МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И ПРОВЕРКУ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Аннотация

Математическая статистика является одним из важнейших разделов математики, имеющим многочисленные приложения как в естественных, так и в гуманитарных науках. Большинство задач математической статистики связано с точечным и интервальным оцениванием и проверкой статистических гипотез. Эти задачи чрезвычайно разнообразны по формулировке и поэтому требуют от учащихся значительных усилий для их понимания и решения. В данной работе предлагается методический подход к изложению алгоритмов решения основных типов задач, связанных с построением интервальных оценок и проверкой параметрических гипотез.

Ключевые слова

математическая статистика, интервальные оценки, проверка параметрических гипотез

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Введение

Большинство задач математической статистики связано с точечным и интервальным оцениванием и проверкой статистических гипотез. Эти задачи чрезвычайно разнообразны как по формулировке, так и по способам их решения. В учебной литературе [1], [2], [3], [4], [5] приводится огромное множество формул и подходов к решению таких задач, что требует от учащихся значительных усилий для запоминания всех формул и понимания алгоритмов решения.

В данной работе предлагаются сравнительно простые алгоритмы решения основных типов задач, связанных с построением интервальных оценок и проверкой параметрических гипотез. При этом от учащихся требуется запоминание сравнительно небольшого числа основных формул, из которых можно получить границы доверительных интервалов для построения интервальных оценок и критерии на критическое множество для проверки параметрических гипотез.

Методология и результаты исследования

Сформулируем два основных типа задач, рассматриваемых в данной работе - это задачи на построение доверительных интервалов и проверку параметрических гипотез.

Рассмотрим случайную выборку $\vec{X}_n$ объёма n из генеральной совокупности X с функцией распределения $F(x, \theta)$, зависящей от неизвестного параметра θ .

Интервальной оценкой (доверительным интервалом) параметра θ с коэффициентом доверия (надёжностью) γ называется интервал (θ_1, θ_2) , в который параметр θ попадает с вероятностью γ . Для построения интервальных оценок будем применять метод, связанный с использованием центральных статистик. Статистика (функция от случайной выборки) $T(\vec{X}_n, \theta)$ называется **центральной**, если её функция распределения не зависит от параметра θ . Тогда границы доверительного интервала с надёжностью $\gamma = 1 - 2\alpha$ находятся из условия $h_\alpha < T < h_{1-\alpha}$, где h_α и $h_{1-\alpha}$ - квантили распределения статистики T .

Параметрической гипотезой называется всякое утверждение о параметре θ . Задача проверки параметрической гипотезы заключается в формулировании **основной (нулевой) гипотезы** H_0 и **альтернативной (конкурирующей) гипотезы** H_1 и далее с помощью выбранного статистического критерия по заданной выборке $\vec{x}_n$ осуществляется принятие основной гипотезы или её отклонение в пользу альтернативной. **Статистический критерий** представляет собой некое правило, по которому множество всевозможных выборок разбивается на два непересекающихся подмножества - **доверительное** $\bar{W}$ и **критическое** W . Если выборка $\vec{x}_n$ попадает в доверительное множество, то основная гипотеза принимается, а если - в критическое множество, то основная гипотеза отклоняется.

Статистический критерий, как правило, записывается в виде некоторого неравенства, выполнение которого означает попадание выборки в критическое множество. При записи этих неравенств используются те же центральные статистики, что и при построении доверительных интервалов. Критерий вида $T \leq h_\alpha$ или вида $T \geq h_{1-\alpha}$ называется **односторонним**, а критерий, заключающийся в выполнении хотя бы одного из двух неравенств $T \leq h_{\alpha/2}$ или $T \geq h_{1-\frac{\alpha}{2}}$, называется **двусторонним**. Здесь α - это **уровень значимости** критерия, указывающий на вероятность ошибки первого рода (ошибочного отклонения основной гипотезы).

Перечислим теперь статистики, которые необходимо знать для решения большинства задач, связанных с построением интервальных оценок и проверкой параметрических гипотез. Для каждой статистики укажем тип распределения и класс задач, в которых она используется.

Для генеральных совокупностей X и Y , имеющих нормальные распределения, используются следующие статистики:

$$T_1 = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1), T_2 = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S(\vec{X}_n)} \sim T(n-1),$$

$$T_3 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1),$$

$$T_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), T_5 = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} = \frac{n \cdot \hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

$$T_6 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2 / n\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \mu_2)^2 / m\sigma_2^2} \sim F(n, m), T_7 = \frac{S^2(\vec{X}_n) / \sigma_1^2}{S^2(\vec{Y}_m) / \sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1).$$

Здесь $N(0, 1)$ - это стандартное нормальное распределение, $T(n - 1)$ - T -распределение (распределение Стьюдента) с $n - 1$ степенями свободы, $\chi^2(n)$ - распределение хи-квадрат с n степенями свободы и $F(n, m)$ - распределение Фишера с n и m степенями свободы. Следует запомнить следующие свойства квантилей для соответственно стандартного нормального распределения, распределения Стьюдента и распределения Фишера:

$$u_\alpha = -u_{1-\alpha}, t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n), f_\alpha(n, m) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(m, n)}.$$

Статистики T_1 и T_2 используются для построения доверительных интервалов и проверки гипотез для математического ожидания μ при соответственно известной и неизвестной дисперсии σ . Статистика T_3 используется для построения доверительного интервала для разности математических ожиданий $\mu_1 - \mu_2$ и проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий $\mu_1 = \mu_2$ при известных дисперсиях σ_1^2 и σ_2^2 . Статистики T_4 и T_5 используются для построения доверительных интервалов и проверки гипотез для дисперсии σ^2 при соответственно известном и неизвестном математическом ожидании μ . Статистики T_6 и T_7 используются для построения доверительного интервала для отношения дисперсий σ_1^2/σ_2^2 и проверки гипотез о равенстве дисперсий $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при соответственно известных и неизвестных математических ожиданиях μ_1 и μ_2 .

В случае генеральной совокупности X , имеющей экспоненциальное распределение, для построения интервальной оценки или проверки гипотезы для параметра λ этого распределения используется следующая статистика:

$$T_8 = 2\lambda n\bar{X} \sim \chi^2(2n).$$

Как видим, она имеет распределение хи-квадрат с $2n$ степенями свободы.

Алгоритм решения задачи на построение интервальной оценки.

1. Выяснить, для какого параметра требуется построить доверительный интервал: математическое ожидание μ , разность математических ожиданий $\mu_1 - \mu_2$, дисперсия σ^2 , отношение дисперсий σ_1^2/σ_2^2 или параметр λ экспоненциального распределения.
2. Выбрать подходящую статистику. Например, если требуется оценить математическое ожидание μ , то следует выбрать статистику T_1 или T_2 в зависимости от того, известна дисперсия σ^2 или нет.
3. Составить неравенство $h_\alpha < T < h_{1-\alpha}$, где h_α и $h_{1-\alpha}$ - квантили распределения статистики T , которые находятся по таблице, и величина α находится из условия $\gamma = 1 - 2\alpha$, при этом коэффициент доверия γ должен быть задан в условии задачи.
4. Из неравенства $h_\alpha < T < h_{1-\alpha}$ найти границы искомого доверительного интервала.

Пример 1. Случайная величина измерена 16 раз с помощью прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены по нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 4$. Найдите доверительный интервал для измеряемой величины при коэффициенте доверия $\gamma = 0,9$, если среднее значение всех измерений $\bar{x} = 20$.

Решение. В задаче требуется оценить математическое ожидание при известной дисперсии. Воспользуемся статистикой $T_1 = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$, имеющей стандартное нормальное распределение. Составим неравенство

$$u_\alpha < \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} < u_{1-\alpha}$$

и выразим из него искомый параметр μ , используя свойство квантилей стандартного нормального распределения $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$,

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}.$$

Из условия $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,9$ получаем $\alpha = 0,05$. По таблице квантилей стандартного нормального распределения находим $u_{0,95} \approx 1,645$.

Так что искомый доверительный интервал имеет вид

$$18,355 < \mu < 21,645.$$

Ответ: (18,355; 21,645).

Пример 2. При измерении некоторой физической величины случайные ошибки распределены нормально с дисперсией $\sigma^2 = 2$. Сколько нужно провести экспериментов, чтобы определить истинное значение измеряемой величины с абсолютной погрешностью не более 1 с доверительной вероятностью 0,99?

Решение. Из неравенства, полученного в предыдущем примере,

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}$$

выводим оценку на разность между истинным значением μ и средним измеренным значением $\bar{X}$

$$|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}.$$

По условию абсолютная погрешность должна быть не больше 1, поэтому

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \leq 1.$$

Из условия $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,99$ получаем $\alpha = 0,005$, откуда по таблице находим $u_{0,995} \approx 2,576$. Так что для числа экспериментов получаем следующую оценку:

$$n \geq \sigma^2 \cdot u_{0,995}^2 \approx 13,27.$$

Ответ: 14.

Пример 3. По результатам 10 измерений случайной величины прибором, не имеющим систематической ошибки, получены следующие отклонения от номинального значения:

$$0,9; 2,1; 1,4; 1,1; 2,0; 1,8; 1,4; 1,9; 0,8; 1,6.$$

Предполагая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение, найдите 95%-ный доверительный интервал для дисперсии и среднеквадратического отклонения.

Решение. В задаче требуется оценить дисперсию при известном математическом ожидании $\mu = 0$ (так как прибор не имеет систематической ошибки). Воспользуемся статистикой $T_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$, имеющей распределение хи-квадрат с $n = 10$ степенями свободы. Составим неравенство

$$\chi_\alpha^2(n) < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n)$$

и выразим из него искомый параметр σ^2 , учитывая также, что $\mu = 0$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi_\alpha^2(n)}.$$

Из условия $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,95$ получаем $\alpha = 0,025$. По таблице квантилей распределения хи-квадрат находим $\chi_{0,025}^2(10) \approx 3,247$ и $\chi_{0,975}^2(10) \approx 20,483$.

Найдём теперь сумму квадратов элементов выборки:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = 0,9^2 + 2,1^2 + 1,4^2 + 1,1^2 + 2,0^2 + 1,8^2 + 1,4^2 + 1,9^2 + 0,8^2 + 1,6^2 = 24,4.$$

Так что искомый доверительный интервал имеет вид:

$$1,191 < \sigma^2 < 7,515.$$

Извлекая квадратный корень из всех частей неравенства, получаем интервальную оценку для среднеквадратического отклонения:

$$1,091 < \sigma < 2,741.$$

Ответ: $\sigma^2 \in (1,191; 7,515)$, $\sigma \in (1,091; 2,741)$.

Алгоритм решения задачи на проверку параметрической гипотезы.

1. Сформулировать основную и альтернативную гипотезы H_0 и H_1 . При этом основную гипотезу следует формулировать так, чтобы ошибка её отвергнуть была не так критична, как ошибка её принять («лучше забраковать качественное изделие, чем принять бракованное»).

2. Выбрать подходящую статистику. Например, если требуется проверить гипотезу о равенстве дисперсий $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то следует выбрать статистику T_6 или T_7 в зависимости от того, известны варианты выборок X_i и Y_i и их математические ожидания μ_1 и μ_2 или нет.

3. Составить условие на критическое множество W в виде неравенства. Для нормально распределённой генеральной совокупности и альтернативной гипотезы вида $H_1 : \theta \leq \theta_0$ или $H_1 : \theta \geq \theta_0$ условие на критическое множество имеет соответственно вид $T \leq h_\alpha$ или $T \geq h_{1-\alpha}$, где в левой части неравенства полагают $\theta = \theta_0$. Для экспоненциально распределённой генеральной совокупности и альтернативной гипотезы вида $H_1 : \theta \leq \theta_0$ условие на критическое множество наоборот имеет вид $T \geq h_{1-\alpha}$, а в случае альтернативной гипотезы вида $H_1 : \theta \geq \theta_0$ условие на критическое множество будет $T \leq h_\alpha$. Для альтернативной гипотезы вида $H_1 : \theta \neq \theta_0$ и для нормального, и для экспоненциального распределений условие на критическое множество состоит из совокупности двух неравенств: $T \leq h_{\alpha/2}$ или $T \geq h_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где в левых частях обоих неравенств полагают $\theta = \theta_0$.

При этом уровень значимости α должен быть задан в условии задачи.

4. Подставив данные задачи, проверить, удовлетворяет ли выборка условию на критическое множество и, если да, то отклонить основную гипотезу в пользу альтернативной. Если же неравенство в условии на критическое множество не выполняется, то принять основную гипотезу.

Пример 4. Из нормальной генеральной совокупности получена выборка объёма $n = 100$ и по ней найдено выборочное среднее $\bar{x} = 15,45$ и исправленное среднеквадратичное отклонение $S = 2,04$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу $H_0 : MX = 15$ против $H_1 : MX > 15$.

Решение. Поскольку дисперсия генеральной совокупности неизвестна, воспользуемся статистикой $T_2 = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S(\bar{X}_n)}$, имеющей распределение Стьюдента с $n - 1 = 99$ степенями свободы. Исходя из вида альтернативной гипотезы $H_1 : MX > 15$, составим условие на критическое множество:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S(\bar{X}_n)} \geq t_{1-\alpha}(n-1).$$

Положим в левой части неравенства значение $\mu = 15$, взятое из основной гипотезы H_0 . Остальные данные берём из условия задачи:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S(\bar{X}_n)} = \frac{(15,45 - 15)\sqrt{100}}{2,04} \approx 2,21.$$

По таблице квантилей Стьюдента находим $t_{0,95}(99) \approx 1,66$. Условие на критическое множество выполняется, так что основную гипотезу следует отклонить.

Ответ: основная гипотеза отклоняется.

Пример 5. Для сравнения точности двух приборов проверяют равенство дисперсий в их показаниях. По результатам 15 замеров получены следующие выборочные

оценки: $S_X^2 = 0,5$ и $S_Y^2 = 0,6$. Используя двусторонний критерий, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу об одинаковой точности этих двух приборов.

Решение. В задаче требуется проверить гипотезу о равенстве дисперсий при неизвестных математических ожиданиях. Воспользуемся статистикой $T_7 = \frac{S^2(\bar{X}_n)/\sigma_1^2}{S^2(\bar{Y}_m)/\sigma_2^2}$, имеющей распределение Фишера с $n - 1 = 14$ и $m - 1 = 14$ степенями свободы.

Поскольку требуется использовать двусторонний критерий, гипотезы сформулируем в следующем виде:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Условие на критическое множество запишется как совокупность двух неравенств:

$$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \leq f_{\alpha/2}(n-1, m-1) \text{ или } \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \geq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1).$$

С использованием равенства $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ из нулевой гипотезы, а также свойства квантилей Фишера $f_\alpha(n, m) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(m, n)}$, условия на критическое множество перепишутся в виде:

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)} \text{ или } \frac{S_X^2}{S_Y^2} \geq f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1),$$

что можно ещё короче записать как

$$\frac{S_{\text{бол}}^2}{S_{\text{мен}}^2} \geq f_{1-\alpha/2}(n_{\text{бол}} - 1, n_{\text{мен}} - 1).$$

Здесь $S_{\text{бол}}^2$ обозначает ту из двух величин S_X^2 и S_Y^2 , которая больше, и соответствующее число испытаний обозначается $n_{\text{бол}}$, а $S_{\text{мен}}^2$ и $n_{\text{мен}}$ соответствуют другой величине. По условию задачи $S_{\text{бол}}^2 = 0,6$, $S_{\text{мен}}^2 = 0,5$ и $n_{\text{бол}} = n_{\text{мен}} = 15$. Поэтому

$$\frac{S_{\text{бол}}^2}{S_{\text{мен}}^2} = 1,2.$$

По таблице квантилей Фишера находим $f_{0,975}(14, 14) \approx 2,98$. Условие на критическое множество нарушается, так что основную гипотезу следует принять.

Ответ: основная гипотеза принимается.

Пример 6. В результате 10 экспериментов над случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение, получена следующая выборка:

3,1; 1,6; 2,0; 4,5; 2,4; 1,7; 2,2; 0,3; 1,1; 1,4.

а) Оцените истинное значение параметра λ экспоненциального распределения с помощью доверительного интервала с надёжностью 0,8.

б) Проверьте гипотезу $H_0 : \lambda \leq 1$ против $H_1 : \lambda > 1$ при уровне значимости $\alpha = 0,1$.

Решение. а) Воспользуемся статистикой $T_8 = 2\lambda n\bar{X}$, имеющей распределение хи-квадрат с $2n = 20$ степенями свободы. Составим неравенство

$$\chi_\alpha^2(2n) < 2\lambda n\bar{X} < \chi_{1-\alpha}^2(2n),$$

и выразим из него искомый параметр λ :

$$\frac{\chi_\alpha^2(2n)}{2n\bar{X}} < \lambda < \frac{\chi_{1-\alpha}^2(2n)}{2n\bar{X}}.$$

По заданной выборке найдём выборочное среднее:

$$\bar{X} = \frac{1}{10} (3,1 + 1,6 + 2,0 + 4,5 + 2,4 + 1,7 + 2,2 + 0,3 + 1,1 + 1,4) = 2,03.$$

Из условия $\gamma = 1 - 2\alpha = 0,8$ получаем $\alpha = 0,1$. По таблице квантилей распределения хи-квадрат находим $\chi_{0,1}^2(20) \approx 12,44$ и $\chi_{0,9}^2(20) \approx 28,41$.

Так что искомый доверительный интервал имеет вид

$$0,3 < \lambda < 0,7.$$

б) Исходя из вида альтернативной гипотезы $H_1 : \lambda > 1$, составим условие на критическое множество:

$$2\lambda n\bar{X} \leq \chi^2_{\alpha}(2n).$$

Положим в левой части неравенства значение $\lambda = 1$, взятое из основной гипотезы H_0 . Остальные данные берём из условия задачи:

$$2\lambda n\bar{X} = 40,6.$$

По таблице квантилей распределения хи-квадрат находим $\chi^2_{0.1}(20) \approx 12,44$. Условие на критическое множество нарушается, так что основную гипотезу следует принять.

Ответ: а) $\lambda \in (0,3; 0,7)$; б) основная гипотеза принимается.

Заключение

В заключение заметим, что предлагаемый в данной работе подход к изложению темы построения интервальных оценок и проверки статистических гипотез служит лишь одной цели - научить учащихся решать задачи указанных типов. Все используемые для решения задач алгоритмы приводятся без обоснования и доказательства их корректности. Отсутствие подробных теоретических сведений позволяет в достаточно короткие сроки научиться решать довольно обширный класс задач математической статистики.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Математическая статистика / В.Б. Горяинов, И.В. Павлов, Г.М. Цветкова и др. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVII.)
2. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4. / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2004.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. – Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. шк., 2001.
4. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. – 3-е изд. испр. – М.: Дрофа, 2005.
5. Максимов Ю.Д. Математическая статистика: опорный конспект. – Москва: Проспект, 2015.

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

nail_khasanov@mail.ru

On the methodology of solving problems for interval estimation and verification of parametric hypotheses in mathematical statistics

Abstract. Mathematical statistics is one of the most important branches of mathematics, which has numerous applications in both natural sciences and humanities. Most problems of mathematical statistics are associated with point and interval estimation and verification of statistical hypotheses. These tasks are extremely diverse in formulation and therefore require significant efforts from students to understand and solve them. This paper proposes methodological approach to the presentation of algorithms for solving the main types of problems associated with the construction of interval estimates and the verification of parametric hypotheses.

Key words: mathematical statistics, interval estimates, testing of parametric hypotheses.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРАВИЛА БЕРНУЛЛИ-ЛОПИТАЛЯ ДЛЯ РАСКРЫТИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Аннотация

С задачей вычисления предела, будь это самостоятельная задача или часть решения более сложной задачи, студенты технических ВУЗов сталкиваются на протяжении, как минимум, первых двух курсов. В связи с этим, обучение технике вычисления пределов является актуальной задачей при подготовке студентов технических специальностей. Работа посвящена использованию правила Бернулли-Лопиталья для вычисления пределов с неопределенностями вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$. Приводятся краткие теоретические сведения и примеры, иллюстрирующие применение данного правила для раскрытия указанных типов неопределенностей.

Ключевые слова

предел, правило Бернулли-Лопиталья, тип неопределенности

АВТОРЫ

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Кавинов Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Введение

Понятие предела - одно из важнейших в курсе математического анализа, читаемого в технических ВУЗах. В этом нет преувеличения, ведь понятие непрерывности функции, ее производной, определенного интеграла и т.п. все базируется на понятии предела и предельного перехода. Однако, к сожалению, в настоящее время в большинстве стандартных курсов математического анализа вычислению пределов не уделяется должного времени. В итоге слабый навык в вычислении пределов преследует студентов и в дальнейшем - при исследовании и построении графиков функций, несобственных интегралов, рядов и т.п.

Отметим так же, что поскольку понятие предела очень общо, то не существует единого метода его вычисления. Есть лишь более универсальные методы, как, например, рассматриваемый в данной работе, и методы узкоспециализированные, применяемые для конкретных типов пределов. Данная статья является логическим продолжением работ [1,2] и посвящена использованию правила Бернулли-Лопиталья при вычислении пределов, формально не подпадающих под условия применимости данного метода.

Методология и результаты исследования

В настоящее время для раскрытия неопределенностей вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$, часто возникающих при вычислении предела отношения двух величин, особой популярностью, как в России, так и за рубежом, пользуется метод Бернулли-Лопиталья или, как его часто называют в России, правило Бернулли (за рубежом данный метод более известен, как правило Лопиталья) [2-6]. Это объясняется с одной стороны достаточной универсальностью данного метода, а с другой - относительной простотой его применения. Ведь по сути все сводится к умению вычислять производные, что большинство студентов 1-го курса более-менее умеют делать еще со школы. Однако достаточная универсальность данного метода объясняется не только относительной простотой раскрытия неопределенностей вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$, но и тем, что к этим двум типам неопределенности можно свести и другие виды неопределенностей, а именно $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ и $[0^0]$. Таким образом, правило Бернулли-Лопиталья может быть применено для раскрытия большого количества видов неопределенностей, возникающих при вычислении пределов.

При этом такая кажущаяся простота и достаточная универсальность этого метода имеет и свою «обратную сторону»: указанный метод пытаются применять практически в любой ситуации, не особо утруждая себя анализом о рациональности его использования в данной конкретной задаче. При этом данная ситуация наблюдается как в России, так и за рубежом.

Поэтому еще раз отметим, что, как уже отмечалось в работах [1,2], сам метод Бернулли-Лопиталья отнюдь не является универсальным, хотя и «работает» с широким кругом задач. Есть масса примеров когда данный метод не позволяет вычислить тот или иной предел или же его применение требует гораздо больших вычислительных затрат по сравнению с другими методами. Более того, зачастую самым удачным способом раскрытия неопределенностей при вычислении пределов является комбинация (если это возможно, конечно) метода Бернулли-Лопиталья и аппарата эквивалентных бесконечно малых (или бесконечно больших) функций [1-7].

Прежде чем перейти к рассмотрению различных примеров, иллюстрирующих применение правила Бернулли-Лопиталья к указанным типам неопределенностей, приведем некоторые известные [3-7] определения и теоремы, которые нам потребуются в дальнейшем.

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, если при данном стремлении аргумента предел функции равен нулю, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или просто бесконечно малыми и обычно обозначают буквами греческого алфавита $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.д.

Определение 2. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если при данном стремлении аргумента функция имеет бесконечный предел, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Теорема 1. Пусть

- 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;

$$3) g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a);$$

4) Существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тогда существует и предел отношения самих функций, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Замечание 1. Приведенная теорема остается верной и в случае стремления аргумента к бесконечному пределу, т.е. к ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 2. Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проко-

лотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a ;

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty;$$

$$3) g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a);$$

4) Существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Тогда существует и предел отношения самих функций, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Замечание 2. Как и в случае первой теоремы, данная теорема остается верной и в случае стремления аргумента к бесконечному пределу, т.е. к ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание 3. В некоторых случаях может понадобиться применить правило Бернулли-Лопиталя повторно, если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ исходных функций $f(x)$ и $g(x)$ сами являются бесконечно малыми или бесконечно большими функциями и для них выполнены условия одной из теорем 1 - 2, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = A.$$

Замечание 4. Приведенные теоремы носят лишь достаточный характер, поэтому если не существует предел отношения производных, то это не означает, что не существует предел отношения самих функций.

В случае раскрытия неопределенностей вида $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ и $[0^0]$, кроме теорем 1 - 2, часто используются следующие две теоремы.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел b и не принимает значения b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c , то сложная функция $g(f(x))$ имеет предел в точке a и он равен c .

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a , а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке a .

Следствие 1. Для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right). \quad (1)$$

Замечание 5. Соотношение (1) можно рассматривать как частный случай теоремы 3 о пределе сложной функции, когда внешняя функция $g(y)$ является непрерывной. В этом случае часто говорят, что знаки предела и непрерывной функции можно переставлять местами.

Теорема 5. Если $f(x)$ - бесконечно большая при $x \rightarrow a$ функция, то $1/f(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция. Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a , то $1/\alpha(x)$ - бесконечно большая при $x \rightarrow a$.

Как следует из теорем 1 - 2, правило Бернулли-Лопиталя непосредственно применимо лишь для вычисления пределов, содержащих неопределенность вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$. Рассмотрим теперь различные примеры, иллюстрирующие приведение пределов, содержащих неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ и $[0^0]$, к пределам содержащим неопределенность вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$, что позволяет использовать для их вычисления правило Бернулли-Лопиталя.

Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ и пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, т.е. мы имеем дело с неопределенностью вида $[0 \cdot \infty]$. В соответствии с теоремой 5 функция $1/f(x)$ будет при $x \rightarrow a$ бесконечно большой (если $f(x)$ отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a), а $1/g(x)$ - бесконечно малой. Для применения правила Бернулли-Лопиталя перепишем данный предел в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Таким образом, неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$ может быть приведена как к неопределенности вида $[0/0]$ так и к неопределенности $[\infty/\infty]$. Оба способа представления исходного предела в общем случае равноценны и выбор между ними зависит от удобства последующих вычислений.

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(x)\ln(1-x)$.

В данном примере имеем неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$. Представим данный предел в виде пределов имеющих неопределенность вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$ соответственно и воспользуемся правилом Бернулли-Лопиталя, поскольку все условия теорем 1 и 2 выполнены:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(x)\ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{1/\ln(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(\ln(1-x))'}{\left(1/\ln(x)\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1/(1-x)}{-1/x \ln^2(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2(x)}{(1-x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2(x)}{(1-x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(\ln^2(x))'}{(1-x)'} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2 \ln(x)}{-x} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(x) \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\ln(1-x)}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{\ln(1-x)} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(1-x) \ln^2(1-x)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(1-x) \ln^2(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \ln^2(1-x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{(1-x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(\ln^2(1-x))'}{\left(\frac{1}{(1-x)} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2 \ln(1-x) \frac{-1}{(1-x)}}{\frac{-1}{(1-x)^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \ln(1-x) = [0 \cdot \infty] = \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(\ln(1-x))'}{\left(\frac{1}{(1-x)} \right)'} = 2 \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{-1}{(1-x)}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) = 0.
\end{aligned}$$

Несмотря на равноправные преобразования, вариант с неопределенностью типа $[\infty / \infty]$ оказался более простым в вычислительном плане. Более того, в случае приведения исходного предела к пределу с неопределенностью $[0 / 0]$, после первого применения правила Бернулли-Лопиталья мы снова получаем неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$, которую все равно пришлось преобразовывать к неопределенности вида $[\infty / \infty]$. Фактически в данном случае из двух вариантов рабочим является только один.

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$.

Как и в предыдущем примере, здесь мы имеем неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$. Представим данный предел в виде пределов имеющих неопределенность вида $[\infty / \infty]$ и $[0 / 0]$ соответственно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right], \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Поскольку, как и в предыдущем примере, все условия теорем 1 и 2 выполнены, воспользуемся правилом Бернулли-Лопиталья для вычисления данных пределов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{\left(\frac{1}{\ln(x)} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-1}{x \ln^2(x)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (-x \ln^2(x)) = [0 \cdot \infty] = \dots
\end{aligned}$$

Несмотря на равноценность в общем случае обоих способов представления исходного предела мы видим, что «сработал» только один способ. Второй вариант, даже

если не учитывать более сложную производную, вообще не позволил вычислить предел, поскольку в итоге мы лишь получили усложненный предел, с таким же типом неопределенности $[0 \cdot \infty]$ что и исходный предел.

Замечание 6. В дальнейшем, при рассмотрении примеров, мы не будем упоминать, что условия теоремы 1 или теоремы 2 выполнены.

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x) \right)$.

В данном примере имеем неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$. Однако, в отличие от предыдущих двух примеров, особо размышлять к какому типу неопределенности $[0/0]$ или $[\infty/\infty]$ преобразовывать исходный предел здесь не придется:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x) \right) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

В данном примере вычисление производных в случае приведения к неопределенности вида $[\infty/\infty]$ гораздо проще, нежели использование неопределенности $[0/0]$.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg(x) \right)$.

В рассматриваемом примере, в отличие от предыдущих примеров, исходную неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$ удобнее преобразовывать к неопределенности вида $[0/0]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\left(\frac{2}{\pi} \right) \arctg(x) \right)}{1/x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln \left(\frac{2}{\pi} \right) + \ln(\arctg(x)) \right)'}{\left(1/x \right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(1+x^2) \arctg(x)}}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2) \arctg(x)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \arctg(x)} = - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь предел $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ и пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, т.е. мы имеем дело с неопределенностью вида $[\infty - \infty]$. Поскольку, согласно теореме 5, функции $1/f(x)$ и $1/g(x)$ будут бесконечно малыми при $x \rightarrow a$, то, в общем случае, исходную неопределенность можно свести к неопределенности $[0/0]$ следующим преобразованием:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\left(\frac{1}{f(x)} \right) \left(\frac{1}{g(x)} \right)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Однако, как показывает следующий пример, того же результата достаточно часто удастся достичь гораздо проще, не прибегая к указанным выше преобразованиям.

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.

Данный предел имеет неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Приведем дроби под знаком предела к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \right) = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{\text{т.к.}}{\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \ln(1+x))'}{(x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

В данном случае приведение дробей к общему знаменателю обеспечило нам требуемую неопределенность вида $[0/0]$. Обратим внимание, что прежде чем применить правило Бернулли-Лопиталя, для упрощения вычисления производной, мы воспользовались заменой на эквивалентные бесконечно малые функции [1,3-5,7].

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}(x) - \frac{1}{x} \right)$.

Как и в предыдущем примере, данный предел имеет неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Приведем дроби под знаком предела к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}(x) - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{\text{т.к.}}{x \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos(x) - \sin(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2} = 0.\end{aligned}$$

Способ вычисления данного предела в точности совпал с решением из примера 5.

Остановимся теперь на неопределенностях вида $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ и $[0^0]$, которые могут быть сведены к уже рассмотренной нами неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$. Для этого выражения полезно предварительно прологарифмировать и воспользоваться тождеством $\alpha = e^{\ln(\alpha)}$. Рассмотрим эту процедуру подробнее. Пусть есть предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ имеющий одну из трех указанных неопределенностей, т.е. либо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, либо $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Прологарифмируем выражение $f(x)^{g(x)}$ и рассмотрим предел от полученного выражения: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x)) = [0 \cdot \infty]$. Если данный предел существует (конечный или бесконечный), то поскольку функция логарифма и экспоненты непрерывны на все области определения, то, согласно следствию 1, получим:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln(f(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{\cos(x)}}$.

Данный предел имеет неопределенность вида $[1^\infty]$. Предварительно прологарифмируем данное выражение и вычислим предел от полученного выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))^{\frac{1}{\cos(x)}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} \ln(\sin(x)) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{\cos(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln(\sin(x)))'}{(\cos(x))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)/\sin(x)}{-\sin(x)} = 0. \end{aligned}$$

Тогда исходный предел будет равен:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{\cos(x)}} = e^0 = 1.$$

Пример 8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$.

Как и в предыдущем примере, данный предел имеет неопределенность вида $[1^\infty]$. Вычислим предел от предварительно прологарифмированного выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1-\cos(x)} \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)}{1-\cos(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln(\sin(x)) - \ln(x))'}{(1-\cos(x))'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos(x)/\sin(x) - 1/x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin^2(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ x \sin^2(x) \sim x^3 \end{array} \right|_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(x \cos(x) - \sin(x))'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x \sin(x)}{3x^2} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ x \sin(x) \sim x^2 \end{array} \right|_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно, исходный предел будет равен:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = e^{-1/3}.$$

Пример 9. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg}(x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

Данный предел неопределенность вида $[0^0]$. Как и в случае примеров 7 и 8, предварительно прологарифмируем данное выражение и вычислим предел от полученного выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\operatorname{arctg}(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} \ln(\operatorname{arctg}(x)) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{arctg}(x))}{\ln(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\operatorname{arctg}(x)))'}{(\ln(x))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}(x)}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}(x)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{\operatorname{arctg}(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'}{(\operatorname{arctg}(x))'} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-1/(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x^2)'}{(1+x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x} = -1.
\end{aligned}$$

Вместо третьего применения правила Бернулли-Лопиталья можно было воспользоваться правилом вычисления предела отношения двух многочленов на бесконечности [3-5,7]. Исходный предел будет равен:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg}(x))^{1/\ln(x)} = e^{-1}.$$

Пример 10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$.

Данный предел неопределенность вида $[\infty^0]$. Как и в предыдущих примерах, предварительно прологарифмируем данное выражение и вычислим предел от полученного выражения:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x^2 + 3^x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(3x^2 + 3^x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x^2 + 3^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(3x^2 + 3^x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 3^x \ln 3}{3x^2 + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x (\ln 3 + 6x/3^x)}{3^x (1 + 3x^2/3^x)} = \ln 3.
\end{aligned}$$

При вычислении последнего предела мы воспользовались теоремой о сравнении роста на бесконечности показательной степенной и логарифмической функций [6]. Так же можно было еще раз воспользоваться правилом Бернулли-Лопиталья. Таким образом, исходный предел будет равен:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x} = e^{\ln 3} = 3.$$

Заключение

Работа посвящена использованию метода Бернулли-Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$, которые не были рассмотрены в предыдущей работе [2]. Данный метод является одним из наиболее популярных методов раскрытия различных типов неопределенностей при вычислении пределов, как в России, так и за рубежом. В работе рассмотрены способы сведения указанных типов неопределенностей к неопределенностям вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$, к которым непосредственно может быть применен рассматриваемый метод. Приведены примеры, иллюстрирующие использование данного метода для каждого из указанных типов неопределенностей. Там, где это было необходимо с целью упрощения вычислений, метод Бернулли-Лопиталья комбинировался с методом на основе аппарата эквивалентных бесконечно малых функций.

В заключении еще раз отметим, несмотря на большую популярность и возможность использования для достаточно широкого класса задач по вычислению пределов, рассматриваемый метод Бернулли-Лопиталья не является универсальным. Есть масса

примеров, когда указанный метод не позволяет вычислить тот или иной предел или же его применение требует очень больших вычислительных затрат по сравнению с другими методами вычисления пределов. В итоге, зачастую, наилучшие результаты дает комбинация различных методов и поэтому при изучении пределов студентов необходимо обучать разнообразным методам их вычисления, не концентрируя все внимание на каком-либо одном из них.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Велищанский М. А., Кавинов А. В. Вычисление пределов с использованием аппарата бесконечно малых функций // Modern European Researches. - Salzburg, 2020. - Т. 1. № 2. - П. 56-66. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43596993>
2. Велищанский М. А., Кавинов А. В. Вычисление пределов с использованием правила Бернулли-Лопиталья // Modern European Researches. - Salzburg, 2021. - Т. 1. № 2. - П. 66-75. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46114862>
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 416 с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982. – 616 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 718 с.
6. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного аргумента. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 408 с.
7. Морозова В.Д. Введение в анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 408 с.

