ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 1 (T.1)
2022

Salzburg, Austria

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2022) ISSUE 1 (T.1), 145 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

EDITORIAL ADDRESS

SEEBURGSTRASSE 7,

5201 SEEKIRCHEN AM WALLERSEE,

SALZBURG, AUSTRIA

PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Printed in Austria, 2022

CONTENTS

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОПИКОВЫХ ЛАНДШАФТОВ В 2-АДИЧЕСКОЙ ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ М. ЭЙГЕНА В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ»

Аннотация

Модель квазивидов М. Эйгена, известная в математической биологии более 50 лет, уже стала классической. Обычно она входит в курс «Математические модели в биологии», читаемый для студентов направления (специальности) «Прикладная математика». Несколько лет назад Ю.С. Семенов и А.С. Новожилов предложили обобщение этой модели. В частности, в *p*-адической обобщённой модели, где *p* – простое число, используется метрическое пространство – кольцо классов вычетов целых чисел по модулю *n*-ой степени *p* с *p*-адической метрикой. В статье описан подход к исследованию поведения функции средней приспособленности, возникающей в обобщённой 2-адической модели, в зависимости от параметра репликации *q*. Основу этого подхода составляет применение методов линейной и общей алгебры для получения относительно простого алгебраического уравнения для функции средней приспособленности.

Ключевые слова

модель квазивидов Эйгена, ландшафт приспособленности, матрица мутаций, собственное значение, p-адическая метрика

АВТОРЫ

Андреева Татьяна Владимировна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
t-v-andreeva@mail.ru

Подалицына Анастасия Александровна,
магистрант ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
letabru97.11@gmail.com

Семенов Юрий Станиславович,
кандидат физико-математических наук, доцент, г. Москва
yuri_semenoff@mail.ru

Введение

В классической модели М. Эйгена [1], часто изучаемой в курсе «Математические модели в биологии», рассматриваются последовательности (геномы) фиксированной длины n. Каждая последовательность состоит из нулей и единиц, поэтому $l = 2^n$ - общее количество последовательностей различных типов. При переходе к следующему поколению последовательности могут либо воспроизводиться безошибочно, либо мутировать (во втором случае тип меняется). Воспроизводство происходит в дискретные моменты времени, и родительская последовательность типа k производит потомство типа j в среднем с вероятностью q_{jk}. Следовательно, q_{kk} - это вероятность безошибочного воспроизведения, причём $\sum_j q_{jk} = 1$.

Пусть $p \in R^l$, $p^T = (p_0; \ldots; p_{l-1})$, - вектор относительных частот последовательностей различных типов в мутационном равновесии. Тогда p можно найти как положительный нормированный ($\sum_k p_k = 1$) собственный вектор матрицы QW, соответствующий главному (максимальному) собственному значению λ, из матричного уравнения $QWp = \lambda p$. Здесь $W = diag(w_0; \ldots; w_{l-1})$ - диагональная неотрицательная матрица, описывающая ландшафт приспособленности (индексы считаются с 0), и $Q = (q_{jk})_{l\times l}$ - матрица мутаций, которая является стохастической по определению. В равновесии максимальное собственное значение λ равно средней приспособленности $\lambda = \bar{w} = \sum_j w_j p_j$. Вектор p был назван М. Эйгеном и его соавторами *квазивидом*.

При больших значениях n поиск собственных значений матрицы QW становится довольно затруднительным с точки зрения вычислительных методов. В работе [2] была, в частности, разработана методика получения относительно простого (по сравнению с характеристическим) алгебраического уравнения для $\bar{w}$ в ряде частных случаев. Её основу составляет применение методов линейной и общей алгебры, знакомых студентам - прикладным математикам ещё с первого-второго курса. Эта методика уже была использована в нескольких дипломных работах студентов для исследования поведения зависимости $\bar{w} = \bar{w}(q)$.

Перейдём теперь к описанию обобщённой модели квазивидов [2, 3]. Пусть (X, d) - конечное метрическое пространство диаметра N с числом элементов $l = |X|$, на котором транзитивно действует группа изометрий $\Gamma \leq Iso(X)$, $G \leq \Gamma$ - некоторая подгруппа в Γ, w - неотрицательная функция на множестве X (функция приспособленности).

Четвёрка (X, d, Γ, w) называется однородным Γ-ландшафтом. Γ-ландшафт называется симметричным, если для любых $x, y \in X$ найдётся изометрия $\gamma \in \Gamma$ такая, что $\gamma x = y$, $\gamma y = x$.

В классической модели М. Эйгена (X, d) - это n-мерный бинарный куб с метрикой Хэмминга, $\Gamma = Iso(X)$ - полная группа изометрий порядка $2^n n!$.

Назовем ландшафт (X, d, Γ, w) G-инвариантным, если функция приспособленности w постоянна на каждой G-орбите множества X. В частности, если в качестве G взять единичную группу, то любой Γ-ландшафт будет G-инвариантным.

Рассмотрим теперь матрицу мутаций, строки и столбы которой проиндексированы элементами $x, y \in X$:

$Q = (q_{xy}) = ((1-q)^{d(x,y)} q^{N-d(x,y)})$,

где $q \in [0; 1]$ - это параметр репликации. В классической модели q - это вероятность безошибочного воспроизведения каждого отдельного символа при переходе от родительской последовательности из нулей и единиц к потомству первого поколения.

Пусть $x_0 \in X$ - некоторая отмеченная точка. Ввиду однородности ландшафта сумма чисел в каждой строке матрицы мутаций одна и та же. Она равна

$$P_X(q) = \sum_{x \in X} (1-q)^{d(x,x_0)} q^{N-d(x,x_0)}$$

- так называемому дистанционному многочлену. Отметим, что в классической модели дистанционный многочлен тождественно равен 1. Кроме того, рассмотрим определяемую функцией приспособленности ($w_x = w(x)$) диагональную матрицу $W = diag(w_x), x \in X$.

Определение. Проблема нахождения функции средней приспособленности - главного (максимального) собственного значения $\bar{w} = \bar{w}(q)$ матрицы $\frac{1}{P_X(q)} QW$ и собственного вектора $p = p(q)$, удовлетворяющих условию

$QWp = P_X(q)\overline{w}p$,

где $p_x = p_x(q) \geq 0$ и $\sum_{x \in X} p_x(q) = 1$, может быть названа обобщённой алгебраической проблемой квазивидов Эйгена.

По теореме Фробениуса-Перрона решение этой проблемы всегда существует.

Вектор равномерного распределения

$$p = \frac{1}{|X|}(1;\ \dots;\ 1)^T = \frac{1}{l}(1;\ \dots;\ 1)^T$$

обеспечивает решение обобщённой проблемы квазивидов Эйгена в случае постоянной приспособленности $w_x \equiv w > 0$.

По построению, матрица $\frac{1}{P_X(q)}Q$ является симметрической и дважды стохастической. Она называется нормализованной матрицей мутаций, чтобы отличить её от матрицы мутаций Q, элементы которой в общем случае не представляют собой вероятности.

Цель работы состоит в изложении алгебраических методов получения относительно простого алгебраического уравнения для главного собственного $\overline{w} = \overline{w}(q)$ матрицы $\frac{1}{P_X(q)}QW$, возникающей в 2-адической обобщённой модели в случае так называемого однопикового ландшафта приспособленности, в зависимости от параметра репликации q.

Предлагаемый методический подход может применяться как при написании бакалаврских (магистерских) выпускных квалификационных (дипломных) работ, так и в специальных главах курса «Математические модели в биологии». Содержательная часть работы будет полезной студентам, а также математикам и биологам.

Методология и результаты исследования

Описание 2-адической обобщённой модели. Однопиковый ландшафт

Для описания 2-адической модели используется учебный материал, обычно входящий в курс алгебры, а также в курсы «Основы теории чисел» и «Функциональный анализ» (понятие метрического пространства).

Рассмотрим, следуя работе [3], в качестве метрического пространства кольцо классов вычетов $X = X_n = Z/2^nZ = \{0; 1; \dots; 2^n - 1\}$ (n - натуральное, числа $x \in X$ берутся по модулю 2^n) с масштабированной 2-адической метрикой:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{если } x = y; \\ 2^{n-1-t}, \text{если } x - y \text{ делится на } 2^t, \text{но не делится на } 2^{t+1}. \end{cases}$$

Таким образом, введённая целочисленная метрика совпадает со стандартной 2-адической метрикой с точностью до множителя 2^{n-1}.

Отметим, что диаметр N пространства X_n равен 2^{n-1}, а $l = |X_n| = 2^n$. На рис.1 изображена часть пространства X_4 - двоичное корневое (2-адическое) дерево с разбиением этого пространства на сферы с центром в отмеченной точке $x_0 = 0$.

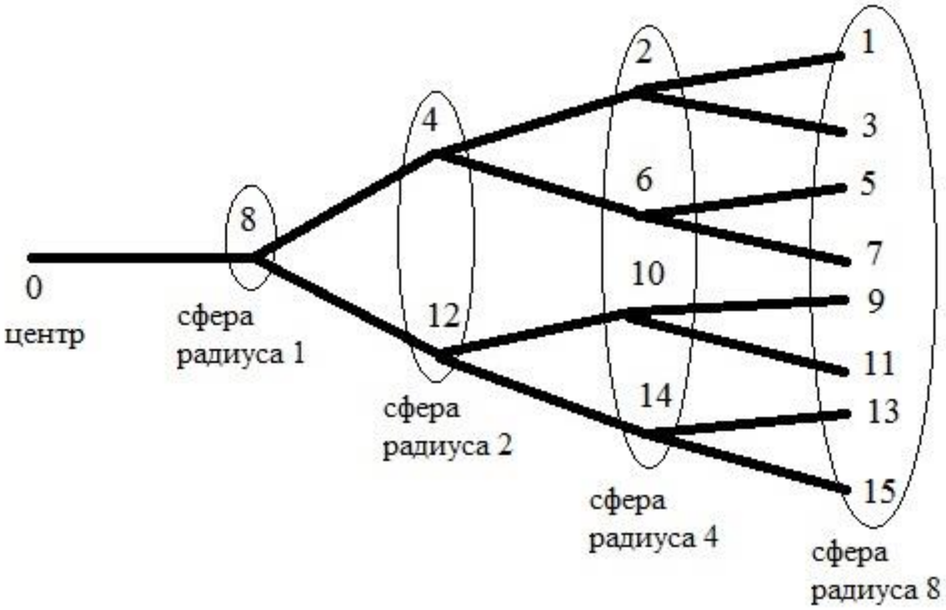


Рисунок 1. Двоичное корневое дерево – часть пространства X_4

Группа изометрий $\Gamma = \Gamma_n$ пространства $X_n = Z/2^n Z$ - это группа аффинных преобразований:

$$\Gamma = \{\gamma : x \to ax + b \mid a \in (Z/2^n Z)^*, b \in Z/2^n Z\}.$$

Можно считать, что a - любое нечётное, b - любое целое число по модулю 2^n.

Несложно показать [3], что ландшафт (X, d, Γ, w) будет однородным и симметричным. Дистанционный многочлен метрического пространства $X = X_n$ выглядит следующим образом:

$$P_X(q) = q^{2^{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j (1-q)^{2^j} q^{2^{n-1}-2^j}. \tag{1}$$

Пусть $w > 0$, $s > 0$ – два фиксированных параметра, G – единичная группа. Под однопиковым (G -инвариантным) ландшафтом мы будем понимать ландшафт (X, d, Γ, w) с функцией приспособленности

$$w(x) = \begin{cases} w + s, \text{если } x = 0; \\ w, \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Матрицы перехода к диагональному виду и собственные многочлены матрицы мутаций в 2-адической модели. Основное уравнение для главного собственного значения. График зависимости $\overline{w} = \overline{w}(q)$.

В работе [3] описана общая методика получения относительно простого (основного) уравнения для главного собственного значения $\overline{w} = \overline{w}(q)$ матрицы $\frac{1}{P_X(q)} QW$ в однопиковом случае [3, уравнение (4.21)]. В основном, применяются методы линейной и общей алгебры (касающиеся матриц, линейных пространств, колец, групп), но, кроме того, используются и базовые понятия функционального анализа – линейные нормированные и метрические пространства. Этот материал входит в рамки соответствующих курсов для студентов направления «Прикладная математика».

Перейдём к конкретному описанию нашего алгебраического подхода. Для того чтобы записать основное уравнение, нам надо найти матрицы T_n перехода к диагональному виду и собственные многочлены (зависящие от q) матрицы мутаций Q. Индексы строк и столбцов матриц в этом разделе меняются от 0 до 2^n-1, т.е. строки и столбцы индексируются точками пространства $X = X_n = Z/2^nZ$.

Как оказывается, матрицы перехода T_n такие же, как и в классической модели Эйгена. Они строятся индуктивно в соответствии с работой [2] (используется кронекерово произведение матриц):

$$T_0 = (1), T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \dots , T_n = T_1 \otimes T_{n-1} = \begin{pmatrix} T_{n-1} & T_{n-1} \\ T_{n-1} & -T_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Известно, что $T_n^{-1} = 2^{-n}T_n$. Кроме того, отметим, что строка и столбец с индексом 0 матрицы T_n состоят из одних единиц.

Следуя работе [3], запишем матрицу мутаций $Q = Q_n$ в виде

$$Q_n = q^{2^{n-1}}E_n^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}(1-q)^{2^j}\, q^{2^{n-1}-2^j}E_n^{(n-1-j)}. \qquad (2)$$

Здесь $E_n^{(n)}$ - единичная матрица порядка 2^n, а симметрические матрицы $E_n^{(m)}$ при $m < n$ состоят только из нулей и единиц и определяются следующим образом:

$$(E_n^{(m)})_{xy} = \begin{cases} 1, \text{если } d(x,y) = 2^m; \\ 0, \text{если } d(x,y) \neq 2^m. \end{cases}$$

Например, при $n = 2$ получаем $Q_2 = q^2E_2^{(2)} + q(1-q)E_2^{(1)} + (1-q)^2E_2^{(0)}$, или

$$Q_2 = q^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + q(1-q)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-q)^2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Имеется матричное равенство*

$$T_n^{-1}Q_nT_n = 2^{-n}T_nQ_nT_n = diag\left(P_{n,0}(q), \dots, P_{n,i}(q), \dots, P_{n,2^n-1}(q)\right),$$

где $P_{n,0}(q)$ *- дистанционный многочлен* (1), *а при условии* $2^{n-1-t} \le i < 2^{n-t}$:

$$P_{n,i}(q) = q^{2^{n-1}} - 2^t(1-q)^{2^t}q^{2^{n-1}-2^t} + \sum_{j=0}^{t-1}2^j(1-q)^{2^j}\, q^{2^{n-1}-2^j}. \qquad (3)$$

Доказательство. Применим сопряжение матрицей T_n к равенству (2):

$$T_n^{-1}Q_nT_n = 2^{-n}T_nQ_nT_n =$$
$$= q^{2^{n-1}}E_n^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}(1-q)^{2^j}\, q^{2^{n-1}-2^j}\cdot 2^{-n}T_nE_n^{(n-1-j)}T_n.$$

Введём в рассмотрение следующие диагональные матрицы порядка 2^n:

$$D_n^{(n)} = E_n^{(n)} = diag(1; \dots; 1),$$

$D_n^{(n-1)} = diag(1; \dots; 1; -1; \dots; -1)$ (2^{n-1} чисел 1, 2^{n-1} чисел -1),

$D_n^{(n-2)} = diag(1; \dots; 1; -1; \dots; -1; 0; \dots; 0)$ (2^{n-2} чисел 1, 2^{n-2} чисел -1),

…

$D_n^{(0)} = diag(1; -1; 0; \dots; 0)$ (одно число 1, одно число -1).

Несложно проверить следующие равенства (здесь 0 - нулевая подматрица):

$$E_n^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1}^{(n-1)} \\ E_{n-1}^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix}, E_n^{(n-r)} = \begin{pmatrix} E_{n-1}^{(n-r)} & E_{n-1}^{(n-r)} \\ E_{n-1}^{(n-r)} & E_{n-1}^{(n-r)} \end{pmatrix}, r > 1.$$

Далее, применяя блочное умножение матриц, замечаем, что для квадратных матриц T и A одного порядка выполняются равенства

$$\begin{pmatrix} T & T \\ T & -T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & T \\ T & -T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2TAT & 0 \\ 0 & -2TAT \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} T & T \\ T & -T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & T \\ T & -T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4TAT & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Индукцией по n с использованием равенства $T_n = \begin{pmatrix} T_{n-1} & T_{n-1} \\ T_{n-1} & -T_{n-1} \end{pmatrix}$ и учитывая скалярный коэффициент 2^{-n}, получаем, что $2^{-n} T_n E_n^{(n-1-j)} T_n = 2^j D_n^{(n-1-j)}$.

Окончательно, мы приходим к матричному равенству

$$T_n^{-1} Q_n T_n = q^{2^{n-1}} D_n^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} (1-q)^{2^j} q^{2^{n-1}-2^j} \cdot 2^j D_n^{(n-1-j)}.$$

Принимая во внимание сам диагональный вид матриц $D_n^{(m)}$, мы теперь можем выписать собственные многочлены:

$$P_{n,0}(q) = P_X(q) = q^{2^{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j (1-q)^{2^j} q^{2^{n-1}-2^j},$$

$$P_{n,1}(q) = q^{2^{n-1}} - 2^{n-1}(1-q)^{2^{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j (1-q)^{2^j} q^{2^{n-1}-2^j},$$

$$P_{n,2}(q) = P_{n,3}(q) = q^{2^{n-1}} - 2^{n-2}(1-q)^{2^{n-2}} q^{2^{n-2}} + \sum_{j=0}^{n-3} 2^j (1-q)^{2^j} q^{2^{n-1}-2^j},$$

$$\dots$$

$$P_{n,2^{n-1}}(q) = \dots = P_{n,2^n-1}(q) = q^{2^{n-1}} - (1-q) q^{2^{n-1}-1}.$$

Теорема доказана.

Для примера возьмём $n = 3$. Тогда

$$P_{3,0}(q) = q^4 + 4(1-q)^4 + 2(1-q)^2 q^2 + (1-q) q^3,$$
$$P_{3,1}(q) = q^4 - 4(1-q)^4 + 2(1-q)^2 q^2 + (1-q) q^3,$$
$$P_{3,2}(q) = P_{3,3}(q) = q^4 - 2(1-q)^2 q^2 + (1-q) q^3,$$
$$P_{3,4}(q) = P_{3,5}(q) = P_{3,6}(q) = P_{3,7}(q) = q^4 - (1-q) q^3.$$

Зная диагональный вид матрицы мутаций, полученный в теореме 1, и зная матрицу перехода T_n, а также обратную матрицу $T_n^{-1} = 2^{-n} T_n$, мы теперь можем записать уравнение (4.21) работы [3] в интересующем нас случае однопикового 2-адического ландшафта.

Теорема 2. *При фиксированном n для однопикового 2-адического ландшафта (X, d, Γ, w) с функцией приспособленности*

$$w(x) = \begin{cases} w + s, x = 0; \\ w, x \neq 0, \end{cases}$$

где $w > 0$, $s > 0$, *главное (максимальное) собственное значение $\overline{w} = \overline{w}(q)$ матрицы $\frac{1}{P_X(q)} QW$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{2^{-n}}{\overline{w} - w} + \sum_{c=1}^{n} \frac{2^{c-1-n} P_c(q)}{\overline{w} P_X(q) - w P_c(q)} = \frac{1}{s},$$

где $P_X(q)$ - дистанционный многочлен (1), а $P_c(q) = P_{n,2^{c-1}}(q)$ - *собственные многочлены* (3) *из теоремы* 1.

Доказательство. Ввиду формул (4.21) и (4.16) работы [3] нам остаётся только посчитать коэффициенты G_{11}^{c} при слагаемых в левой части уравнения. Зная, что строка и столбец с индексом 0 матрицы T_n состоят только из единиц, а также кратности собственных многочленов: $P_X(q)$ имеет кратность 1, а при $c > 0$ многочлен $P_c(q)$ по теореме 1 имеет кратность 2^{c-1}, получаем:

$$G_{11}^{0} = 2^{-n},\ G_{11}^{1} = 2^{-n}, \dots ,\ G_{11}^{c} = 2^{c-1-n}, \dots ,\ G_{11}^{n} = 2^{-1},$$

что и доказывает теорему.

Построение графика зависимости $\overline{w} = \overline{w}(q)$ может быть выполнено в любом графическом пакете с достаточным запасом возможностей (например, Wolfram или Maple). На рис. 2 приведен график функции $\overline{w} = \overline{w}(q)$ при $n = 10$, $w = s = 1$. Заметим, что, в отличие от классической модели Эйгена, график имеет перегиб (в классической модели выпуклость графика направлена вниз), а при $q \to 0$ остаётся практически горизонтальным. По-видимому, так называемый «порог катастроф», соответствующий точке излома графика, будет при больших n наблюдаться в окрестности $q = 0.5$, в то время как в классической модели порог катастроф наблюдается в окрестности $q = 1$ (см., например, [2]).