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

Alexey V. Kavinov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Using the Bernoulli-L'Hôpital rule to disclose various types of uncertainty

Abstract. Students of technical universities face the task of calculating the limit, whether it is an independent task or part of solving a more complex problem, during at least the first two courses. Therefore, teaching the technique of calculating the limits is an urgent task in the preparation of students of technical specialties. The paper is devoted to the use of the Bernoulli-L'Hôpital rule for calculating the limits with uncertainties of the form $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$. Brief theoretical information and examples illustrating the application of this rule for the disclosure of these types of uncertainties are provided.

Key words: limits, Bernoulli-L'Hôpital rule, type of uncertainty.

ПРИМЕНЕНИЕ SKYPE И ОНЛАЙН-ДОСКИ IDROO ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ДИСТАНЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена выбором методов обучения и технических средств, направленных на достижение цели обучения, при проведении дистанционных занятий. Актуальность исследуемой проблемы также тесно связана с формированием и развитием математической культуры студентов технических специальностей. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей, студентов технических и педагогических специальностей.

Ключевые слова

дистанционное обучение, онлайн-доска

АВТОР

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga.aika@yandex.ru

Введение

Современный мир образования любого уровня уже невозможно представить без дистанционного формата обучения. Появилось множество трудностей методического характера, связанных с проведением лекций, семинаров, текущего и итогового контроля уровня усвоения знаний при дистанционном варианте проведения занятий. Решение указанных проблем зависит от того, насколько эффективно преподаватель и студенты используют имеющиеся технические средства, например, платформы видеосвязи и онлайн-доски.

Методология и результаты исследования

Актуальность. При проведении семинарских занятий в дистанционном формате обратная связь со студентами приобретает особое значение. Чтобы семинар не превратился в преподавательский монолог, а был бы продуктивным диалогом студента и преподавателя, необходимо использовать все способы обратной связи, которые могут предоставить различного рода платформы видеосвязи и виртуальные доски, например, Zoom и IDroo.

Как правило, сложность обратной связи при проведении дистанционного семинара заключается в том, что необходим постоянный во времени контроль факта работы студента (может, студент совсем не участвует в решении задачи) и качества работы на семинаре (например, рассуждения в решении задачи записываются не полностью, так как студент занят посторонними делами).

Как же обеспечить контроль за работой студентов в ходе семинара? В Zoom можно применять огонек-указку, с помощью которого фокусируется внимание студентов на каком-либо действии в решении задачи. При работе средствами IDroo можно акцентировать внимание студентов с помощью изменения цвета виртуального фломастера белой доски.

При очной работе ведущая роль в решении задачи на семинаре принадлежит студенту. Студент излагает решение задачи на доске, преподаватель комментирует, исправляет ошибки, при необходимости направляет решение в верное русло. При дистанционной работе на семинаре обычно только у преподавателя есть графический планшет, с помощью которого очень легко записывать рукописное решение на виртуальной доске, выполнять чертежи, строить графики и т. д. К сожалению, не у всех студентов есть такая возможность. При наличии графических планшетов у всех студентов группы (потока) организация учебного процесса на дистанционных занятиях мало бы отличалась от проведения обычных очных лекций и семинаров. При проведении семинара дистанционно необходимо постоянно обращаться к помощи студентов (прочитать условие задачи, сформулировать определение, теорему, необходимых для обоснования решения задачи). Такие устные ответы, комментарии студента в ходе решения задачи преподавателю необходимо кратко фиксировать на онлайн-доске, даже если студент даёт абсолютно неверный ответ. Любой ответ следует по-

просить прокомментировать (правильно/неправильно) другого студента. Так осуществляется контроль степени внимания студентов в процессе проведения семинара. Возможны ситуации, что студент ссылается на невозможность устных ответов в ходе семинара из-за качества работы микрофона, качества работы интернета и т. д. В таком случае работу можно проконтролировать просьбой к студенту выслать фото рукописного решения задачи.

Рассмотрим некоторые технические особенности виртуальной доски IDroo в сочетании со Skype.

IDroo - это виртуальная доска, которая хранит все созданные материалы в облаке. На доске можно писать, излагать решение задачи, располагать и подписывать рисунки, обсуждая и комментируя все свои действия в режиме онлайн. Доска не требует установки. Для начала работы с доской необходимо запустить браузер (например, Google). В адресной строке ввести адрес платформы - idroo.com. Затем необходимо зарегистрироваться, нажав на кнопку SIGN UP FOR FREE / ЗАРЕГИСТРИРОВАТЬСЯ БЕСПЛАТНО. Для регистрации необходимо указать имя, электронную почту, и, конечно, пароль для входа в аккаунт. Пользователь, который прошёл регистрацию, входит в свой аккаунт, нажав на LOG IN / АВТОРИЗОВАТЬСЯ. (Рис. 1).



Рис. 1.

Для создания онлайн-доски используют кнопку CREATE NEW BOARD/ СОЗДАТЬ НОВУЮ ДОСКУ. Откроется чистая онлайн-доска, в которой можно работать с помощью ряда инструментов (Рис. 2).

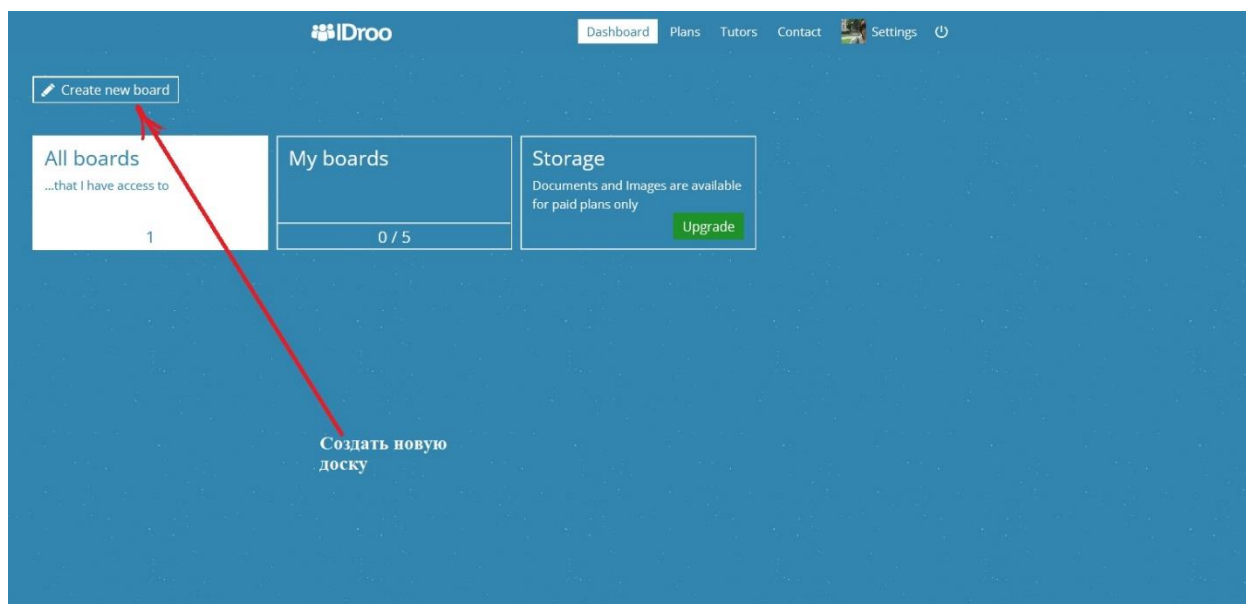


Рис. 2.

Самое главное, на доске можно писать от руки (удобно, когда есть графический планшет со стилусом). Если пользователь быстро набирает текст, то можно текст вводить с клавиатуры. На доске можно рисовать линии, окружности, квадраты, прямоугольники и составлять формулы. (Рис. 3).

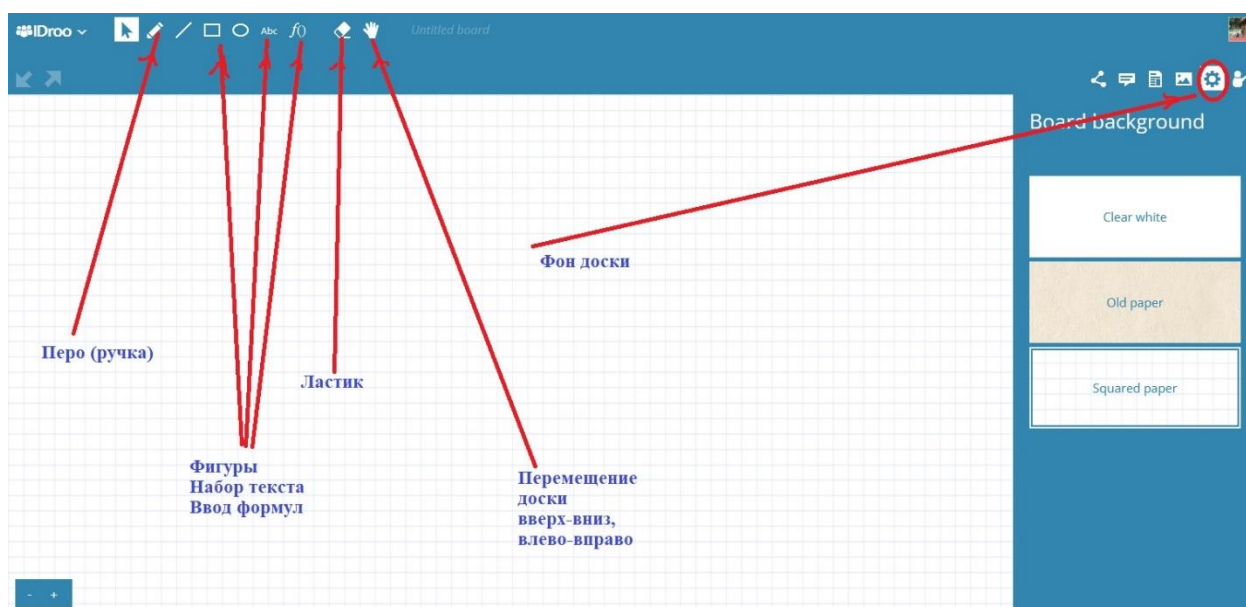


Рис. 3.

В отличие от доски совместного использования белого цвета в Zoom, в IDROO есть три вида фона доски: белый лист, лист под старину и лист в клетку. Можно выбрать любой из них в настройках, все они доступны в бесплатном пакете (Рис. 3). Работа на доске, выполненной под старину или в клетку снижает зрительную нагрузку.

В онлайн-доску встроен чат, где можно общаться с участниками, оставлять для них задания, а также обмениваться документами. (Рис. 4)

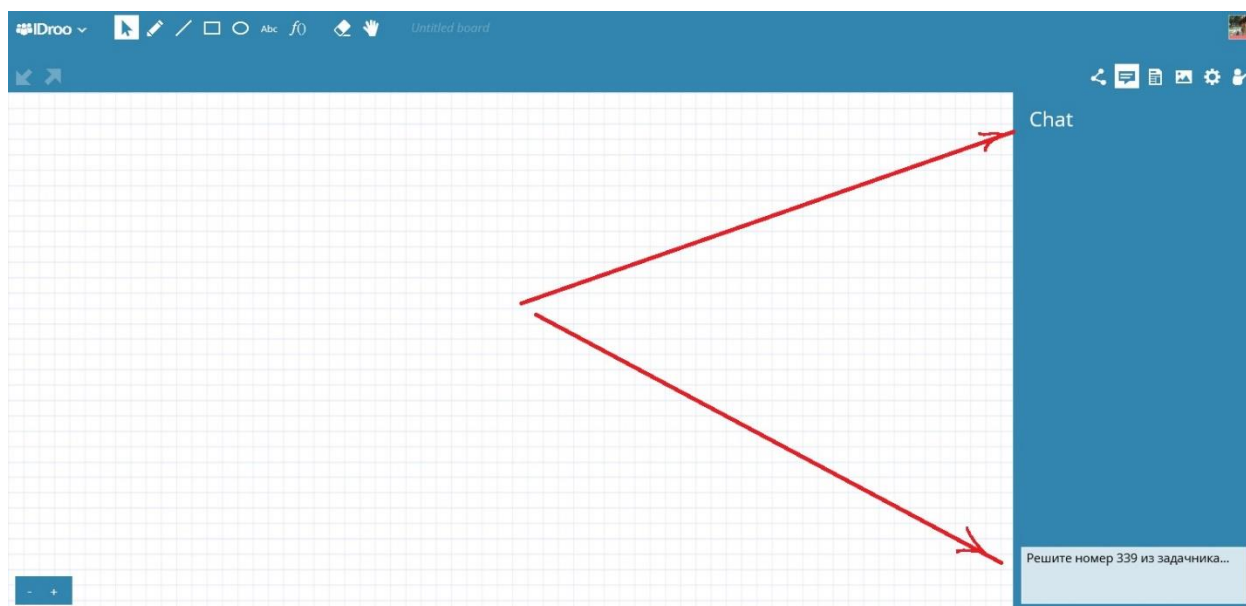


Рис. 4.

Результаты работы можно сохранять в файл и снова открыть для продолжения работы. Для сохранения нажмите в правом верхнем углу на кнопку IDROO. Далее выберите команду СОХРАНИТЬ КАК... и выберите формат загрузки. Например, загрузить как PDF документ (Рис 5). В бесплатной версии ограничен объем облачного хранилища (50 МБ).

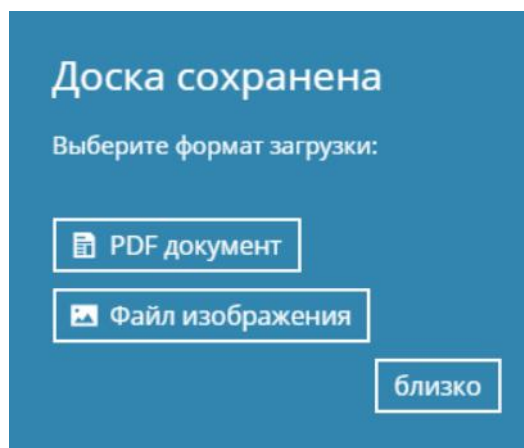


Рис. 5.

Возможности онлайн доски IDroo очень хорошо дополняются Skype - бесплатным программным обеспечением, которое обеспечивает текстовую, голосовую и видеосвязь через Интернет между компьютерами (IP-телефония). Из списка Skype-контактов можно приглашать пользователей для совместной работы на виртуальной доске. Для того, чтобы дать доступ к онлайн-доске учащимся или другим пользователям, нажмите на команду SHARING, скопируйте ссылку и поделитесь ссылкой по e-mail, Skype и в прочих средствах связи (Рис. 6).

Если совместить работу в IDroo вместе с видеосвязью посредством Skype, то возможно эффективно реализовать все поставленные цели и задачи занятия. Приглашенные участники занятия просто осуществляют в чате Skype переход по присланной ссылке и становятся полноправными участниками занятия. Каждый такой участник может самостоятельно своим маркером выполнять записи на общей доске. Все маркеры различного цвета и имеют подпись - имя, с которым участник регистрировался

в IDroo. Отметим только, что количество участников в бесплатной версии IDroo ограничено, что необходимо учесть при планировании занятий. При консультировании небольшой группы студентов сочетание IDroo и Skype довольно удобный вариант. В бесплатной версии можно создать до 5 досок. Существуют подписки стоимостью 9 и 25 евро, которые значительно увеличивают количество досок для пользователей. [1]

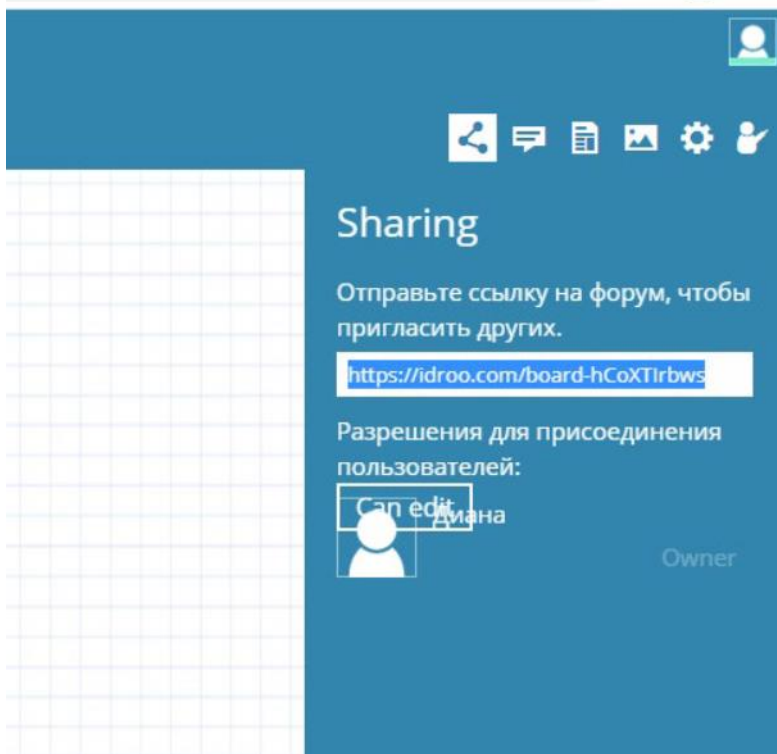
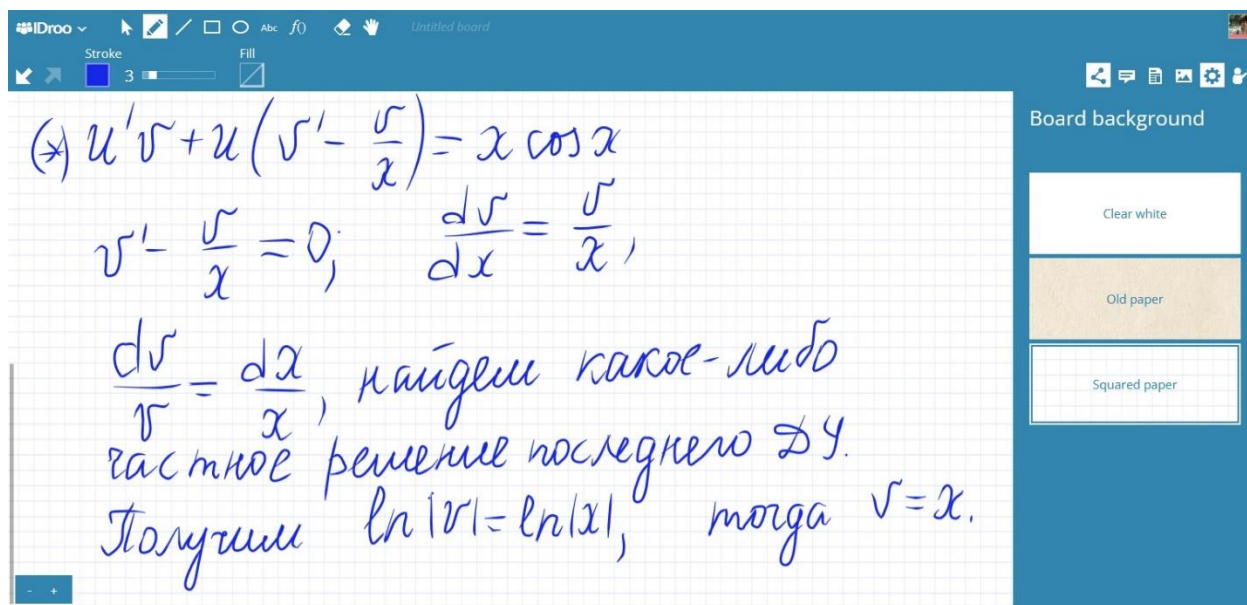


Рис. 6.

Рассмотрим изложение решения дифференциального уравнения при проведении дистанционного семинарского занятия с помощью доски IDroo. (Рис. 7).



$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x \cos x$$

$$v' - \frac{v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \text{ найдем какое-либо частное решение последнего ДУ.}$$

Получим $\ln|v| = \ln|x|$, тогда $v = x$.

1. Решить ДУ первого порядка
 $y' - y/x = x \cos x$
 Данное уравнение является линейным.
 Решим его методом Бернулли.
 Положим, что $y = u \cdot v$
 $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \cos x.$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = x(\sin x + C)$$

$$y = x \sin x + Cx.$$

Ответ: $y = Cx + x \sin x$ - общее решение исходного уравнения.

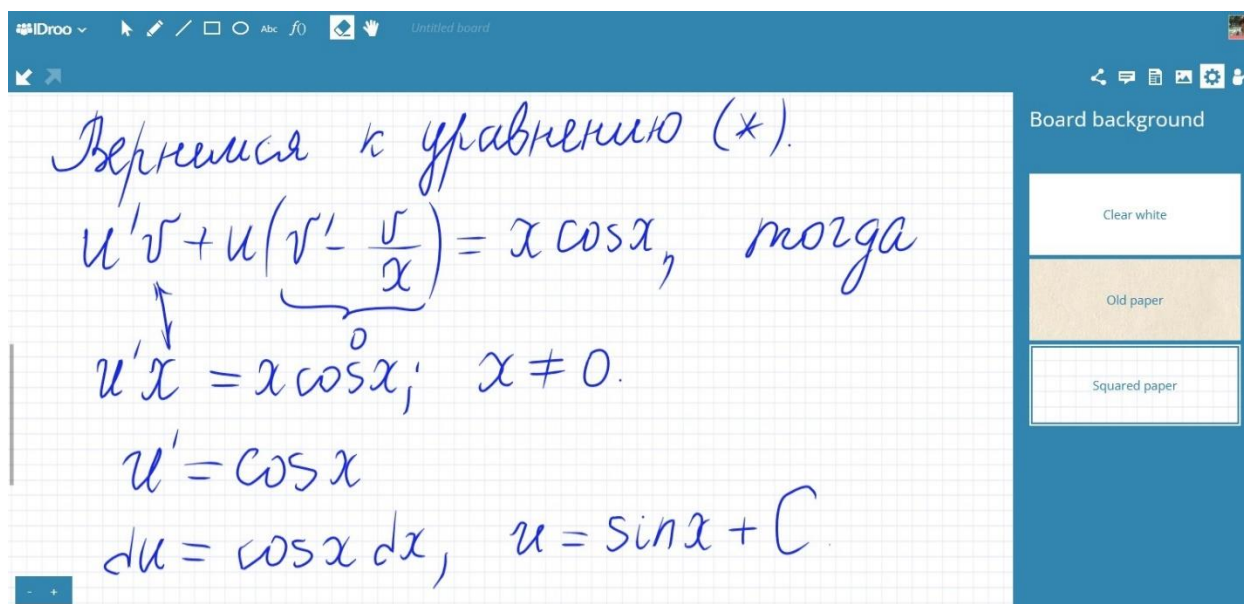


Рис. 7. Скриншоты онлайн-доски с фрагментом занятия для первокурсников.

Рис. 7 выполнен в виде нескольких скриншотов доски с целью продемонстрировать решение в напечатанном виде. При проведении занятия доска просто перемещается в любом направлении (вверх-вниз, влево-вправо), позволяя продолжать записи на одной и той же доске. Возможность перемещаться по доске IDroo в любом направлении является явным преимуществом перед доской для совместного использования в Zoom. В Zoom доска ограничена размерами экрана, для продолжения записей постоянно требуется очищать доску от записей. При этом участники занятия могут сохранять для себя скриншоты записей на доске. [2]

Заключение

В настоящее время идет активная работа по изучению всех особенностей привычных методических приемов, связанных с объяснением, закреплении, контролем усвоения учебного материала, которые реализуются в условиях дистанционного обучения. Необходимо искать новые оптимальные и эффективные решения прежних дидактических задач, которые встают перед преподавателем при проведении лекций, семинаров, консультаций.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. <https://altacademic.ru/idroo-virtualnaya-doska/> Дата обращения 14.10.2021.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. М. Издат. Дом ОНИКС. 2003. 416 с.

Olga B. Vergazova,

Candidate of Philosophy, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

olga.aika@yandex.ru

The use of Skype and the IDroo online whiteboard during remote classes

Abstract. The relevance of the problem under study is due to the choice of teaching methods and technical means aimed at achieving the learning goal during distance learning. The relevance of the problem under study is also closely related to the formation and development of mathematical culture of students of technical specialties. The content of the article is of interest to teachers, students of technical and pedagogical specialties.

Key words: distance learning, online whiteboard.

ДАТЧИКИ ТОЧНОГО ГИДИРОВАНИЯ. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена необходимостью развития и совершенствования у студентов навыка применения полученных теоретических знаний из курса высшей математики, изученных математических методов к решению конкретных технических задач, связанных с будущей профессиональной деятельностью. В частности, одной из таких задач оказалось изучение датчиков точного гидирования студентами специальностей 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы и 24.05.06 Системы управления летательными аппаратами. Таким образом, актуальность исследуемой проблемы обусловлена необходимостью формирования и развития профессиональной и математической культуры будущего инженера. Содержание статьи будет интересным преподавателям, студентам, старшеклассникам

Ключевые слова

стандарты высшего образования, математическая подготовка студентов,
датчики гидирования

АВТОРЫ

Вергазова Ольга Бухтияровна,

кандидат философских наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

olga.aika@yandex.ru

Королев Евгений Алексеевич,

студент 6 курса приборостроительного факультета

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

Якушева Ольга Юрьевна,

студент 6 курса аэрокосмического факультета

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

yakushevaoyu@student.bmstu.ru

Введение

Гидированием называется точное позиционирование телескопа по опорным звёздам, необходимое для задач оптической астрономии (например, астрофотографии).

Для астрофотографии характерны длительные выдержки фотосъёмки, достигающие десятков минут. За счёт вращения небесной сферы видимое положение астрономических объектов за это время успевает существенно измениться, из-за чего изображения этих объектов на фотографии получаются дугообразными.

Для компенсации эффекта суточного вращения используются механизмы, поворачивающие телескоп в экваториальной плоскости со скоростью, равной скорости

вращения Земли. Тем не менее, неточности в изготовлении телескопа и других приборов, влияние атмосферной рефракции и собственного движения небесных тел приводит к смещению изображения даже в условиях компенсации суточного вращения. То есть возникает задача непрерывного удерживания изображения звезды гидрирования в одной точке. Вспомогательный телескоп, механически связанный с основным и используемый для наблюдения за звездой гидрирования, называют *гидом*, а сам процесс — *гидрированием*.

Методология и результаты исследования

Современные внеатмосферные телескопы и аппараты, предназначенные для изучения космических тел, не обходятся без систем наведения и стабилизации. В процессе развития науки появилась возможность улучшить качество получаемой информации за счет внедрения новых систем и устройств.

Космическая обсерватория «Спектр-УФ» использует для обеспечения постоянной ориентации космического аппарата в направлении на наблюдаемый объект систему гидрирования, построенную на основе нескольких технических средств, которые получили название датчиков точного гидрирования. (Рис. 1)

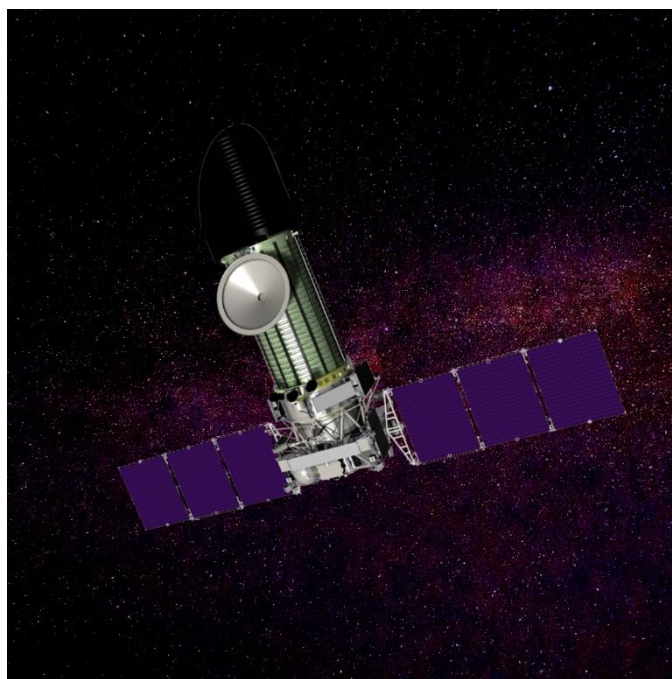


Рис. 1. Космическая обсерватория «Спектр УФ».

Датчик точного гидрирования предназначен для сравнения показаний и относится к числу сложных систем. Суть заключается в том, что определяется вектор рассогласования между положением объекта наблюдения и положением входных апертур (характеристика оптического прибора) аппаратуры телескопа в приборной системе координат. Телескоп считается наведенным в направлении на объект наблюдения, если излучение от объекта попадает и удерживается на входной апертуре научного прибора.

Система датчиков гидрирования состоит из трех детекторов излучения, чувствительные поверхности которых расположены непосредственно в фокальной плоскости вблизи входных щелей спектрографов, и блока обработки данных (БОД). (Рис. 2, 3).

Датчики монтируются в оптико-механическом отсеке под главным зеркалом телескопа.



Рис. 2. Система датчиков гидирования.

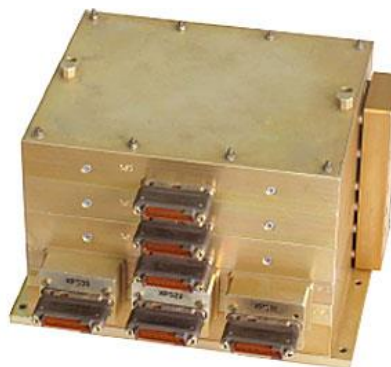


Рис. 3. Блок обработки данных.

Планируемое среднеквадратическое отклонение (СКО) погрешности слежения датчика гида за звездой должно быть не более 0,09 угловых секунд. Время выдачи информации ограничивается диапазоном 0,1-2 секунд. Окончательный выбор будет зависеть от многих факторов - например, от типа и модели светоприемника, используемого в датчике, от параметров системы стабилизации визирной оси телескопа и т. д.

Поскольку наиболее жесткие требования по точности наведения предъявляются при наблюдениях с помощью блока спектрометров (требования по наведению - 0,1 угл. секунд), конструкция датчиков гида разрабатывается с учетом минимизации углового расстояния в поле зрения телескопа между полями зрения датчиков гидирования и входными щелями блоков спектрометров, расположенными на окружности диаметром 20 угл. минут в поле зрения телескопа.

Процесс решения датчиком указанных задач носит циклический характер и повторяется с некоторым периодом $t_{\text{ДТГ}}$ ($t_{\text{ДТГ}}$ - время датчика точного гидирования). В течение данного времени все результаты, выданные датчиком ранее, то есть в момент $t - t_{\text{ДТГ}}$, сохраняют свои значения неизменными. С точки зрения теории управления, датчик точного гидирования представляет собой цифровой блок, квантующий входной сигнал с периодом, равным суммарной задержке $t_{\text{ДТГ}}$ и придающий сигналу погрешность $\sigma_{\text{ДТГ}}$.

$$\frac{1}{t_{\text{ДТГ}}} \int_{t-t_{\text{ДТГ}}}^t f(t) dt = \frac{1}{t_{\text{ДТГ}}} \int_{-\infty}^t f(t) dt - \frac{1}{t_{\text{ДТГ}}} \int_{-\infty}^{t-t_{\text{ДТГ}}} f(t) dt.$$

Входным сигналом для датчика служит сигнал остаточной дестабилизации оси визирования телескопа. В математике их описывают с помощью функций, которые зависят от природы сигнала. Например, это может быть гармонический сигнал, повторяющийся через определенный период t . Тогда получим функцию следующего вида:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A - амплитуда сигнала, ω - частота, φ - фаза, t - время.

На телескопе вибрации конструкции, работа приборов и различных устройств влияют на передачу данных в системах. Поэтому для датчиков гидирования стоит рассматривать сигналы, изменяющиеся во времени случайным образом. То есть сигналы следует описывать функцией времени, значение которой для каждого значения аргумента является случайной величиной. По результатам n опытов случайный процесс $f(t)$ может отобразиться n различными функциями времени $x_i(t)$. Отметим, что в явном виде описать функцию $f(t)$ для таких процессов нельзя, поэтому для их представления используют статистические характеристики: функцию распределения (интегральный закон распределения) $F(x) = P(X < x)$, плотность вероятности (дифференциальный закон) $\varphi(x) = F'(x)$. [1-3]

Управлением работой системы датчиков гидирования занимается блок обработки данных, который выполняется в виде двухпроцессорного резервированного устройства с собственным источником электропитания.

Перечислим основные функции блока обработки данных:

- 1) управление работой СДГ;
- 2) прием от датчиков гида изображений звездного неба;
- 3) обработка и увязка полученных данных;
- 4) передача данных в бортовой вычислительный комплекс;
- 5) хранение программ в памяти.

Поле зрения датчика гидирования обычно составляет $1,6 \times 1,6$ угловых минут. Видеосигнал, прошедший от матрицы сквозь усилитель, переводят в понятный цифровой формат. Для этого используется аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Главной характеристикой АЦП является разрядность - количество распознаваемых и кодируемых дискретных уровней сигнала. Чтобы вычислить количество уровней, достаточно возвести двойку в степень разрядности. Например, «разрядность 8 бит» означает, что преобразователь в состоянии определить 2^8 в восьмой степени уровней сигнала и отобразить их в виде 256 различных значений. [4, 5]

Таким образом, в процессе изучения датчиков точного гидирования студентам потребовались знания, умения и навыки, приобретенные при изучении интегрального исчисления, теории вероятностей и математической статистики, курса информатики и дискретной математики.

Заключение

В целом, решение рассмотренной задачи студентами полностью соответствует стандартам высшего образования. В частности, решение подобных задач направлено на развитие и совершенствование таких общепрофессиональных компетенций (ОПКС-2, 3). Согласно указанным компетенциям, студент способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применять соответствующий физико-математический аппарат для их формализации, анализа и принятия решения; разрабатывать модели исследуемых физических процессов; применять физические и математические методы для решения исследовательских задач. Также способен к логическому мышлению, обобщению, прогнозированию, постановке исследовательских задач и выбору путей их достижения, освоению работы на современном измерительном, диагностическом и технологическом оборудовании, используемом для решения различных научно-технических задач в области радиоэлектронной техники и информационно-коммуникационных технологий; к проведению математического и компьютерного моделирования радиоэлектронных устройств и систем с целью определения их характеристик. Так, студент должен знать теоретические основы и методы обработки сигналов. На уровне «уметь» и «владеть» уметь подготавливать научные публикации на основе результатов исследований; владеть навыками использования методов решения задач анализа и расчета характеристик радиоэлектронных систем и устройств; владеть методами обработки сигналов. Изучение датчиков точного гидирования, их характеристик, решение задач, связанных с обработкой сигналов, математическими методами и методами специальных дисциплин полностью способствует развитию и совершенствованию общепрофессиональных компетенций будущего инженера. [6].