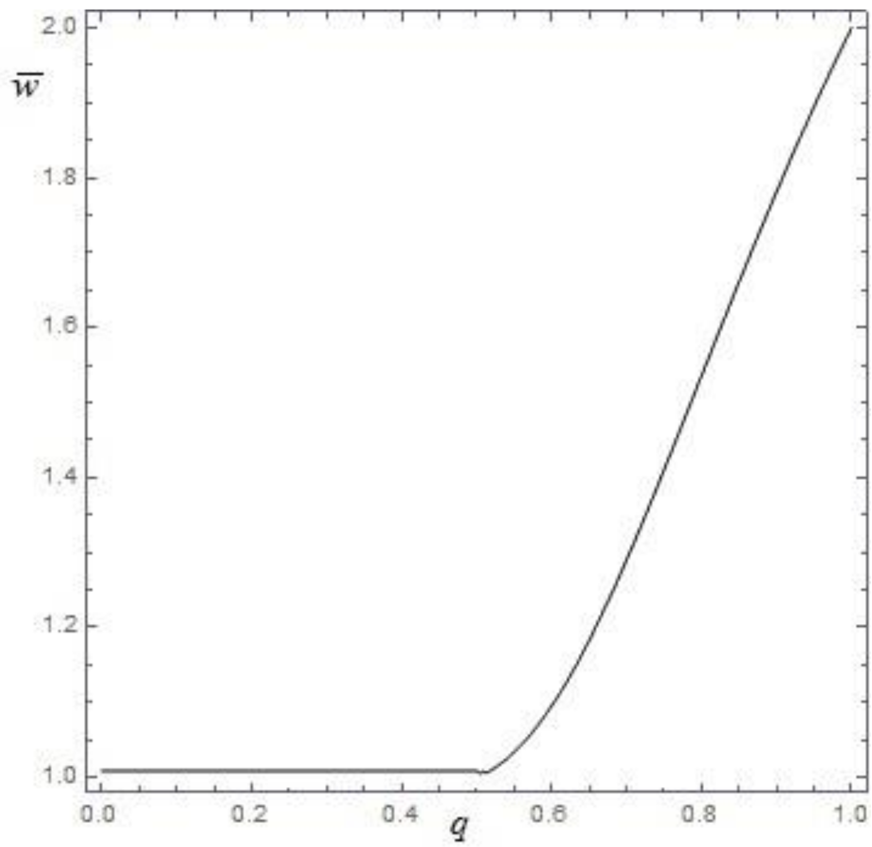


Рисунок 2. График $\overline{w} = \overline{w}(q)$ при $n = 10$, $w = s = 1$

Заключение

В статье дано описание алгебраических методов получения уравнения для функции средней приспособленности $\overline{w} = \overline{w}(q)$, возникающей в 2-адической обобщённой модели М. Эйгена, в зависимости от параметра репликации q и параметра n. Это уравнение выписано явно в теореме 2, также исследовано поведение графика функции $\overline{w} = \overline{w}(q)$ при некоторых значениях n, получены собственные многочлены матрицы мутаций и определены их кратности.

Разработанный методический подход может применяться при написании бакалаврских и магистерских дипломных работ, а также в некоторых разделах курса «Математические модели в биологии». Содержательная часть работы будет полезной студентам направления «Прикладная математика», а также математикам, биологам и, вообще, специалистам в математической биологии. Помимо этого, работа представляет самостоятельный научный интерес.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Eigen M. Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules. Naturwissenschaften, 1971, 58(10), 465 – 523.
2. Semenov Yu. S., Novozhilov A. S. On Eigen's quasispecies Model, two-Valued fitness landscapes, and isometry groups acting on finite metric spaces. Bulletin of Math. Biology, 2016, 78(5), 991 – 1038.
3. Semenov Yu. S., Novozhilov A. S. Generalized quasispecies model on finite metric spaces: isometry groups and spectral properties of evolutionary matrices. Journal of Math. Biology, 2019, 78, 837 – 878.

Tatiana V. Andreeva,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Simulation, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
t-v-andreeva@mail.ru
Anastasia A. Podalitsyna,
Magistrant, Chair "Digital technologies of transportation processes management", Russian University of Transport (MIIT)
letabru97.11@gmail.com
Yuri S. Semenov,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate professor, Moscow, Russia
yuri_semenoff@mail.ru

A research on single-peaked landscapes in the 2-adic generalized M. Eigen's model in the course «Mathematical models in biology»

Abstract. The M. Eigen's quasispecies model known in mathematical biology over 50 years now became classical. Usually it forms a part of the course «Mathematical models in biology» for the students of the specialty "Applied mathematics". Some years ago Yu. S. Semenov and A. S. Novozhilov proposed a generalization of this model. In particular, the ring of residues Z modulo n-th power of a prime p with p-adic metrics is used in the p-adic generalized model. An approach to the research on the behavior of the mean fitness function, arising in the 2-adic generalized model and depending on the fidelity q, is described in the article. The background of this approach consists in the application of linear and general algebraic methods in order to obtain a relatively simple algebraic equation for the mean fitness function.

Keywords: Eigen's quasispecies model, fitness landscape, mutation matrix, eigenvalue, p-adic metrics.

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

В статье разобраны свойства определителей матриц и продемонстрированы практические приемы использования их при решении задач по аналитической геометрии. А именно, показано, как не раскрывая определители, можно доказать справедливость равенств или найти значение определителя, оперируя лишь одними свойствами. Целью работы является иллюстрация методики применения свойств, которая позволяет в некоторых случаях вычислять определители любого порядка, не производя громоздкие расчеты. На примерах наглядно показаны эти преимущества. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям первого курса.

Ключевые слова

порядок, элементы, строки, столбцы, диагональные элементы, определители матриц, транспонирование, элементарные преобразования строк и столбцов, линейные комбинации строк и столбцов

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Введение

При изучении дисциплины «Аналитическая геометрия» на первых же занятиях студенты сталкиваются с понятием определителей матриц второго, третьего и произвольного порядков.

Определители второго, третьего, n-го порядков часто используются в векторной алгебре и при решении систем двух, трех, n линейных уравнений. Это вызвано тем, что некоторые формулы векторной алгебры, записанные через определители, имеют достаточно компактный вид и удобны как при изложении теории, так и при решении задач.

Прежде чем перейдем к рассмотрению определителей и их свойств, кратко сформулируем основные базовые понятия матриц, необходимые для дальнейшего изложения.

Методология и результаты исследования

Матрицы

Определение 1. *Матрицей* размера *m x n* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, $A, B, C, \ldots$, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i—номер строки, j—номер столбца.

Например, матрица

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи, $A = \left(a_{ij}\right), i = 1,2, \ldots, m; j = 1,2, \ldots, n$.

Виды матриц. Существуют различные типы матриц. Перечислим их, не останавливаясь подробно на описании вида той или иной матрицы.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой* $A_{1\times n}$.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом* $A_{m\times 1}$.

Матрица называется *квадратной n*-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов *m = n*, а при *m ≠ n* - *прямоугольной*.

У квадратных матриц выделяют последовательность элементов: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$—*главная диагональ*, $a_{n1}, a_{n-1.2}, \ldots, a_{1n}$—*побочная диагональ*. Элементы главной диагонали называют *диагональными*, побочной диагонали—*побочными*.

Если в квадратной матрице порядка *n* все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, то ее называют *диагональной*.

Если в диагональной матрице порядка *n* на диагонали стоят единицы, то ее называют *единичной* и обозначают через E.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ее называют *нулевой* матрицей и обозначают через *0*.

Существуют также *верхние треугольные матрицы*, у которых элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, и *нижние треугольные матрицы*, у которых, наоборот, элементы над главной диагональю равны нулю.

Часто используют матрицы и других видов, например *трехдиагональные*, *ступенчатые матрицы, симметрические, кососимметрические* и т.д.

Операции над матрицами. Перечислим какие операции можно производить над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матриц, возведение в степень, транспонирование, элементарные преобразования.

Определение 2. *Транспонирование матрицы* – это переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы меняем местами с сохранением их порядка.

Если матрица A имеет размер *m x n*, то транспонированная матрица A^T имеет размер *n x m*.

Определение 3. *Элементарные преобразования матриц* – это перестановка местами двух строк (столбцов); умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля; прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца). Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A (обозначается $B \sim A$).

Определители

Необходимость введения понятия определителя — числа, характеризующего квадратную матрицу A, — тесно связано с решением систем линейных уравнений. Определитель матрицы A обозначается $|A|$.

Поскольку определители соответствуют квадратным матрицам, то в их теорию легко переносится матричная терминология (порядок, элементы, строки, столбцы, диагональ, диагональные элементы, виды матриц и определителей, транспонирование, элементарные преобразования, линейные комбинации).

Определение 4. Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11}:

$|A| = a_{11}$.**Определение 5.** Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определение 6. Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или *определителем третьего порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определение 7. Определителем (детерминантом) матрицы *n-го* порядка, или *определителем n-го порядка*, называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых членов из элементов квадратной матрицы, которое вычисляется по следующему закону: каждое слагаемое есть произведение *n* элементов взятых по одному и только по одному из каждой строки и из каждого столбца матрицы. Каждый член определителя берётся со знаком $(-1)^t$, где t - число инверсий во вторых индексах члена, когда первые индексы члена расположены в порядке возрастания.

Сформулируем основные свойства, присущие определителям всех порядков.

Свойства определителей

1. Величина определителя не меняется при транспонировании.

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3. Если все элементы какого-либо *j-го* столбца (строки) определителя являются суммами двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в качестве *j-го* столбца (строки) взяты первые слагаемые, а во втором – вторые слагаемые; при этом элементы всех остальных строк (столбцов) у каждого из определителей одинаковы.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на некоторое число *k*, то определитель умножится на это число *k*. (Причем, за знак определителя можно выносить общий множитель *k* любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех элементов).

5. Определитель равен нулю, если он имеет:

a) нулевую строку (столбец);

b) хотя бы две одинаковые строки (столбца);

c) хотя бы две пропорциональные строки (столбца);

d) хотя бы одну строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

6. Определитель не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк (столбцов).

7. Определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}.$$

Подробное описание видов матриц, операции над ними, а также определителей и их свойств разобраны в [1,2].

Авторы статьи ставят перед собой задачу иллюстрации методики применения свойств, позволяющей в некоторых случаях вычислять определители любого порядка, не производя громоздкие расчеты.