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Беляев Б.Б., Ульяшин А.И., Ковалев Ф.А. Система точного гидирования // Вестник «НПО ИМ. С.А. ЛАВОЧКИНА» 2014. №5. С. 108–119.
2. Аванесов Г. А., Белинская Е. В., Воронков С. В., Строилов Н. А., Катасонов И.Ю., Куделин М.И., Никитин А.В. Использование системы датчиков гида в задачах наведения и стабилизации телескопа Т-170М проекта «Спектр-УФ» // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2013. Т. 10. № 4. С. 16–23.
3. Шишаков К. В. Теоретические основы, методы, модели и алгоритмы для разработки многосистемных комплексов наведения больших оптических телескопов// Ижевск. 2019. 327 с.
4. Ханов, В. Х., Никитин Д. А. Цифровая обработка сигналов. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2014. 156 с.
5. Классификация сигналов <http://bourabai.kz/signals/ts0108.htm>
6. МГТУ им. Н. Э. Баумана Сведения об образовательной организации. Образовательные стандарты. Дата обращения 25.09.2021 <https://www.bmstu.ru/sveden/eduStandarts/>

Olga B. Vergazova,

Candidate of Philosophy, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

olga.aika@yandex.ru

Evgeny A. Korolev,

6-th year student of the Instrument-Making Faculty, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

Olga Yu. Yakusheva,

6-th year student of the Aerospace Faculty, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

yakushevaoyu@student.bmstu.ru

Sensors for precise guiding. Development of mathematical training of students on the example of solving a specific technical problem

Abstract. The relevance of the problem under study is due to the need to develop and improve the students' skill of applying the theoretical knowledge obtained from the course of higher mathematics, the studied mathematical methods to solving specific technical problems related to future professional activity. In particular, one of such tasks turned out to be the study of precise guidance sensors by students of the specialty 11.05.01 Radio-electronic systems and complexes. Thus, the relevance of the problem under study is due to the need to form and develop the professional and mathematical culture of the future engineer. The content of the article will be interesting for teachers, students, high school students.

Key words: higher education standards, mathematical training of students, guiding sensors.

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аннотация

В статье рассматриваются практические приемы для решения задач теории вероятности с помощью комбинаторики. Рассмотрены основные понятия комбинаторики с примерами, описаны основные законы комбинаторики, проиллюстрированные примерами, предложен алгоритм для решения задач, представлены задачи с подробным разбором решений и задачи для самостоятельного решения. Целью работы является описание особенностей применения методов комбинаторики вычисления вероятностей. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Ключевые слова

комбинаторика, множество событий, вероятность

АВТОРЫ

Виноградова Марина Станиславовна,
кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель кафедры математического моделирования
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва,
m-s-vinogradova@yandex.ru

Кандаурова Ирина Евгеньевна,
старший преподаватель кафедры математического моделирования
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва,
iriskan07@gmail.com

Ткачева Ольга Сергеевна,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
tkolga17@gmail.com

Введение

В природе и технике все наблюдаемые явления и события можно классифицировать как невозможные, случайные и достоверные. Из названия этих классов интуитивно понятна их суть: невозможное событие – это событие, которое не может произойти никогда, достоверное – произойдет всегда, а случайное может произойти, а может и не произойти. Именно изучение случайных явлений и событий является целью предмета теория вероятностей [1].

Теория вероятностей – раздел математики, занимающийся изучением и анализом закономерностей массовых случайных явлений или событий. Под случайными явлениями будем понимать явления, результаты, или исходы, которых не могут быть определены заранее и происходящими при повторении совокупности определенных условий [2]. Заметим, что при проведении случайного опыта можно выделить некоторое заранее фиксированное множество элементарных, то есть простейших исходов.

Случайным событием называется событие (явление), которое при повторении совокупности условий может либо произойти, либо не произойти. Численную меру объективной возможности того, что событие произойдет называют вероятностью события. Заметим, что при проведении случайного опыта можно выделить некоторое заранее фиксированное множество элементарных, то есть простейших, (неделимый в рамках данного опыта) исходов.

Для успешного освоения материалов курса «теория вероятностей и математическая статистика», и для решения задач определения вероятности случайных событий обучающимся необходимо знать и уметь применять основные правила и формулы комбинаторики.

Комбинаторика – раздел математики, изучающий методы решения задач выбора элементов из некоторого множества и, также составления различных комбинаций элементов множества в соответствии с заданными правилами. В теории вероятностей комбинаторика является инструментом для подсчёта количества различных исходов испытаний при использовании классического определения вероятности.

Авторы статьи ставят перед собой задачу описания особенностей применения методов комбинаторики для вычисления вероятностей.

Методология и результаты исследования

1. 1 Основные понятия комбинаторики

Напомним определения основных понятий теории вероятностей.

Определение 1. Элементарным исходом называется любой простейший (неделимый в рамках данного опыта) исход опыта.

Элементарный исход обозначается буквой ω .

Множество всех элементарных исходов называют пространством элементарных исходов и обозначают буквой Ω .

Пример пространства элементарных исходов при двукратном подбрасывании монеты (или при однократном подбрасывании двух монет). При двукратном подбрасывании монеты в результате мог, и наконец, выпасть два раза герб (гг), или два раза цифра (цц), или герб и цифра (гц), и наконец, цифра и герб (цг). Таким образом пространство элементарных исходов содержит 4 элемента: $\Omega = \{\omega_{гг}, \omega_{цц}, \omega_{гц}, \omega_{цг}\}$, где через ω_{ii} обозначают элементарный исход, индекс 'г' и 'ц' означает выпадение герба и цифры соответственно.

Определение 2. Произвольное подмножество пространства элементарных исходов называют событием.

События обозначают прописными латинскими буквами A, B, C , при необходимости их можно снабдить индексами: A_2, B_1, C_3, D_6 .

Несколько событий в условиях данного эксперимента образуют полную группу событий, если в результате опыта обязательно произойдет одно и только одно из них.

Элементарный исход называется благоприятствующим (благоприятным) событию, если появление этого исхода влечет появление данного события.

Определение 3. Классическое определение вероятности. *Вероятностью случайного события A ($P(A)$)* называется отношение числа исходов благоприятствующим событию A (n_A), к числу всех возможных элементарных событий (n):

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Числовое значение заключено между нулём и единицей: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Вероятность достоверного события $P(A_{\text{дост}}) = 1$, вероятность невозможного события $P(A_{\text{невозм}}) = 0$.

Классическое определение вероятности основано на предположении, что пространство элементарных исходов Ω содержит конечное число равновозможных элементарных исходов и любые два элементарных исхода несовместны.

Определение 4. Элементарные исходы в эксперименте называют *равновозможными*, если в силу условий проведения эксперимента можно считать, что ни один из них не является объективно возможным, чем другие.

Определение 5. Два события называются несовместными, если при одном испытании их совместное осуществление есть невозможное событие. события совместны если не являются несовместными.

Опыт, удовлетворяющий условию равновозможности элементарных исходов, часто называют также "классической схемой".

Примерами событий могут быть появление цифры "5" при бросании игральной кости, попадание в цель при одном выстреле, выпадение двух решек при бросании двух монет.

Событие называют достоверным, если в результате опыта или эксперимента оно обязательно произойдет, событие называют невозможным если в результате опыта оно не может произойти никогда.

Обычно в задачах по вероятности определить число исходов, благоприятствующих рассматриваемым событиям (n_A), и общее число исходов (n) в выражении $P(A) = \frac{n_A}{n}$ непосредственным подсчетом достаточно трудно. Поэтому в этих случаях пользуются методами и формулами комбинаторики (теории соединений).

Каждая из формул комбинаторики определяет общее число элементарных исходов в некоторой схеме урн (т.е. в идеализированном эксперименте по выбору наудачу m элементов из n различных элементов исходного множества).

Понятие множества из n различных элементов является одним из основных понятий комбинаторики.

Определение 6. Результат выбора m элементов из некоторого исходного множества, состоящего из n элементов, называется *выборкой*.

Выборки элементов могут быть упорядоченными или нет, различаться по количеству и составу элементов, присутствию в них повторяющихся элементов или отсутствию таковых.

Определение 7. Выборку из n элементов по m элементов, в которой не учитывается порядок выбора элементов, называют *сочетанием*, выборку из n элементов по m элементов, в которой учитывается порядок выбора элементов, называют *размещением*. Если рассматривают выборку с возвращением выбранных элементов, то сочетание (размещение) называют сочетание (размещение) с *повторениями*, а если рассматривают выборку без возвращения элементов, то сочетание (размещение) называют сочетание (размещение) *без повторений* (или просто сочетанием (размещением)) [3].

Определение 8. Размещение без повторений из n элементов по n элементов называют *перестановкой* из n элементов.

Приведем без доказательства основные теоремы (правила) комбинаторики [1, 3].

Пусть даны m множеств элементов, A_i – i -е множество, состоящее из n_i элементов.

Теорема 1. Правило умножения (основная формула комбинаторики). Общее число N способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества и расставить их в определенном порядке, определяется равенством

$$N = n_1 n_2 \dots n_m$$

Теорема 2. Правило сложения (правило суммы)

Общее число N способов, которыми можно выбрать по одному элементу из множества A_i или из множества A_j , равно

$$N = n_i + n_j.$$

Правило суммы можно распространить на m множеств

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_m.$$

Теорема 3. Число размещений (без повторений) из n элементов по n элементов определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n(n-1) \dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Следствие 1. Число перестановок из n элементов определяется формулой

$$P_n = n!$$

Теорема 4. Число C_n^m – сочетаний (без повторений) из n элементов по n элементов определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

Замечание. Число C_n^m , называют также биномиальным коэффициентом

Теорема 5. Число $\tilde{A}_n^m$ размещений с повторениями из n элементов по n элементов определяется формулой

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Теорема 6. Число $\tilde{C}_n^m$ сочетаний с повторениями из n элементов по n элементов определяется формулой

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть требуется найти число размещений с повторениями из n элементов по m элементов, в которых первый элемент встречается ровно m_1 раз, второй элемент встречается ровно m_2 раз, ..., n -й элемент встречается ровно m_n раз ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$). Число таких размещений обозначим $C(m_1, \dots, m_n)$.

Теорема 7. Число $C(m_1, \dots, m_n)$ определяется формулой

$$C(m_1, \dots, m_n) = \frac{m!}{m_1! \dots m_n!}$$

Число $C(m_1, \dots, m_n)$ называют также полиномиальным (мультиномиальным) коэффициентом, поскольку оно появляется как коэффициент при слагаемом $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ в разложении функции $(x_1 + \dots + x_n)^m$ по степеням $x_1, \dots, x_n$.

Формулы для числа размещений и сочетаний можно применять и при решении задач комбинаторики при распределении частиц по ячейкам:

- число способов, с помощью которых можно заполнить n разных ячеек m различными частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу $\tilde{A}_n^m$ размещений из n элементов по m элементов;
- число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m неразличимыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно числу $\tilde{C}_n^m$ сочетаний из n элементов по m элементов;
- число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m различными частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно числу $\tilde{A}_n^m$ размещений с повторениями из n элементов по m элементов;
- число способов, с помощью которых можно заполнить n различных ячеек m неразличимыми частицами без ограничения на число попавших в каждую ячейку частиц, равно числу $\tilde{C}_n^m$ сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов.

Проиллюстрируем применение рассмотренных выше определений и теорем на примерах

Пример 1.1. Каким числом способов можно расставить на полке десять различных учебников?

$$P_{10} = 10!.$$

Ответ: 10!

Пример 1.2. Сколько перестановок можно составить из трех элементов a, b, c $abc; acb; bac; bca; cab; cba$.

Таких способов $P_3 = 3! = 6$.

Пример 1.3. Сколькими способами можно распределить 3 билета в театр среди 25 студентов?

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Пример 1.4. Сколько размещений по 2 элемента из трех элементов a, b, c можно составить?

$ab; ac; bc; ba; ca; cb$.

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6.$$

Пример 1.5. Сколькими способами можно выбрать для контроля 3 детали из 25 деталей?

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = 25 \cdot 24 \cdot 236 = 2300.$$

Пример 1.6. Сколько сочетаний по 2 элемента из трех a, b, c можно составить?

$ab; bc; ac.$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Пример 1.7. Сколько различных слов можно составить из слова "МИС-СИСИПИ", переставляя группы?

$$n_1 = 1; n_2 = 4; n_3 = 3; n_4 = 1; n = 9;$$

$$P_9(1; 4; 3; 1) = \frac{9!}{1!4!3!1!} = 2520.$$

Пример 1.8. Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров в трех вагонах?

$$\tilde{A}_8^3 = 8^3 = 512 \text{ способов.}$$

Пример 1.9. Телефонный номер состоит из семи цифр. Сколько телефонных номеров, содержащих только цифры 2, 3, 5, 7 можно составить?

$$\tilde{A}_4^7 = 4^7 = 16384.$$

Пример 1.10. Сколько размещений с повторениями по 2 элемента из трех элементов a, b, c можно составить?

$$A_3^2 = 3^2 = 9.$$

$aa; ab; ac; ba; bb; bc; ca; cb; cc.$

Пример 1.11. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или различных пирожных из 11 видов пирожных?

$$\widetilde{C}_{11}^6 = \frac{(11+6-1)!}{6!(11-1)!} = \frac{16!}{6!10!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 10!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8008.$$

Пример 1.12. Из цифр 5, 7, 9 случайным образом составляется семи-значный телефонный номер. Найти вероятность события A , что в этом номере цифра 5 встречается один раз, цифра 7 - четыре раза, цифра 9 - два раза.

$$n = \tilde{A}_3^7 = 3^7 = 2187; n_A = C(1; 4; 2) = \frac{7!}{1!4!2!} = 105;$$

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{105}{2187} \approx 0,048$$

1.2. Рекомендации по решению задач

При анализе задачи необходимо определить из контекста задачи исходное множество элементов, количество неповторяющихся элементов в нем, или количество классов в каждом из которых есть некоторое число одинаковых, неразличимых между собой элементов (повторения), упорядоченность исходного множества. На следующем этапе анализа – выяснить необходимо ли все исходное множество или какое-либо его подмножество. В случае, если необходимо подмножество, определяем количество элементов подмножества, его упорядоченность и наличие повторяющихся элементов. Последнее может возникнуть в случае, если выбор элементов происходит с их возвратом. После этого анализа можно решить какие законы и формулы комбинаторики нам следует применить.

Анализ задачи можно представить в виде схемы (рис. 1).

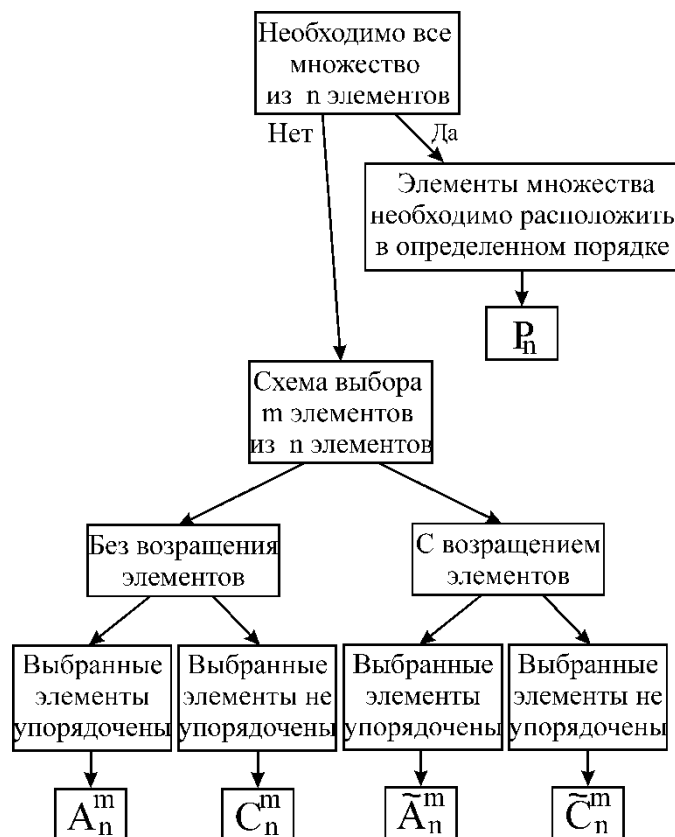


Рис 1. Схема выбора формул комбинаторики

Пусть элемент A_1 можно выбрать из совокупности объектов k_1 способами и элемент A_2 можно выбрать k_2 способами.

Правило умножения используется в том случае, если необходимо вычислить сколькими способами можно выбрать A_1 и A_2 одновременно, то $A_1 A_2$ можно выбрать $k_1 \cdot k_2$ способами. Иначе можно сказать, что должны произойти и событие A_1 и событие A_2 .

Правило сложения используется в том случае, если необходимо вычислить сколькими способами можно выбрать A_1 или A_2 (но не A_1 и A_2 одновременно), то $A_1 + A_2$ можно выбрать $k_1 + k_2$ способами. Иначе, должно произойти или событие A_1 или событие A_2 .

1.3. Задачи с решениями [4-8]

Задача 1. Группа из 11 человек, в том числе Иванов и Петров, располагается за круглым столом в случайном порядке. Найти вероятность того, что между Ивановым и Петровым будут сидеть 3 человека.

Решение. Обозначим событие A – между Ивановым и Петровым будут сидеть 3 человека.

Найдём вероятность события A . Числа n и n_A , входящие в эту формулу, получим, воспользовавшись формулами теории соединений. Всего имеется 11 элементов - 11 человек. В образовании различных соединений (то есть в распределении людей за столом) участвуют все 11 элементов, различные соединения отличаются друг от друга только порядком элементов; следовательно, эти соединения представляют собой перестановки из 11 элементов. Таким образом, общее число исходов испытания $n = P_{11}$.

Если места Иванова и Петрова зафиксированы, например, места 1 и 5, а между ними должно сесть 3 человека, то число различных способов разместить людей на остальные 9 мест равно $P_9 = 9!$. Общее число способов, благоприятствующих событию А, в 11 раз больше, т.е. равно $m = 11 \cdot 9!$, поскольку имеется 11 различных способов посадить Иванова и Петрова так, чтобы между ними было 3 человека (Иванова и Петрова можно посадить на места 1и 5, или 2 и 6, или 3 и 7 и т.д. до мест 11 и 4).

Вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{11 \cdot 9!}{11!} = \frac{1}{10},$$

то есть не зависит от числа человек, которые будут сидеть между Ивановым и Петровым.

Задача 2. Какова вероятность того, что в трёхзначном числе, наудачу выбранном из таблицы случайных чисел,

а) все цифры одинаковые;

б) содержится одна цифра 5, а две другие -различные, причём среди них нет цифры 0?

Решение. Рассмотрим события:

А -в наудачу выбранном трёхзначном числе все цифры одинаковые;

В -в наудачу выбранном трёхзначном числе имеется одна цифра 5, а две другие -различные и среди них нет цифры 0.

а) Имеется 900 трёхзначных чисел (от 100 до 900) и 9 трёхзначных чисел, составленных из одинаковых цифр (это числа 111, 222, ..., 999), поэтому общее число исходов испытания равно $n = 900$, а число исходов испытания, благоприятствующих событию А, равно $m = 9$. Вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{9}{900} = 0,01.$$

б) Имеется 900 трёхзначных чисел, поэтому при определении вероятности события В общее число исходов испытания $n = 900$. Найдём число m исходов испытания, благоприятствующих событию В. Варианты, благоприятствующие событию В, схематически представлены на рис. 2.

$\{ 5 \otimes \otimes \}$	$\{ \otimes 5 \otimes \}$	$\{ \otimes \otimes 5 \}$
Варианты первого вида	Варианты второго вида	Варианты третьего вида

Рис.2.

Цифра 5 в трёхзначном числе может занимать одно из трёх возможных мест. В исходах испытания, относящихся к вариантам первого, второго и третьего видов, цифра 5 стоит соответственно на первом, втором и третьем местах. В вариантах первого вида два свободные места могут быть заняты какими-либо двумя цифрами из оставшихся 8-ми (по условию цифра 0 исключается). Число благоприятных способов, которыми могут быть заняты эти два места, равно A_8^2 –числу размещений из 8-ми элементов по два, так как в каждое соединение входит 2 элемента из восьми имеющихся и соединения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком (порядок элементов важен). Применяв формулу (3), вычислим: $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$. В каждом из вариантов второго и третьего видов число благоприятных способов, которыми могут быть заняты свободные два места, также равно A_8^2 . Таким образом, число исходов испытания, благоприятствующих событию В равно $n_B = 3 \cdot A_8^2 = 3 \cdot 56 = 168$.

Вероятность события В равна

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{168}{900} \approx 0,1867.$$

Задача 3. В зрительном зале забронировано 10 мест для приглашённых гостей. Пришли 7 приглашённых. Найти вероятность того, что четверо из пришедших гостей займут определённые места для каждого из них места, если гости занимают места случайным образом.

Решение. Обозначим событие: A – 4 пришедших гостя займут определённые для каждого из них места.

Вероятность события A найдём по формуле классического определения вероятности. Числа n_A и n , входящие в эту формулу, получим, воспользовавшись формулами теории соединений.

Имеется 10 элементов - 10 забронированных в зрительном зале мест. Эти элементы представлены на рис. 3, они помечены номерами от 1 до 10. На рис. 3 показан один из возможных вариантов размещения 7-ми человек на 10-ти забронированных местах. Свободные места изображены символами $\emptyset$; места, занятые четырьмя гостями из семи пришедших изображены символами $\bullet$ а занятые остальными тремя из семи пришедших – символами $\oplus$.

$\emptyset$	$\emptyset$	$\oplus$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\emptyset$	$\oplus$	$\oplus$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Рис. 3.

Общее число n исходов испытания найдём, исходя из следующего рассуждения. Всего имеется 10 элементов (10 забронированных мест в зале). Составляют соединения, в каждое из которых входят 7 элементов (7 занимаемых пришедшими гостями мест). Соединения отличаются друг от друга как самими элементами, так и порядком этих элементов; в рассматриваемом случае порядок элементов существен для подсчёта различных вариантов соединений. Следовательно, рассматриваемые соединения представляют собой размещения из 10 элементов по 7. Получим $n = A_{10}^7 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Число n_A исходов испытания, благоприятствующих событию A , найдём, принимая во внимание следующее. Если 4 человека занимают определённые для каждого из них места, то есть они сядут на забронированные для них места и при этом в определённом порядке (например, на места 4, 5, 6, 7, как это показано на рис.8), то оставшиеся 3 человека могут занимать остальные 6 мест. Итак, составляем соединения из 6-ти элементов, в каждое из этих соединений входят 3 элемента. Соединения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком; в рассматриваемом случае порядок элементов важен для подсчёта различных вариантов соединений. Следовательно, рассматриваемые соединения представляют собой размещения из шести элементов по три. По формуле (3) получим:

$$n_A = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

Искомая вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A_6^3}{A_{10}^7} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5040}.$$

Задача 4. Из пяти букв разрезанной азбуки составлено слово «книга». Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность p того, что у него снова получилось слово книга.

Решение. Все буквы в слове «книга» разные, переставить пять букв можно $5!$ способами, Число исходов испытания, благоприятствующих событию $n_A = 1$, общее число $n = 5!$

$$p = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Задача 5. Тот же вопрос, если было составлено слово "ананас".

Решение. Число случаев $n = 6!$; число благоприятных случаев уже не один, как в задаче 5, а $m = 3!2!$, так как повторяющиеся буквы "а" и "н" можно произвольным образом переставлять между собой;

$$p = \frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{60}.$$

Задача 6. Из полной колоды карт (52 листа, 4 масти) вынимается сразу несколько карт. Сколько карт нужно вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей чем 0,50, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

Решение. Обозначим A_k наличие среди k вынутых карт не менее двух одной масти.

При $k = 2$: $n = C_{22}^5$; $m = C_{13}^2 \cdot 4$; $P(A_2) = \frac{12}{51} < 0,50$.

При $k = 3$: $n = C_{52}^3$; $m = C_{13}^3 \cdot 4 + C_{13}^2 C_{39}^1 \cdot 4$; $P(A_3) = 0,602 \geq 0,50$;

Итак, нужно вынуть $k \geq 3$ карт.

Задача 7. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом ($N > 2$). Найти вероятность p того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

Решение. Общее число случаев $n = N!$; подсчитываем число благоприятных случаев m . Двух лиц A и B можно посадить рядом двумя способами; остальных $(N - 2)!$ способами;

$$m = 2N(N - 2)!; p = \frac{2N(N - 2)!}{N!} = \frac{2}{N - 1}.$$

Эту же задачу можно решить проще: пусть лицо A садится куда угодно, тогда для B остаётся $N - 1$ место, из них 2 благоприятных;

$$p = \frac{2}{N - 1}.$$

Задача 8. Батарея из M орудий ведёт огонь по группе, состоящей из N целей ($M \leq N$). Орудия выбирают себе цели последовательно, случайным образом, при условии, что никакие два орудия стрелять по одной цели не могут. Найти вероятность p того, что будут обстреляны цели с номерами $1, 2, \dots, M$.

Решение. Число способов, которыми можно распределить M орудий по N целям, равно $n = N(N - 1) \dots (N - M + 1)$ (число размещений из N элементов по M). Число благоприятных случаев (при которых обстреливаются только первые M целей)

$$n_A = M!; P = \frac{M!}{N(N - 1) \dots (N - M + 1)} = \frac{1}{C_N^M}.$$

Задача 9. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырём лункам; каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью, независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

Решение. Общее число случаев $n = 4^4$.

Число способов, которыми можно выбрать лунку, где будет один шарик, $C_3^1 = 3$. Число способов, которыми можно выбрать лунку, где будут три шарика, $C_4^1 = 4$. Число способов, которыми можно выбрать из четырёх шариков три, чтобы положить их в первую лунку, $C_4^3 = 4$.

Общее число благоприятных случаев

$$n_A = 3 \cdot 4 \cdot 4$$

Вероятность события:

$$P = \frac{n_A}{n} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{4^4} = \frac{3}{16}.$$

Задача 10. В отделение связи поступило 4 телеграммы; всего имеется четыре канала связи. Телеграммы случайным образом распределяются по каналам; каждая телеграмма с одной и той же вероятностью передаётся по любому из четырёх каналов. Найти вероятность события $A = \{\text{на один из каналов попадут три телеграммы, на другой - одна телеграмма, а два оставшихся канала будут не загружены}\}$.

Решение. Общее число случаев $n = 4^4$. Число способов, какими можно выбрать один канал, на который попадёт три телеграммы, $C_4^1 = 4$; число способов, какими можно выбрать канал, на который попадёт одна телеграмма $C_3^1 = 3$. Число способов, какими можно выбрать из четырёх телеграмм три, чтобы направить их в один канал, $C_4^3 = 4$. Общее число благоприятных случаев $n_A = 4 \cdot 3 \cdot 4$.

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{44} = \frac{3}{16}.$$

Задача 11. M телеграмм случайным образом распределяются по N каналам связи ($N > M$). Найти вероятность события $A = \{\text{на каждый канал придётся не больше одной телеграммы}\}$.

Решение. Общее число случаев N^M . Число способов, какими можно выбрать M каналов из N , чтобы направить на них по одной телеграмме, равно C_N^M . Число способов, какими можно выбрать из M телеграмм одну и направить её в первый из отмеченных каналов, равно $C_M^1 = M$; число способов, какими можно выбрать вторую телеграмму из оставшихся $M - 1$, равно $C_{M-1}^1 = M - 1$, и т.д. Общее число благоприятных событию случаев будет $n_A = M(M - 1) \dots 1 = M!$.

$$P(A) = \frac{C_N^M \cdot M!}{N^M}.$$

Задача 12. В урне имеется k шаров, помеченных номерами $1, 2, \dots, k$. Из урны l раз вынимается по одному шару ($l \leq k$), номер шара записывается и шар кладётся обратно в урну. Найти вероятность того, что все записанные номера будут различны.

Решение. Число случаев $n = k^l$. Число благоприятных случаев равно числу размещений из k элементов по l , т.е. $n_A = k(k - 1) \dots (k - l + 1)$. Вероятность события

$$p = \frac{n_A}{n} = \frac{k(k - 1) \dots (k - l + 1)}{k^l} = \frac{k!}{k^l(k - l)!}$$

Задача 13. В урне a белых и b чёрных шаров. Два игрока поочерёдно вынимают из урны по одному шару, каждый раз вкладывая его обратно и перемешивая шары. Выигравшим считается тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность события A , что выиграет первый игрок (тот, кто вынимал шар первым).

Решение. Выигрыш первого игрока может осуществиться *или* при первом же вынимании ($P(A_1) = \frac{a}{a+b}$), *или* при третьем, для этого первые два вынимания должны дать чёрные шары, а третье - белый, ($P(A_3) = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b}$), и т.д. Для определения вероятности события A применим правило сложения (теорема 2).

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b} + \dots + \frac{a}{a+b} + \dots = \frac{a}{a+b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} = \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{a+b}{a+2b}; \end{aligned}$$

(очевидно, $P(A) > \frac{1}{2}$ при любых a и b).

Задача 14. В урне два белых и три чёрных шара. Два игрока поочерёдно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность P события A , что выиграет первый игрок.

Решение. Выигрыш первого игрока может осуществиться *или* при первом же вынимании ($P(A_1) = \frac{2}{2+3}$), *или* при третьем, для этого первые два вынимания должны дать чёрные шары ($P(A_3) = \frac{3}{2+3} \cdot \frac{2}{2+2} \cdot \frac{2}{2+1}$).

$$P(A) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$$

Задача 16. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{в полученной выборке ровно одно изделие бракованное}\}$, $B = \{\text{в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия}\}$.

Решение. Пронумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров $E_1 = \{1, 2, \dots, 7\}$ соответствует годным изделиям, множество номеров $E_2 = \{8, 9, 10\}$ – бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трёх элементов из множества $E = E_1 \cup E_2 = \{1, 2, \dots, 10\}$. Поэтому $n = C_{10}^3 = 120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит E_2 , а остальные два элемента – множеству E_1 . По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов $n_A = C_3^1 \cdot C_7^2 = 63$, поэтому

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству E_1 , поэтому $n_B = C_7^3 = 35$. Отсюда следует, что

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{7}{24}.$$

1.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Набирая номер телефона, вы забыли последнюю цифру и набрали её наугад. Какова вероятность того, что набрана нужная вам цифра? Ответ: 0,1.

Задача 2. В ящике лежат 100 одинаковых на ощупь шаров: 10 – зелёных, 30 – красных, 60 – синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) зелёный; 2) не красный.

Ответ: 0,1; 0,7.

Задача 3. В ящике лежат 100 одинаковых на ощупь шаров: 20 – зелёных, 30 – красных, 50 – синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар красный или синий.

Ответ: 0,8.

Задача 4. В урне 10 одинаковых на ощупь шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 4?

Ответ: 0,4.

Задача 5. В урне 10 одинаковых на ощупь шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара больше 7?

Ответ: 0,3.

Задача 6. Из слова "математика" выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это будет буква "м"?

Ответ: 0,2.

Задача 7. Из слова "математика" выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это будет согласная буква?

Ответ: 0,5.

Задача 8.

Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?

Ответ: 0,932.

Задача 9.

Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{в состав нового алфавита входит одна буква а}\}$, $B = \{\text{в состав нового алфавита входят только согласные буквы}\}$.

Ответ:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{42}$$

Задача 10.

Из урны, содержащей $m_1 + m_2$ шаров, из которых m_1 белых и m_2 чёрных, наудачу отбирают m шаров ($m \leq \min(m_1, m_2)$) и откладывают в сторону. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{все отложенные шары белые}\}$, $B = \{\text{среди отложенных шаров ровно } k \text{ белых; } k \leq m\}$.

Ответ:

$$\frac{C_{m_1}^m}{C_{m_1 + m_2}^m}$$

Задача 11.

Из полной колоды карт (52 карты) вынимают сразу n карт ($n < 52$); одну из них смотрят; она оказывается тузом, после чего её смешивают с остальными вынутыми. Найти вероятность того, что при втором вынимании карты из этих n мы снова получим туза.

Ответ:

$$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3}{51}.$$

Заключение

В статье продемонстрированы основные приемы решения задач теории вероятностей с использованием комбинаторики. Приведены определения основных понятия комбинаторики, предложена общая схема решения задач с использованием классического определения вероятности и применением методов комбинаторики. В работе рассмотрены задачи с подробным разбором решений, а также задачи для самостоятельного решения с ответами.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М., Высш.шк., 2003.- 479 с
2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов /. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ, 2006. — 573 с. — (Высшее образование).
3. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей.
4. Учебное пособие для вузов под редакцией В.С. Зарубина, А.П. Крищенко, М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана; 2001; 311 с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей, М., Наука, 2001, 564 с.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей., М., Радио и связь, 1983, 416 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей к математической статистике, М., Высшая школа, 1998, 400 с.
8. Золотаревская Д.И., Наискамова Е.В., Ульянова Н.И. Сборник задач по теории вероятностей, М., Изд-во МСХА, 1997, 253 с.
9. Сборник задач по математике для вузов. Часть 3. Теория вероятностей и математическая статистика под редакцией А.В. Ефимова, М., Наука, 1990, 428 с.

Marina S. Vinogradova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

m-s-vinogradova@yandex.ru

Irina E. Kandaurova,
 Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
iriskan07@gmail.com

Olga S. Tkacheva,
 Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov Academy of Sciences, approved by the Presidium of the
 Russian Academy of Sciences, Moscow
tkolga17@gmail.com

Combinatorial method for calculating probabilities

Abstract. The article discusses practical techniques for solving problems of probability theory using combinatorics. The basic concepts of combinatorics with examples are considered. The basic laws of combinatorics are described, illustrated by examples. An algorithm for solving problems is proposed, problems with a detailed analysis of solutions and problems for independent solution are presented. The aim of the work is to describe the features of the application of methods of combinatorics for calculating probabilities. The content of the article will be useful for students and teachers of the discipline "Probability theory and mathematical statistics".

Key words: combinatorics, set of events, probability.

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ КВАДРОКОПТЕРА НА ОСНОВЕ MATLAB SUPPORT PACKAGE FOR PARROT DRONES¹

Аннотация

Обычно пользователь управляет квадрокоптером прилагаемым к нему пультом или со смартфона, используя специально разработанные производителем приложения. Возможности управления при этом сильно ограничены набором некоторых стандартных встроенных функций. Однако, в процессе обучения у студентов может возникнуть необходимость управлять квадрокоптером или группой квадрокоптеров с использованием персонального компьютера. В этом случае удастся задавать сложные последовательности из заранее разработанных команд или реализовывать свои собственные законы управления. Однако, для этого требуются дополнительные знания о том какие модели квадрокоптеров выбрать для экспериментов, какие программы и операторы использовать, как установить соединение компьютера с квадрокоптером по Wi-Fi и т.п. Статья посвящена рассмотрению указанных вопросов и может быть полезна студентам, интересующимся механикой и управлением подвижными объектами, а также преподавателям при организации лабораторных работ, связанных с управлением квадрокоптерами.

Ключевые слова

квадрокоптер, matlab, образование, практические занятия, Parrot Drones

АВТОРЫ

Глазков Тимур Владимирович,
 математик лаборатории механики систем,
 Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН;
 аспирант кафедры математического моделирования
 ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
 им. Н. Э. Баумана»;
 ассистент департамента механики и процессов управления, Инженерная академия
 ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», г. Москва
t.glazkov@bk.ru

¹ Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

Решмин Сергей Александрович,
 главный научный сотрудник лаборатории механики систем,
 Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН;
 профессор кафедры математического моделирования
 ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
 им. Н. Э. Баумана»;
 профессор департамента механики и мехатроники,
 Институт космических технологий
 ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», г. Москва
 reshmin@ipmnet.ru

Введение

В последнее время наблюдается положительный тренд на использование беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в образовательных учреждениях по всему миру [1, 2, 3, 4, 5]. В образовательных целях чаще всего используются БПЛА мультироторного типа. В отличие от БПЛА самолетного или вертолетного типа, они обладают такими основными преимуществами, как возможность вертикального взлета и посадки (актуально при запуске аппарата в ограниченных по площади учебных помещениях), способность зависать в заданной точке пространства, перемещаться в любом направлении и вокруг своей оси. В некоторых моделях, например, Parrot Bebop, Parrot Mambo, Parrot Rolling Spider (Рис. 1) производители предусматривают специальные конструктивные элементы для защиты летательного аппарата (особенно пропеллеров) от повреждений при падении или столкновении с препятствием. Эти элементы также позволяют обезопасить человека от быстро вращающихся пропеллеров, поэтому для целей безопасности обучающихся в образовательном процессе часто предпочитают использовать аппараты именно с такой защитой.



Рис. 1. Квадрокоптеры Parrot Mambo FPV (слева) и Parrot Bebop 2 (справа)

БПЛА мультироторного типа обычно состоит из корпуса на основе крестообразной рамы или иной геометрии, на котором закрепляется полетный контроллер, аккумуляторная батарея и другие элементы, и двигателей, расположенных на концах рамы. На валы (оси вращения) двигателей закрепляются пропеллеры, за счет которых возникают силы тяги и крутящие моменты. Путем изменения этих сил и моментов осуществляется перемещение аппарата в пространстве. Такие БПЛА в технической литературе называют мультикоптерами.

Данная статья посвящена пакету поддержки Matlab Support Package for Parrot Drones [6], который является специальным дополнением к среде Matlab и позволяет управлять движением квадрокоптера (мультикоптер, оснащенный четырьмя двигателями) Parrot с компьютера путем задания команд летательному аппарату. Пакет позволяет управлять взлетом и посадкой, изменять направление движения, контролировать скорость и уровень наклона аппарата, выполнять «акробатические» элементы

(сальто в одном из четырех направлений). В режиме реального времени есть возможность считывать с бортовых датчиков навигационные данные о полете, такие как высота, ориентация и линейная скорость, оценивать текущий уровень заряда батареи, получать изображения и видео с камеры квадрокоптера, которые в дальнейшем могут быть использованы при их цифровой обработке в пакете Image Processing Toolbox. Команды передаются на дрон посредством Wi-Fi соединения, которое требуется заранее установить между компьютером и квадрокоптером.

Разработчиком квадрокоптеров Parrot является французская компания-производитель Parrot SA. Компания является одним из лидеров [7], наряду с китайской компанией DJI Technology, в сфере разработки и производства БПЛА мультироторного типа и обладает широким модельным рядом. Однако пакет поддержки позволяет работать не со всеми моделями Parrot. Компания MathWorks, разработчик среды Matlab, в списке поддерживаемых моделей указывает квадрокоптеры Parrot Mambo FPV и Parrot Bebop 2 (Рис. 1). Отметим, что пакет также позволяет работать с моделью Parrot Bebop 1.

Принцип движения квадрокоптера в пространстве

При математическом описании движения квадрокоптера предполагают, что аппарат представляет собой абсолютно твердое тело, обладающее тремя поступательными и тремя вращательными степенями свободы [8]. Поступательное движение описывается координатами центра масс аппарата в неподвижной системе координат, связанной с Землей, и происходит за счет изменения вектора силы тяги, который характеризуется направлением и величиной. В свою очередь, изменение параметров вектора силы тяги происходит за счет изменения углов наклона корпуса, относительно осей подвижной системы координат (ПСК). Введем оси ПСК как показано на Рис. 2, а именно: 1) начало ПСК находится в центре масс квадрокоптера; 2) ось X начинается в центре масс и указывает направление вдоль носа квадрокоптера; 3) ось Y начинается в центре масс и указывает вправо от квадрокоптера; 4) ось Z начинается в центре масс и направлена по направлению силы тяжести. Таким образом, тройка векторов, образующих оси ПСК, образует правый базис.

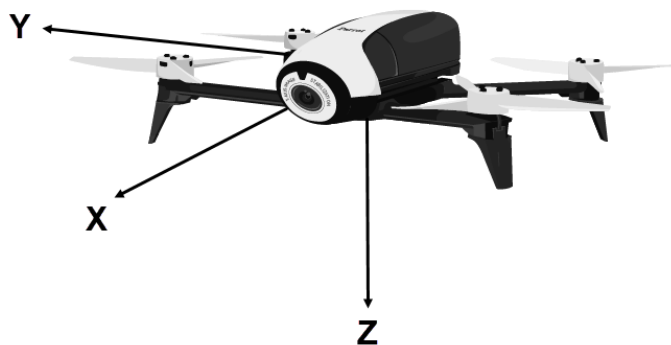


Рис. 2. Квадрокоптер и оси подвижной системы координат

Движение вдоль оси X происходит за счет наклона (поворота) корпуса вокруг оси Y. В этом случае наклон характеризуется углом тангажа (в пакете поддержки обозначается как «pitch»). Квадрокоптер движется вперед, если этот угол отрицательный. Если тангаж положительный, то аппарат движется назад.

Аналогично, движение вдоль оси Y происходит за счет наклона (поворота) корпуса вокруг оси X. В этом случае наклон характеризуется углом крена («roll»). Квадрокоптер движется влево, если этот угол отрицательный. Если крен положительный, то аппарат движется вправо.

В случае вращательного движения вокруг оси Z координаты центра масс не изменяются. В этом случае поворот характеризуется углом рыскания («yaw»). Если этот угол положительный, то вращение происходит в направлении от оси X к оси Y (движение против часовой стрелки, если смотреть на плоскость X-Y со стороны вектора Z). Если угол рыскания отрицательный, то вращение происходит в направлении от оси Y к оси X.

Таким образом, в идеализированных условиях (отсутствие шумов датчиков, внешних возмущений и др.) поступательное движение квадрокоптера зависит от динамики углов крена и тангажа и не зависит от динамики угла рыскания.

Задача взлета и посадки

Рассмотрим реализацию в пакете поддержки Matlab Support Package for Parrot Drones одних из основных этапов движения квадрокоптера - этапов взлета и посадки. Данный пакет поддержки по умолчанию не включен в среду Matlab, поэтому его потребуется дополнительно установить.

Установка пакета поддержки. Для установки пакета необходимо на вкладке «Home» в разделе «Environment» выбрать пункт «Add-Ons», а затем «Get Hardware Support Packages» (Рис. 3). В открывшемся окне «Add-On Explorer» необходимо найти пакет «Matlab Support Package for Parrot Drones», используя для этого поиск.

Проверить наличие обновлений пакета можно, выбрав на вкладке «Home» в разделе «Resources» пункт «Help», а затем подпункт «Check for Updates». Отметим, что пакет поддержки доступен для версий среды Matlab, начиная с R2019a.

Подключение компьютера к квадрокоптеру Parrot. Для работы пакета поддержки потребуется установить Wi-Fi соединение между компьютером и дроном. Чтобы подключить компьютер к Wi-Fi-сети квадрокоптера Parrot Mambo или Parrot Bebop 2, необходимо: 1) вставить заряженный аккумулятор и включить дрон; 2) дождаться загрузки дрона; 3) открыть на компьютере Wi-Fi соединения и подключиться к беспроводной сети, соответствующей дрону. Название Wi-Fi-сети дрона состоит из модели и уникального ID-номера, например, «Bebop2-182202». Если на компьютере отсутствует Wi-Fi модуль, одним из решений является приобретение сетевого Wi-Fi-адаптера с USB-интерфейсом.

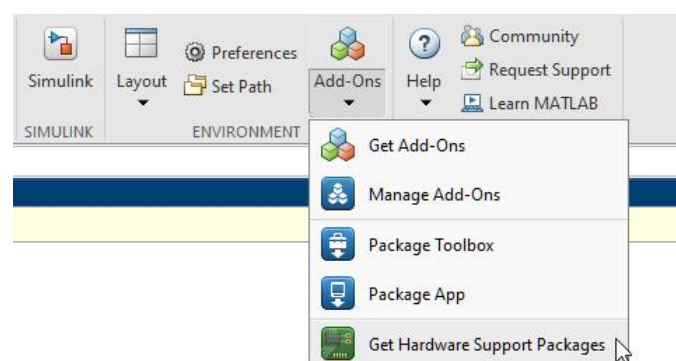


Рис. 3. Этап установки пакета поддержки

Отметим, что пакет поддерживает только оригинальную заводскую прошивку и в процессе установки пакета не меняет ее. Восстановить оригинальную прошивку можно следуя инструкциям производителя дронов Parrot (см. [9]).

Связь среды Matlab и квадрокоптера Parrot. После установки пакета поддержки и подключения компьютера к Wi-Fi-сети дрона, остается подключиться к дрону непосредственно из среды Matlab. Для этого используется команда *parrot*:

- $p = \text{parrot}()$ - подключение к первому доступному квадрокоптеру Parrot.

- $p = \text{parrot}(\text{droneName})$ - подключение к квадрокоптеру Parrot определенной модели. Тип входного аргумента *droneName* - string, допустимые значения - 'Mambo', 'Bebop2'. Пример: $p = \text{parrot}('Bebop2')$.

- $p = \text{parrot}(\text{droneID})$ - подключение к квадрокоптеру Parrot с заданным ID. Тип входного аргумента *droneID* - string. Значение аргумента *droneID* совпадает с названием беспроводной сети дрона. Пример: $p = \text{parrot}('Mambo_564853')$.

В результате выполнения команды *parrot* создается объект подключения дрона *p* (имя этого объекта может быть любым), в который будет занесена информация об имени и уникальном ID дрона, текущем состоянии дрона и уровне заряда батареи, доступности FPV камеры. К созданному объекту *p* можно применять функции.

Функция взлета. Функция *takeoff* инициирует взлет летательного аппарата на высоту 1 метр. В качестве входного аргумента выступает объект подключения дрона *p*. Пример: *takeoff(p)*.

Функция посадки. Функция *land* инициирует постепенную («мягкую») посадку летательного аппарата с некоторого текущего положения дрона и завершает полет. В качестве входного аргумента выступает объект подключения дрона *p*. Пример: *land(p)*.

Функция экстренного прерывания полета. Функция *abort* мгновенно завершает полет дрона путем прекращения работы двигателей. В качестве входного аргумента выступает объект подключения дрона *p*. Пример: *abort(p)*.

Функция считывания текущей высоты. Функция *readHeight* возвращает текущую высоту квадрокоптера в метрах и момент времени, когда было произведено измерение (в виде datetime). В качестве входного аргумента выступает объект подключения дрона *p*. Функция работает только после этапа взлета аппарата. Пример: $[\text{height}, \text{time}] = \text{readHeight}(p)$.

Рассмотрим следующую полетную задачу: требуется осуществить с помощью Matlab Support Package for Parrot Drones зависание дрона в течение 15 секунд на высоте 1 метр. Результаты полета необходимо представить в виде графика зависимости высоты от времени.

Создадим новое окно для графика, зададим цвет и толщину линии графика, подпишем оси:

```
f = figure;
line1 = animatedline('Color', 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Время, с'); ylabel('Высота, м');
```

Осуществим подключение к дрону Parrot и взлет на высоту 1 метр, зададим время зависания *flightTime*:

```
p = parrot();
takeoff(p);
flightTime = 15;
```

Для построения графика будем использовать пару функций - *tic* и *toc*. Функция *tic* записывает текущее время, в которое была вызвана; обращение к функции *toc* позволяет вычислить время прошедшее с момента запуска функции *tic*. Значение *t1* соответствует прошедшему с момента окончания взлета времени, а *h1* - высоте в это время. Функции *addpoints* и *drawnow* позволяют в режиме реального времени добавлять результаты измерения высоты на график:

```
tObj = tic;
while toc(tObj) < flightTime
t1 = toc(tObj); h1 = readHeight(p);
addpoints(line1, t1, h1);
```

```
drawnow;  
pause(0.1);  
end
```

Остается реализовать этап посадки и завершить полет с помощью команды *land(p)*. Результаты работы программы, полученные в процессе полета квадрокоптера Parrot Bebop, представлены на Рис. 4.

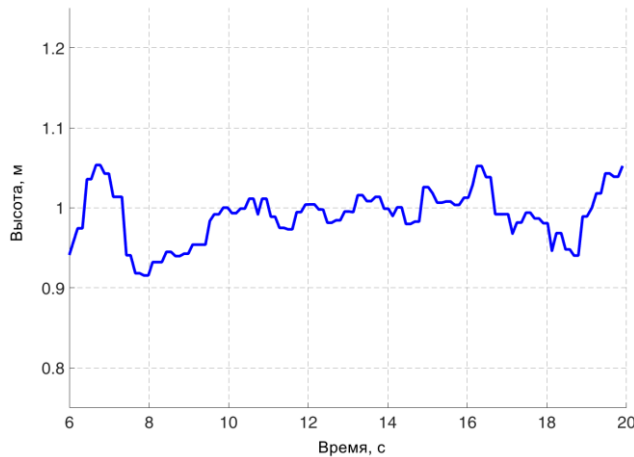


Рис. 4. Зависимость высоты от времени (без этапов взлета и посадки)



Рис. 5. Специально оборудованная площадка

Заключение

В статье приведена методическая информация, которую читатель может использовать в качестве начальных знаний во время учебного процесса при знакомстве с технологией управления квадрокоптером с использованием персонального компьютера или ноутбука. В настоящее время в Инженерной академии РУДН разрабатывается соответствующий лабораторный практикум. На Рис. 5 изображена часть помещения, огороженная защитной сеткой и оборудованная мягким основанием для безопасных полетов квадрокоптеров.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Исаев Р.Р., Фазылов А.И., Нурышева К.И., Киряев Р.В. Методика обучения пилотированию квадрокоптерами в дополнительном образовании // Вестник Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы. 2016. № 4-2 (40). С. 53-59.
2. Зеленко Г.Н., Зеленко Н.В. Квадрокоптер как объект изучения в центре образования "Точка роста" // Технологического-экономического образования. 2020. № 13. С. 33-37.
3. Спивакова К.С. Использование квадрокоптеров в образовательном процессе // В сборнике: Информатизация непрерывного образования - 2018. Материалы Международной научной конференции: в 2 томах. Под общей редакцией В. В. Гриншкун. 2018. С. 194-196.
4. Исаев Б.А., Дуйшонбек кызы Гулжамал, Умаров Т.С. Внедрение в учебный процесс беспилотного летательного аппарата (БПЛА) DJI квадрокоптера Phantom 3 Professional и программного обеспечения Agisoft Photoscan Professional // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2018. № 3 (47). С. 486-492.
5. Golubev A. E., Glazkov T. V. Nonlinear quadrotor control based on Simulink Support Package for Parrot Mini-drones // Proceedings of the Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing: Focus on Complex Processes and Systems — dedicated to the memory of Nikolai Botkin. — Vol. 2783. — Munich, Germany, 2020. P. 113-127.
6. MATLAB Support Package for Parrot Drones // MATLAB & Simulink URL: <https://www.mathworks.com/help/supportpkg/parrotio/index.html> (дата обращения: 20.10.2021).
7. Битва дронов: французский попугай против китайского яблока, или Parrot vs DJI // Хабр URL: <https://habr.com/ru/company/inspectorgadgets/blog/404275/> (дата обращения: 20.10.2021).
8. Глазков Т. В., Голубев А. Е. Отслеживание программного изменения углового положения квадрокоптера // Математика и математическое моделирование. 2017. № 5. С. 15-28.
9. Restore Original Firmware // MATLAB & Simulink URL: <https://www.mathworks.com/help/supportpkg/parrotio/ug/restore-original-firmware.html> (дата обращения: 20.10.2021).

Timur V. Glazkov,

Mathematician, Institute for Problems in Mechanics named after A.Yu. Ishlinsky RAS; Graduate Student, Department of Mathematical Simulation, Moscow State Technical University named after N.E.Bauman; Assistant, Department of Mechanics and Mechatronics, Institute of Space Technology of RUDN University, Moscow

t.glazkov@bk.ru

Sergey A. Reshmin,

Principal Researcher, Institute for Problems in Mechanics named after A.Yu. Ishlinsky RAS; Professor, Department of Mathematical Simulation, Moscow State Technical University named after N.E.Bauman; Professor, Department of Mechanics and Mechatronics, Institute of Space Technology of RUDN University, Moscow

reshmin@ipmnet.ru

Studying the dynamics of a quadrotor based on Matlab Support Package for Parrot Drones

Abstract. Usually, the user controls the quadrotor with the remote control attached to it or from a smartphone using applications specially developed by the manufacturer. At the same time, the control capabilities are severely limited by a set of some standard built-in functions. However, in the course of training, students may need to control a quadrotor or a group of quadrotors using a personal computer. In this case, it is possible to set complex sequences from pre-designed commands or implement your own control laws. However, this requires additional knowledge about which models of quadrotors to choose for experiments, which programs and operators to use, how to connect a computer to a quadrotor via Wi-Fi, etc. The article is devoted to the consideration of these issues and may be useful to students interested in mechanics and control of moving objects, as well as teachers in the organization of laboratory work related to the control of quadrotors.

Key words: quadcopter, Matlab, education, practical training, Parrot Drones.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ (НАСЫЩЕННЫЙ ПАР И ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА) ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ И СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ

Аннотация

В статье рассматривается алгоритмический подход к решению задач по темам насыщенный пар и влажность воздуха. Статья адресована учащимся 10-х, 11-х классов, студентам младших курсов и педагогам для организации учебного процесса.

Ключевые слова

насыщенный пар, идеальный газ, влажность воздуха,
относительная влажность, газовые законы

АВТОРЫ

Грибов Александр Фёдорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Краснов Игорь Константинович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Введение

Решение качественных и расчетных задач, связанных с темами насыщенный пар и влажность воздуха традиционно вызывает трудности у учащихся. Алгоритмический подход заключается в том, что первоначально из условий определяется физическое явление (процесс), описанное в задаче. Далее устанавливаются закономерности между величинами, характеризующими рассматриваемое явление (процесс) и записываются соответствующие математические формулы. И, наконец, осуществляется анализ полученных соотношений, и определяются искомые величины.

Основные определения и понятия

Насыщенный пар. Количество жидкости в открытом сосуде вследствие испарения непрерывно уменьшается. Но если сосуд плотно закрыт, то этого не происходит. В закрытом сосуде, в конце концов, устанавливается равновесное состояние: число молекул, покидающих поверхность жидкости, становится равным числу молекул пара, возвращающихся за то же время в жидкость. Такое равновесие называется динамическим или подвижным.

Определение. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным паром. Пар, не достигший состояния динамического равновесия со своей жидкостью, называется ненасыщенным. Из определения следует, что в данном объеме при данной температуре не может находиться большее количество пара. Поэтому имеет место следующий

Факт 1: насыщенный пар имеет при данной температуре наибольшее количество молекул в единице объема, а, следовательно, и наибольшую плотность и оказывает наибольшее давление.

Факт 2: состояние насыщенного пара можно приближенно описывать состоянием идеального газа (подтверждено экспериментом). В частности, имеем соотношение между давлением и плотностью насыщенного пара

$$P_H = \frac{\rho_H}{\mu} RT, (1)$$

где P_H, ρ_H – давление и плотность насыщенного пара; R – универсальная газовая постоянная; T – температура, μ – молярная масса.

Возможна и другая формула для определения рассматриваемых соотношений:

$$P_H = nKT, (2)$$

где n – концентрация ($n = N/V$) – число молекул в единице объема; K – постоянная Больцмана.

Выясним, от каких параметров зависит концентрация молекул насыщенного пара. Для этого рассмотрим выражения для скоростей испарения и конденсации. Скорость испарения G определяется по формуле

$$G = BT^\alpha \exp\left(-\frac{u_0}{KT}\right), (3)$$

где B – постоянная, зависящая от химического состава вещества; u_0 – энергия испарения, которая равна работе, которую нужно совершить, чтобы преодолеть силы межмолекулярного притяжения и удалить молекулу на такое расстояние от поверхности, где молекулярные силы уже не проявляются; $\alpha \approx 1/2$; K – постоянная Больцмана; T – температура.

Скорость конденсации g определяется по формуле

$$g = \beta \cdot n, (4)$$

где β – некоторый коэффициент; n – концентрация молекул пара. При динамическом равновесии скорость конденсации равна скорости испарения. Приравняв правые части равенств (3) и (4), получим выражение для концентрации молекул насыщенного пара

$$n_H = AT^\alpha \exp\left(-\frac{n_0}{KT}\right). (5)$$

Плотность насыщенного пара получим, умножив концентрацию на массу молекулы

$$\rho_H = m_0 n_H = A m_0 T^\alpha \exp\left(-\frac{n_0}{KT}\right) (6)$$

Давление насыщенного пара получим по формуле

$$P_H = nKT = AKT^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{n_0}{KT}\right), (7)$$

где $A = B/\beta$.

Следует отметить, что выражение (7) является приближенным, так как при его выводе не в полной мере учитывались силы межмолекулярного притяжения. Тем не менее, выражение (7) в основном правильно передает свойства насыщенного пара, что подтверждается экспериментальными данными. График зависимости плотности насыщенного пара от температуры изображен на рис. 1.

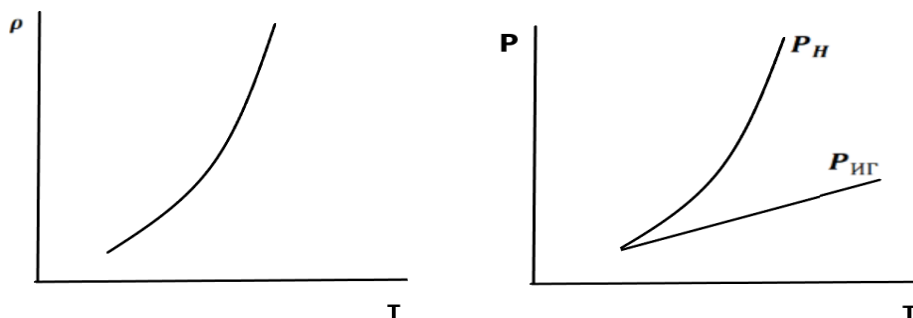


Рис. 1. Рис. 2.

Из графика видно, что с ростом температуры плотность насыщенного пара резко возрастает. График зависимости давления насыщенного пара от температуры приведен на рис. 2. Для сравнения здесь же вычерчен график зависимости давления идеального газа от температуры (при постоянном объеме). Давление идеального газа растет линейно с ростом температуры, давление насыщенного пара возрастает значительно быстрее. На основании формул (6), (7) и экспериментальных данных составлены таблицы зависимостей плотности и давления насыщенного пара от температуры: $\rho_H = \rho_H(T)$; $P_H = P_H(T)$. Из изложенного следует, что для определения зависимости давления насыщенного пара от температуры следует использовать формулы Менделеева-Клайперона и зависимости $\rho_H = \rho_H(T)$; и $P_H = P_H(T)$, заданные в виде таблиц. При этом необходимо помнить, что использовать объединенный газовый закон ($\frac{PV}{T} = \text{const}$), а также законы Бойля-Мариотта, Гей-Люсака и Шарля при изучении насыщенного газа нельзя.

Рассмотрим поведение насыщенного газа при изменении объема при постоянной температуре. Для этого изучим изотермы реального газа, которые получены в результате процессов сжатия-расширения некоторого газа, находящегося в цилиндре под поршнем рис. 3 и рис. 4.

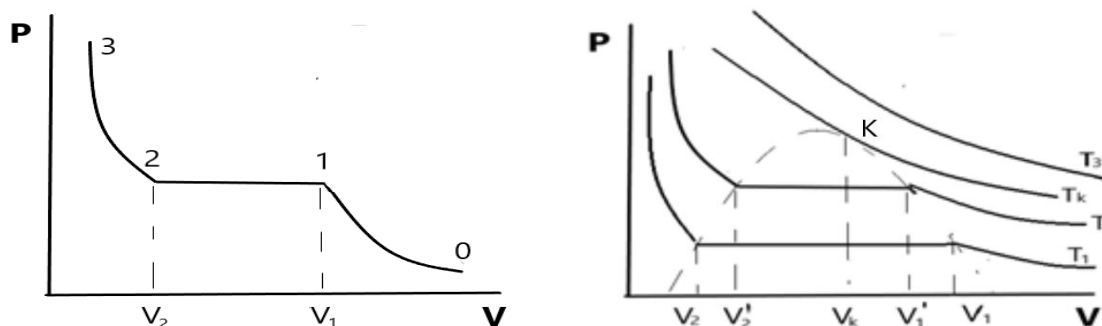


Рис. 3. Рис. 4.

Проанализируем одиночную изотерму. Вначале, когда объем достаточно велик ($V > V_1$) газ находится в состоянии ненасыщенного пара и давление пара с уменьшением объема растет в соответствии с законом Бойля-Мариотта. При дальнейшем уменьшении объема, начиная со значения V_1 , давление в цилиндре под поршнем перестанет меняться. Газ переходит в состояние насыщенного пара и часть его конденсируется в жидкость. В точке V_2 весь пар превращается в жидкость и участок при $V < V_2$ соответствует жидкому состоянию вещества.

Состояние, соответствующее точке K, в которую обращается горизонтальный участок изотермы при температуре $T = T_K$, называют критическим состоянием (критическая точка). Давление и объем в этом состоянии называют критическими. В крити-

ческом состоянии жидкость имеет максимальный объем, а насыщенный пар - максимальное давление. Если сжимать газ, поддерживая температуру выше критической (изотерма T_3), то уменьшение объема приведет к возрастанию давления в соответствии с уравнениями состояния идеального газа. В этом случае образование жидкости в сосуде не будет. Если соединить левые и правые концы горизонтальных участков гладкой кривой, то получим зависимость давления от температуры, на которой отражены все возможные состояния газа (рис. 5.). В заключении следует отметить, что газ и пар одно и то же состояние вещества, так как все газы могут быть превращены в жидкость.

Рассмотрим график, отражающий зависимость давления насыщенного пара от температуры, представленный на рис. 6. При нагревании в закрытом сосуде жидкости с паром часть жидкости превращается в пар. При этом давление насыщенного пара растет не только вследствие температуры, но и вследствие увеличения концентрации молекул - участок АВ. Когда вся жидкость испарится, пар при дальнейшем нагревании перестает быть насыщенным, и его давление при постоянном объеме будет возрастать прямо пропорционально в соответствии с законом Шарля.

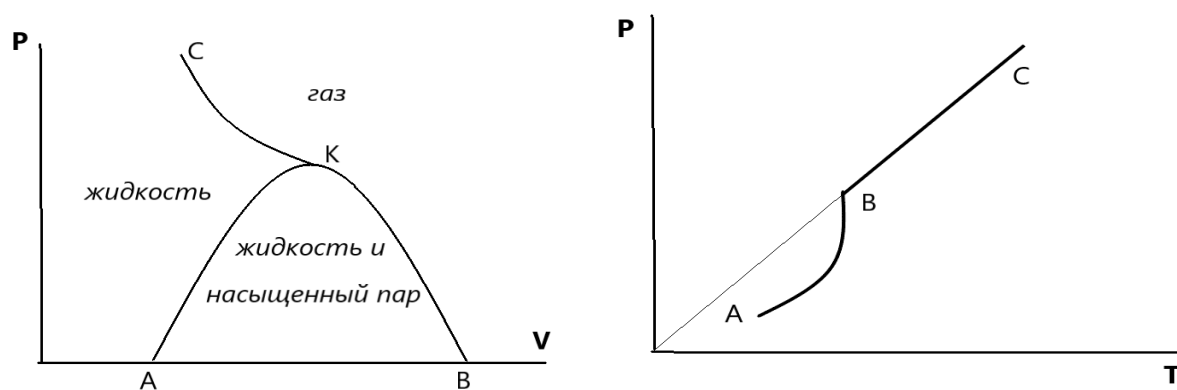


Рис. 5. Рис. 6.

Влажность воздуха. Атмосферный воздух представляет собой смесь различных газов и водяного пара. Каждый из газов вносит свой вклад в суммарное давление, производимое воздухом на находящиеся в нем тела. Давление, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы отсутствовали, называют парциальным давлением (или упругостью) водяного пара.

Состояние водяного пара в воздухе характеризуется абсолютной и относительной влажностью.

Абсолютная влажность. Абсолютной влажностью воздуха называют массу водяного пара, содержащегося в одном кубическом метре воздуха при данной температуре. Другими словами, абсолютная влажность - это плотность водяных паров при данной температуре. Единица измерения абсолютной влажности в системе СИ - $\text{кг}/\text{м}^3$. Эту величину из-за ее малости часто выражают во внесистемных единицах в граммах на кубический сантиметр - $\text{г}/\text{см}^3$. Абсолютная влажность, таким образом, показывает, сколько водяного пара в граммах содержится в одном кубическом метре воздуха. Абсолютная влажность и парциальное давление водяного пара связаны уравнением Менделеева - Клапейрона

$$p = \frac{mRT}{\mu V}$$

Относительная влажность. Знание упругости (парциального давления) водяного пара или абсолютной влажности ничего не говорит о том, насколько водяной пар

в данных условиях далек от насыщения. А именно от этого зависит интенсивность испарения воды или конденсации пара. Вот почему вводят величину, показывающую насколько водяной пар при данной температуре близок к насыщению - относительную влажность.

Относительной влажностью воздуха φ называют выраженное в процентах отношение парциального давления p водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре к давлению p_H насыщенного пара при той же температуре

$$\varphi = \frac{p}{p_H} 100\%$$

Воспользовавшись уравнением Менделеева - Клайперона, можно для относительной влажности получить еще одну формулу

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_H} 100\%,$$

где ρ - абсолютная влажность, а ρ_H - плотность насыщенного пара при данной температуре. Составлены таблицы, в которых приведена плотность насыщенных водяных паров ρ_H при разных температурах. Влажность воздуха не может быть больше 100%. Температуру, при которой водяной пар становится насыщенным, называют точкой росы. Поэтому если водяной пар охлаждать до температуры ниже точки росы, то выпадает роса.

Найдем зависимость давления насыщенного пара от температуры без использования скорости конденсации. Для этого рассмотрим уравнение Клайперона - Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)},$$

где P - давление насыщенного пара; T - его температура; q - теплота испарения; V_1, V_2 - удельные объемы пара и жидкости. В первом приближении можно считать, что величина q не зависит от температуры, а удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом пара можно пренебречь. Кроме того, можно считать, что к пару применимо уравнение состояния Клайперона $PV = \frac{1}{\mu}RT$ (индекс 1 у V опущен). В принятом приближении уравнение Клайперона - Клаузиуса перейдет в

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{TV} = \frac{\mu q}{RT^2} P$$

или

$$\frac{dP}{P} = \frac{\mu q}{R} \frac{dT}{T^2}.$$

Интегрируя его, получим

$$\ln P = -\frac{\mu q}{RT} + C.$$

Постоянную интегрирования C можно найти, если известно давление насыщенного пара P_0 при какой-либо температуре T_0 . При этой температуре

$$\ln P_0 = -\frac{\mu q}{RT_0} + C,$$

откуда

$$C = \ln P_0 + \frac{\mu q}{RT_0}.$$

Исключая постоянную C , получим искомую зависимость

$$P = P_0 \exp\left(\frac{\mu q}{R}\right) \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right). \quad (8)$$

Необходимо отметить, что вблизи критической температуры оба допущения дают большую погрешность. Для воды при нормальном атмосферном давлении температура кипения $T=373$ К, теплота парообразования $q=539$ кал/(г.К). Подставляя в (10) $R=1,9858$ кал/(кмоль), $\mu=18$, получим

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{18 \cdot 539}{1,986 \cdot 373^2} = 0,0352 \text{ K}^{-1}.$$

Отсюда следует, что при нагревании на один градус давление насыщенного водяного пара возрастает на 27 мм рт.ст. Более точную формулу для давления насыщенного пара можно получить, если учесть зависимость удельной теплоты парообразования от температуры. Приведем ее без вывода

$$\ln P = -\frac{\mu q}{RT} + \ln T + \text{const.} \quad (9)$$

Логарифм T есть медленно меняющаяся функция температуры. Если ее заменить постоянной, то (9) перейдет в (8). Сравнение полученных формул давления насыщенного пара от температуры показали приемлемое совпадение при температурах меньше критической.

Резюмируя вышеизложенное, приведем следующие факты, которые необходимо помнить для успешного решения задач.

1. Если известна температура, то с помощью таблиц можно найти давление и плотность насыщенного пара.

2. Если известна температура и плотность (давление) насыщенного пара, то с помощью уравнения Менделеева - Клайперона можно найти давление (плотность).

3. Газовые законы Бойля - Мариотта, Гей - Люссака, Шарля, а так же другие формулы справедливые для идеального газа, можно применять только к ненасыщенному пару, а насыщенный пар им не подчиняется.

4. При изотермическом уменьшении объема насыщенного пара его давление не возрастает, а остается постоянным. При этом часть пара переходит в жидкость. При изотермическом расширении насыщенный пар переходит в ненасыщенный.

5. При изохорном повышении температуры насыщенного пара его давление растет не пропорционально температуре, а быстрее. Начиная с некоторой температуры, насыщенный пар при дальнейшем нагревании переходит в ненасыщенный, который подчиняется закону Шарля.

6. Если воздух, в котором есть насыщенный пар нагреть, то пар перестает быть насыщенным, хотя плотность водяного пара в нем не изменится. При этом относительная влажность воздуха уменьшится.

7. В закрытом сосуде при нагревании абсолютная влажность не изменяется, так как масса пара в единице объема остается прежней, а относительная влажность уменьшается, так как плотность насыщенного пара с ростом температуры увеличивается.

8. При охлаждении водяного пара в закрытом сосуде абсолютная влажность не будет изменяться до тех пор, пока не будет достигнута точка росы. Относительная влажность воздуха будет расти, так как будет уменьшаться плотность насыщенного пара. Как только температура опустится до точки росы относительная влажность φ станет равна 100% и будет оставаться равной 100% при дальнейшем охлаждении уже насыщенного пара, который при таком охлаждении будет все время конденсироваться, пока весь не перейдет в жидкое состояние.

Заключение

В работе приведены основные факты и закономерности, необходимые для успешного решения задач по теме «Насыщенный пар и влажность воздуха». Рассмотрены изотермы реального газа, приведены зависимости давления насыщенного пара от объема и температуры. Представлен перечень основных положений (фактов) теории, знание которых позволяет успешно решить широкий круг задач по данной теме.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Издание 5-е, исправленное. — М.: Физматлит, 2006. — Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. — 544 с.
 2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика. Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл. Профильный уровень: учеб. для общеобразовательных учреждений - М. : Дрофа, 2010 – 349 с.
 3. Яворский Б.М., Пинский А.А. Основы физики: Учебник в 2 т. Т1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика – М.: Физматлит, 2003 – 576 с.
-

Alexander F. Gribov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

alexandr-gribov@list.ru

Igor K. Krasnov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

igorkrsnv@yandex.ru

Methodical recommendations for solving problems in physics (saturated steam and humidity) for applicants and junior students

Abstract. The article discusses an algorithmic approach to solving problems on the topics of saturated steam and air humidity. The article is addressed to students of the 10th, 11th grades, junior students and teachers for the organization of the educational process.

Keywords: saturated steam, ideal gas, air humidity, relative humidity, gas laws.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ МЕТОДИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА, СВЯЗАННЫХ С ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Аннотация

Исчерпывающее доказательство формулы Стокса (как и родственных ей формул Грина и Остроградского) вряд ли возможно в рамках втузовского курса высшей математики. Обычно доказательство проводится при некоторых дополнительных предположениях, а затем оно обобщается на основе наглядных соображений. При этом по ходу доказательства часто дополнительно предполагают, что фигурирующая в формуле Стокса поверхность является дважды непрерывно дифференцируемой. В настоящей статье предлагается вариант доказательства формулы Стокса, при котором не потребуются дополнительные предположения о поверхности, и вместе с тем доказательство носит достаточно общий характер (охватывает все случаи, которые могут встретиться в инженерной практике).