На конкретных примерах из сборников задач [3,4] разберем, как не раскрывая определители, можно доказать справедливость равенств или найти значение различных определителей, оперируя лишь одними свойствами.

Пример 1. Доказать равенство, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство: согласно свойству 3, третий столбец определителя, стоящий в левой части равенства, представим в виде суммы трех столбцов. Тогда этот определитель можно расписать в виде суммы трех следующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x \\ a_2 & b_2 & a_2x \\ a_3 & b_3 & a_3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1y \\ a_2 & b_2 & b_2y \\ a_3 & b_3 & b_3y \end{vmatrix}.$$

Третий столбец во втором определителе пропорционален первому столбцу, а в третьем определителе – второму столбцу. Согласно свойству 5(c) оба этих определителя равны нулю, что и завершает доказательство.

Отметим, что данное равенство можно было доказать, воспользовавшись свойством 5(d):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y \end{vmatrix}.$$

Второй определитель равен нулю, так как третий столбец является линейной комбинацией первого и второго столбцов.

Пример 2. Доказать равенство, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1+xb_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+xb_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+xb_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство: используем аналогичные рассуждения. Определитель, стоящий в левой части равенства, разложим на четыре определителя, применив свойство 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} xb_1 & a_1x & c_1 \\ xb_2 & a_2x & c_2 \\ xb_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} xb_1 & b_1 & c_1 \\ xb_2 & b_2 & c_2 \\ xb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

По свойству 5(c), первый и четвертый определители равны нулю (наличие в них пропорциональных столбцов). По свойству 4, вынесем в третьем определителе x из первого и второго столбцов. В результате получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} xb_1 & a_1x & c_1 \\ xb_2 & a_2x & c_2 \\ xb_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Далее во втором определителе переставим первый и второй столбцы, тогда согласно свойству 2, знак определителя изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать равенство, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & c \\ b & 3b & b \\ c & 2c+a & a \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство: представим определитель в следующем виде

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & c \\ b & 2b+b & b \\ c & 2c+a & a \end{vmatrix}$$

и воспользуемся свойством 3:

$$\begin{vmatrix} a & 2a & c \\ b & 2b & b \\ c & 2c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ b & b & b \\ c & a & a \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Первый определитель равен нулю по свойству 5(c), а второй определитель равен нулю по свойству 5(b), что и требовалось доказать.

Отметим, что данное равенство можно было доказать, воспользовавшись свойством 5(d):

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & c \\ b & 2b+b & b \\ c & 2c+a & a \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель равен нулю, так как второй столбец является линейной комбинацией первого и третьего столбцов.

Пример 4. Вычислить определитель, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение: прибавим к первому столбцу второй (согласно свойству 6, определитель не изменится) и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta+\cos^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma+\cos^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2\alpha & 1 \\ 1 & \cos^2\beta & 1 \\ 1 & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

В силу свойства 5(b), полученный определитель равен нулю (так как содержит два одинаковых столбца).

Ответ: 0.

Пример 5. Вычислить определитель, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Решение: воспользуемся формулой для косинуса двойного угла и представим определитель в следующем виде

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta-\sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma-\sin^2\gamma \end{vmatrix}.$$

Согласно свойствам определителей 3, 4 и 5(b), получим

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0-0=0.$$

Ответ: 0.

Отметим, что для вычисления определителя можно было воспользоваться свойством 5(d):

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos^2\beta-\sin^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos^2\gamma-\sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

так как третий столбец является линейной комбинацией второго и первого столбцов.

Пример 6. Вычислить определитель четвертого порядка приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Данный определитель называют *циркулянтом* четвертого порядка, поскольку все его строки представляют собой циклическую перестановку элементов первой строки [5].

Решение: для приведения определителя к треугольному виду воспользуемся свойством 6 определителей. Сначала вычтем из второй строки первую, умноженную на 2; затем вычтем из третьей строки первую, умноженную на 3 и вычтем из четвертой строки первую, умноженную на 4. В результате получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

Далее вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 2, и вычтем из четвертой строки вторую, умноженную на 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

Прибавляя к четвертой строке третью, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель, применяя свойство 7:

$$1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160.$$

Ответ: 160.

Пример 7. Вычислить определитель *n*-го порядка приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение: для приведения определителя к треугольному виду воспользуемся свойством 6 определителей. Прибавим к каждой строке определителя с номером $i = \overline{2, n}$ первую строку. В результате получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель, применяя свойство 7:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$$

Ответ: $n!$

Заключение

Подчеркнем еще раз роль определителей для решения систем линейных алгебраических уравнений (сокращенно *СЛАУ*). Систему *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

или $Ax = b$, где A - матрица типа *m x n*; x - столбец неизвестных; b - столбец свободных членов.

В случае невырожденной квадратной матрицы A порядка *n* решение СЛАУ можно найти, например, по формулам Крамера, для применения которых необходимо вычислить (*n+1)* определитель порядка *n*. В случае прямоугольной матрицы A при исследовании СЛАУ определяется ранг матрицы A, для нахождения которого необходимо вычислять определители 2, 3… и более высоких порядков (миноры матриц), но это уже тема другой статьи.

Таким образом, овладение техникой вычисления определителей является важным навыком при освоении курса «Аналитическая геометрия».

В статье на примерах были проиллюстрированы удобства и компактность вычислений определителей с помощью применения их свойств. Авторы надеются, что активное использование рассмотренной методики нахождения определителей поможет студентам сократить объем вычислений и увеличить скорость расчетов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия: учебник для втузов / Канатников А. Н., Крищенко А. П. ; ред. Зарубин В. С., Крищенко А. П.—4-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 387 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб. Для университетов. 4-е изд., доп. М.: Наука, 1988. – 224 с.
3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: Уч. пособие для втузов. – 17-е изд., – СПб.: Профессия, 2002. – 200 с.
5. Канатников А.Н. Указ. соч.

Faniya Kh. Akhmetova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
dobrich2@mail.ru
Olga Yu. Chigiryova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
mkfn12@yandex.ru
Nina G. Khorkova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
ninakhorkova@bmstu.ru

The method of applying the properties of determinants to solving problems in analytical geometry

Abstract. The article analyzes the properties of matrix determinants and demonstrates practical techniques for using them in solving problems in analytical geometry. Namely, it is shown how, without revealing the determinants, it is possible to prove the validity of equalities or to find the value of the determinant, using only one property. The purpose of the work is to illustrate the method of applying properties, which allows in some cases to calculate determinants of any order without making cumbersome calculations. Examples clearly show these advantages. The content of the article will be useful to students, as well as first-year teachers.

Key words: order, elements, rows, columns, diagonal elements, matrix determinants, transposition, elementary transformations of rows and columns, linear combinations of rows and columns.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ»

Аннотация

Одной из основных тем при изучении дисциплины «Теория игр и исследование операций» является «Транспортная задача». В статье рассматриваются постановка транспортной задачи, ее математическая модель, изложен метод потенциалов решения транспортной задачи. Цель работы: проиллюстрировать особенности метода решения транспортной задачи с целью получения оптимального ее решения.

Ключевые слова

пункт отправления, пункт назначения, перевозка грузов,
стоимость перевозки единицы груза, опорный план транспортной задачи,
оптимальный план транспортной задачи

АВТОРЫ

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Введение

Одной из самых распространенных и востребованных оптимизационных задач в логистике является транспортная задача. В классическом виде она представляет собой задачу построение плана перевозок грузов из пунктов отправления в пункты назначения при минимальных транспортных затратах.

Транспортная задача относится к задачам линейного программирования – разделу математического программирования, разрабатывающему теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями.

Впервые эта задача была сформулирована французским математиком Г. Монжем еще в конце XVIII века, но математический аппарат для ее решения был разработан в 1930 – 1940 годы Л. Канторовичем, лауреатом Нобелевской премии по экономике 1975 года, поэтому транспортную задачу называются также задачей Монжа – Канторовича.

Актуальность решения транспортной задачи обусловлена тем, что в условиях конкурентной борьбы между множеством логистических компаний применение математических методов решения транспортной задачи дает им возможность достичь большого экономического эффекта.

Методология и результаты исследования

Постановка транспортной задачи

Пусть имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых находится соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц груза.

Пусть имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, потребности которых составляют соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц груза.

Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Необходимо составить такой план перевозок грузов из пунктов отправления в пункты назначения, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной [1].

Составим математическую модель транспортной задачи. При этом будем предполагать, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимых грузов.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, перевозимых из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, через z – суммарную стоимость перевозок грузов.

Стоимость перевозки единицы груза из пунктов отправления в пункты назначения запишем с помощью матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу C называют матрицей стоимости.

Тогда транспортную задачу можно сформулировать следующим образом [2]:

найти такой план $X^* = (x^*_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, который доставляет минимум функции

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

и удовлетворяет системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2, \ldots, m; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, 2, \ldots, n; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \quad (4)$$

$$x_{ij} \in Z, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n. \quad (5)$$

Целевая функция (1) представляет собой суммарную стоимость перевозок грузов из пунктов отправления в пункты назначения.

Первая подсистема (2) в системе ограничений указывает на то, что все грузы, находящиеся в каждом пункте отправления, должны быть вывезены. Вторая подсистема (3) в системе ограничений указывает на то, что потребности каждого пункта назначения должны быть удовлетворены.

Третье (4) и четвертое (5) условия в системе ограничений учитывают, что количество единиц груза, перевозимых из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения, – величина неотрицательная и целая.

Определение 1. Решение транспортной задачи, определяемое матрицей $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющее системе ограничений (2) – (4), называется опорным планом транспортной задачи.

Определение 2. Опорный план $X^* = (x^*_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, при котором целевая функция (1) принимает минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Если суммарный объем грузов, находящихся в пунктах отправления, равен суммарному объему грузов, необходимых пунктам назначения, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то такая модель называется сбалансированной транспортной моделью.

В реальных условиях не всегда суммарные запасы в пунктах отправления равны суммарным потребностям пунктов назначения. В этом случае необходимо сбалансировать транспортную модель.

Так, если суммарное количество единиц груза в пунктах отправления превышает суммарное количество единиц груза, необходимых пунктам назначения, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный пункт назначения B_{n+1}, потребности которого b_{n+1} принимают равными избытку грузов в пунктах отправления, т. е. $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а стоимости перевозок единицы груза из каждого пункта отправления A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ в пункт назначения B_{n+1} полагают равными нулю, т. е. $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Матрица стоимости в этом случае имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если суммарное количество единиц груза в пунктах отправления меньше суммарного количества единиц груза, необходимых пунктам назначения, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный пункт отправления A_{m+1}, запасы которого a_{m+1} полагают равными дефициту грузов в пунктах отправления, т. е. $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а стоимости перевозки единицы груза из данного пункта отправления A_{m+1} в каждый пункт назначения B_j , $j = 1, 2, \ldots , n$ полагают равными нулю, т. е. $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots , n$.