Ключевые слова

Поверхностный интеграл, кусочно-гладкая поверхность, формула Стокса

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.obuhov@outlook.com

Введение

Из трех родственных формул (Грина, Остроградского и Стокса), последняя формула обычно вызывает наибольшие трудности. Сначала мы рассмотрим некоторые предварительные сведения, затем приведем доказательство формулы Стокса, наиболее часто встречающиеся в учебниках, см. [1],[2].

Далее будет рассмотрен другой вариант доказательства и указаны достоинства и недостатки каждого из этих доказательств.

Методология и результаты исследования Стандартное доказательство формулы Стокса

Пусть имеется гладкая поверхность S , заданная параметрическим уравнением с помощью равенства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}, (u, v) \in \bar{D}, \quad (1)$$

где $\bar{D}$ – замкнутая область на плоскости $\mathbb{R}_{uv}^2$, полученная присоединением к области D всех точек ее границы ∂D . Мы будем считать, что область D ограничена, и ее

границей служит простой замкнутый положительно ориентированный кусочно-гладкий контур ∂D . Будем считать, что контур ∂D задан параметрическими уравнениями

$$u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b,$$

причем возрастанию параметра отвечает движение переменной точки кривой в положительном направлении. Относительно отображения (1), задающего поверхность S , мы предположим, что оно дважды

непрерывно дифференцируемо. Сторону поверхности S зададим с помощью единичного вектора нормали

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{||[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]||}.$$

Пусть, далее, поверхность S лежит в области G пространства $\mathbb{R}_{xyz}^3$. При сделанных предположениях справедлива

Теорема 1. Пусть функции P , Q и R непрерывно дифференцируемы в области G . Тогда

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Доказательство. Преобразуем интеграл $\int_{\partial S} Pdx$. Имеем

$$\int_{\partial S} Pdx = \int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) x'_t(u(t), v(t)) dt$$

$$= \int_{\partial S} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right).$$

Последний интеграл преобразуем по формуле Грина:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) \right) dudv \\ &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right. \\ &\quad \left. - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) dudv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем равенство

$$\int_{\partial S} Pdx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Аналогично можно доказать и равенства

$$\int_{\partial S} Qdy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz$$

и

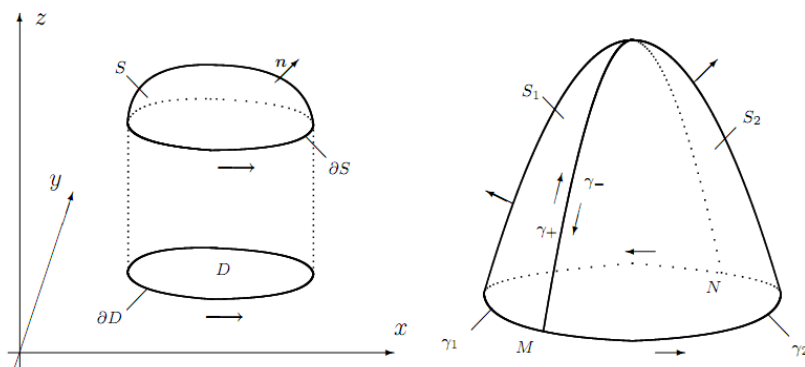
$$\int_{\partial S} Rdz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx.$$

Сложив полученные равенства, приходим к требуемой формуле.
Доказательство закончено.

К числу недостатков изложенного доказательства следует отнести наличие (не-нужного) предположения о том, что поверхность S является дважды непрерывно дифференцируемой, а также отсутствие наглядности в вопросах ориентации поверхности S и ее края ∂S .

Указанные ориентации должны быть согласованы (например, по <правилу буравчика>), но выяснить, имеет ли место такое согласование, является в данном случае весьма непростой задачей.

Вариант доказательства формулы Стокса



Теорема 2 (формула Стокса). Пусть в области $G \subset \mathbb{R}_{xyz}^3$ определены и непрерывны функции $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$, и пусть в этой области содержится кусочно-гладкая поверхность S , краем которой является кусочно-гладкая кривая ∂S . Тогда, если ориентации поверхности и её края согласованы, то

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial S} Pdx, \quad (3)$$

которое получается из (2) при $Q = 0$ и $R = 0$. Докажем это равенство для случая, когда поверхность S задана явно уравнением

$$z = z(x, y), (x, y) \in \overline{D}, \overline{D} = D \cup \partial D,$$

где D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей на плоскости Oxy . На чертеже вектор нормали к поверхности S образует острый угол с положительным направлением оси Oz поэтому единичный вектор нормали есть

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\},$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Интеграл из левой части равенства (3) обозначим через I_1

Направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$, используемые для преобразования поверхностного интеграла I_1 в интеграл по плоской области D суть

$$\cos \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Имеем

$$I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z(x, y)} \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{z=z(x, y)} \times \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy =$$

$$= \iint_D - \left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z(x, y)} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Грина, получаем такое равенство

$$I_1 = \int_{\partial D} P(x, y, z(x, y)) dx. \quad (4)$$

Интеграл из правой части последнего равенства обозначим I_2 . Пусть ∂D задается параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b.$$

Если предположить, что при этом возрастанию параметра соответствует указанное на чертеже направление обхода кривой ∂D (это направление обхода индуцируется ориентацией края ∂S поверхности S), то

$$I_2 = \int_a^b P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) x'(t) dt.$$

С другой стороны, край ∂S поверхности S имеет, очевидно, такое параметрическое представление:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(x(t), y(t)), a \leq t \leq b.$$

причем ориентация этого края отвечает возрастанию параметра t . Поэтому

$$\int_{\partial S} P dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) x'(t) dt,$$

и мы видим, что интеграл из левой части последнего равенства равен интегралу I_1 . Отсюда и из (4) следует, что обе части равенства (3) равны одному и тому же числу I_2 т.е. равенство (3) в рассматриваемом случае справедливо.

Всякая поверхность, которая может встретиться при решении практических задач, допускает разбиение на несколько кусков, каждый из которых либо имеет рассмотренный выше вид, либо является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси аппликат. Равенство (3) можно доказать и для цилиндрической поверхности S указанного вида. Подробное доказательство мы не приводим, рассмотрим лишь схему соответствующего рассуждения. Пусть кривая γ является проекцией цилиндрической поверхности S' на плоскость Ox . Эту кривую следует разбить на дуги, которые можно задать уравнениями вида $y = y(x)$, и на отрезки, перпендикулярные оси Ox . Для отрезков справедливость формулы (3) очевидна, а для дуг, которые можно задать уравнениями вида $y = y(x)$, доказательство проводится по указанной выше схеме.

Теперь доказательство равенства (3) можно завершить, заметив, что если это равенство верно для каждого куска, на которые разбита поверхность, то оно верно и для всей первоначальной поверхности. Это замечание рассмотрим для случая, когда

поверхность S разбита на два куска S_1 и S_2 с помощью кривой, лежащей на поверхности S и соединяющей точки M и N края ∂S этой поверхности. Имеем (см. чертеж)

$$\iint_{S_1} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma^+}; \iint_{S_2} = \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma^-}.$$

Сложив эти два равенства, и заметив, что

$$\int_{\gamma^+} + \int_{\gamma^-} = 0$$

получим требуемое:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\partial S}.$$

Осталось рассмотреть еще равенства

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \int_{\partial S} Q dy$$

и

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx = \int_{\partial S} R dz.$$

Эти равенства доказываются так же, как и равенство (3). При этом при доказательстве первого из этих равенств поверхность S следует разбить на куски, каждый из которых либо задается явно уравнением вида $x = x(y, z)$, либо является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Ox . В случае последнего равенства соответствующие куски поверхности S должны задаваться явно уравнениями вида $y = y(z, x)$ или быть цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси Oy . Сложив два последних равенства с (3), получим доказательство формулы (2). На этом доказательство формулы Стокса заканчивается.

Заключение

Мы видим, что предложенный вариант доказательства формулы Стокса обладает определенными преимуществами: здесь не требуется, чтобы поверхность была дважды непрерывно дифференцируемой, и наглядно демонстрируется необходимость согласованности ориентации поверхности S и ориентации ее края ∂S . Предложенная методика позволяет, не расширяя программы втузовского курса высшей математики, без дополнительных предположений в ходе доказательств, получить приемлемое доказательство формулы Стокса. Заметим, что, рассмотренный в предыдущем разделе, метод доказательства формулы Стокса применяется в некоторых учебниках, но соответствующие доказательства содержат пробелы (см., например, [3], [4]).

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. М.: Высшая школа, 1981.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2. М.: Наука, 1974. [4] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 2. М.: Наука, 1985.

Pavel L. Ivankov,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

ivankovpl@mail.ru

Victor P. Obuhov,

Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

v.obuhov@outlook.com

On some questions of methodical character concerning the Stokes formula

Abstract. It is unlikely that the exhaustive the proof of Stokes theorem (and also of the kindred Green's and Gauss's theorem) can be carried out within the course of higher mathematics for technical colleges. Usually the proof is fulfilled with some additional propositions and then it is generalized by means of intuitive considerations. Besides it is often supposed that the functions expressing the parametric representation of the surface are twice differentiable. In the present paper we propose the variant of the proof of Stokes theorem which doesn't require the additional propositions concerning the surface and is sufficiently general (it embraces all cases that can be dealt with in the engineering practice).

Key words: surface integral, piecewise-smooth surface, the Stokes formula.

О МЕТОДОЛОГИИ ПРЕПОДАВАНИЯ ОСНОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ ДЛЯ РАБОТЫ С ЛИНЕЙНЫМИ МАТРИЧНЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ ПАКЕТА ROBUST CONTROL TOOLBOX СРЕДЫ MATLAB

Аннотация

Линейные матричные неравенства применяются в задачах теории управления, идентификации систем, обработки сигналов. Среда разработки Matlab содержит пакет Robust control toolbox, предназначенный, в том числе, для работы с линейными матричными неравенствами. Настоящая статья посвящена методическим вопросам изучения способов решения задач теории управления, сводящихся к решению линейных матричных неравенств, средствами Matlab.

Ключевые слова

теория управления, математическое моделирование, Matlab

АВТОРЫ

Кавинов Алексей Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Велищанский Михаил Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

velmiha@yandex.ru

Введение

Линейные матричные неравенства занимают важное место в современной теории управления [1,2]. Их применение позволяет свести многие задачи как линейной, так и нелинейной теории к численной процедуре оптимизации выпуклой функции

многих переменных. Особенно большое значение подход, основанный на использовании линейных матричных неравенств, получил в связи с развитием электронно-вычислительной техники. В настоящее время имеется ряд пакетов программ, предназначенных для решения задач, связанных с линейными матричными неравенствами [3]. Одним из наиболее распространённых является пакет Robust Control Toolbox системы Matlab [4]. В настоящей статье авторы приводят описание основных функций, применяемых для работы с линейными матричными неравенствами в Matlab, примеры их применения и возможные задания для самостоятельного выполнения студентами. Эта информация может быть использована при проведении занятий со студентами специальностей, связанных с теорией управления и устойчивости.

Методология и результаты исследования

Опишем основные функции пакета Robust control toolbox, предназначенные для работы с линейными матричными неравенствами. Первая из рассматриваемых функций, `setlmis`, предназначена для инициализации системы решения линейных матричных неравенств и загрузки ранее созданной системы из массива:

`setlmis([])` - сброс текущей системы ЛМН

`setlmis(lmi0)` - установка в качестве текущей системы ЛМН, заданной массивом `lmi0`

Функция `getlmis` предназначена для сохранения ранее созданной системы в массив:

`getlmis` - возвращает массив, задающий текущую систему ЛМН

Прежде чем задать уравнения системы линейных матричных неравенств, необходимо перечислить неизвестные, входящие в систему. Этой цели служит функция `lmivar`.

`X = lmivar(type, struct)` - возвращает дескриптор (некоторое значение, описывающее структуру неизвестной) новой неизвестной системы ЛМН. При этом:

`type` - тип переменной:

- 1 - симметричная блочно-диагональная матричная неизвестная;
- 2 - прямоугольная матрица общего вида;
- 3 - матрица специального вида.

`struct` - матрица структуры неизвестной (смысл параметра зависит от типа неизвестной)

- `type=1` : `struct` - матрица размера $R \times 2$, где R - количество блоков, i -я строка описывает i -й блок. Первый столбец в строке - размер блока, второй - тип блока:

1 - полный симметричный блок;

0 - скалярный блок (вида αI);

-1 - нулевой блок.

- 2 - прямоугольная матрица общего вида. В этом случае `struct` - матрица размера 1×2 , содержащая размер неизвестной.

- 3 - матрица специального вида. В этом случае `struct` имеет тот же размер, что и переменная, элементы `struct` - целые числа. Число 0 означает 0 в неизвестной, 1 - переменную x_1 , 2 - переменную x_2 , -1 означает $-x_1$ и т.д.

Неравенства системы различаются по номерам. Можно вручную приписать каждому неравенству номер, а можно использовать функцию `newlmi`, генерирующую номер нового неравенства:

`newlmi` - получить номер нового неравенства в текущей системе ЛМН

После того, как пользователь определился со структурой неизвестных и с номером неравенства, он может приступить к заданию отдельных слагаемых в левой и правой частях неравенств. Знак неравенства в пакете **Robust control toolbox** всегда «<», т.е. рассматриваются неравенства вида

$$L(x) < R(x).$$

`lmiterm(termID,A,B,flag)` - добавить новое слагаемое к неравенству в текущей системе ЛМН

- `termID` - массив из четырёх элементов, описывающий местонахождение нового слагаемого: `termID= [p i j var]`, где
 - `p` - номер ЛМН, к которому мы добавляем слагаемое, взятый с плюсом, если оно добавляется в левую часть, и с минусом, если в правую;
 - `i, j` - номер блока, в который добавляется слагаемое/множитель
 - `var` - 0 для постоянных слагаемых, номер неизвестной X для слагаемых вида AXB , номер переменной X с отрицательным знаком для слагаемых вида $AX^T B$.
- `A` и `B` - множители;
- `flag` - необязательный параметр. Если он присутствует, то должен быть строкой 's'. В случае его наличия добавляется слагаемое вида $AXB + B^T X^T A^T$.

После задания системы линейных матричных неравенств можно приступить к решению связанных с ними задач. Одна из таких задач - задача выполнимости (разрешимости) системы, заключающаяся в проверке существования решения заданной системы. Эта задача сводится к задаче условной минимизации параметра t при условии $L(x) - R(x) \leq tI$, где I - единичная матрица.

Для решения задачи выполнимости (разрешимости) системы линейных матричных неравенств служит функция `feasp`:

`[tmin,xfeas] = feasp(lmisys,options,target)` - решить задачу выполнимости для системы ЛМН. При этом

- `lmisys` - массив, описывающий систему ЛМН, полученный ранее при помощи функции `getlmis`;
- `options` - массив из пяти элементов
 1. `options(1)` не используется;
 2. `options(2)` - максимальное количество итераций поиска;
 3. `options(3)` - радиус выполнимости. Решение системы ЛМН в скалярном виде должно удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < R^2,$$

где R - радиус сходимости;

4. `options(4)` - если целевая функция не уменьшается в течение этого количества итераций, то поиск решения прекращается;
5. `options(5)` - если этот элемент равен 1, то отключается трассировка процесса поиска решения.

- **target** - наибольшее значение параметра t . После достижения параметром этого значения процесс поиска заканчивается. По умолчанию используется значение 0.
- **tmin** - полученное значение параметра t . Если меньше нуля, то решение задачи выполнимости найдено.
- **xfeas** - решение в виде массива скалярных неизвестных.

После того, как решение задачи выполнимости найдено, можно выделить из него значения отдельных матричных неизвестных. Для этого необходимо вызвать функцию **dec2mat**, указав в качестве параметров систему, полученный ранее массив решения и дескриптор неизвестной, которую мы хотим получить:

valX = dec2mat(lmisys, decvars, X) - функция служит для получения матрицы с дескриптором X из решения системы **lmisys**, заданного массивом **decvars**.

Другой задачей, часто встречающейся при работе с линейными матричными неравенствами, является обобщённая задача на собственные значения, то есть задача поиска наименьшего λ , для которого выполнима система

$$C(x) < D(x) \quad (1)$$

$$0 < B(x) \quad (2)$$

$$A(x) < \lambda B(x) \quad (3)$$

Если неравенство (2) не следует из других неравенств системы, его надо добавить в явном виде. Неравенства, входящие в (3), называются дробно-линейными.

[lopt, xopt] = gevp(lmisys, nlfc, options, linit, xinit, target) - функция для решения обобщённой задачи на собственные значения.

При этом

- **lmisys** - массив, описывающий систему ЛМН, полученный ранее при помощи функции **getlmis**;
- **nlfc** - количество линейно-дробных неравенств в системе (линейно-дробные неравенства задаются последними);
- **options** - массив из пяти элементов
 1. **options(1)** задаёт относительную точность поиска оптимального значения λ (по умолчанию - 0.01);
 2. **options(2)** - максимальное количество итераций (по умолчанию - 100);
 3. **options(3)** - радиус выполнимости (см. описание **feasp**);
 4. **options(4)** - если λ не уменьшается или уменьшается меньше, чем на значение **options(1)**, в течение этого количества итераций, поиск решения прекращается (по умолчанию - 5);
 5. **options(5)** - если 1, то отключается трассировка процесса поиска решения.
- **lopt** - полученное значение параметра λ .
- **xfeas** - решение в виде массива скалярных неизвестных.

Решение обобщённой задачи на собственные значения в виде значений матричных неизвестных может быть получено с помощью функции **dec2mat**.

Третьей известной задачей, связанной с линейными матричными неравенствами, является задача минимизации линейной функции от компонентов матричных неизвестных при условии выполнения линейного матричного неравенства:

$$\min_{L(x) < R(x)} c^T x.$$

Для решения этой задачи применяется следующая функция:

`[copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options,xinit,target)` - функция для решения задачи минимизации линейной функции.

- `lmisys` - массив, описывающий систему ЛМН, полученный ранее при помощи функции `getlmis`;

- `c` - столбец `c`;

- `options` - массив из пяти элементов

1. `options(1)` задаёт относительную точность поиска оптимального значения λ (по умолчанию - 0.01);

2. `options(2)` - максимальное количество итераций (по умолчанию - 100);

3. `options(3)` - радиус выполнимости (см. описание `feaspr`);

4. `options(4)` - если целевая функция λ не уменьшается или уменьшается меньше, чем на значение `options(1)`, в течение этого количества итераций, поиск решения прекращается (по умолчанию - 5);

5. `options(5)` - если 1, то отключается трассировка процесса поиска решения.

- `xinit` - начальная точка. Вектор должен иметь тот же размер, что и вектор `c`. Если заданная система не выполняется для этого вектора, он игнорируется;

- `target` - цель оптимизации. Задача оптимизации считается выполненной, если $c^T x < \text{target}$.

- `copt` - полученное значение $c^T x$;

- `xopt` - решение в виде массива скалярных неизвестных.

Следует заметить, что x представляет из себя вектор скалярных неизвестных системы $L(x) < R(x)$. Чтобы правильно составить вектор `c`, необходимо выяснить, каким компонентам матриц системы соответствуют компоненты вектора x . Сделать это можно с помощью следующих функций.

`[V1,...,Vk] = defcx(lmisys,n,X1,...,Xk)`

Функция `defcx` позволяет выяснить, каким образом входит в систему неравенств, заданную массивом `lmisys`, скалярная неизвестная номер `n`. Аргументы `X1 ... Xk` здесь - дескрипторы неизвестных, входящих в систему неравенств. Возвращает функция набор матриц, состоящих из нулей и единиц. Каждая матрица V_i содержит единицы в тех позициях, в которых соответствующая матричная неизвестная содержит скалярную неизвестную номер `n`, и нули в остальных позициях.

`ndec = decnbr(lmisys)`

Функция `decnbr` возвращает количество скалярных неизвестных в системе, заданной массивом `lmisys`.

Далее приведём некоторые примеры применения описанных выше функций для решения задач теории управления.

Пример 1. Задача стабилизации линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in R^n, u \in R^m$$

управлением $u = -Kx$, где A, B, K - матрицы соответствующих размеров, с требуемой степенью затухания замкнутой системы σ сводится к решению задачи выполнимости для системы линейных матричных неравенств [5]

$$\begin{cases} Q > 0 \\ QA^T + AQ - Y^T B^T - BY + 2\sigma Q < 0. \end{cases}$$

Система стабилизируема с заданной степенью затухания тогда и только тогда, когда существует решение (Q, Y) этой системы. При этом матрица $P = Q^{-1}$ будет мат-

рицей функции Ляпунова для замкнутой системы, а матрица коэффициентов стабилизирующего управления равна $K = YP$. Поиск решения может быть осуществлён с помощью следующей программы:

```
% Стабилизация системы  $dx/dt = Ax + Bu$ 
% управлением  $u = -Kx$  и поиск функции Ляпунова
n= 4; % размерность вектора состояния
m= 2; % размерность вектора управления
% генерируем случайные матрицы A и B
a= randn(n,n); b= randn(n,m);
% Устанавливаем в качестве текущей пустую систему
setlmiis([]);
% Q - симметричная блочно-диагональная матричная неизвестная
% из одного симметричного блока
Q= lmivar(1,[n 1]);
% Y- матрица общего вида размера  $m \times n$ 
Y= lmivar(2,[m n]);
% Генерируем новый номер неравенства
% Это будет неравенство  $0 < Q$ 
lmi1 = newlmi;
% Добавляем слагаемое Q в правую часть
lmiterm([-lmi1 1 1 Q],1,1);
% Генерируем новый номер неравенства
% Это будет неравенство  $aQ + Qa' - bY - Y'b' < 0$ 
lmi2 = newlmi;
% Добавляем слагаемые  $aQ + Qa'$ 
lmiterm([lmi2 1 1 Q],a,1,'s');
% Добавляем слагаемые  $-bY - Y'b'$ 
lmiterm([lmi2 1 1 Y],-b,1,'s');
% Добавляем слагаемое  $2sQ$ 
lmiterm([lmi2 1 1 Q],2*s,1);
% Записываем созданную систему в массив
lmisys= getlmiis;
% Решаем задачу выполнимости
[tmin,xfeas]= feasp(lmisys);
% Получаем решение в матричном виде
q= dec2mat(lmisys,xfeas,Q);
y= dec2mat(lmisys,xfeas,Y);
p=inv(q);
k= y*p;
% Проверим полученное решение, вычислив
% собственные числа матрицы
% замкнутой системы
disp('Проверка:');
disp(['eig(a-b*k)= [' num2str(eig(a-b*k)) ' ]]);
```

Пример 2. Задача H_∞ - оптимизации системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dw \\ y = Cx, \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, w \in R^k, y \in R^l,$$

где x - вектор состояния, u - управляющее воздействие, w - входное возмущение, y - выход, замкнутой линейным управлением $u = -Kx$, сводится к обобщённой задаче на собственные значения: требуется найти наименьшее γ такое, что [6]

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^T B^T - BY & QC^T \\ CQ & -I \end{pmatrix} \leq \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q > 0.$$

Строго говоря, эта система не соответствует формулировке обобщённой задачи на собственные значения, т.к. матрица

$$\begin{pmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является положительно определённой. Кроме того, знак первого неравенства нестрогий. Решить эту проблему можно, регуляризовав задачу добавлением небольших положительных слагаемых к диагональным блокам указанной матрицы:

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^T B^T - BY & QC^T \\ CQ & -I \end{pmatrix} \leq \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} DD^T + \varepsilon I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{pmatrix}, \quad Q > 0.$$

Здесь ε - некоторое положительное число, достаточно малое для того, чтобы не вносить существенных ошибок в решение системы.

Программа для решения этой системы с комментариями приведена ниже.

```
% Hinf-оптимизация с помощью gevp
n= 4; % размерность вектора состояния
m= 1; % размерность вектора управления
k= 1; % размерность вектора возмущений
l= 1; % размерность выхода
% Устанавливаем в качестве текущей пустую систему
setlmiis([]);
% генерируем случайные матрицы
a= randn(n,n); b= randn(n,m);
d= randn(n,k); c= randn(1,n);
% Q - симметричная блочно-диагональная матричная неизвестная
% из одного симметричного блока
Q= lmiavar(1,[n 1]);
% Y- матрица общего вида размера mхn
Y= lmiavar(2,[m n]);
% Генерируем новый номер неравенства
% Это будет неравенство 0<Q
lmi1 = newlmi;
% Добавляем слагаемое Q в правую часть
lmiterm([-lmi1 1 1 Q],1,1);
% Генерируем новый номер неравенства
lmi2 = newlmi;
```



```

% Добавляем слагаемые aQ+Qa' в блок (1,1)
lmiterm([lmi2 1 1 Q],a,1,'s');
% Добавляем слагаемые -bY-Y'b' в блок (1,1)
lmiterm([lmi2 1 1 Y],b,1,'s');
% Добавляем слагаемое QC' в блок (1,2)
% Слагаемое CQ в блок (2,1) добавлять явно не нужно
% оно добавляется автоматически
lmiterm([lmi2 1 2 Q],1,c');
% Добавляем слагаемое -I в блок (2,2)
lmiterm([lmi2 2 2 0],-1); %
% Добавляем в правую часть неравенства
% в блок (1,1) слагаемое DD'+eps*I
lmiterm([-lmi2 1 1 0],d*d'+0.001*eye(n));
% Добавляем в правую часть неравенства
% в блок (2,2) слагаемое eps*I
lmiterm([-lmi2 2 2 0],0.001*eye(l));
% Записываем созданную систему в массив
lmisys= getlmis;
% Решаем обобщённую задачу на собственные значения
[gamma2,хопт]= gevp(lmisys,1,[0.001 100 1e9 20 0])
% Найденная Hinf - норма
gamma=1/sqrt(-gamma2)
% Получаем K и Q в матричном виде
q= dec2mat(lmisys,хопт,Q);
y= dec2mat(lmisys,хопт,Y);
p=inv(q);
k= y*p

```

Пример 3. Задача о линейно-квадратичном регуляторе может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим систему с управлением

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in R^n, u \in R^m.$$

Пусть $x(t)$ - решение системы, замкнутой стабилизирующим управлением $u = -Kx$, при стабилизации из некоторого начального состояния x_0 . Потребуем, что была справедлива оценка функционала от решения

$$\int_0^{+\infty} x(t)^T L x(t) + u(t)^T S u(t) dt < \delta \|x_0\|_2^2, L = H^T H, L \geq 0, S^T = S, S > 0.$$

где δ - некоторая константа. Это приведёт нас к системе линейных матричных неравенств [7]

$$Q > 0, \begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^T B^T - BY & QH^T & Y^T \\ HQ & -I & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} < 0, \begin{pmatrix} \delta I & I \\ I & Q \end{pmatrix} > 0.$$

Задача поиска управления, обеспечивающего минимизацию константы δ , приводит к задаче минимизации линейной функции δ при условиях, указанных выше. Программа, решающая эту задачу, приведена далее.

```

% Задача о линейно-квадратичном регуляторе
% Поиск оптимального стабилизирующего управления
n= 4; % размерность вектора состояния
m= 2; % размерность вектора управления
% генерируем случайные матрицы A и B
a= randn(n,n); b= randn(n,m);
% Устанавливаем в качестве текущей пустую систему
setlmiis([]);
s= eye(m); l= eye(n); h= sqrtm(l);
% Q - симметричная блочно-диагональная матричная неизвестная
% из одного симметричного блока
Q= lmivar(1,[n 1]);
% Y - матрица общего вида размера mхn
Y= lmivar(2,[m n]);
% D - скалярный блок вида delta*I
D= lmivar(1,[n 0]);
% Генерируем новый номер неравенства
% Это будет неравенство 0<Q
lmi1 = newlmi;
% Добавляем слагаемое Q в правую часть
lmiterm([-lmi1 1 1 Q],1,1);
% Генерируем новый номер неравенства
lmi2 = newlmi;
% Добавляем слагаемые aQ+Qa' в блок (1,1)
lmiterm([lmi2 1 1 Q],a,1,'s'); % aQ+Qa'
% Добавляем слагаемые -bY-Y'b' в блок (1,1)
lmiterm([lmi2 1 1 Y],-b,1,'s'); % -bY-Y'b'
% Добавляем слагаемое HQ в блок (2,1)
lmiterm([lmi2 2 1 Q],h,1);
% Добавляем слагаемое -I в блок (2,2)
lmiterm([lmi2 2 2 0],-eye(n));
% Добавляем слагаемое Y в блок (3,1)
lmiterm([lmi2 3 1 Y],1,1);
% Добавляем нулевое слагаемое HQ в блок (3,2)
lmiterm([lmi2 3 2 0],[0 0]);
% Добавляем слагаемое S^{-1} в блок (3,3)
lmiterm([lmi2 3 3 0],-inv(s));
% Генерируем новый номер неравенства
lmi3 = newlmi;
% Добавляем нулевое слагаемое delta*I в блок (1,1)
lmiterm([-lmi3 1 1 D],1,1);
% Добавляем нулевое слагаемое I в блок (2,1)
lmiterm([-lmi3 2 1 0],eye(n));
% Добавляем нулевое слагаемое Q в блок (2,2)
lmiterm([-lmi3 2 2 Q],1,1);
% Записываем созданную систему в массив
lmisys= getlmiis;
% Матричный множитель с при векторе скалярных неизвестных
% Т.к. неизвестная D была создана последней,
% индекс соответствующей скалярной неизвестной
% будет последним из возможных

```

```

ndec= decnbr(lmisys);
cm= zeros(ndec,1);
cm(end)= 1;
% Решаем задачу оптимизации линейной функции
[copt,xopt]= mincx(lmisys,cm)
% Получаем решение в матричном виде
q= dec2mat(lmisys,xopt,Q);
y= dec2mat(lmisys,xopt,Y);
delta= dec2mat(lmisys,xopt,D)
p=inv(q);
k= y*p

```

После ознакомления студентов с перечисленными выше описаниями и примерами можно предложить им для самостоятельного решения одну или несколько из следующих задач.

Задание 1. Для глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = A(x, t)x, x \in R^n,$$

в которой матрица $A(x, t)$ принадлежит выпуклой оболочке системы устойчивых матриц $A_i, i = 1, \dots, k$, достаточно, чтобы существовало решение системы линейных матричных неравенств [8]

$$\begin{cases} P > 0 \\ A_1^T P + P A_1 < 0 \\ \vdots \\ A_k^T P + P A_k < 0. \end{cases}$$

Используя этот факт и пакет Robust Control Toolbox, проверьте устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi(x, t)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2, \end{cases}$$

где $\varphi(x, t)$ - произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\forall t \geq 0 \quad |\varphi(x, t)| \leq 1.$$

Задание 2. Рассмотрим задачу исследования устойчивости нулевого положения равновесия системы с ограниченным по норме возмущением [9]

$$\dot{x} = (A + B\Delta(t)C)x, x \in R^n,$$

где A, B, C - заданные матрицы соответствующего размера, $\Delta(t)$ - матричная функция, удовлетворяющая условию

$$\forall t \geq 0 \quad \Delta(t)^T \Delta(t) \leq \alpha^2 I, \alpha > 0.$$

Для устойчивости нулевого решения достаточно, чтобы существовали симметричная положительно определённая матрица Q и положительное число μ такие, что

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ & \alpha QC^T & \mu B \\ \alpha CQ & -\mu I & 0 \\ \mu B^T & 0 & -\mu I \end{pmatrix} < 0.$$

Используя этот факт и пакет Robust Control Toolbox, проверьте устойчивость нулевого решения уже известной нам системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi(x, t)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2, \end{cases} \forall t \geq 0 \quad |\varphi(x, t)| \leq 1.$$

Задание 3. Задача поиска H_∞ - нормы системы с выходом

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Dw \\ y = Cx, \end{cases} \quad x \in R^n, w \in R^k, y \in R^l,$$

где x - вектор состояния, u - управляющее воздействие, w - входное возмущение, y - выход, может быть сведена [10] к задаче поиска наименьшего положительного числа γ такого, что

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PD \\ D^T P & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0, \quad Q > 0.$$

Используя этот факт и пакет Robust Control Toolbox, найдите H_∞ - норму системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + w \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 \\ y = x_2. \end{cases}$$

Заключение

Практические занятия по теории управления как учебной дисциплине могут включать в себя не только решение задач у доски, но и разработку программного обеспечения в одном из пакетов программ, предоставляющих возможность работы с линейными матричными неравенствами с последующим математическим моделированием процессов управления. В работе приведён ряд сведений, которые могут быть полезны при проведении таких занятий. Разобраны примеры решения задач. Предложены возможные задания для самостоятельного решения в компьютерном классе.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Boyd S. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 203 p.
3. Чурилов А.Н. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам / А.Н. Чурилов, А.В. Гессен. - СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2004. - 148 с.
4. Robust Control Toolbox (Документация Mathworks). (2021 г.) - URL: <https://www.mathworks.com/products/robust.html>
5. Поляк Б.Т. Указ. соч.
6. Поляк Б.Т. Указ. соч.
7. Поляк Б.Т. Указ. соч.
8. Boyd S. Указ. соч.
9. Поляк Б.Т. Указ. соч.
10. Поляк Б.Т. Указ. соч.

Alexey V. Kavinov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

On the methodology of teaching the basics of using tools for working with linear matrix inequalities of the Robust Control Toolbox package of the MATLAB environment

Abstract. Linear matrix inequalities are used in solving problems of control theory, system identification, and signal processing. The Matlab development environment contains the Robust control toolbox package, intended, among other things, for working with linear matrix inequalities. This article is devoted to the methodological issues of studying ways to solve problems of control theory, which are reduced to solving linear matrix inequalities using Matlab.

Key words: control theory, mathematical modeling, Matlab.

ВИРТУАЛЬНАЯ РЕАЛЬНОСТЬ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ СОВРЕМЕННОГО ВУЗА

Аннотация

Актуальность темы исследования обусловлена проблематикой информатизации сферы образования и недостатком учебно-методических материалов, рассматривающих применение виртуальной реальности в учебном процессе. Виртуальная реальность является одним из высокотехнологичных направлений цифровой экономики и становится востребованной в современном обществе. Вместе с тем наблюдается нехватка квалифицированных кадров, имеющих компетенции в использовании виртуальной реальности в сфере образования. Показано, что с помощью виртуальной реальности некоторые из проблем информатизации образования можно решить.

Ключевые слова

информатизация образования, образовательные технологии,
информационно-коммуникативные технологии, информационные модели,
элективные курсы, метод проектов, виртуальная реальность,
дистанционное образование, межпредметные связи

АВТОРЫ

Подзорова Марина Ивановна,

кандидат педагогических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н.Э. Баумана», г. Москва

marinatichomirova@hotmail.com

Птицына Инга Вячеславовна,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

inpt@mail.ru

Бахтиярова Ольга Николаевна,

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

olga-bakh06@mail.ru

Введение

В настоящее время различные информационные и коммуникационные технологии радикально меняют способы взаимодействия с большим объемом данных. Они дают широкие возможности по созданию искусственных сред, в которые погружается человек, и которые влияют на его знания, умения и навыки. Данный факт нашел отражение в появлении новых технологий обучения.