В этом случае матрица стоимости имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Система ограничений (2) – (3) транспортной задачи содержит $m + n$ уравнений с $m \cdot n$ неизвестными.

Сложим левые и правые части уравнений подсистемы (2), а также левые и правые части уравнений подсистемы (3). В результате получим два уравнения, левые части которых равны

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{ , (6)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ . (7)}$$

Если транспортная модель сбалансирована, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то правые части уравнений (6) и (7) равны. Таким образом, получаем два одинаковых уравнения.

Наличие в системе ограничений двух одинаковых уравнений говорит о ее линейной зависимости. Если одно из уравнений системы ограничений исключить, то она будет содержать $m + n - 1$ линейно независимых уравнений. Количество линейно независимых уравнений в системе ограничений определяет ее ранг, а, следовательно, количество базисных переменных в опорном плане транспортной задачи. Таким образом, количество базисных переменных в опорном плане сбалансированной транспортной задачи равно $m + n - 1$, а количество свободных переменных равно $m \cdot n - (m + n - 1)$.

Решение транспортной задачи удобнее выполнять, используя транспортную таблицу, строки которой соответствуют пунктам отправления (ПО), а столбцы – пунктам назначения (ПН) (таблица 1).

В правом столбце транспортной таблицы указывают количество грузов a_i, находящихся в пункте отправления A_i , $i = 1, 2, \ldots, m$, в нижней строке – количество грузов b_j , необходимых пункту назначения B_j , $j = 1, 2, \ldots, n$.

В каждой клетке таблицы записывают значение стоимости перевозки единицы груза c_{ij} из пункта отправления A_i , $i = 1, 2, \ldots, m$ в пункт назначения B_j , $j = 1, 2, \ldots, n$ (в правом верхнем углу), а также соответствующее значение количества единиц перевозимого груза x_{ij} .

Таблица 1 – Транспортная таблица

ПН / ПО	B_1	B_2	. . .	B_n	Запасы грузов в ПО a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . .	c_{mn} x_{mn}	a_m
потребности ПН b_j	b_1	b_2	. . .	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Значение свободной переменной x_{ij} полагают равной нулю и соответствующую ей клетку транспортной таблицы оставляют незаполненной. Для невырожденного опорного плана транспортной задачи количество заполненных клеток транспортной таблицы должно быть равно $m + n - 1$, что соответствует количеству базисных переменных.

Рассмотрим следующую задачу.

В районе землетрясения оказалось три населенных пункта B_1, B_2 и B_3 с поврежденными водопроводами. Суточные потребности этих населенных пунктов в питьевой воде соответственно равны *20* тысячам тонн, *30* тысячам тонн, *20* тысячам тонн. Для обеспечения этих населенных пунктов водой организованы два пункта водоснабжения A_1 и A_2, суточные запасы воды в которых составляют *40* тысяч тонн и *30* тысяч тонн соответственно. Стоимости перевозки *1* тысячи тонн воды (в условных единицах) из каждого пункта водоснабжения в каждый населенный пункт задаются матрицей стоимости

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо составить такой план доставки питьевой воды в населенные пункты, чтобы суммарные транспортные расходы были минимальными.

Обозначим через x_{ij}, $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$ количество питьевой воды, доставляемой из пункта водоснабжения A_i в населенный пункт B_j, через c_{ij} стоимость перевозки *1* тысячи тонн питьевой воды (в условных единицах) из пункта A_i в пункт B_j, через a_i суточный запас воды в пункте A_i, а через b_j суточную потребность пункта B_j.

По условию задачи суммарный суточный запас воды в пунктах водоснабжения равен *70* тысячам тонн, суммарная суточная потребность населенных пунктов в питьевой воде равна *70* тысячам тонн. Таким образом, суммарный суточный запас питьевой воды в пунктах водоснабжения равен суммарной суточной потребности населенных пунктов, т. е. $\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$ и, следовательно, транспортная модель является сбалансированной.

Решение транспортной задачи является метода потенциалов

Одним из методов решения транспортной задачи является метод потенциалов. Рассмотрим алгоритм этого метода и покажем его применение на примере рассматриваемой задачи доставки питьевой воды из пунктов водоснабжения в населенные пункты.

При этом будем использовать первоначальный опорный план, построенный методом северо-западного угла (таблица 2) [3].

Количество заполненных клеток транспортной таблицы получилось равным *4*, что соответствует необходимому количеству базисных переменных

$$m + n - 1 = 2 + + 3 - 1 = 4 ,$$

а стоимость полученного плана перевозки питьевой воды составила

$$z = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 20 = 200 \text{ (условных единиц).}$$

Таблица 2 – Первоначальный опорный план доставки питьевой воды, построенный методом северо-западного угла

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы грузов в ПО a_i
A_1	- 3 20	+ 2 20	6	40
A_2	+ 1	- 4 10	3 20	30
потребности ПН b_j	20	30	20	70= 70

Алгоритм метода потенциалов решения транспортной задачи

1. Построение системы потенциалов.

1.а. Введение обозначений потенциалов пунктов отправления и назначения.

Обозначают

через u_i потенциалы пунктов отправления A_i , $i = 1, 2, \dots , m$;

через v_j потенциалы пунктов назначения B_j , $j = 1, 2, \dots , n$.

В рассматриваемой задаче обозначим потенциалы:

пунктов водоснабжения: $A_1 - u_1$, $A_2 - u_2$;

населенных пунктов: $B_1 - v_1$, $B_2 - v_2$, $B_3 - v_3$.

1.б. Определение потенциалов пунктов отправления и назначения.

Для заполненных клеток транспортной таблицы составляют уравнения вида

$$u_i + v_j = c_{ij} .$$

В результате получают систему из $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными. Для однозначного определения неизвестных потенциалов нужно присваивают одному из них произвольное значение (обычно $u_1 = 1$ или $u_1 = 0$) и тогда, решая полученную систему уравнений, находят остальные потенциалы.

В рассматриваемой задаче имеем

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 , \\ u_1 + v_2 = 2 , \\ u_2 + v_2 = 4 , \\ u_2 + v_3 = 3 . \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 1$, находим значения потенциалов

$$u_2 = 3,\ v_1 = 2,$$
$$v_2 = 1,$$
$$v_3 = 0.$$

2. Проверка на оптимальность опорного плана транспортной задачи.

2.а. Определение косвенной стоимости перевозок единицы груза из пунктов отправления в пункты назначения.

Для незаполненных клеток транспортной таблицы составляют уравнения вида

$$u_i + v_j = c'_{ij},$$

где c'_{ij} - косвенная стоимость перевозки единицы груза из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j.

Подставив в эти уравнения значения потенциалов, найденных в пункте 1.б., вычисляют значения косвенных стоимостей c'_{ij}.

В рассматриваемой задаче c'_{ij} - косвенная стоимость перевозки *1* тысячи тонн питьевой воды из пункта водоснабжения A_i в населенный пункт B_j. Для незаполненных клеток транспортной таблицы 2 имеем

$$u_1 + v_3 = c'_{13},$$

$$u_2 + v_1 = c'_{21}.$$

Подставляя в эти уравнения значения найденных потенциалов, находим косвенные стоимости

$$c'_{13} = 1 + 0 = 1,\ c'_{21} = 3 + 2 = 5.$$

2.б. Определение оценки γ_{ij} для свободных переменных x_{ij}.

Для незаполненных клеток транспортной таблицы находят значение коэффициента γ_{ij}, равного разности стоимости и косвенной стоимости перевозки единицы груза из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}.$$

Если все коэффициенты γ_{ij} неотрицательны, то построенный опорный план перевозок является оптимальным. В противном случае его необходимо улучшить.

В рассматриваемой задаче

$$\gamma_{13} = c_{13} - c'_{13} = 6 - 1 = 5;$$

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 1 - 5 = -4.$$

Поскольку коэффициент $\gamma_{21} < 0$, то построенный план доставки питьевой воды не является оптимальным. Поэтому его необходимо улучшить.

3. Построение нового опорного плана перевозок грузов.

Если построенный опорный план не является оптимальным, то для его улучшения необходимо перераспределить перевозки грузов из пунктов отправления в пункты назначения, что можно сделать следующим образом.

3.а. Построение цикла пересчета перевозок грузов.

В транспортной таблице отмечают знаком « **+** » клетку, которой соответствует отрицательный коэффициент γ_{ij} (если отрицательных коэффициентов γ_{ij} несколько, то выбирают меньший). Затем в заполненных клетках транспортной таблицы расставляют знаки « **+** » и « **–** » так, чтобы количество знаков « **+** » и « **–** » в каждой строке и каждом столбце было одинаковым. В результате получают цикл пересчета.

Цикл пересчета может иметь различную конфигурацию, даже пересекающуюся. Но при этом вариант его построения единственнный.

Знак « **+** » в какой-либо клетке таблицы указывает на то, что значение перевозки в этой клетке нужно увеличить, а знак « **–** » - на то, что значение перевозки в этой клетке нужно уменьшить.

3.б. Определение величины перераспределения груза.

Из значений перевозок в клетках транспортной таблицы, отмеченных знаком « **–** », выбирают минимальное. Полученная величина, которую обозначим буквой M , определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу пересчета.

3.в. Перераспределение перевозок грузов.

К значениям перевозок в клетках транспортной таблицы, отмеченных знаком « **+** », добавляют M , а из значений перевозок в клетках, отмеченных знаком « **–** », вычитают M. Полученные результаты записывают в соответствующие клетки новой транспортной таблицы.

Значения перевозок из остальных клеток переписывают в новую транспортную таблицу без изменения.

Если при вычитании из значения перевозки величины M получается нулевая перевозка, то ее не записывают в соответствующую клетку транспортной таблицы. Если при вычитании нулевая перевозка получается для нескольких клеток, то только одну из них оставляют незаполненной, а в остальные записывают явно 0, считая соответствующие этим клеткам переменные x_{ij} базисными. Таким образом, в новой транспортной таблице количество заполненных клеток будет равным $m + n - 1$.

В результате перераспределения перевозок грузов получают новый опорный план транспортной задачи.

Найдем новый опорный план перевозок в рассматриваемой задаче доставки питьевой воды из пунктов водоснабжения в населенные пункты.

Для этого вначале построим цикл пересчета перевозок воды, используя транспортную таблицу 2. Поскольку коэффициент $\gamma_{21} < 0$, то в соответствующую клетку таблицы 2 отмечаем знаком « **+** ». Затем в заполненных клетках расставляем знаки « **+** » и « **–** » по указанному выше правилу. В результате получаем цикл пересчета (в таблице 2 показан пунктирной линией).

Далее из перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком « **–** », выбираем минимальную перевозку: $M = min\ \{ 20\ ,\ 10 \} = 10$.

Теперь перераспределяем перевозки питьевой воды, для чего к значениям перевозок, находящихся в клетках таблицы 2, отмеченных знаком « **+** », добавляем M , равное 10 тысячам тонн питьевой воды, а из значений перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком « **–** », вычитаем M. Значения перевозок в остальных клетках транспортной таблицы оставляем без изменения. Полученные результаты записываем в новую транспортную таблицу (таблица 3).

Суммарная стоимость полученного плана доставки питьевой воды составляет

$z = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 20 = 160$ (условных единиц).

Таблица 3 – Опорный план доставки питьевой воды

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	Запасы грузов в ПО a_i
A_1	3 10	2 30	6	40
A_2	1 10	4	3 20	30
потребности ПН b_j	20	30	20	70= 70

Проверим на оптимальность новый опорный план описанным выше способом.

1.б. Для заполненных клеток транспортной таблицы 3 составляем уравнения вида $u_i + v_j = c_{ij}$:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3\,, \\ u_1 + v_2 = 2\,, \\ u_2 + v_1 = 1\,, \\ u_2 + v_3 = 3\,. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 1$, находим значения потенциалов

$$u_2 = -1\,,\ v_1 = 2\,,\quad v_2 = 1\,,\quad v_3 = 4\,.$$

2.а. Для незаполненных клеток транспортной таблицы 7 составляем уравнения вида $u_i + v_j = c'_{ij}$:

$$u_1 + v_3 = c'_{13}\,,$$

$$u_2 + v_2 = c'_{22}\,.$$

Подставляя в эти уравнения значения найденных потенциалов, находим косвенные стоимости

$$c'_{13} = 1 + 4 = 5\,,$$

$$c'_{22} = -1 + 1 = 0.$$

2.б. Для незаполненных клеток транспортной таблицы 3 находим значение коэффициента $\gamma_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$:

$$\gamma_{13} = c_{13} - c'_{13} = 6 - 5 = 1\,;$$

$$\gamma_{22} = c_{21} - c'_{22} = 4 - 0 = 4\,.$$

Поскольку все коэффициенты γ_{ij} положительны, то построенный опорный план доставки воды является оптимальным.

Таким образом, оптимальным решением рассматриваемой задачи о доставке питьевой воды из пунктов водоснабжения в населенные пункты является план

$$X^* = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

при котором суммарная стоимость доставки питьевой воды минимальна и равна *160* условным единицам.

Согласно оптимальному плану из пункта водоснабжения A_1 необходимо доставить в населенный пункт B_1 *10* тысяч тонн и в населенный пункт B_2 *30* тысяч тонн питьевой воды, из пункта водоснабжения A_2 в населенный пункт B_1 *10* тысяч тонн и B_3 *20* тысяч тонн питьевой воды.

Заключение

Построенный при решении транспортной задачи первоначальный опорный план не всегда является оптимальным. В этом случае его необходимо улучшить.

Для проверки оптимальности опорного плана транспортной задачи и его улучшения может быть использован, например, метод потенциалов. Этот метод позволяет построить план грузоперевозок, при котором суммарная их стоимость будет минимальной при заданных ограничениях.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учебник для ВУЗов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
2. Там же.
3. Бахтиярова О.Н., Птицына И.В. Некоторые методические аспекты изложения темы «Построение первоначального опорного плана транспортной задачи» // Modern European Researches. – Salzburg, 2021. – Т. 1. № 2. – P. 18-26.

Olga N. Bakhtiyarova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
olga-bakh06@mail.ru
Inga V. Ptitsyna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
inpt@mail.ru
Marina I. Podzorova,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
marinatichomirova@hotmail.com

Some methodological aspects of the presentation of the topic: "Solution of the transport problem by the method of potentials"

Abstract. One of the main topics in the study of the discipline "Game Theory and Operations Research" is the "Transport problem". The article discusses the formulation of the transport problem, its mathematical model, and describes the method of potentials for solving the transport problem. The purpose of the work: to illustrate the features of the method of solving the transport problem in order to obtain its optimal solution.

Keywords: departure point, destination point, freight transportation, unit freight cost, the reference plan of the transport task, the optimal plan of the transport task.

НЕСТАНДАРТНЫЕ КОМБИНАЦИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Аннотация

В данной статье рассмотрены комбинации многогранников и сфер, вписанных в них в обычном смысле и полувписанных, то есть касающихся ребер многогранников. Формулируются и доказываются теоремы, характеризующие свойства вписываемых и невписываемых в обоих смыслах многогранников. Кроме того, рассматривается и свойство быть вневписанным. Кроме теорем, разбираются некоторые задачи на комбинации многогранников и сфер, доказывается теорема Штейница о невписываемом многограннике. Материал статьи может быть полезен при проведении факультативных занятий, подготовке к математическим олимпиадам разного уровня и к решению задач конкурсных экзаменов в ВУЗы.

Ключевые слова

вписанный многогранник, вневписанный многогранник, полувписанный многогранник

АВТОРЫ

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Введение

Стандартом для программы по геометрии является изучение свойств вписанных и описанных многоугольником, несколько меньше внимания уделяется вписанным и описанным многогранникам, и совсем не рассматриваются полувписанные многогранники. Данная работа в некоторой мере закрывает этот пробел и предоставляет достаточно полный и подробный теоретический материал и примеры задач с решениями. Все приведённые теоремы снабжены подробными доказательствами, а задачи – решениями. Наглядность рассуждений обеспечивается многочисленными рисунками.

Методология и результаты исследования

Мы будем рассматривать шары и сферы, вписанные в многогранники внутренним и внешним способом. Начнём с основного определения.

Определение. **Шар** называется **вневписанным в многогранник**, если он касается одной из его граней и продолжений всех остальных граней.

Аналогичное определение справедливо и для сферы.

Теорему 2.1.1. [1] Для всякого тетраэдра существует не менее пяти и не более восьми шаров, касающихся плоскостей всех его граней.

□ Пусть дан тетраэдр объема V. Пронумеруем его грани от первой до четвертой и обозначим площади этих граней через S_1, S_2, S_3 и S_4 соответственно. Для произвольной точки O пространства обозначим расстояние от нее до плоскости i –й грани тетраэдра через $h_i(i=1,...,4)$. Тогда

$$\varepsilon_1 h_1 S_1 + \varepsilon_2 h_2 S_2 + \varepsilon_3 h_3 S_3 + \varepsilon_4 h_4 S_4 = 3V, \qquad (*)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, причем знак «+» берется тогда и только тогда, когда точка O лежит вместе с данным тетраэдром по одну сторону от плоскости его i –й грани. Для доказательства этого равенства достаточно заметить, что если соединить точку O с вершинами тетраэдра, то, комбинируя объемы четырех полученных тетраэдров, выбирая знаки «+» или «—» по указанному выше правилу, мы получим объем исходного тетраэдра.

Пусть O — центр, а r — радиус шара, касающегося плоскостей всех граней тетраэдра. Тогда $h_i = r(i=1,...,4)$ и

$$\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4 = \frac{3V}{r} > 0.$$

Верно и обратное: если для данного набора $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ сумма $\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4$ положительна, то существует шар, касающийся плоскостей всех граней тетраэдра. Действительно, рассмотрим точку, для которой $h_1 = h_2 = h_3 = r = \dfrac{3V}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4}$. Подставляя эти значения h_1, h_2 и h_3 в равенство (*), получаем, что и $h_4 = r$.

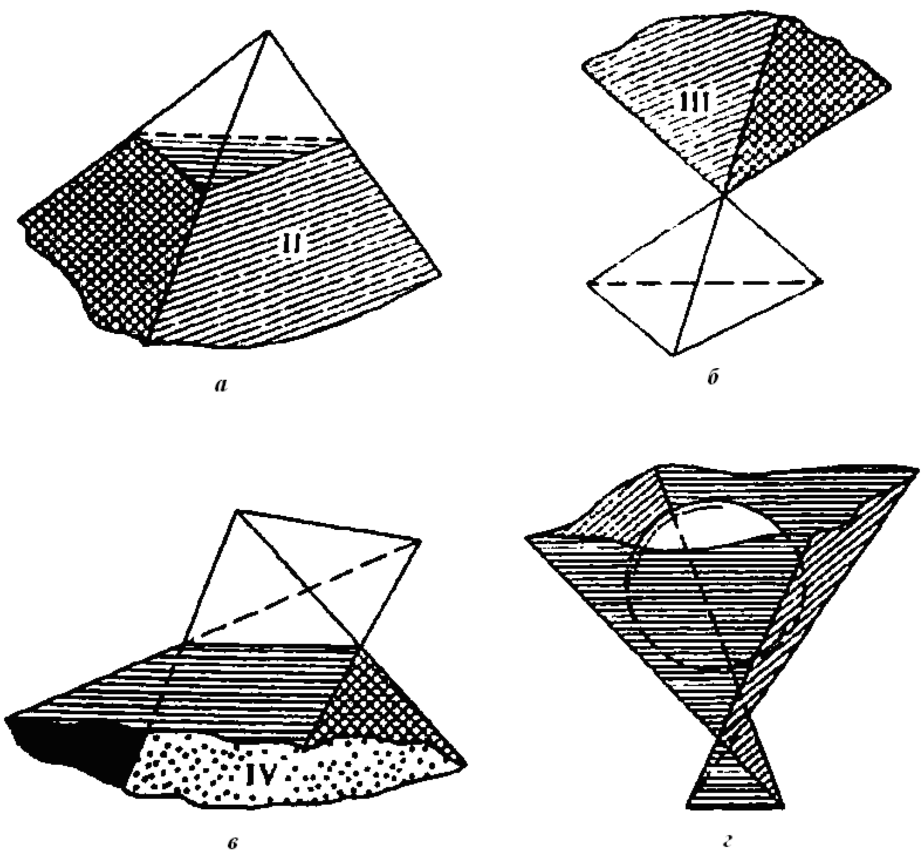


Рис. 2.1.1

Плоскости граней тетраэдра делят пространство на 15 частей четырех типов: одна часть типа *I*, внутренняя относительно тетраэдра, для точек которой все $\varepsilon_i = 1$; четыре части типа *II* (Рис 2.1.1 а), для точек которых ровно одно из чисел ε_i равно -1; четыре части типа *III* (Рис 2.1.1 б), для точек которых ровно одно из чисел ε_i равно + 1; шесть частей типа *IV* (Рис 2.1.1 в), для точек которых два числа из ε_i, положительны, а два отрицательны.