Иммерсивные технологии в образовании позволяют создать прямую связь между восприятием обучающегося и контентом, создавая условия ощущения присутствия и участия в предлагаемых событиях. Сущность данных технологий раскрывается через понятия виртуальной, дополненной и смешанной реальности. Технология дополненной реальности расширяет физический мир; она добавляет слои цифровой информации к тому, что мы можем видеть невооруженным глазом. Увеличивает наше окружение, добавляя звук, видео и графику. С другой стороны, виртуальная реальность создает совершенно другую среду, искусственный мир. Она может полностью изменить сферу образования, так как при всех преимуществах, её возможно применять на всех ступенях образования: от дошкольного до высшего образования. Овладение новыми образовательными технологиями и преподавателями, и студентами, их разработка и совершенствование - один из ключей повышения качества образования, а также решения его проблем, порожденных информатизацией общества.

Методология и результаты исследования

В статье проводится обзор современных информационно-коммуникативных технологий в образовании, в том числе использование виртуальной, дополненной и смешанной реальности. Раскрываются проблемы информатизации обучения. Показано, что с помощью виртуальной, дополненной и смешанной реальности некоторые из указанных проблем можно решить.

Информатизация многих сфер жизни, и в том числе образования, является характерной чертой XXI века. Стремительное развитие технологий не могло не отразиться на образовательном процессе.

Задача информатизации образования - формировать у обучающихся умения находить, обрабатывать информацию, используя разный технический инструментарий, создавать новый информационный продукт и передавать его по назначению, а также, пользуясь широкими информационными возможностями, ставить новые задачи. В процессе обучения это нашло отражение в повсеместном применении информационных технологий как новых форм обучения, возможности непрерывного и индивидуального обучения, разнообразии дидактических материалов, децентрализации учебных заведений, а также информатизации управления учебными заведениями.

К новым направлениям развития информатизации в образовании относят искусственный интеллект, позволяющий выявить закономерности и тенденции обученности и поведения учащихся, обеспечить анализ и сообщение результатов обучения, чат-боты, технологию блокчейн, мобильные устройства, совместную виртуальную реальность, применение других технологически современных решений и их интеграция в инфраструктуру вуза, а также эффективное использование уже имеющихся ресурсов образовательного учреждения. Предполагается, что результатом информатизации образования является создание информационного общества, в котором главную роль будут играть интеллект и знания.

Средством овладения уже имеющимися и новыми направлениями информатизации образования, извлечения максимальных преимуществ их использования являются различные информационно-коммуникативные технологии (ИКТ), постоянно создаваемые и совершенствуемые. Применение ИКТ имеет свои особенности и заключается

прежде всего в работе обучающихся с электронными материалами в процессе передачи знаний, умений и навыков. Виртуальная реальность — это одно из современных воплощений ИКТ.

Поскольку процесс информатизации влияет на культуру учебного заведения и роль педагога, то использование ИКТ должно обеспечивать комфортную, как обучающую, так и воспитательную, цифровую среду и для преподавателей, и для обучающихся [1].

Со стороны образовательного учреждения необходимо создать электронную образовательную среду, овладеть необходимыми ИКТ, возможно, совершенствуя их, разработать, при необходимости, новые ИКТ, а также иметь и готовить высококвалифицированные кадры, способные эффективно проводить такую работу. Всегда будет существовать проблема стремительного роста технологий, информационных потребностей учащихся и недостатком возможностей оснащённости вузов как современной техникой, так и компетентными в ней преподавателями [2]. Частичное решение проблемы возможно при проведении дистанционных образовательных курсов, вебинаров и виртуальных мастер классов. В деятельности педагога усиливается консультационная и коррекционная направленность, изменяется поход к обучению (при учете личностных способностей и качеств обучающихся, которые не должны нивелироваться).

Дидактические особенности использования ИКТ имеют ряд преимуществ:

- 1) самостоятельное планирование времени обучения;
- 2) возможность применения современных технологий обучения;
- 3) предоставление информации блоками, исходя из индивидуальных особенностей студентов;
- 4) повышение финансовой, пространственной, языковой и временной доступности образования;
- 5) автоматизация процедуры контроля знаний, умений и навыков с повышением её объективности и оперативности;
- 6) демонстрация достижений науки и техники в виртуальном формате.

Процесс информатизации образования, разработку и использование ИКТ следует направлять так, чтобы новые образовательные модели способствовали творческому развитию обучающихся и обеспечивали быстроту принятия решений. Выбор и поддержка таких направлений является одной из сложнейших задач информатизации современного общества. В частности, большой неструктурированный объем информации обуславливает необходимость формирования избирательности по отношению к поступающей информации и целесообразности её применения.

Ряд негативных последствий применения ИКТ в образовательном процессе можно разделить на три направления.

1. Медицинские.

Информационные технологии влияют на здоровье обучающегося как в учебное, так и внеучебное время. Исходя из этого, значимым становится воспитание информационной культуры студентов, в которую входит организация и контроль безопасного использования ИКТ.

2. Социальные.

Индивидуализация обучения сопровождается сокращением социальных связей за счет перехода на возможную невербальную коммуникацию при работе с электронным образовательным ресурсом.

3. Педагогические.

Средства ИКТ в образовании вне образовательного учреждения характеризуются сниженной мотивацией за счет условий естественного окружения, возможной потерей контроля со стороны педагогического учреждения психологического состояния обучающегося. Возрастает возможность применения устройств вне образовательных целей, потеря внимания, уровня когнитивного искажения, а также быстрое утомление от учебной деятельности [3].

Для преодоления возможных негативных последствий в процессе обучения с использованием информационно-коммуникационных технологий следует применять и разрабатывать комплексы организационных, психолого-педагогических и медико-социальных мероприятий для благополучия обучающихся. Поиск и разработка форм таких мероприятий, методик их проведения, в том числе с помощью информационных технологий, также является одной из глобальных педагогических проблем процесса информатизации образования.

Одним из важных компонентов становления мировоззрения студентов является моделирование и формализация. Она отражает основные тенденции развития информационных технологий в современном мире, систематизирует полученные знания об окружающем мире. Основополагающие знания о моделировании как методе познания являются основой исследовательской деятельности обучающихся.

Ведущее место в современном обучении отводится этапам компьютерного моделирования. При обучении начальным понятиям моделирования трудности понимания у студентов вызывают обобщенные определения, связанные с конкретными примерами. Так, в процессе обучения рассматривается исходный объект или процесс, который создается для определенной цели. Она формируется на понимании студентами конечного назначения модели. Содержательное описание объекта переносится и претерпевает определенные изменения для дальнейшей формализации, исходный объект заменяется информационной моделью. Разработка компьютерной модели предполагает составление алгоритма, написание кода, отладку, тестирование и проведение компьютерного эксперимента на ПК с целью получения результата. У большинства обучающихся возникают трудности сразу после этапа формализации. Затруднения основываются при переносе знаний, умений и навыков по другим дисциплинам, такие как физика и математика, в область информатики. Например, использование формул, описание зависимостей между физическими параметрами и интерпретация результатов работы. Таким образом, при обучении этапам компьютерного моделирования необходимо актуализировать знания смежных дисциплин.

Моделирование позволяет изучать объекты в разных сферах, поэтому большинство задач, предлагаемых авторами учебно-методических пособий, рассматриваются на основе областей физики, экономики, биологии, химии, медицины, авиации, космонавтики и др. Проведение компьютерного эксперимента в этих дисциплинах подготавливает и развивает интерес к техническим инновациям. Описанная исследовательская деятельность в совокупности с межпредметными связями способствует самоопределению обучающихся в профессиональной области, включая особо востребованные научно-технические.

При изучении моделирования рассматриваются различные виды информационных моделей:

- 1) словесные;
- 2) графические;
- 3) табличные;
- 4) алгоритмические;
- 5) имитационные и др.

Информационные модели отображают процессы возникновения, передачи, преобразования информации в различных системах. Обучающиеся должны описывать информационную модель как экземпляр некоторой системы и выделять отношения между объектами. В дальнейшем структура и связи в системе может рассматриваться как граф.

Одной из рекомендуемых форм организации обучения компьютерному моделированию является сочетание лекционных, лабораторных и зачетных заданий, организовать которые возможно с помощью информационных технологий. На основе теоретического материала создаются проблемные учебные ситуации, требующие от студентов активной самостоятельной деятельности. Выполнение практических заданий углубляет навык самостоятельного составления алгоритма и написания программ, а

также работы с различным программным обеспечением (ПО), таким как текстовые и графические редакторы.

Наиболее эффективной педагогической технологией для проведения лабораторных работ является метод проектов [4]. Подобная деятельность вырабатывает умения планировать свою работу для достижения поставленной цели, самообучение, развивает творческие способности, коммуникативные навыки, логическое мышление и повышает учебную мотивацию.

Работа над проектом отчасти повторяет этапы компьютерного моделирования:

- 1) постановка цели проекта;
- 2) поиск необходимой информации;
- 3) выбор метода исследования;
- 4) выполнение проекта;
- 5) анализ полученного результата;
- 6) составление и защита отчета.

Для работы с большим объемом информации необходимо системное мышление, которое развивается за счет систематизации информации. Её структурирование и представление в удобной форме является исследовательской задачей обучающихся. Развитием табличных форм представления информации являются базы данных и электронные таблицы. Проектирование базы данных заключается в построении и использовании информационной модели определенной структуры, как правило, реляционного типа, а также обслуживание средствами систем управления базами данных. Электронные таблицы рассматриваются с точки зрения реализации математической модели системы с целью проведения численного эксперимента.

Эффективность обучения информационным технологиям зависит от множества факторов, возникающих в процессе совместной работы студентов и преподавателей. На результат влияют гибкие навыки преподавателя. Среди них можно подчеркнуть критический анализ и сотрудничество, побуждение к дополнительным усилиям, индивидуальный подход и доверительные отношения, достижение которых может являться проблемой в информационном поле обучения. Необходимо иметь способность изменять методы преподавания, если цели обучающихся не были достигнуты. Ведущей задачей является создание безопасной образовательной среды, где ставятся сложные, но достижимые цели занятия.

Образовательные учреждения оснащены и активно применяют во всей инфраструктуре информационные технологии: мультимедийный кабинет, системы голосования, видеостудии, веб-конференции, лаборатории робототехники, 3D-принтеры, мобильные устройства и другие.

Рассмотрим следующие инновационные технологии, используемые для обучения информационным технологиям:

1. При кейс-технологии учебный материал подается в виде наборов (кейсов), процесс решения которых протекает в форме самостоятельной или командной работы. Процесс сопровождается консультацией преподавателя, который осуществляет методическую и организационную работу. Данный метод эффективен с точки зрения сбора информации, анализа проблемы с различных точек зрения посредством дискуссий, формирования гипотезы, выводов и заключения.

2. Игровые технологии рассматриваются как совокупность методов применения игры в учебном процессе. Это продуктивный способ активизации познавательной деятельности и мотивации студентов. Они позволяют проводить групповую и индивидуальную работу, совместное обсуждение, контроль знаний и создание игровых ситуаций. В качестве игровой задачи ставится дидактическая цель занятия, которую нужно будет достигнуть по завершению игры [5].

3. Образовательная технология STEAM-образование представляет собой синтез естественных наук, технологий, инженерного искусства, творчества и математики.

Это обусловлено острой нехваткой специалистов высокотехнологичных производств, где необходима всесторонняя подготовка. Технология подразумевает смешанную среду обучения и показывает применение научного метода к повседневной жизни с помощью широкого выбора практических занятий. Этому способствует применение специального лабораторного и учебного оборудования, такого как очки виртуальной реальности и 3D-принтеры. Технология объединяет междисциплинарный и проектный подход, способствует интенсивному развитию навыков критического мышления и решения проблем, активной коммуникации и командной работы, применению креативных подходов, а также высокую конкурентоспособность на рынке труда [6].

4. Сингапурская методика представляет собой набор разнообразных активных структур. Они основаны на позитивной взаимосвязи, индивидуальной ответственности, работе больше или наравне с преподавателем и одновременным взаимодействием.

5. Методология Agile представляет собой гибкое управление проектами. Она рассматривается на трех принципах: процесс обучения, люди и изменения. На этих идеях была создана методика совместного обучения EduScrum. Студенты решают сложные динамические проблемы, применяя свои уникальные способности для достижения целей. Ключевая идея заключается в сопричастности и формировании ответственности обучающихся к своему обучению. В основе лежит эмпирический процесс, анализ полученной информации, а также формулирование выводов и их применение. В процессе преподаватель предлагает список целей обучения и подходов к работе в виде бэклога продукта, запросы и раздаточный материал. Обучающиеся представляют собой команду исполнителей во главе с scrum-мастером, которые участвуют в мероприятии, называемым спринтом. Он может быть в виде сложного проекта, в котором необходимо применить компетенции каждого участника. Ведется работа со Scrum-доской, которая представляет собой хронологию и обзор всех задач, необходимые для выполнения. Завершается работа мероприятием, на котором происходит ретроспективный анализ деятельности и личная рефлексия.

6. Метод проектов является ведущим методом обучения информационным технологиям. Он предоставляет обучающимся возможность приобретения знаний, умений и навыков в процессе самостоятельной работы над определенным проектом. Роль преподавателя заключается в организации работы по поиску информационных ресурсов, поощрения и обратной связи.

Применение инновационных технологий способствует развитию уровня образовательного учреждения как такового, стремительно повышает вовлеченность студентов в образовательный процесс, способствует профориентации, а также мотивирует к участию в конкурсах и олимпиадах.

Развитие современных информационных технологий связано не только с появлением новых технических устройств, но и с работой с моделями объектов и явлений в пространстве, максимально приближенных к реальности. Речь идет о технологиях виртуальной, дополненной и смешанной реальности, и их использовании в процессе обучения. Технологии виртуальной, дополненной и смешанной реальности стремительно развиваются в образовании. Это, в частности, обусловлено тем, что поколение нынешних студентов обладает визуальным восприятием и высокой скоростью освоения новых технологий.

Технология VR (virtual reality - виртуальная реальность) сохраняет привычный способ познания окружающего мира посредством органов чувств, движение тела в пространстве. Представление образовательного контента в 360-градусном формате дает более реалистичное ощущение студентам. Такое взаимодействие с контентом, исследование предмета с глубокой детализацией без отвлечения на реальный мир улучшает концентрационную способность и учебный опыт, предоставляя им эвристическую и высокоинтерактивную моделируемую виртуальную среду. VR предоставляет полный сенсорный опыт, благодаря которому студенты могут практически касаться,

видеть и слышать содержимое одновременно с помощью датчиков. Так происходит усиление принципа наглядности в процессе усвоения знаний за счет эффекта присутствия в виртуальной среде.

Существует ошибочное суждение, что технология VR была разработана недавно. Первые шаги были сделаны еще в 1956 году при создании сенсорами кинорежиссёром Мортоном Хейлигом. Однако взрывной рост произошёл в 2012 году при создании Oculus Rift. Этот проект был создан на краудфандинговой платформе за счет денежных взносов заинтересованных пользователей сети Интернет. Он был разработан именно для видеоигр, что отчасти объясняет популярность проекта.

Виртуальная реальность (VR) представляет собой интерактивную среду с полным погружением пользователя в виртуальный мир посредством влияния, изменения и взаимодействия с информацией, получаемой через каналы восприятия, специальные гарнитуры. Примером гарнитуры, обеспечивающей данный тип, и является знаменитый Oculus Rift, давший активное и резкое развитие данной технологии.

Системы устройств виртуальной реальности разделяют на нескольких категорий:

1. Мобильные гарнитуры. Многокомпонентное устройство, состоящее из гарнитуры VR, в которую помещается смартфон. Он берет на себя роль монитора и компьютера, который выполняет частичную обработку информации.

2. Автономные шлемы. Включают в себя все технические компоненты в едином корпусе, не требуя подключения к компьютеру или мобильному телефону. В новых версиях добавлен трекинг для перемещения, а также контроллеры для имитации взаимодействия рук.

3. Стационарные очки. Отличается от предыдущих вариантов тем, что требуют подключение к компьютеру. Однако, за счет этого они обладают наибольшей производительностью и степенью иммерсивности.

Технология AR (augmented reality - дополненная реальность) накладывает контент цифрового формата на реальные пользовательские среды. Информация может быть в виде текста, изображения, видео, звука и трехмерной модели. Как правило, для нее используются лёгкие очки с проектором или камера мобильного телефона.

Технология MR (Mixed Reality - смешанная реальность) - это сосуществование VR и AR создающее гибридную реальность. Гарнитура сканирует окружающий мир, распознает объекты и строит их трехмерные модели, позволяя взаимодействовать с реальным миром через виртуальный.

Обучение с применением VR происходит через присутствие студента в виртуальной среде. Она позволяет реализовать в образовательном процессе различные виды деятельности. Прежде всего это касается организации совместной работы, с большей степенью реалистичности. С помощью виртуальной реальности также обеспечивается получение необходимых навыков работы с различными объектами с «правом на ошибку», что мотивирует студентов к исследованию виртуального и реального мира. Вид от первого лица и ощущение полного присутствия способствует сосредоточенности на материале без отвлечения на внешние раздражители, что прямым образом влияет на успешность обучения с применением данной технологии. Технология виртуальной реальности позволяет изучить наглядно, детально и интерактивно те процессы, с которыми студент не мог взаимодействовать в обычной жизни: макромир и микромир, навыки оказания медицинской помощи, виртуальная лаборатория, исторические события, астрономия, внутренние органы человека, производственные процессы, ликвидация аварий.

Виртуальная реальность нашла применение в стремительно развивающемся дистанционном обучении. Каждый обучающийся будет иметь элемент самопрезентации в виде аватара и присутствовать в виртуальной аудитории.

Применение виртуальной реальности может быть направлено на создание собственного интерактивного образовательного контента как преподавателями, так и студентами. Например, шлем виртуальной реальности находит свое применение в

изучении естественно-научных и гуманитарных дисциплин. В частности, он позволяет организовать деятельность студентов в виртуальной лаборатории, реализовать метод проектов, в том числе для студентов с ограниченными возможностями здоровья, а также геймификацию процесса обучения.

В отношении применения виртуальной реальности к процессу обучения были проведены различные исследования. Обычно выделяют следующие их преимущества:

1. Мотивация.

Как правило, отмечается высокий уровень активности, заинтересованности студентов в применении виртуальной реальности. Визуализации также подвергаются модели, которые не были ранее доступны к подробному рассмотрению по ряду причин. Детальное рассмотрение объекта крупным планом, в различных перспективах значительно увеличивает наглядность, качество понимания и запоминания материала [7].

2. Безопасность.

Технология виртуальной реальности и соответствующее ПО нашло активное применение при проведении лабораторных работ по физике, химии и другим предметам. Так, виртуальной среде может происходить интерактивное взаимодействие с химическими реактивами и оборудованием без угрозы здоровью учащихся.

3. Качество знаний.

Эффективность обучения и соответствующая интерактивность обеспечивают высокий уровень подготовки обучающихся к работе в реальной ситуации, различными информационными и коммуникационными технологиями, развивает навыки прогнозирования и закрепляет алгоритм выполнения какой-либо процедуры.

4. Погружение.

Применение такой гарнитуры как VR-шлем полностью фокусирует внимание пользователя в виртуальной реальности. Соответственно, все внимание направлено на визуализируемый объект, что также влияет на качество усвоения учащимся учебного материала.

Данная технология на сегодняшний день считается активно развивающейся и инновационной. Её применение в образовании имеет определенные трудности:

1) оборудование аудитории,

2) образовательные продукты.

Существует широкий выбор ценообразования аппаратных устройств и программного обеспечения, включая платные, условно-бесплатные и бесплатные варианты. На современных занятиях в вузе для более эффективного обучения возможно использовать виртуальную реальность, особенно при обучении современным мультимедийным технологиям.

Мультимедийный, с высокой степенью иммерсивности, образовательный контент будет способствовать качественному уровню образования [8].

Образовательная программа требует постоянного дополнения, которое может быть реализовано в рамках проектируемых элективных курсов для студентов. С помощью элективных курсов можно не только улучшить результаты обучения, но и частично снять остроту проблем, поставленных перед современным обществом информатизацией.

Существует несколько видов элективных курсов. Предметные курсы направлены на развитие и углубление знаний по базовому учебному предмету, а межпредметные погружают в задачи, решение которых требует применение знаний и умений нескольких дисциплин. Ориентационные курсы способствуют самоопределению в профессиональной принадлежности. Методические рекомендации описывают основные приемы и средства организации учебного процесса.

На курсы возложен ряд задач, определяющих направление их работы. Они основываются на способностях, склонностях и потребностях учащихся, а также создании условий выбора возможного направления дальнейшего обучения, связанного с определенной профессиональной деятельностью. Участие в элективных курсах должно содействовать не только развитию содержания базового предмета, подготовке к

сдаче экзаменов, но и приобретению практических навыков, необходимых для продвижения на рынке труда и профессий, развитию социализации личности студента, жизненному самоопределению. Поэтому одной из важнейших задач образовательного учреждения является предоставление достаточного количества элективных курсов, эффективно формирующих образовательные компетенции студентов.

Преимуществом элективных курсов является возможность при их разработке апеллировать всеми доступными информационными ресурсами. Расширение границ дисциплины происходит за счет единиц содержания, которые как выходят за рамки одного учебного предмета, так и располагаются на стыке нескольких. Содержание должно прежде всего соответствовать поставленным задачам. Материал, предлагаемый студентам, должен иметь определенную степень новизны, развивающий потенциал и быть реалистичным с точки зрения ресурсов.

Средства элективных курсов эффективно применимы в сочетании с методом проектов. Разработка учебного проекта в рамках элективного курса является целенаправленной деятельностью, стимулирующую познавательную активность студентов. Главным инструментом познания в данном случае становится мотивированное самостоятельное получение знаний, умений и навыков. Метод проектов основан на исследовательской и творческой деятельности участников образовательного процесса, а исследовательская работа позволяет учитывать индивидуальные особенности студентов, создавая условия для развития и социализации.

Это позволяет соединить теоретические знания и деятельность студентов, реализацию коммуникативных навыков. Результаты прохождения курса могут быть оценены средствами педагогической диагностики.

Одним из результатов элективных курсов может быть создание студентами собственных проектов виртуальной реальности, подобные проекты выполняются в ведущих технических вузах страны и на соответствующих факультетах университетов.

Таким образом, элективные курсы - это эффективный и необходимый этап учебной работы. Они содействуют приобретению таких необходимых навыков, как индивидуальная и коллективная работа, адаптация к новейшим тенденциям развития современного общества, организация направленной деятельности и анализ проделанной работы [9]. В соединении с новыми информационными технологиями проведение элективных курсов и выполнение в их рамках студенческих проектов отчасти решает проблемы информатизации процесса обучения.

Заключение

В эпоху информационного общества существуют различные технологические тренды, меняющие рынок труда и нашедшие свое отражение в сфере образования. Акцент обучения сменился на глубокое понимание явлений и процессов, критическому мышлению, навыков поиска решений и анализа информации у студентов, креативности, самостоятельных исследований, кооперированию. Информатизация образования позволяет перейти от единого образовательного стандарта для всех обучающихся к образованию, ориентированному на личные возможности каждого с качественно новым уровнем знаний. Множеством преимуществ обосновано использование в области образования технологий виртуальной реальности. Задача вуза - использовать инновационные продукты в необходимом количестве во благо образования. Это имеет первостепенное значение для развития компетенций XXI века, таких как работа с информацией, критическое мышление, технологические навыки, творчество [10], но требует проработки использования новых информационных технологий для развития таких компетенций как коммуникации и сотрудничество.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Волкова М.В. Информатизация как основная тенденция современного образования и её влияние на изменение роли педагога / М.В. Волкова // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации. - 2020. - С. 152-155.
2. Даутова О.Б. Образовательная коммуникация. Традиционные и инновационные технологии / О.Б. Даутова - Петербургский вектор внедрения ФГОС ООО. - КАРО, 2019. - 176 с.
3. Роберт И.В. Развитие информатизации образования на основе цифровых технологий: интеллектуализация процесса обучения, возможные негативные последствия / И.В. Роберт // Наука о человеке: гуманитарные исследования. 2017. №4 (30). Режим: доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/razvitie-informatizatsii-obrazovaniya-na-osnove-tsifrovyyh-tehnologiy-intellektualizatsiya-protsessa-obucheniya-vozmozhnye> (дата обращения: 14.04.2020).
4. Мурадова Ф.Р. Игровые технологии один из эффективных способов обучения учащихся на уроках информатики / Ф.Р. Мурадова, Р.Ж. Кадилов // Вестник магистратуры. - 2019. - №. 4-3. - С. 60.
5. Решетюк Е.Г. Использование метода проектов на занятиях по информатике как средства формирования учебно-познавательной компетентности учащихся / Е.Г. Решетюк // Наука, техника и образование. - 2019. - №. 3 (56).
6. Куликовская, И.Э. От науки к практике развивающего STEAM - образования детей / И.Э. Куликовская // Психолого-педагогические исследования. - 2019. - Т. 11. - №. 4. - С. 110-120.
7. Евдокимов, И.В. Прогнозирование эффективности использования технологий виртуальной реальности в образовательном процессе / И.В. Евдокимов, А.С. Михалев, Н.А. Тимофеев, Ю.А. Батурин // Проблемы социально-экономического развития Сибири. - 2017. - №. 3. - С. 129-135.
8. Кольцова, А.М. Применение виртуальной реальности в обучении / А.М. Кольцова, А.В. Горохов // Инженерные кадры-будущее инновационной экономики России. - 2017. - №. 4. - С. 48-50.
9. Шевелева М.С. Элективные курсы в системе профильного обучения информатике и ИКТ / М.С. Шевелева., Г.И. Шевченко // Студенческая наука для развития информационного общества. - 2018. - С. 126-128.
10. Вейдт В.П. Ключевые понятия федерального проекта «Учитель будущего»: постижение смыслов / В.П. Вейдт // Педагогика и психология образования. - 2019. - №. 4. - С. 9-21

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of mathematical modeling, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
marinatichomirova@hotmail.com

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
iinpt@mail.ru

Olga N. Bakhtiyarova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
olga-bakh06@mail.ru

Virtual reality in the educational process of a modern university

Abstract. The relevance of the research topic is due to the problems of informatization of the education sphere and the lack of educational and methodological materials that consider the use of virtual reality in the educational process. Virtual reality is one of the high-tech areas of the digital economy and is becoming in demand in modern society. At the same time, there is a shortage of qualified personnel with competence in the use of virtual reality in the field of education. It is shown that with the help of virtual reality some of the problems of informatization of education can be solved. At the same time, there is a shortage of qualified personnel with competencies in the field of education.

Key words: informatization of education, educational technologies, information and communication technologies, information models, elective courses, project method, virtual reality, distance education, interdisciplinary communications.

**ПОДГОТОВКА ИНЖЕНЕРОВ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XVIII ВЕКА:
ПРЕПОДАВАНИЕ ПО УЧЕБНИКУ ВЕЛЬЯШЕВА-ВОЛЫНЦОВА И. А.
«АРТИЛЛЕРИЙСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ: ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ БЛАГОРОДНОГО ЮНОШЕСТВА»**

Аннотация

Актуальность темы исследования обусловлена недостаточностью, с одной стороны, теоретической математической подготовки выпускников технических вузов и, с другой стороны, сформированности умений по решению прикладных задач. Цель работы заключается в изучении некоторых форм решения аналогичной проблемы в образовании инженеров второй половины XVIII века на примере учебника Вельяшева-Волынцова И.А. «Артиллерийские предложения: Для обучения благородного юношества», изданного в 1767 году. Материалы статьи могут быть полезными педагогам технических вузов, специалистам по истории российского образования.

Ключевые слова

инженерное образование, математическое образование, практические задачи, межпредметные связи, Артиллерийский и Инженерный кадетский корпус

АВТОРЫ

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Птицына Елена Владимировна,
студентка ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова», г. Москва
elena-pt@yandex.ru

Введение

Одной из проблем современного инженерного образования является поиск методик сочетания фундаментальной математической подготовки инженеров и их умений решать прикладные задачи по своей специальности. Решение проблемы усложняется из-за сокращения учебных аудиторных часов на предметы математического цикла, и одновременно снизившегося уровня подготовки выпускников школ (Болдов-

ская, Полякова, Рождественская, 2016). Исследователями данной проблемы, педагогами вузов разрабатываются различные методики подготовки квалифицированных инженеров с углубленным пониманием прикладных возможностей математики (Болдовская, Полякова, Рождественская, 2016; Полякова, 2016).

При решении любых задач, в том числе педагогических, полезно изучить опыт их решения, так как истоки многих современных проблем лежат в прошлом, и без познания этих истоков эти проблемы вряд ли могут быть разрешены.

Методология и результаты исследования

Основным методом исследования является анализ литературы по теме исследования. Рассмотрен учебник Вельяшева-Волынцова И.А. «Артиллерийския предложения: Для обучения благородного юношества Артиллерийскаго и инженернаго шляхетнаго кадетскаго корпуса», впервые изданный в 1767 году.

К середине XVIII века одной из задач российского профессионального образования являлось создание инженерной, главным образом, военной школы, на широком теоретическом и общеобразовательном фундаменте. Под военным инженерным образованием мы понимаем образование в области артиллерии, фортификации, геодезии и навигации (Рождественский, 1912. С. 29; Стародубцев, 2016. С. 191). В российском образовании происходил переход от узкого специализированного образования к общему, причем это касалось образования всех сословий (кроме крепостных). Начиная с середины XVIII века создается много оригинальных (не переводных) российских учебников для профессионального образования. Напротив, учебники для народных училищ являлись в значительной степени переработкой или переводами учебников для австрийской системы школ.

Все отечественные учебники, созданные для образования инженеров, содержали большое количество задач с решениями, задач без решений практически не находится. Решения были не всегда в достаточной степени обоснованы. Но в учебниках, содержащих теорию (теоремы с доказательствами и следствия из них), для большинства задач, в том числе практического содержания, приведены доказательства решений, то есть обоснования. Одним из таких учебников являлся учебник преподавателя артиллерии и геометрии Артиллерийского и Инженерного шляхетного кадетского корпуса Вельяшева-Волынцова Ивана Андреевича «Артиллерийския предложения: Для обучения благородного юношества Артиллерийскаго и инженернаго шляхетнаго кадетскаго корпуса», изданный в типографии Сухонутного шляхетного кадетского корпуса в 1767 году и переизданный в 1777 году» (Вельяшев-Волынцов, 1767). В течение 50-ти лет после первого издания учебник являлся лучшим для образования в своей области.

Учебник имеет прекрасную структуру и оформление текста, как и большинство учебных пособий второй половины XVIII века: использование различных шрифтов, прописных и строчных букв, различную ширину строк при выделении заголовков, отступу до и после абзацев, использование жирного шрифта и курсива и прочее (Рисунок 1).

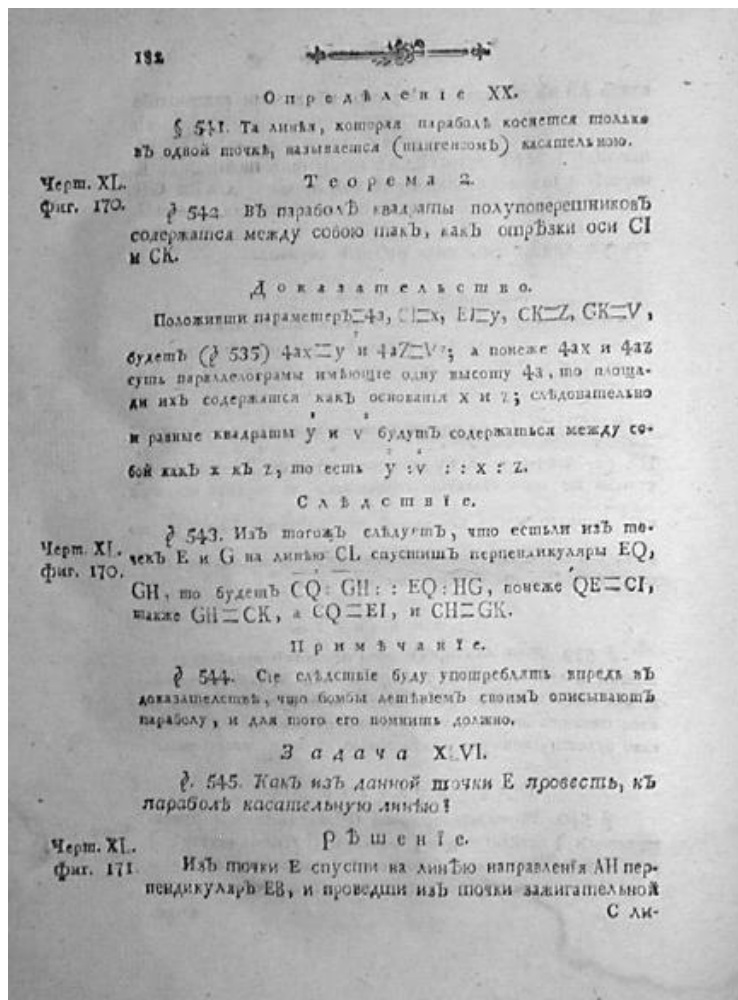


Рисунок 1 - Страница из книги Вельяшева-Волынцова И.А.

В учебнике содержится специально отобранный материал по химии, математике, механике и другие разделы – нужный для решения специальных задач.

Мы рассмотрим несколько глав из третьей части «Об употреблении артиллерийских орудий»:

главу VII «О сечениях конуса и о свойстве параболы»,

главу VIII «О ударах и движениях тел» и

главу IX «Об искусстве бросания бомб, и о вычислении тех расстояний, которые они будучи в движении до упадения своего опишут».

В главе VII содержится материал по планиметрии и по стереометрии, связанный с коническими сечениями, а именно с параболой.

В главе VIII обстоятельно разобраны нужные сведения по механике.

В главе IX при решении задач артиллерии используется материал двух предыдущих глав.

Изучение конических сечений входило в программу Артиллерийского и Инженерного кадетского корпуса на старшей ступени. В геометрии существует несколько способов определения параболы, например, как геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки и от данной прямой (Канатников, Крищенко, 2000. С. 321). В аналитической геометрии определение параболы можно дать, например, с помощью общего уравнения кривой второго порядка. Последний вариант был использован Яковом Александровичем Севастьяновым в первом русскоязычном

учебнике по аналитической геометрии «Начальные основания аналитической геометрии» (1819) (Севастьянов, 1819), первый вариант (с помощью конических сечений) - в вышедшей на два года раньше книге Алексея Ивановича Маюрова «Вышняя геометрия в пространствах, или Приложение анализа к начертательной геометрии: С изложением теории дефилирования крепостных строений» (Маюров, 1817), которая также содержит замечательное изложение сведений по аналитической геометрии (Птицына, Бахтиярова, Птицына, 2021).

В рассматриваемом учебнике для артиллеристов не вводится система координат, не приводятся уравнения, поэтому мы можем говорить о сведениях по элементарной, а не аналитической геометрии. Однако для современной школы данный материал отнюдь не является «элементарным» и не изучается, в ВУЗах же при изучении геометрии аналитическими методами многие геометрические свойства также опускаются.

Так как учебник Вельяшева-Волынцова посвящен не геометрии, а артиллерии, то автор подчеркивает в Примечании, что из всех конических сечений будет рассматривать только свойства параболы, поскольку она наиболее важна в этом военном деле, и только те свойства, которые нужны для «исчисления бросания бомб и ядер». В главе XVII содержится 8 теорем о геометрических свойствах параболы с доказательствами и следствиями, сформулированы 13 определений, приводится решение 7 задач.

Приведем некоторые из определений, теорем и задач. Например, у Вельяшева-Волынцова для параболы вводятся понятия аксиса (оси), диаметра, апсиса, полупоперешника, и т.д. Последние два понятия в современных учебниках редко именуются специальными названиями: апсис представляет собой отрезок оси от вершины параболы до точки пересечения оси с перпендикулярной ей хордой, половина которой называется полупоперешником.