В области *I* всегда есть точка, равноудаленная от граней (центр вписанного шара), так как $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 > 0$.

В области типа *II* также всегда есть точка, равноудаленная от плоскостей граней (центр вневписанного шара), так как сумма площадей любых трех граней тетраэдра больше площади четвертой (это легко доказать, спроектировав три грани ортогонально на плоскость четвертой и заметив, что проекции покроют четвертую грань независимо от того, куда попадет проекция вершины, в которой сходятся проектируемые грани).

Тем самым, мы уже указали пять шаров, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра. Заметим теперь, что если для некоторого набора $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ сумма $\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4$ положительна, то для набора с противоположными знаками эта сумма отрицательна. Так как всего наборов 16, то не более половины из них дают положительную сумму $\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4$. Значит, существует не более восьми шаров, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра.

Интересно выяснить, при каких условиях существуют еще три шара и где они расположены.

Заметим, что они не могут лежать в областях типа *III*, так как $\varepsilon_i = \varepsilon_j = \varepsilon_k = -1$, а $\varepsilon_l = 1$. В областях типа *IV*, если $S_i + S_j > S_k + S_l$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_l = -1$, выполняется неравенство $\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3 + \varepsilon_4 S_4 > 0$, поэтому существует нужный нам шар (Рис 2.1.1 г). Понятно, что при этом в области типа *IV*, относящейся к противоположному ребру, это неравенство не выполняется. Оно не выполняется также при условии $S_i + S_j = S_k + S_l$.

Итак, если сумма площадей любых двух граней тетраэдра не равна сумме площадей двух оставшихся граней, то шаров, удовлетворяющих условию, существует ровно 8. В случае, когда площади всех граней тетраэдра равны (а следовательно, равны и сами грани), таких шаров ровно 5. Их может быть и 7, и 6. При этом равенство $S_i + S_j > S_k + S_l$ выполнено, соответственно, ровно для одного и ровно для двух различных наборов индексов (i, j, k) $(i < j, k < l)$ из множеств $\{(1,2,3,4), (1,3,2,4), (1,4,2,3)\}$.

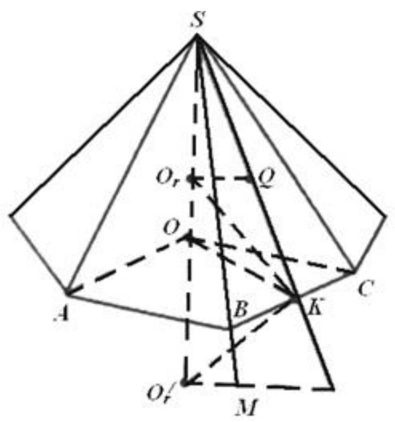


Рис. 2.1.2

Теорема 2.1.2. Для пирамиды существует вневписанная сфера, если и только если существует сфера, вписанная в эту пирамиду.

□ Пусть в пирамиду (Рис 2.1.2) вписывается сфера. Тогда любая точка луча SO_r, где O_r - центр вписанной сферы, равноудалена от всех боковых граней пирамиды. Точка O_r' пересечения этого луча с биссектором двугранного угла, образованного плоскостью основания пирамиды с продолжением произвольной боковой грани, будет равноудалена от плоскостей всех граней пирамиды. Сфера с центром O_r' и радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости любой грани пирамиды, и будет вневписанной. Поскольку центр и радиус этой сферы определились однозначно, то эта сфера единственная. ■

Следствия:

а) для всякой правильной пирамиды существует вневписанная сфера;

б) для всякого тетраэдра существует по крайней мере четыре вневписанные сферы.

Пример 2.1.1. Найти радиус шара, вневписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

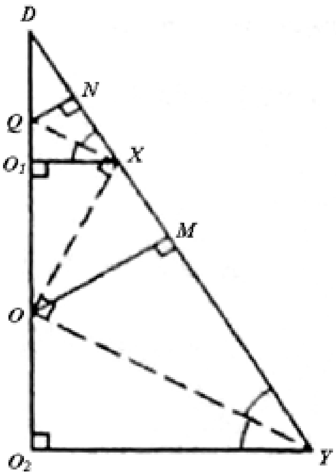


Рис. 2.1.3

□ *Решение*. Пусть шар $B(O,R)$ вневписан в правильный тетраэдр $ABCD$ ребром a так, что он касается грани ABC в точке O_1. Проведем плоскость, параллельную плоскости ABC, касающуюся шара в точке O_2 и пересекающую продолжения ребер DA, DB, DC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Мы получим правильную усеченную треугольную пирамиду $A_1B_1C_1ABC$, в которую вписан шар $B(O,R)$. Центр O шара находится в середине отрезка O_1O_2, где O_1 и O_2 - центры правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. При этом точка касания шара с гранью AA_1B_1B лежит на апофеме XY этой грани. Сечение рассматриваемой конфигурации изображено на рис. 2.1.3 (*Q* - центр вписанного в тетраэдр $ABCD$ шара). Проведем радиусы *OM* и *QN* в точки касания шаров плоскостью *ABD*. Получим прямоугольную трапецию *MOQN*. Искомый радиус находим, применяя свойство высоты прямоугольного треугольника к ΔOXQ: $XO_1^2 = QO_1 \cdot O_1O$, т.е. $\left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot R$.

Здесь мы воспользовались тем, что длина отрезка XO_1 равна одной трети высоты правильного треугольника, а QO_1 - радиус вписанного в тетраэдр $ABCD$ шара. Итак, $R = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

В некоторых задачах речь идет о шарах, касающихся плоскостей всех граней многогранника. Такой шар может быть вписанным в многогранник, вневписанным в многогранник и не быть ни тем, ни другим (т.е. касаться продолжений всех граней многогранника).

Решая подобные задачи, важно в первую очередь, исходя из условия, определить, каких граней (и, соответственно, продолжений каких граней) касается шар, о котором идет речь.

Пример 2.1.2. [1] В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей H — основание высоты данной пирамиды. Шар радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если расстояние от центра шара до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

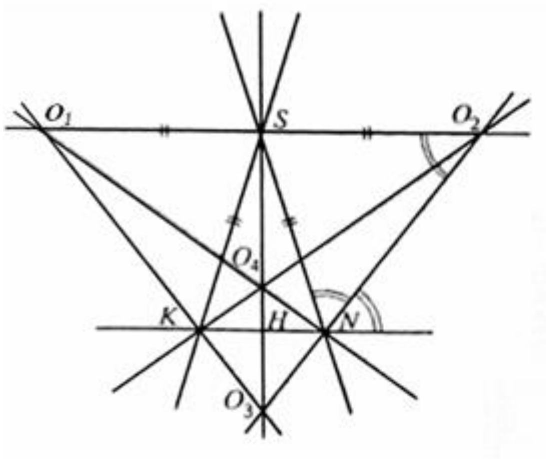


Рис. 2.1.4

□ *Решение*. Сначала найдем геометрическое место точек, равноудаленных от плоскостей ASB, DSC, ABC. Это ГМТ является пересечением биссекторов всех двугранных углов, образованных указанными плоскостями.

Чтобы представить себе, как устроено это пересечение, проведем через апофемы SK и SN граней ASB и DSC плоскость α.

Используя известные теоремы о перпендикулярности, нетрудно доказать, что плоскость α перпендикулярна плоскостям ASB, DSC, ABC. Поэтому упомянутые выше биссекторы пересекают α по биссектрисам всех внутренних и внешних углов равнобедренного треугольника KSN. Эти биссектрисы, как известно из планиметрии, пересекаются по три в четырех точках – центрах O_1, O_2, O_3 вневписанных окружностей – треугольника и центре O_4 его вписанной окружности (Рис 2.1.4).

Заметим еще, что из равнобедренности треугольника KSN следуют параллельность прямых O_1O_2 и KN и равенства $SO_2 = SN = SK = SO_1$.

Из сказанного вытекает, что искомое ГМТ состоит из прямых l_1, l_2, l_3, l_4, проходящих, соответственно, через точки O_1, O_2, O_3, O_4 перпендикулярно плоскости KSN (а, следовательно, параллельно ребрам AB и CD пирамиды).

Центр рассматриваемого шара должен лежать на одной из этих прямых. Заметим сразу, что точки прямых l_3 и l_4 не удовлетворяют условию задачи. Действительно, если $O_4H = 2$, то $O_4H = HN$ (H — середина отрезка KN), следовательно, $\angle HNS = \frac{\pi}{2}$, что невозможно. Аналогично получаем противоречие, если $O_3H = 2$.

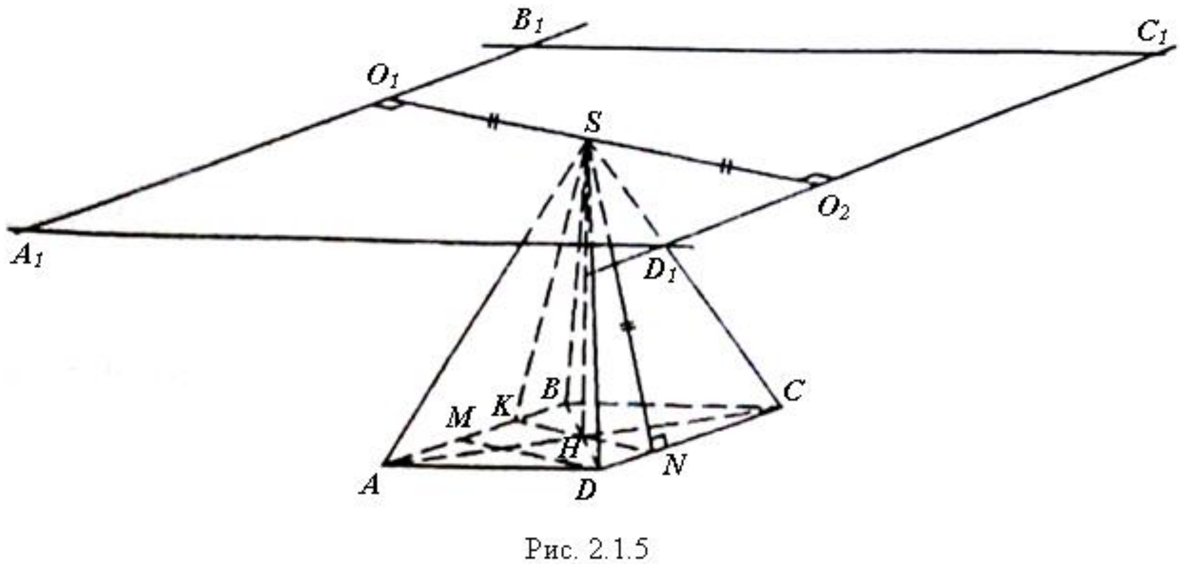


Рис. 2.1.5

Итак, центр шара может лежать только на прямых, проходящих через точки O_1 и O_2 и параллельных прямым AB и CD. При этом высота пирамиды равна радиусу шара, т. е. $SH = 2$.