Также Вельяшев-Волынцов вводит параметр параболы (удвоенный параметр p параболы, принятый в аналитической геометрии). Рассматривая конус, рассеченной плоскостью параллельно его образующей BC (автор не употребляет термина «образующая», заменяя его «боком»), он изучает параболу $GIEKF$ (Рис. 1): точки G и F лежат на основании конуса, E - на образующей CA , противоположной образующей CB , K и I - точки пересечения параболы с произвольной плоскостью, секущей конус параллельно основанию (что даёт окружность). Проведя диаметр этой окружности HO , параллельный прямой AB , получим точку пересечения этого диаметра с осью параболы - L . Чтобы получить параметр, предлагается от вершины конуса C отложить по образующим CA и CB отрезки, равные HL - CM и CN . Длина отрезка MN называется параметром параболы.

Теорема I заключается в том, что квадрат полупоперешника равен произведению апсиса и параметра. В доказательстве используется факт равенства произведений отрезков пересекающихся хорд, который, как предполагается, известен читателю («по геометрии»), понятие подобных треугольников - основы элементарной геометрии: 1) $KL^2 = HL \cdot LO$ (из равенства произведений отрезков хорд), 2) $CN : MN = EL : LO$ (из подобия треугольников) $\Rightarrow CN \cdot LO = MN \cdot EL$, где $CN = HL$ по построению 3) Из 1) и 2) $\Rightarrow KL^2 = MN \cdot EL$, ч.т.д. (Рисунок 2).

параграфы Главы VIII, относящиеся к физике (в учебнике пронумерованы знаками параграфов практически все абзацы):

параграф 573 (Следствие из Аксиомы 1: «Из того следует, что два равных тела перейдут в одно время линии, пропорциональные своим скоростям; а в разные времена одинаковою скоростью линии, пропорциональные временам»),

параграф 594 (Теорема 14: «Те линии, которые тело падением своим опишет, содержатся между собой так, как квадраты их скоростей, или времен»),

и параграф Главы VII, относящийся к геометрии:

параграф 543 (Следствие из Теоремы 2 о том, что в параболе квадраты полуперешников содержатся между собою так, как отрезки оси CI и CK (иначе говоря, соответствующие им апсисы): «Из того же следует, что если из точек E и G на линию CL спустить перпендикуляры EQ , GH , то будет $CQ^2:CH^2=EQ:HG$, понеже $QE=CI$, также $GH=CK$, а $CQ=EI$, и $CH=GK$ ») (Рисунок 3).

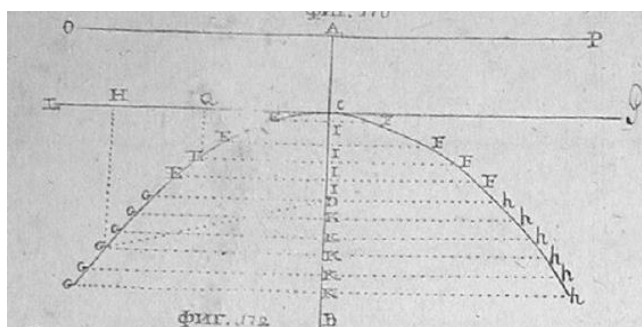


Рисунок 3 - Иллюстрация 172 из книги Вельяшева-Волынцова И.А.

Все задачи Главы IX связаны с практикой, например:

«Как узнать с какой высоты телу упасть надлежит, чтобы оно при конце своего движения получило такую скорость, с которой оно во время T (то есть в то время, когда тело полученную падением от D в B скоростью уравненным движением пробежит оную линию DB) пробежать могло линию AF » (Задача LIV),

«Как сыскать на какие градусы мортиру возвысить, чтоб бомба упала на желаемое место, которое выше или ниже батареи?» (Задача LVII).

В следующих главах геометрические и физические сведения и задачи также органично сочетаются с чисто артиллерийскими сведениями, при этом, конечно, автор рассчитывает на хорошее усвоение обучающимися опорных VII, VIII и IX глав.

Заключение

Работа посвящена изучению одной из сторон становления отечественного образования в XVIII веке — совершенствованию преподавания по новым российским учебникам для подготовки инженеров, в том числе военных специальностей. Основными задачами преподавания являлись усиление общетеоретической подготовки и в то же время овладение практическими способами решения инженерных задач. Учебные пособия печатались как лучшие образцы полиграфического творчества и были написаны ясным доходчивым языком. Приведен пример одного из лучших учебников этого периода для артиллеристов — учебник Вельяшева-Волынцова И.А. К середине XIX века российское образование достигло высочайшего уровня, и большую роль в этом сыграло глубокое изучение наук и совершенствование методики их преподавания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Болдовская, Т.Е., Полякова, Т.А., Рождественская, Е.А. (2016). Методика формирования математической компетентности студента инженерного вуза: цели и перспективы. Научно-методический электронный журнал «Концепт», №3. С. 76-80.
2. Полякова, Т.А. (2016). Задачи с практическим содержанием в курсе математики в техническом вузе. Научно-методический электронный журнал «Концепт», №7. С. 75-80.
3. Рождественский, С.В. (1912). Очерки по истории систем народного просвещения в России в XVIII-XIX веках. Санкт-Петербург: тип. М.А. Александрова.
4. Стародубцев, М.П. (2016). Артиллерийский и инженерный шляхетский кадетский корпус как значимая часть системы подготовки военных кадров в России. Самарский научный вестник, №1(14). С. 189-192.
5. Вельяшев-Волынцов, И.А. (1767). Артиллерийския предложения : Для обучения благородного юношества Артиллерийскаго и инженернаго шляхетнаго кадетскаго корпуса / Сочинены того же Корпуса капитаном Иваном Вельяшевым Волынцовым. СПб.: При Сухопут. шляхет. кадет. Корпусе.
6. Канатников, А.Н., Крищенко, А.П. (2017). Аналитическая геометрия: учебник для студентов высших технических учебных заведений (7-е изд.). Под редакцией В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана.
7. Севастьянов, Я.А. (1819). Начальные основания аналитической геометрии. СПб.: При Имп. Акад. наук.
8. Маюров, А.И. (1817). Вышняя геометрия в пространствах, или Приложение анализа к начертательной геометрии, с изложением теории дефилирования крепостных строений, / Сочинение Алексея Маюрова свиты его императорского величества инженер полковника, Императорской Санктпетербургской академии наук и Парижскаго академическаго общества наук члена. Императорскою Академиею наук, принятое с отличными похвалами.; Печатано по высочайшему повелению. СПб.: В Морской типографии.
9. Птицына, И.В., Бахтиярова, О.Н., Птицына, Е.В. (2021). Различные методики преподавания аналитической геометрии первым инженерам российской империи по учебникам Маюрова А.И. и Севастьянова Я.А. Modern European researches, №2-1. С. 107-113.
10. Канатников, А.Н., Крищенко А.П. Указ. Соч. (6.)

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

iinpt@mail.ru

Olga N. Bakhtiyarova,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

olga-bakh06@mail.ru

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

marinatichomirova@hotmail.com

Elena V. Ptitsyna,

Student, Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Moscow, Russia

elena-pt@yandex.ru

Training of engineers of the second half of the XVIII century: teaching according to the textbook of Velyashev-Volyntsov I.A. "Artillery proposals: For the education of noble youth"

Abstract. The relevance of the research topic is due to the inadequacy, on the one hand, of the theoretical mathematical training of graduates of technical universities and, on the other hand, the formation of skills in solving applied problems. The purpose of the work is to study some forms of solving a similar problem in the education of engineers in the second half of the 18th century using the example of the textbook Velyashev-Volyntsov I.A. Artillery proposals: For the training of the noble youth ..., published in 1767. The materials of the article can be useful for teachers of technical universities, specialists in the history of Russian education.

Key words: engineering education, mathematics education, practical problems, interdisciplinary communications, Artillery and Engineering Cadet Corps.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫБОРА ФОРМ ЗАДАНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ТРИГОНОМЕТРИИ

Аннотация

Для повышения качества преподавания необходим поиск новых форм, методов, приемов обучения, новых информационно-коммуникационных технологий. В статье проводится анализ выбора форм заданий по темам «Тригонометрические выражения, основные формулы тригонометрии» с целью активизации познавательной деятельности учащихся. Приведены разные типы заданий, выявлены факторы, влияющие на выбор форм заданий.

Ключевые слова

тригонометрические выражения, тригонометрические тождества, активизация познавательной деятельности, урок, формы заданий

АВТОР

Санаева Татьяна Александровна,
доцент кафедры высшей математики
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
гражданской авиации», г. Москва
tatyanasanaeva@yandex.ru

Введение

«Образование - важнейшее из земных благ, если оно наивысшего качества. В противном случае оно бесполезно» - писал Р. Киплинг.

В законе об образовании в Российской Федерации ст. 66 п.2 прописано, что «Основное общее образование направлено на становление и формирование личности обучающегося (формирование нравственных убеждений, эстетического вкуса и здорового образа жизни, высокой культуры межличностного и межэтнического общения, овладение основами наук, государственным языком Российской Федерации, навыками умственного и физического труда, развитие склонностей, интересов, способностей к социальному самоопределению)» [1]. Целью образования является формирование личности обучающегося, способного самостоятельно развиваться. Обучающая функция образования заключается в обеспечении процесса овладения человеком соответствующими компетенциями в рамках учебных заведений и различных сфер жизнедеятельности общества.

В современном информационном обществе успешная деятельность специалиста в различных областях деятельности требует высокого уровня математической подготовки: развитого абстрактного мышления, математического анализа данных, умение строить математические модели прикладных задач и решение поставленных задач. Успешное функционирование современного общества невозможно без высококвалифицированных специалистов с высококачественным математическим образованием.

Успешное овладение системой математических компетенций, необходимых для успешного изучения математики, смежных учебных предметов, решения практических задач является целью обучения учащихся математике. Цели обучения математике отражают общедидактические цели [2]:

1) образовательные цели - разделяют основной и второстепенный материал, в соответствии с этим учитель может рационально распределить учебное время;

2) воспитательные цели тесно связаны с содержанием урока. Это цели по формированию мировоззрения, сознательного отношения к учебе, развитию познавательной и общественной активности, культуры учебного труда, воспитанию сознательности;

3) развивающие цели тесно связаны с содержанием урока (например, развитие у учащихся навыков применения анализа, синтеза, сравнения, аналогии, индукции, дедукции, обобщения, конкретизации, моделирования классификации; пространственного представления и воображения, сообразительности, наблюдательности, памяти и т. д.).

Методология и результаты исследования

Для достижения поставленных целей обучения ведущую роль сохраняет урок. Современный урок включает в себя взаимодействия учителя и ученика, где учитель использует все возможности для развития личности ученика, его активного умственного роста, а ученик занимается самостоятельным поиском, исследованием полученной информации, различной творческой работой. Считая урок основной формой обучения, учителя находят пути его совершенствования, повышения эффективности и качества урока.

Для повышения качества преподавания, активизации познавательной деятельности учащихся необходим поиск новых технологий, способов, а так же форм, методов и приемов по развитию у учащихся умений и навыков, способствующих применению знаний в практической деятельности. Наряду с традиционными и нетрадиционными формами обучения (учебные проблемные ситуации, проектные и практические задачи, задания исследовательского характера и т.д.), использовать мультимедиа ресурсы. Сопровождая уроки различными формами, методами и способами подачи математического материала учителя могут повысить привлекательность, изучаемого материала. Внедрение элементов дифференциального и индивидуального подходов повышают мотивацию к обучению, активизируют познавательную деятельность учащихся.

Мультимедиа ресурсы на уроках математики, возможно использовать для разных целей и функций: диагностирование учебных возможностей учащихся, средство обучения, источник информации, тренинг-устройство, средство контроля и оценки качества обучения [3].

Применение мультимедийных технологий на уроках математики позволяет:

- 1) повышать информационную культуру учащихся;
- 2) использовать более обширную информацию на уроках;
- 3) пополнять учебный материал новыми сведениями;
- 4) проводить уроки более интереснее, насыщеннее, качественнее, результативнее;
- 5) объективно оценивать результаты учеников;
- 6) повышать мотивацию к обучению.

Важным элементом после введения нового материала является процесс закрепления, он позволяет сконцентрировать внимание на главных моментах нового материала, устанавливать связь между теоретическими положениями и практической учебной деятельностью, влияет на формирование определенных учебных умений и навыков. Поэтому очень важно, какие задания используются на этом этапе.

В своей работе для повышения качества преподавания, активизации познавательной деятельности учащихся использую различные виды заданий, которые можно использовать как в традиционной и нетрадиционной формах, так и с помощью информационно-коммуникационных технологий [4].

В качестве эксперимента проведено сравнение предложенных форм заданий различных уровней двум инженерным классам. Цель исследования выявить факторы, влияющие на выбор форм заданий и оценить полученные знания.

В двух классах использовалась разная форма предложенных заданий:

- в первом классе приводились задачи традиционным методом с выходом учащихся к доске;
- во втором классе задачи предлагались в виде проблемы с коллективным обсуждением поиска решений задачи (при данной форме заданий можно класс делить на группы).

Оценочный контроль:

- в первом классе проходил в виде контрольной работы,
- во втором классе в виде тестовой работы с использованием информационно-коммуникационных технологий.

В результате в первом классе было решено больше задач и опрошено больше учащихся, но в поиске решений участвует один учащийся. Во втором классе разбирается меньшее количество задач, но в обсуждении поставленной задачи успевает участвовать весь класс, что позволяет учителю научить детей самостоятельно «открывать» новые знания, вести исследовательский поиск.

Проведение оценочного контроля с использованием информационно-коммуникационных технологий позволяет быстро выявить слабые стороны учащихся и предлагается большее количество задач. При тестовом контроле можно быстро отследить результат каждого и по необходимости дать своевременную конкретную консультацию.

Форма предоставления заданий зависит от цели урока:

- если целью урока является проверка пройденного материала, опрос учащихся, выявление пробелов учащихся, то лучше применять традиционные формы,
- если целью урока стоит задача поставить ученика перед познавательным затруднением, преодоление которого активизировало бы его мыслительную деятельность, привлечь всех учащихся к решению предложенной проблемы, заставить их размышлять, научить самостоятельному поиску решений, то лучше преподносить задания в виде проблемы.

На уроках обобщения и систематизации теоретических знаний по темам: «Основные понятия, формулы тригонометрии», «Тригонометрические выражения» были предложены задания от простого уровня к сложному. Дифференцированное обучение дает ученику возможность выбрать задание любого уровня сложности. Если же учащийся сомневается в самооценке, то можно постепенно переходить от более низкого к более высокому уровню сложности.

Далее приведены некоторые задания, предложенные в данном эксперименте.

1) Найдите ошибку:

$$\frac{7\pi}{6} = 210^\circ, \frac{5\pi}{4} = 215^\circ, \frac{5\pi}{3} = 300^\circ, \frac{11\pi}{4} = 475^\circ,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -1$$

2) Закончить формулу:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \dots, \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \dots,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \dots, \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \dots,$$

3) Вставьте пропущенные символы:

$$\sin x \cdot \dots + \dots \cdot \sin y = \sin(x \dots y),$$

$$\cos x \cdot \dots - \dots \cdot \dots = \cos(x \dots y),$$

$$\begin{aligned}
2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} &= \dots + \dots, \\
\cos x \dots \cos y &= 2 \dots \frac{x+y}{2} \dots \frac{y-x}{2}, \\
\sin^2 x &= 1 - \cos^2 x, \\
2\cos^2 x - 1 &= \cos 2x
\end{aligned}$$

4) Продолжите формулу

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x - 1 &= \dots, 2\sin^2 x = \dots, 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dots, \\
\operatorname{ctg}(x+y) &= \dots, \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dots, a\sin x + b\cos x = \dots
\end{aligned}$$

5) Найдите ошибку

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) - 2\cos x \sin y &= \cos(x-y), \\
\cos(x+y) + 2\cos x \cos y &= \cos(x-y), \\
\sin(x+y) \cos y - \cos(x+y) \sin y &= \cos x, \\
\sin(x+y) \cos y + \sin(x+y) \sin y &= \cos x, \\
2\sin(90^\circ - \alpha) \cos \alpha &= \sin 2\alpha, \\
(\sin \alpha + \sin \alpha)^2 &= 1 + \sin 2\alpha
\end{aligned}$$

6) Определить пары тождественных равных выражений

$(\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1),$ $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1,$ $-\frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha,$ $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2\cos^2 \alpha,$ $(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha,$ $\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta,$ $2\sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha)$	$\sin 2\alpha,$ $\cos 2\alpha,$ $\cos \alpha,$ $\sin \alpha,$ $-\cos^2 \alpha,$ $2\sin^2 \alpha,$ $1,$ $-1,$ $\frac{1}{\sin \alpha},$ $\cos^2 \alpha,$ $0,$ $-\frac{1}{\sin \alpha}$
--	---

7) Изменяем формулировку задания

а) «Преобразовать сумму в произведение или вычислить»

$$\begin{aligned}
1 + 2\sin 42^\circ &= \dots, \sqrt{3} + 2\cos 20^\circ = \dots, \\
1 - \operatorname{tg}^2 42^\circ &= \dots, 3 - \operatorname{tg}^2 20^\circ = \dots
\end{aligned}$$

б) «Преобразовать произведение в сумму»

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos x &= \dots, 4\sin 11^\circ \cos 79^\circ \sin 22^\circ = \dots, \\
\sin 35^\circ \sin 10^\circ &= \dots
\end{aligned}$$

8) Доказать тождества:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) + \operatorname{tg} \alpha &= \sin \alpha, \\
\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \sin x &= \cos x, \\
\frac{2\cos^2 x - 1}{(\cos x - \sin x)^2} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} - \frac{4\sin x \cos x}{\cos 2x} &= 0
\end{aligned}$$

9) Может ли быть верным данное выражение и почему:

$$\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\sin(\pi + \alpha) \cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)},$$

$$5 \sin(-390^\circ) + 3 \cos 90^\circ = 6 \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 5 \cos(-\pi)$$

10) При каком значении F верно равенство

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = F \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

Задачи приведенного типа можно использовать и в качестве диагностирования учебных возможностей учащихся, средство контроля и оценки качества обучения с использованием информационно-коммуникационных технологий.

Заключение

Для качественного усвоения материала и продуктивной учебной деятельности необходимо:

- 1) использовать на уроках современные инновационные методики, новые формы организации и проведения учебных занятий;
- 2) изучение математики должно способствовать развитию логического мышления и пространственного воображения;
- 3) полученные математические знания учащиеся должны научиться применять в практической деятельности;
- 4) активнее использовать на уроках современные педагогические технологии, возможности информационно-коммуникационных технологий, сети Интернет;
- 5) форма заданий предлагаемых учащимся должна зависеть от цели урока, от уровня подготовки учащихся, от умения учащихся проводить самоанализ учебной деятельности.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. «Закон об образовании в Российской Федерации», ст. 66 п.2
2. www.veter-s.ru/index/id/8756
3. Рязанова Л.С. Повышение качества математического образования как педагогическая проблема/ - Сибирский педагогический журнал, 2009г, с.51-56
4. Санаева Т.А. Исследование активности учащихся при применении различных форм обучения, Наука, образование, инновации: актуальные вопросы и современные аспекты: сборник статей VII Международной научно-практической конференции. В 2 ч. Ч.2., Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2021, с.117-120.

Tatyana A. Sanaeva,

Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

tatyanasanaeva@yandex.ru

Research on the choice of task forms

Abstract. To improve the quality of teaching, it is necessary to search for new forms, methods, teaching methods, new information and communication technologies. The article analyzes the choice of task forms on the topics "Trigonometric expressions, basic formulas of trigonometry" in order to activate the cognitive activity of students. Different types of tasks are given, factors influencing the choice of task forms are identified.

Key words: trigonometric expressions, trigonometric identities, activation of cognitive activity, lesson, forms of tasks.

О ПРОВЕДЕНИИ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ «ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Аннотация

Изучение кратных интегралов является важной составляющей математического образования студентов и является обязательной темой в курсе математического анализа для студентов математических и технических специальностей. Успешное освоение этой темы помогает студентам осваивать также и другие дисциплины. В данной работе рассмотрено применение криволинейных систем координат как эффективный способ вычисления некоторых двойных интегралов. Содержание статьи представляет интерес как для преподавателей, так и для студентов.

Ключевые слова

вычисление двойных интегралов, криволинейные системы координат

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Введение

Первое тесное знакомство с полярной системой координат у студентов технических вузов происходит, как правило, при изучении приложений определенного интеграла и вызывает у многих из них некоторое непонимание. Это непонимание связано с тем, что в школе их учат иметь дело только с прямоугольными координатами. При этом криволинейные координаты плотно вошли в нашу жизнь, большинство людей свободно пользуются навигаторами, не подозревая, что долгота и широта, по сути, — углы в сферической системе координат. Поэтому умение грамотно использовать криволинейные координаты очень важно не только в математике, но и во многих разделах физики. Это умение может быть использовано для решения не только теоретических, но и практических задач.

Методология

На тему «вычисление двойных интегралов» выделяется в зависимости от сложности и продолжительности курса математического анализа от двух до пяти занятий. Примерно половину этого времени следует выделять на применение криволинейных координат для вычисления этих интегралов.

При этом предполагается, что студенты уже знают основные способы интегрирования, а также имеют навыки построения кривых на плоскости в декартовых и полярных координатах. Однако, как правило, с момента изучения этих тем проходит уже достаточно много времени, и не лишним будет организовать подготовительную работу

для актуализации ранее изученных материалов.

Теоретический материал [1,2], примеры решения задач [1-4], задачи для самостоятельного решения преподаватель может разместить на своем сайте, персональной странице официального сайта вуза или использовать облачные технологии, чтобы любой из студентов имел доступ ко всем материалам в любое удобное время. Делать это следует за несколько дней до проведения практических занятий.

Также следует отметить, что переходу к криволинейным интегралам следует обучать уже после того, как студенты научились работать с интегралами в декартовых координатах (представлять и изображать области интегрирования, расставлять пределы интегрирования).

Замена переменных в двойном интеграле

При замене переменных в двойных интегралах руководствуются следующей теоремой [1].

Теорема (о замене переменных в двойном интеграле). Пусть отображение

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, (u, v) \in G.$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область G на область D , причем якобиан $J(u, v)$ этого отображения отличен от нуля в каждой точке G . Если $f(x, y)$ непрерывная в области D функция, то верна следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Полярная система координат. Основным видом криволинейных координат на плоскости, изучаемых студентами в курсе математического анализа являются полярные координаты (r, φ) , связанные с декартовыми координатами (x, y) соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}.$$

При этом якобиан

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

обращается в ноль только в точке $r = 0$, которая соответствует началу координат в декартовой системе координат.

Расстановка пределов интегрирования. Для начала, необходимо отработать со студентами умение правильно расставлять пределы интегрирования в полярных координатах. Поэтому первые задания должны быть связаны с переходом из декартовой системы координат к полярной, при этом непосредственное вычисление интегралов требовать не следует. Можно давать задания с абстрактными функциями.

Перед этим необходимо подробно объяснить, как следует расставлять пределы интегрирования в зависимости от типов областей.

Первый тип. Полус является внутренней точкой области интегрирования D , область ограничена кривой $r = r(\varphi)$.

Тогда пределы интегрирования следует расставлять следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Пример 1. Перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования в этих координатах в интеграле $\iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} f(x,y) dx dy$.

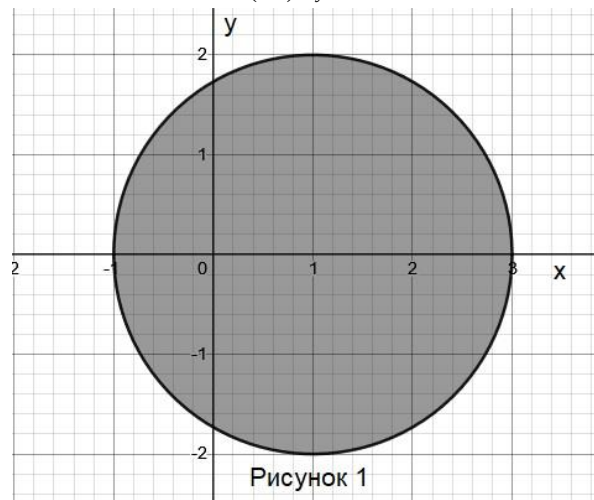


Рисунок 1

Область интегрирования изображена на рисунке 1. Зададим окружность $(x-1)^2 + y^2 = 4$ в полярных координатах $(r \cos \varphi - 1)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = 4$, после преобразований получаем квадратное уравнение $r^2 - 2r \cos \varphi - 3 = 0$, которое имеет единственное неотрицательное решение $r = r(\varphi) = \cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 3}$. В итоге имеем

$$\iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 3}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Второй тип. Полюс находится на границе области интегрирования D , область ограничена кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, проведенными из полюса ($\alpha < \beta$).

Тогда пределы интегрирования следует расставлять следующим образом:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Пример 2. Перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования в этих координатах в интегралах

а) $\iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy$; б) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x^2 + y^2) dy$.

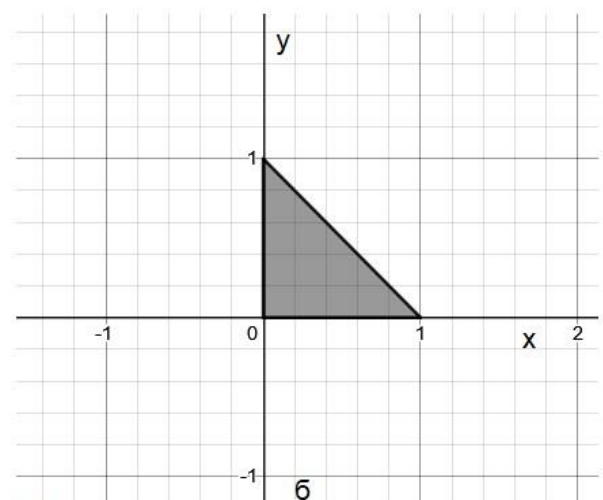
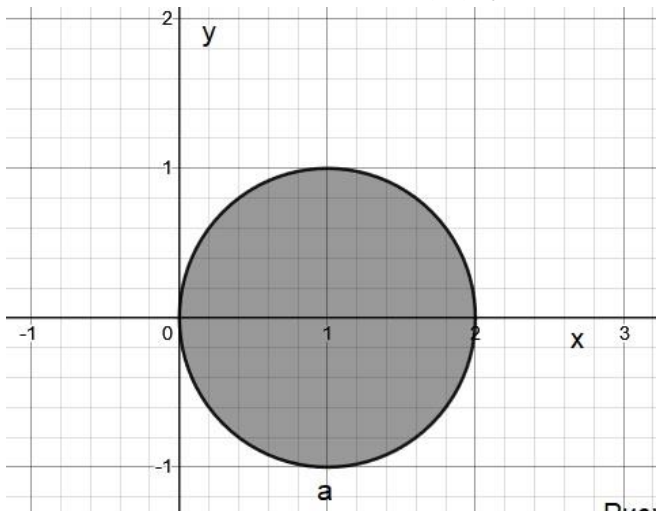


Рисунок 2

Соответствующие области интегрирования изображены на рисунке 2.

а) Окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$ в полярных координатах имеет уравнение $(r \cos \varphi - 1)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = 1$, после преобразований получаем квадратное уравнение $r^2 - 2r \cos \varphi = 0$, которое имеет ненулевое решение $r = r(\varphi) = 2 \cos \varphi$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. В итоге имеем

$$\iint_{(x-1)^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б) Прямая $y = 1 - x$ в полярных координатах имеет уравнение $r \cos \varphi + r \sin \varphi = 1$ или $r = \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}$. В итоге, с учетом того, что $\varphi \in [0, \pi/2]$, а $x^2 + y^2 = r^2$, имеем

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x^2 + y^2) dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}} f(r^2) r dr.$$

Третий тип. Полюс находится вне области интегрирования D , область ограничена кривыми $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, проведенными из полюса ($\alpha < \beta$ и $r_1(\varphi) < r_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in [\alpha, \beta]$).

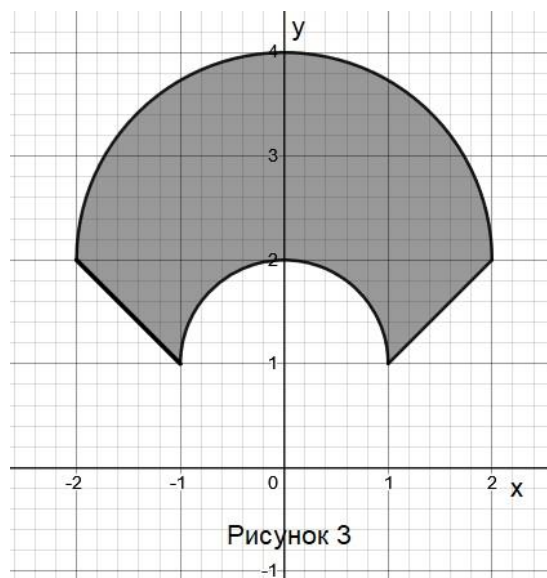
Тогда пределы интегрирования следует расставлять следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Пример 3. Перейдем к полярным координатам и расставим пределы интегрирования в этих координатах в интеграле

$$\iint_D f\left(\frac{x}{y}\right) dx dy.$$

где область D ограничена линиями $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $y = -x$ и $y = x$.



Область интегрирования изображена на рисунке 3. Зададим окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$ и $x^2 + (y-2)^2 = 4$ в полярных координатах. Получим $r^2 \cos^2 \varphi + (r \sin \varphi - 1)^2 = 1$ и $r^2 \cos^2 \varphi + (r \sin \varphi - 2)^2 = 4$, соответственно, или

$r = r_1(\varphi) = 2 \sin \varphi$ и $r = r_2(\varphi) = 4 \sin \varphi$. Участки прямых, ограничивающих область интегрирования, лежат на лучах $\varphi = \alpha = \pi/4$ и $\varphi = \beta = 3\pi/4$. В итоге, с учетом того, что $\frac{x}{y} = \frac{r \cos \varphi}{r \sin \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi$, имеем

$$\iint_D f\left(\frac{x}{y}\right) dx dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} f(\operatorname{ctg}\varphi) r dr.$$

Переход к полярным координатам в следующих интегралах также следует разбирать или дать студентам для самостоятельного выполнения [3,4]:

$$\begin{aligned} & 1) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x+y) dy; \quad 2) \int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2}) dy; \quad 3) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy; \\ & 4) \iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2} f(x,y) dx dy; \quad 5) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy; \quad 6) \int_{-a}^a dx \int_{x^2/a}^a f(x,y) dy; \\ & 7) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy; \quad 8) \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(x^2+y^2) dy. \end{aligned}$$

Вычисление. При вычислении двойных интегралов следует объяснить студентам, что целесообразно переходить к полярным координатам в двух случаях:

1. В случаях, когда область интегрирования удобнее и проще задается в полярных координатах, нежели в декартовых. Как правило, это области, ограниченные окружностью, частью окружности, кардиоидой, лемнискатой или некоторыми другими кривыми, удобно задаваемыми в полярных координатах.

2. В случаях, когда в полярных координатах подынтегральная функция становится намного проще. Как правило, это функции вида $f(x^2+y^2)$ или $f(x/y)$.

Пример 4. Вычислим интеграл $\iint_D xy dx dy$, где область D состоит из точек, удовлетворяющих неравенствам $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

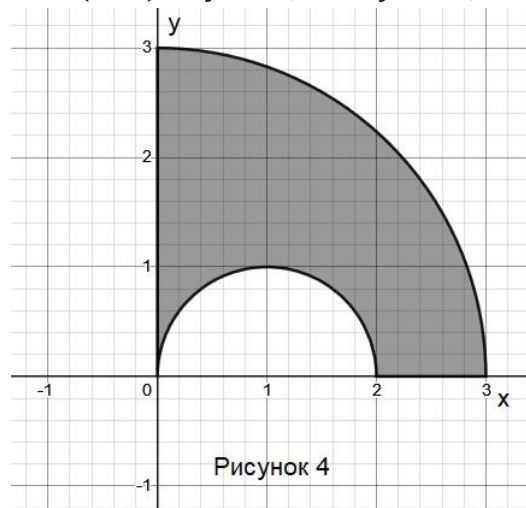


Рисунок 4

Область интегрирования изображена на рисунке 4. Вычислять этот интеграл непосредственно в декартовой системе координат достаточно тяжело, придется разбить интеграл на два не очень приятных для вычисления интеграла.

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{9-x^2}} xy dy + \int_2^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} xy dy.$$

Однако, перейдя к полярным координатам, получим интеграл проще

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^3 r \cos\varphi r \sin\varphi r dr = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \left. \frac{r^4}{4} \right|_{2\cos\varphi}^3 d\varphi =$$

$$= \frac{81}{4} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\sin\varphi - 4 \int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi d(-\cos\varphi) = \frac{81}{4} \cdot \frac{1}{2} + 4 \frac{\cos^6\varphi}{6} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{81}{8} - \frac{2}{3} = \frac{227}{24}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sin(\sqrt{x^2+y^2}) dy$$

Пример 5. Вычислим интеграл

Вычислять этот интеграл непосредственно в декартовой системе координат студентам не удастся, поскольку функция $\sin(\sqrt{x^2+y^2})$ не имеет элементарных первообразных.

Однако, перейдя к полярным координатам, получим интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sin(\sqrt{x^2+y^2}) dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r \sin r dr = \frac{\pi}{2} (-r \cos r + \sin r) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (\sin 1 - \cos 1)$$

Вычисление следующих интегралов при помощи перехода к полярным координатам также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [3,4]:

$$1) \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} x^2 + y^2 dx dy; 2) \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy; 3) \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \cos \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$$

$$4) \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \arctg(y/x) dy; 5) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{x^2+y^2} dx dy.$$

Некоторые другие криволинейные системы координат. Если уровень подготовки студентов и время позволяет, то можно разобрать некоторые другие системы координат.

1) Если область интегрирования эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, или его часть, то целесообразно использовать обобщенные полярные координаты

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}$$

При этом якобиан

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = abr.$$

Пример 6. Вычислим интеграл $\iint_{(x/3)^2 + (y/2)^2 \leq 1} \sqrt{1 - (x/3)^2 - (y/2)^2} dx dy$.

Перейдем к обобщенным полярным координатам $\begin{cases} x = 3r \cos \varphi \\ y = 2r \sin \varphi \end{cases}$. В этих координатах область интегрирования $G = \{(\varphi, r) : \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}$. Имеем

$$\iint_{(x/3)^2 + (y/2)^2 \leq 1} \sqrt{1 - (x/3)^2 - (y/2)^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} 6r dr = -6\pi \frac{2}{3} (1 - r)^{3/2} \Big|_0^1 = 4\pi.$$

2) Для некоторых областей обобщенные полярные координаты можно ввести в более общем виде

$$\begin{cases} x = ar \cos^m \varphi \\ y = br \sin^m \varphi \end{cases}.$$

В этом случае якобиан $J(r, \varphi) = mabr(\sin \varphi \cdot \cos \varphi)^{m-1}$.

Пример 7. Найдём площадь области

$$D = \{(x, y) : (x/a)^{1/4} + (y/b)^{1/4} \leq 1, x \in [0, a], y \in [0, b]\}$$

Для этого целесообразно провести замену

$$\begin{cases} x = ar \cos^8 \varphi \\ y = br \sin^8 \varphi \end{cases}.$$

Тогда прообразом D будет область $G = \{(\varphi, r) : \varphi \in [0, \pi/2], r \in [0, 1]\}$. Имеем

$$S = 8ab \int_0^{\pi/2} \sin^7 \varphi \cos^7 \varphi d\varphi \int_0^1 r dr = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^7 \varphi (1 - \sin^2 \varphi)^3 d\sin \varphi = 4ab \int_0^1 t^7 (1 - t^2)^3 dt = \frac{ab}{70}.$$

3) Можно привести пример перехода к любым криволинейным координатам.

Пример 8. Перейдем к переменным $u = x$, $v = y/x$ в интеграле $\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy$

$(0 < a < b)$, $(0 < \alpha < \beta)$.

При этом (x, y) легко выразить через переменные (u, v) $x = u$, $y = xv = uv$. Якобиан такого преобразования координат равен

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

Прямым $y = Cx$ соответствуют прямые $uv = Cu$ т. е. $v = C$. В итоге получаем

$$\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_a^b du \int_{\alpha}^{\beta} f(u, uv) u dv.$$

Использование полярных координат для нахождения несобственных интегралов. Нахождению двумерных несобственных интегралов или исследованию их на сходимость можно посветить ни одну и ни две работы. В рамках данной статьи предлагаю ограничиться лишь одним примером – нахождением интеграла Пуассона

$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, который актуален в очень важном курсе «теория вероятностей и математическая статистика». Итак

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4}.$$

Откуда и получаем $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Заключение

Вычисление двойных интегралов — тема очень важная и почти необъятная. Данная работа посвящена использованию криволинейных систем координат для нахождения этих интегралов. В статье разобраны примеры, указаны наглядные алгоритмы, даны пояснения по организации учебного процесса и решению задач, что позволяют в сжатые сроки и в полном объеме успешно усвоить учебный материал.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 492 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб. пособие для вузов. Том 2. - М.: Интеграл-Пресс, 2001, - 544 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу для вузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. - М.: Изд-во Астрель, 2004. - 495 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московского ун-та, ЧеРо, 1997. - 624 с.

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

nail_khasanov@mail.ru

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

About conducting classes on the topic "replacing variables for calculating double integrals"

Abstract. The study of multiple integrals is an important component of students' mathematical education and is a mandatory topic in the course of mathematical analysis for students of mathematical and technical specialties. Successful mastering of this topic helps students to master other disciplines as well. In this paper, we consider the use of curved coordinate systems as an effective way to calculate some double integrals. The content of the article is of interest to both teachers and students.

Key words: calculation of double integrals, curved coordinate systems.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА В ФОРМЕ ПОНТРЯГИНА» В РАМКАХ КУРСА «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Аннотация

В статье обосновывается целесообразность изучения темы «Задача Лагранжа в форме Понтрягина» в рамках курса (модуля) «Вариационное исчисление». Предложена методика изложения этой темы. Рассмотрен метод решения задачи Лагранжа с фиксированными границами. Приведены примеры решения задач.

Ключевые слова

вариационная задача, оптимальное управление, функционал,
задача Лагранжа, оптимальный процесс

АВТОР

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Введение

Раздел математики «Вариационное исчисление» входит в образовательные программы по различным направлениям подготовки студентов МГТУ им.Н.Э. Баумана в качестве отдельной дисциплины или как модуль других дисциплин, например, методов оптимизации. Данная дисциплина изучается студентами факультетов «Фундаментальные науки», «Специальное машиностроение» и других. В рамках курса традиционно излагаются методы решения различных вариационных задач с фиксированными и подвижными границами, задачи Больца, задач на условный экстремум (см. [1-3]). При изучении вариационного исчисления принято рассматривать отдельные типы вариационных задач и для каждого типа выводить необходимые условия экстремума. В классических вариационных задачах исследуются функционалы интегрального типа, в задаче Больца к интегралу добавляется терминальное слагаемое простейшего вида. Задачи различаются видом функции Лагранжа L и дополнительными условиями на функции, от которых зависит функционал (граничные условия, уравнения связи). Отметим, что функции, от которых зависит функционал, в задачах вариационного исчисления предполагаются непрерывно дифференцируемыми (и, если необходимо, несколько раз).

К задачам классического вариационного исчисления следует отнести еще одну задачу, которую обычно рассматривают в курсе оптимального управления из-за специфики ее постановки. Это задача Лагранжа в форме Понtryгина, которую принято формулировать в рамках математической модели управляемого объекта, но которая может быть решена методами вариационного исчисления. Эта задача соединяет в своей постановке условия вариационных задач с функционалами, зависящими от нескольких функций одной переменной, задач подвижными границами, задачи Больца, задач на условный экстремум с различными видами связей. Объединение в единой инструкции методов решения различных вариационных задач представляется крайне полезным с точки зрения методики преподавания. Кроме того, даже краткое знакомство с постановкой задач оптимального управления позволит студентам лучше представить структуру методов оптимизации как большого раздела высшей математики. Поэтому изучение темы «Задача Лагранжа в форме Понtryгина» в рамках курса (или модуля) «Вариационное исчисление» представляется обоснованным.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим математическую модель управляемого объекта, используемую в оптимальном управлении (см., например, [2-4]).

1. Будем предполагать, что состояние объекта в данный момент времени задается набором из n чисел $x_1, \dots, x_n$, которые далее называются фазовыми координатами. Естественно ввести в рассмотрение пространство R^n с декартовыми координатами $x_1, \dots, x_n$. Набор чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$ будем называть фазовым вектором (фазовым состоянием).

При наличии внешних ограничений на состояния объекта, задается подмножество $S \subseteq R^n$ и требуется, чтобы $x(t) \in S$ для всех $t \in \Delta$.

3. Движение управляемого объекта моделируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

[illegible]

Постановка задачи Лагранжа

$$J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt + \psi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \rightarrow extr,$$

$$J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt + \psi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \rightarrow extr,$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad (\text{i})$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x, u) dt + \psi_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0, j = 1, \dots, m, \text{ (ii)}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), u = (u_1, \dots, u_r), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

$$x_1(t), \dots, x_n(t) \in C^1(\Delta), u_1(t), \dots, u_r(t) \in C(\Delta). \text{ (iii)}$$

Уточним некоторые моменты постановки задачи.

1. Числа t_0, t_1 будем предполагать заданными.

2. f_j, φ_i – заданные функции $n + r + 1$ переменных $t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$. Функции f_j предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми, функции φ_i – непрерывно дифференцируемыми.

3. ψ_j - заданные непрерывно дифференцируемы функции $2n + 2$ переменных $t_0, t_1, x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)$. При наличии слагаемого $\psi_0(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$ в функционале изучаемая задача представляет собой задачу Больца.

4. Условия (1) представляют собой дифференциальные связи, которые являются частью постановки вариационной задачи на условный экстремум.

5. Условия (2) включают в себя как интегральные связи, так и граничные условия неподвижного (фиксированного) конца при $f_i = 0$. При этом, если не фиксировать t_0 и (или) t_1 , то мы бы получили вариационную задачу с подвижными границами.

6. Вектор-функция $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ задает фазовую траекторию, вектор-функция $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ - управление.

7. Условия (3) позволяют отнести рассматриваемую задачу к классу задач вариационного исчисления и решать ее соответствующими методами. В задаче Понтрягина это условие заменяется на условие кусочной непрерывности вектор-функции $u(t)$ и задача решается уже методами оптимального управления.

Сформулируем несколько определений.

1. Пара $\xi = (x(t), u(t))$ управляемым процессом (УП) в задаче Лагранжа, если она удовлетворяет (3) и для любого $t \in \Delta$ выполнено условие (1).

2. Управляемый процесс $\xi = (x(t), u(t))$ называется допустимым управляемым процессом (ДУП), если для него выполняются условия (2).

3. Допустимый управляемый процесс называется оптимальным процессом (ОП), если он является локальным экстремумом функционала J в линейном нормированном пространстве $\Xi = C^1(\Delta, R^n) \times C(\Delta, R^r)$.

Схема решения задачи Лагранжа

1. Составить вспомогательный функционал

$$J[x, u; p, \lambda] = \int_{t_0}^{t_1} L dt + l,$$

где

$$L = \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(t, x, u) + \sum_{i=1}^n p_i(t) (\dot{x}_i - \varphi_i(t, x, u)), \quad (\text{iv})$$

$$l = \sum_{j=0}^m \lambda_j \psi_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)), \quad (\text{v})$$

$$\lambda_0, \dots, \lambda_m \in R, p_1(t), \dots, p_n(t) \in C^1(\Delta).$$

Вектор $\Lambda = (\lambda, p) = (\lambda_0, \dots, \lambda_m, p_1(t), \dots, p_n(t))$ называется вектором множителей Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия оптимального процесса:

(а) уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\text{для } x_i: \dot{p}_i = L_{x_i},$$

$$\text{для } u_i: L_{u_i} = 0,$$

(б) условия трансверсальности: $p_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_i(t_k)}, k = 0, 1.$

3. Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполнены условия п.2, при условии, что $\Lambda \neq 0$. Такие процессы будем называть экстремальными допустимыми управляемыми процессами (ЭДУП).

Замечание. При отыскании ЭДУП бывает удобным рассмотреть отдельно два случая: 1) $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить $\lambda_0 = 1$ или любой другой положительной константе в задаче отыскания минимума и произвольной отрицательной константе в задаче отыскания максимума.

4. Среди найденных в п.3 экстремальных допустимых управляемых процессов отыскать решение задачи Лагранжа или доказать, что задача не имеет решений.

Замечание. Покажем, как связаны сформулированные в п.2 необходимые условия ОП с необходимыми условиями экстремума функционалов в классических вариационных задачах.

1. Система уравнений Эйлера-Лагранжа в ВЗ с функционалом, зависящим от нескольких функций, имеет вид

$$L_{y_i} - \frac{d}{dx}(L_{y_i}') = 0, i = 1, \dots, n.$$

После замены $x \mapsto t, y_i \mapsto x_i$, система уравнений Эйлера-Лагранжа примет вид

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt}(L_{\dot{x}_i}) = 0, i = 1, \dots, n.$$

Для функции Лагранжа (4) имеем $L_{\dot{x}_i} = p_i$ и мы получаем уравнения Эйлера-Лагранжа для x_i : $\dot{p}_i = L_{x_i}$.

Аналогичным образом, после замены $x \mapsto t, y_i \mapsto u$, система уравнений Эйлера-Лагранжа примет вид

$$L_{u_i} - \frac{d}{dt}(L_{\dot{u}_i}) = 0, i = 1, \dots, r,$$

но $L_{\ddot{u}_i} = 0$, и мы приходим к уравнениям Эйлера-Лагранжа для u_i : $L_{u_i} = 0$.

2. Условия трансверсальности в задаче Больца имели вид:

$$L_{y'}|_{x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y(x_1)}, L_{y'}|_{x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial y(x_2)}.$$

После замен $x \mapsto t, y \mapsto x_i, \psi \mapsto l$ для функции Лагранжа (4) и терминанта (5) эти условия примут вид $p_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_i(t_k)}, k = 0, 1$.

Примеры решения задачи Лагранжа

Пример 1. Решить задачу:

$$J[x, u] = \int_0^2 u^2 dt + x^2(0) \rightarrow \min,$$

$$\ddot{x} - x = u, x(2) = 1.$$

Решение. Приведем задачу к виду задачи Лагранжа, введя новые переменные $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$:

$$J[x, u] = \int_0^2 u^2 dt + x_1^2(0) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \\ x_1(2) = 1. \end{cases}$$

1. Составим вспомогательный функционал

$$\tilde{J}[x, u; p, \lambda] = \int_0^2 L dt + l,$$

где

$$L = \lambda_0 u^2 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - x_1 - u),$$

$$l = \lambda_0 x_1^2(0) + \lambda_1 (x_1(2) - 1).$$

Введем вектор множителей Лагранжа: $\Lambda = (\lambda, p) = (\lambda_0, \lambda_1, p_1(t), p_2(t))$.

2. Выпишем необходимые условия оптимального процесса:

(а) уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\text{для } x_i: \dot{p}_i = L_{x_i}, i = 1, 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2, \\ \dot{p}_2 = -p_1, \end{cases}$$

$$\text{для } u_i: L_{u_i} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0,$$

(б) условия трансверсальности: $p_i(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x_i(t_k)}, k = 0, 1$,

$$p_1(0) = 2\lambda_0 x_1(0), p_1(2) = -\lambda_1,$$

$$p_2(0) = 0, p_2(2) = 0.$$

3. Найдем допустимые управляемые процессы, для которых выполнены условия п.2 для $\Lambda \neq 0$.

1) Рассмотрим сначала случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае из уравнений Эйлера-Лагранжа для x_i будет следовать, что $p_1 = p_2 = 0$, а из условий трансверсальности - $\lambda_1 = 0$. Следовательно, $\Lambda = 0$, задача Лагранжа в случае $\lambda_0 = 0$ решений не имеет.

2) Пусть теперь $\lambda_0 \neq 0$. В этом случае в задаче отыскания минимума можно положить $\lambda_0 = 1$ или любой другой положительной константе.

Пусть $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $u = p_2$, а из уравнений Эйлера-Лагранжа для x_i и условий трансверсальности получим, что $p_1 = p_2 = 0$. Кроме того, из первого условия трансверсальности следует, что $x_1(0) = 0$. С этими результатами возвращаемся к исходной задаче. Получаем краевую задачу

$$\ddot{x} - x = 0, x(0) = 0, x(2) = 1.$$

Решение этой краевой задачи имеет вид $x = \frac{sh\,t}{sh\,2}$. Итак, ЭДУП задается парой функций

$$\hat{x} = \frac{sh\,t}{sh\,2}, \hat{u} = 0.$$

4. Проверка в данном случае очевидна:

$$J[x, u] = \int_0^2 u^2 dt + x^2(0) \geq 0 = J[\hat{x}, \hat{u}].$$

Следовательно, пара $\hat{x} = \frac{sh\,t}{sh\,2}, \hat{u} = 0$ является оптимальным процессом. Заметим, что мы нашли глобальный минимум на множестве всех допустимых управляемых процессов.

Пример 2. Решить задачу:

$$J[x, u] = \int_0^2 u^2 dt + x^2(0) \rightarrow \min,$$

$$\ddot{x} + x = u, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{x}(0) = 0.$$

Решение. Приведем задачу к виду задачи Лагранжа, введя новые переменные $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$:

$$J[x, u] = \int_0^2 u^2 dt + x_1^2(0) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1 \end{cases}$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2(0) = 0.$$

1. Составим вспомогательный функционал

$$\tilde{J}[x, u; p, \lambda] = \int_0^2 L dt + l,$$

где

$$L = \lambda_0 u^2 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 + x_1 - u),$$

$$l = \lambda_1 x_1 \left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 x_2(0).$$

Вектор множителей Лагранжа: $\Lambda = (\lambda, p) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, p_1(t), p_2(t))$.

2. Выпишем необходимые условия оптимального процесса:

(а) уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\text{для } x_i: \dot{p}_i = L_{x_i}, i = 1, 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = p_2, \\ \dot{p}_2 = -p_1, \end{cases}$$

$$\text{для } u_i: L_{u_i} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0,$$

(b) условия трансверсальности:

$$p_1(0) = 0, p_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_1,$$

$$p_2(0) = \lambda_2, p_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Найдем допустимые управляемые процессы, для которых выполнены условия п.2 (ЭДУП) при $\Lambda \neq 0$.

1) В случае $\lambda_0 = 0$, как и в примере 1, из уравнений Эйлера-Лагранжа и условий трансверсальности будет следовать, что $\Lambda = 0$, то есть задача Лагранжа в случае $\lambda_0 = 0$ решений не имеет.

2) Пусть теперь $\lambda_0 \neq 0$. Положим $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $u = p_2$, а из уравнений Эйлера-Лагранжа для x_i и условий трансверсальности получим, что $p_2 = A \cos t$. С этим результатом возвращаемся к исходной задаче. Получаем краевую задачу

$$\ddot{x} + x = A \cos t, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{x}(0) = 0.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2} A t \sin t$. Используя граничные условия, найдем ЭДУП:

$$\hat{x} = C_1 \cos t, \hat{u} = 0.$$

4. Проверка снова очевидна:

$$J[x, u] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \geq 0 = J[\hat{x}, \hat{u}].$$

Следовательно, пара $\hat{x} = C_1 \cos t, \hat{u} = 0$ при любом C_1 является оптимальным процессом. Заметим, что мы снова нашли минимум функционала на множестве всех допустимых управляемых процессов.

Замечание. Если в условии задачи заменить второе граничное условие $\dot{x}(0) = 0$ на условие $\dot{x}(0) = 1$, то решение краевой задачи будет иметь вид

$$\hat{x} = C_1 \cos t + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) t \sin t, \hat{u} = -\frac{4}{\pi} \cos t.$$

Проверка оптимальности всех найденных допустимых процессов будет более сложной. Для ее выполнения рассмотрим произвольный допустимый управляемый процесс (x, u) и сравним значения функционалов $J[x, u]$ и $J[\hat{x}, \hat{u}]$. Для этого представим ДУП (x, u) в виде $x = \hat{x} + g, u = \hat{u} + h$ где функции g, h удовлетворяют условиям

$$\ddot{g} + g = h, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{g}(0) = 0.$$

Теперь оценим значение функционала

$$J[x, u] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\hat{u} + h)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{u}^2 dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} h \hat{u} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^2 dt \geq J[\hat{x}, \hat{u}],$$

так как первый интеграл равен $J[\hat{x}, \hat{u}]$, третий - неотрицателен, а второй равен нулю:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h \hat{u} dt &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ddot{g} + g) \cos t dt = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t d\dot{g} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g \cos t dt = \\ &= -\frac{4}{\pi} \left(\dot{g} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{g} \sin t dt \right) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g \cos t dt = -\frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d g + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g \cos t dt \right) = \\ &= -\frac{4}{\pi} \left(g \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g \cos t dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом значении C_1 пара $\hat{x} = C_1 \cos t + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) t \sin t$, $\hat{u} = -\frac{4}{\pi} \cos t$ является оптимальным процессом.

Заключение

В работе показана целесообразность изучения темы «Задача Лагранжа в форме Понтрягина» в рамках курса (модуля) «Вариационное исчисление», изучаемого в техническом университете. Предложена методика изложения этой темы для случая задачи Лагранжа с фиксированными границами. Разобраны примеры решения задач.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М.: Эдиториал УРСС, 2014. 208 с.
2. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М.: Изд-во МГТУ, 2006. - 487 с.
3. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 255 с.
4. Галеев Э.М. Оптимизация: Теория, примеры, задачи. Изд.6, испр. - М.: Эдиториал УРСС, 2015. - 344 с.

Nina G. Khorkova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

ninakhorkova@bmstu.ru

On some methodological aspects of teaching the topic "Lagrange problem in the Pontryagin form " as part of the course "Calculus of variations"

Abstract. The article substantiates the expediency of studying the topic "Lagrange problem in the Pontryagin form" within the course (module) "Calculus of variations". A methodology for presenting this topic is proposed. A method for solving the Lagrange problem with fixed boundaries is described. Examples of solving tasks are considered.

Key words: variational problem, optimal control, functional, Lagrange problem, optimal process.

О КЛАССИФИКАЦИИ ЛАГРАНЖИАНОВ, ОБЛАДАЮЩИМИ ЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА, И ГЕНЕРИРОВАНИИ ЗАДАНИЙ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Аннотация

В статье рассматривается вариационная задача с функционалами, зависящими от старших производных. Дана классификация лагранжианов, обладающими линейными уравнениями Эйлера-Лагранжа. Доказано, что такие лагранжианы с точностью до полных производных являются квадратичными функциями производных. Предложена методика генерирования заданий рассматриваемого вида.

Ключевые слова

вариационная задача, функционал, лагранжиан, уравнение Эйлера-Лагранжа, дифференциальное уравнение

АВТОРЫ

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Чигирева Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Введение

Создание банка заданий для контроля знаний студентов по той или иной дисциплине является актуальной задачей. В данной работе мы продолжим обсуждать тему банка заданий по вариационному исчислению. При составлении заданий необходимо учитывать следующие моменты. Данная дисциплина в МГТУ им. Н.Э.Баумана читается для различных специальностей, соответственно, объем часов, выделяемых на изучение курса разный. Изучение дисциплины «Вариационное исчисление» в значительной степени опирается на курс «Обыкновенные дифференциальные уравнения», содержание которого также зависит от специальности. Кроме того, задачи из банка будут использоваться для разных целей: для составления билетов рубежных контролей, экзаменационных билетов и домашних заданий. Очевидно, что задачи, которые студент должен решить в аудитории за ограниченное время, должны отличаться от задач домашних заданий. Поэтому банк заданий должен содержать задачи разного уровня сложности.

Методология и результаты исследования

В статье [1] были рассмотрены методы построения серий задач для функционала вида $J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$, который исследуется на экстремум в простейшей задаче вариационного исчисления и в вариационных задачах с подвижными границами.

В данной работе рассматриваются вариационные задачи, в которых требуется найти экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, n > 1, \quad (1)$$

на множестве функций $y(x) \in C^n[x_1, x_2]$, удовлетворяющих граничным условиям $y^{(k)}(x_j) = y_{kj}$, $k = 0, 1, \dots, n-1, j = 1, 2$ (числа x_j, x_{kj} заданы). Такие задачи называются вариационными задачами с функционалами, зависящими от производных высших порядков (см., например [2], [3]).

Далее будем предполагать, что все производные, которые присутствуют в формулах, существуют и непрерывны в соответствующих областях.

Стандартная схема решения вариационных задач выглядит следующим образом.

1. Составить уравнение Эйлера-Лагранжа.

2. Найти допустимые экстремали, т.е. решения уравнения Эйлера-Лагранжа, для которых выполняются все дополнительные условия задачи (для рассматриваемой задачи - граничные условия). Если допустимых экстремалей нет, то вариационная задача не имеет решения.

3. Для каждой найденной допустимой экстремали проверить выполнение достаточных условий экстремума.

При выполнении пункта 2 необходимо использовать навыки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае задачи (1) порядок уравнения Эйлера-Лагранжа будет 4 и выше. В стандартных курсах дифференциальных уравнений в техническом университете изучается метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома. Поэтому необходимо сначала выяснить, для каких задач (1) уравнение Эйлера-Лагранжа будет линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Классификация лагранжианов, обладающими линейными уравнениями Эйлера-Лагранжа

Для функционала (1) уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$L_y - D_x(L_{y'}) + D_x^2(L_{y''}) - \dots + (-1)^n D_x^n(L_{y^{(n)}}) = 0, \quad (2).$$

где оператор полной производной определяется формулой

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}.$$

Напомним, что левая часть уравнения (2) есть результат применения оператора Эйлера (см. [4-6]) к лагранжиану $L(x, y, y', \dots, y^{(n)})$:

$$Eu(L) \stackrel{\text{def}}{=} L_y - D_x(L_{y'}) + D_x^2(L_{y''}) - \dots + (-1)^n D_x^n(L_{y^{(n)}}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k D_x^k(L_{y^{(k)}}).$$

Сначала докажем простую лемму.

Лемма 1. $Eu(D_x(G(x, y, y', \dots, y^{(n)}))) = 0$.

Доказательство. Положим $F = D_x G = G_x + \sum_{k=0}^n y^{(k+1)} G_{y^{(k)}}$. Вычислим производные функции F по переменным $y, y', \dots, y^{(n)}, y^{(n+1)}$ и подставим их в выражение для оператора Эйлера:

$$Eu(F) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k D_x^k (F_{y^{(k)}}) = D_x G_y - D_x (D_x G_{y'} + G_y) + D_x^2 (D_x G_{y''} + G_{y'}) - \\ - \dots + (-1)^n D_x^n (D_x G_{y^{(n)}} + G_{y^{(n-1)}}) + (-1)^{n+1} D_x^{n+1} (G_{y^{(n)}}) = 0.$$

Лемма доказана.

Следовательно, уравнение Эйлера-Лагранжа не меняется при добавлении к функции Лагранжа слагаемых, которые являются полными производными. Заметим, что это утверждение является частным случаем более сильного утверждения, доказанного в монографиях [5-6] с использованием нетривиального аппарата С-спектральных последовательностей.

Теорема. Пусть функция Лагранжа $L(y, y', \dots, y^{(n)})$ - полином от переменных $y, y', \dots, y^{(n)}$, а уравнение Эйлера-Лагранжа для L является линейным дифференциальным уравнением. Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{k=0}^n a_k (y^{(k)})^2 + ay + D_x (G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})), a_k \in R,$$

для некоторой функции G указанных переменных.

Доказательство. Введем (см., например, [5-6]) следующие обозначения. Производные $y^{(k)}$ заменим на переменные p_k , функцию $F(p_0, p_1, \dots, p_n)$ переменных $p_0, p_1, \dots, p_n$, $F_{p_n} \neq 0$, точный вид которой будет не важен, будем обозначать $F(n)$.

Выясним, при каких условиях на полиномиальную функцию Лагранжа $L(p_0, p_1, \dots, p_n)$, $L_{p_n} \neq 0$, уравнение Эйлера-Лагранжа для L будет линейным. Очевидно, что порядок уравнения Эйлера-Лагранжа будет равен $2n$: $Eu(L) = F(2n)$. Также легко видеть, что переменная p_{2n} входит в уравнение Эйлера-Лагранжа в первой степени. Найдем коэффициент при переменной p_{2n} . Для этого вычислим производные:

$$D_x L = \sum_{k=0}^n p_{k+1} L_{p_k}, \\ D_x L_{p_n} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} L_{p_k p_n} + p_{n+1} L_{p_n p_n} = p_{n+1} L_{p_n p_n} + F(n), \\ D_x^n (L_{p_n}) = D_x^{n-1} (D_x L_{p_n}) = p_{2n} L_{p_n p_n} + F(2n-1).$$

Очевидно, что переменная p_{2n} содержится в слагаемом $D_x^n (L_{p_n})$ и не содержится в других слагаемых уравнения Эйлера-Лагранжа. Следовательно, в силу линейности последнего получим, что

$$L_{p_n p_n} = c_n = const \Rightarrow L = \frac{1}{2} c_n p_n^2 + A(n-1)p_n + B(n-1).$$

Покажем, что $L = \frac{1}{2} c_n p_n^2 + \tilde{B}(n-1) + D_x (F(n-1))$.

Пусть функция $F = F(n-1)$ удовлетворяет условию $F_{p_{n-1}} = A(n-1)$. Тогда

$$A(n-1)p_n = D_x (F(n-1)) - \sum_{k=0}^{n-2} p_{k+1} F_{p_k}.$$

Очевидно, что второе слагаемое является функцией переменных $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$. Следовательно, $L = \frac{1}{2} c_n p_n^2 + \tilde{B}(n-1) + D_x (F(n-1))$, а уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид: $c_n p_{2n} + Eu(\tilde{B}) = 0$. Так как $Eu(\tilde{B}) = F(2n-2)$, то, повторяя рассуждения, подобные приведенным выше, получим, что

$$\tilde{B} = \frac{1}{2}c_{n-1}p_{n-1}^2 + C(n-2) + D_x(F(n-2)).$$

Следовательно,

$$L = \frac{1}{2}c_n p_n^2 + \frac{1}{2}c_{n-1}p_{n-1}^2 + C(n-2) + D_x(F(n-1)).$$

Используя метод математической индукции, окончательно получим, что

$$L = \frac{1}{2}c_n p_n^2 + \frac{1}{2}c_{n-1}p_{n-1}^2 + \dots + \frac{1}{2}c_0 p_0^2 + ap_0 D_x(F(n-1)). \quad (3)$$

Теорема доказана.

Следствие. Если функция Лагранжа $L(y, y', \dots, y^{(n)})$ - полином от переменных $y, y', \dots, y^{(n)}$, а уравнение Эйлера-Лагранжа для L является линейным, то это уравнение имеет вид

$$c_n y^{(2n)} - c_{n-1} y^{(2n-2)} + \dots + (-1)^n c_0 y = 0.$$

Заметим, что если к лагранжиану (3) прибавить слагаемое вида $f(x)y$, то уравнение Эйлера-Лагранжа станет неоднородным:

$$c_n y^{(2n)} - c_{n-1} y^{(2n-2)} + \dots + (-1)^n c_0 y = (-1)^n f(x). \quad (4)$$

**О генерировании заданий с функционалами,
зависящими от производных высших порядков**

Базовый вид лагранжиана для составления заданий следующий

$$L = \frac{1}{2}c_n (y^{(n)})^2 + \frac{1}{2}c_{n-1} (y^{(n-1)})^2 + \dots + \frac{1}{2}c_0 y^2 + f(x)y + D_x(F(n-1)). \quad (5)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для L имеет вид (4). Обсудим составляющие функции L .

1. Коэффициенты квадратичной части $c_0, \dots, c_n$ являются коэффициентами (с точностью до знака) характеристического уравнения

$$c_n \lambda^{2n} - c_{n-1} \lambda^{2n-2} + \dots + (-1)^n c_0 = 0, \quad (6)$$

которое имеет $2n$ корней с учетом кратности. Предполагается задавать набор корней, по которому программа вычислит коэффициенты $c_0, \dots, c_n$, а также сгенерирует общее решение соответствующего однородного уравнения.

2. Слагаемое $f(x)y$ определяет правую часть уравнения Эйлера-Лагранжа (4). Учитывая программу высшей математики технического университета, предлагается выбирать в качестве $f(x)$ функции вида

$$\cos \beta x, \sin \beta x, e^{\alpha x}, ch \beta x, sh \beta x, e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, x^3 e^{\alpha x}, \\ x \cos \beta x, x \sin \beta x, x^2 \cos \beta x, x^2 \sin \beta x, x ch \beta x, x sh \beta x, x^2 ch \beta x, x^2 sh \beta x.$$

Меняя значения параметров α и β , получим серию задач, в которых уравнение Эйлера-Лагранжа является линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$. Метод решения таких уравнений известен студентам второго курса. Кроме того, решения этих уравнений можно записать в общем виде с набором параметров и получить серию заданий с ответами для автоматического генерирования.

Отметим, что уравнение Эйлера-Лагранжа будет также неоднородным, если к лагранжиану (5) добавлять слагаемые вида $f(x)y^{(k)}$.

3. Слагаемое $D_x(F(n-1))$ не меняет уравнение Эйлера-Лагранжа, функция $F(n-1)$ может быть любой дифференцируемой функцией переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Добавляя к функции Лагранжа L , полные производные можно "размножать" задания по вариационному исчислению. Такие слагаемые не имеют физического смысла, но могут быть полезны для отработки навыков составления уравнений Эйлера-Лагранжа.

Заметим также, что прием, использованный при доказательстве теоремы, позволяет в выражении (5) для функции Лагранжа L заменять квадраты производных на другие выражения. Например, учитывая очевидное равенство $D_x(y^{(k-1)}y^{(k)}) = y^{(k-1)}y^{(k+1)} + (y^{(k)})^2$, можно при $k < n$ заменить $(y^{(k)})^2$ на $-y^{(k-1)}y^{(k+1)}$. После такой замены в функции Лагранжа L уравнение Эйлера-Лагранжа не изменится.

Описание программы, реализующей генерирование заданий по предложенной схеме, представляет собой тему отдельной статьи. Ниже на примерах показан разный уровень сложности получаемых уравнений Эйлера-Лагранжа.

Примеры

Пример 1. Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y^{IV} + 2y'' + y = 1.$$

Найти общее решение этого уравнения не представляет проблем, так как общее решение соответствующего однородного уравнения записывается по инструкции (случай кратного корня), частное решение легко угадывается:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x + 1.$$

Пример 2. Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y^{IV} + 2y'' + y = \sin x.$$

В данном примере потребуется время для нахождения частного решения неоднородного уравнения. По инструкции это решение ищется методом неопределенных коэффициентов и имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x^2 (A \cos x + B \sin x).$$

В формуле появляется множитель x^2 , так как корень квазиполинома является кратным корнем характеристического уравнения.

Для упрощения вычислений в данном случае удобно воспользоваться формулой

$$(fg)^{IV} = f^{IV}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{IV}, \quad (7)$$

и вычислить производные функции $y_{\text{чн}}$ в общем виде, положив $f = x^2$, $g = A \cos x + B \sin x$. После подстановки в уравнение Эйлера-Лагранжа получим

$$(12g'' + 8xg''' + x^2g^{IV}) + 2(2g + 4xg' + x^2g'') + x^2g = \sin x.$$

Учитывая, что $g^{IV} = -g'' = g$, $g''' = -g'$, получаем $-8g = \sin x$, откуда следует, что $A = 0, B = -1/8$. Итак, общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \sin x.$$

Пример 3. Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y^{IV} + y = 2e^x \sin x.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^4 + 1 = 0$ являются корнями 4 степени из комплексного числа -1: $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{00} = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = e^x (A \cos x + B \sin x).$$

Для нахождения коэффициентов A и B снова удобно воспользоваться формулой (7), где $f = e^x$, $g = A \cos x + B \sin x$. Учитывая, что $g^{IV} = -g'' = g$, $g''' = -g'$, $f^{IV} = f''' = f'' = f' = f$, получаем $-4g + 2g' = 2 \sin x$, или

$$(B - 2A) \cos x - (A + 2B) \sin x = \sin x,$$

откуда следует, что $A = -1/5$, $B = -2/5$. Итак, общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{5} e^x (\cos x + 2 \sin x).$$

Заключение

В работе рассмотрены вариационные задачи с функционалами, зависящими от производных высших порядков. Доказано, что лагранжианы, обладающие линейными уравнениями Эйлера-Лагранжа, с точностью до полных производных являются квадратичными функциями производных. Предложена методика построения генерирования заданий для банка задач домашних заданий и рубежных контролей по вариационному исчислению.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Безверхний Н.В., Хорькова Н.Г. Математические аспекты генерирования заданий по вариационному исчислению. – Modern European Researches – 2021.- № 2.1 – с.36-42.
2. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М.: Эдиториал УРСС, 2014. 208 с.
3. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М.: Изд-во МГТУ, 2006. - 487 с.
4. Хорькова Н.Г. Об операторе Эйлера в задачах вариационного исчисления. – Modern European Researches – 2021.- № 2.1 – с.136-141.
5. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Торхов Ю.Н., Самохин А.В., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во Факториал-Пресс, 2005, 380 с.
6. Bocharov A.V., Chetverikov V.N., Duzhin S.V., Khor'kova N.G., Krasil'shchik I.S. (ed.), Samokhin A.V., Torkhov Yu.N., Verbovetsky A.M., Vinogradov A.M. (ed.) Symmetries and Conservation Laws for Differential Equation of Mathematical Physics // Translations of Mathematical Monographs, vol. 182 – Providence, RI: AMS, 1999.– 333 p.

Nina G. Khorkova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

ninakhorkova@bmstu.ru

Olga Yu. Chigiryova,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow

mkfn12@yandex.ru

On the classification of Lagrangians with linear Euler-Lagrange equations and the generating of the calculus of variations tasks

Abstract. The article deals with variational problems with functionals depending on the highest derivatives. A classification of Lagrangians with linear Euler-Lagrange equations is given. It is proved that such Lagrangians, up to total derivatives, are quadratic functions of derivatives. A method for generating tasks of the type under consideration is proposed.

Key words: variational problems, functional, Lagrangians, Euler-Lagrange equation, differential equations.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 3 (T.1), 2021
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Privatuniversität Schloss Seeburg, Salzburg

EDITORIAL ADDRESS
Seeburgstrasse 8, 5201 Seekirchen am Wallersee, Salzburg, Austria
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”
printed by permission of Privatuniversität Schloss Seeburg, Salzburg, Austria

Sent for printing 20-10-2021
Circulation 1000
Order 013117/125

© All Rights Reserved, 2021