Аналогичные рассуждения, примененные к плоскостям граней SBC, SAD и $ABCD$, показывают, что центр шара может находиться лишь в вершинах ромба

$A_1B_1C_1D$ $(A_1D_1)\parallel(B_1C_1)\parallel(AD)$ (см. рис 2.1.5), а вершина S пирамиды является центром этого ромба. Ромб $A_1B_1C_1D$ подобен основанию $ABCD$ пирамиды с коэффициентом $\frac{SN}{HN}=\sqrt{2}$.

Заметим, что точки A_1 и C_1 не подходят, так как иначе $\frac{2\sqrt{2}AB}{3}=2$, т.е. $AB=\frac{3}{\sqrt{2}}<4=KN$, что невозможно. Для точек B_1 и D_1 получаем, что с одной стороны,

$$BH^2=\frac{1}{2}B_1S^2=\frac{1}{2}(B_1H^2-SH^2)=\frac{4}{9}AB^2-2$$ с другой стороны,

$$BH^2=\frac{1}{4}BD^2=\frac{1}{4}(BM^2+DM^2)=\frac{1}{4}\left((AB-AM)^2+DM^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(AB-\sqrt{AD^2-DM^2}\right)^2+DM^2\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\left(AB-\sqrt{AB^2-16}\right)^2+16\right)=\frac{1}{2}(AB^2-AB\sqrt{AB^2-16}),$$

где M - основание высоты ромба, опущенной из вершины D на сторону AB.

Приравнивая правые части полученных равенств, находим $AB=3\sqrt{2}$, а $V_{SABCD}=\frac{1}{3}AB\cdot KN\cdot SH=8\sqrt{2}$.

Определение. **Шар** называется **полувписанным в многогранник**, если он касается всех ребер этого многогранника.

Аналогичное определение справедливо и для сферы.

Теорема 2.2.1. Для многогранника существует полувписанная сфера тогда и только тогда, когда выполняется любое из условий:

а) грани многогранника - такие многоугольники, в каждый из которых можно вписать окружность и оси этих окружностей пересекаются в одной точке;

б) грани многогранника — такие многоугольники, в каждый из которых можно вписать окружность, и каждая из этих окружностей касается окружностей, вписанных в грани, смежные данной;

в) грани многогранника – такие многоугольники, в каждый из которых можно вписать окружность и плоскости, перпендикулярные ребрам (или смежным граням) многогранника и проходящие через точки касания этих ребер и окружностей, вписанных в грани, пересекаются в одной точке;

г) плоскости, перпендикулярные граням многогранника и проходящие через биссектрисы внутренних углов его граней, пересекаются в одной точке;

д) около каждого многогранного угла многогранника можно описать круговую коническую поверхность, и оси этих конических поверхностей пересекаются в одной точке;

е) существует единственная точка, равноудаленная от всех ребер многогранника.

□ *Необходимость*. Пусть существует сфера, касающаяся всех ребер многогранника. Тогда, поскольку центр сферы равноудален от ребер одной из граней многогранника, то он (центр сферы) проектируется в центр вписанной в эту грань окружности, и тут же следует, что все такие перпендикуляры к граням многогранника, проходящие через центры вписанных в грани окружностей, пересекаются в центре сферы.

Достаточность. Пусть в каждую грань многогранника вписывается окружность и перпендикуляры к граням, проходящие через центры этих окружностей, пересекаются в одной точке. Тогда эта точка равноудалена от всех ребер многогранника. ■

Заметим еще, что центр полувписанной сферы может находиться внутри многогранника, на грани многогранника (в центре вписанной в эту грань окружности), вне многогранника.

Теорема 2.2.2. Чтобы для данного многогранника существовали полувписанная и описанная сферы и их центры совпадали, необходимо и достаточно, чтобы все грани многогранника являлись правильными многоугольниками.

□ *Необходимость.* Пусть для данного многогранника существуют полувписанная и описанная сферы, и они концентричны. Докажем, что грани многогранники правильные многоугольники. Основание перпендикуляра, опущенного из общего центра на грань многогранника, является центром описанной около многоугольника окружности (ибо одна из сфер описана около многогранника) и в то же время центром вписанной в тот же многоугольник окружности (ибо другая из сфер полувписана в многогранник). А если окружности, описанная около многоугольника и вписанная в тот же многоугольник, концентричны, то многоугольник правильный, ибо его стороны равны как хорды описанной окружности,

Достаточность. Пусть грани многогранника правильные многоугольники, и описанная и полувписанная сферы существуют. Докажем, что эти сферы концентричны. Если существует описанная около многогранника сфера, то перпендикуляры к граням, проходящие через центры описанных около граней окружностей, пересекаются в одной точке – центре описанной сферы. Если существует полувписанная сфера, то перпендикуляры к граням, проведенные через центры вписанных в грани окружностей, пересекаются в одной точке – центре сферы, касающейся всех ребер многогранника. Но окружности, описанная около правильного многоугольника и вписанная в него, концентричны. Значит, оба перпендикуляра к любой грани многогранника, о которых говорилось выше, совпадают и поэтому совпадают центры сфер. ■

Теорема 2.2.3. Шар, касающийся всех ребер призмы, существует, если и только если призма правильная и все ее ребра равны между собой.

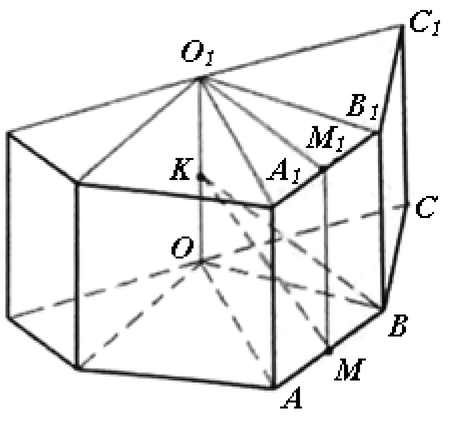


Рис. 2.2.1

□ *Необходимость.* Пусть существует шар, касающийся всех ребер призмы. Тогда в каждую грань призмы вписывается окружность, центр которой есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на соответствующую грань. Значит, все боковые грани призмы – ромбы, а посему все ребра призмы равны между собой. Поскольку линия центров OO_1 (см. Рис. 2.2.1) окружностей, вписанных в основания призмы, перпендикулярна плоскостям оснований, то призма прямая и при проектировании нашей конфигурации на плоскость основания призмы проекции оснований призмы совпадут, а шар спроектируется в круг, описанный около основания призмы. Основание призмы, как равносторонний многоугольник вписанный в круг, будет правильным многоугольником, а значит, и прямая призма будет правильной боковые грани которой будут квадратами.

Достаточность. Пусть призма правильная и все ее ребра равны между собой. Тогда около призмы можно описать сферу, центр K которой (см. Рис. 2.2.1) равноудален от всех вершин призмы, а учитывая, что боковые грани призмы являются квадратами, заключаем, что точка K равноудалена и от сторон этих квадратов, т. е. равноудалена от всех ребер призмы. Значит, существует шар, касающийся всех ребер призмы. ■

Заметим, что центр сферы, касающейся всех ребер призмы, расположен внутри призмы, равноудален от ребер, от вершин, от боковых граней, от оснований призмы.

Следствие. Если существует сфера, касающаяся всех ребер призмы, то около такой призмы можно описать сферу (утверждение, обратное этому, не верно).

Теорема 2.2.4. Существуют вписанные в призму шары, касающиеся один всех ребер призмы, а второй всех ее граней, если и только если призма есть куб.

□ Пусть в призму (см. Рис. 2.2.1) можно вписать шар и существует шар, касающийся всех ребер этой призмы. Тогда поскольку призма правильная и боковые грани ее квадраты, то основания M и M_1 перпендикуляров, опущенных из центров O и O_1, вписанных в основания $ABC...$ и $A_1B_1C_1...$ окружностей на стороны AB и A_1B_1 делят эти стороны пополам, и тогда $BM = \frac{1}{2}MM_1$. А поскольку в призму можно вписать шар, то $OM = O_1M_1 = \frac{1}{2}MM_1$. Итак, $OM = BM$ и $OM \perp BM$. Значит, $\angle BOM = 45^\circ$ и $\angle BOA = 90^\circ$. Поэтому в основании призмы - квадрат, а сама призма - куб. ■

Вывод: из всех призм только куб обладает тремя свойствами - существуют вписанная, полувписанная и описанная сферы. Центры этих сфер совпадают.

Теорема 2.2.5. Центр полувписанной в пирамиду сферы лежит на ее высоте, если и только если пирамида правильная.

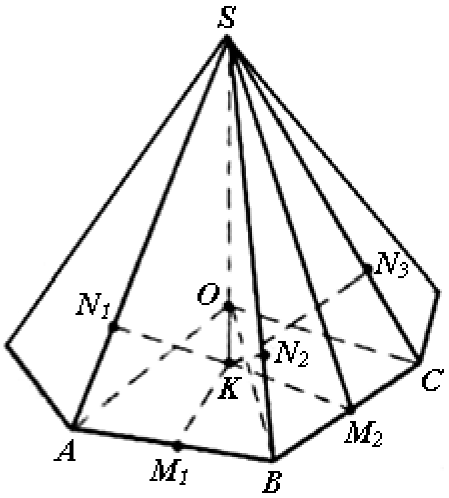


Рис. 2.2.2

□ *Необходимость*.

Пусть в пирамиду $SABC...$ полувписана сфера, центр K которой лежит на высоте SO пирамиды (Рис. 2.2.2). Пусть сфера касается боковых ребер пирамиды в точках N_1, N_2, N_3,..., а ребер основания в точках M_1, M_2, M_3,... Поскольку $KN_1 = KN_2 = KN_3$ (как радиусы одной и той же сферы) и эти отрезки перпендикулярны боковым ребрам SA, SB, SC,..., соответственно, то треугольники

SKN_1, SKN_2, SKN_3,... равны между собой (по общей гипотенузе и катету). Тогда углы KSN_1, KSN_2, KSN_3,... также равны между собой. Прямоугольные треугольники OSA, OSB, OSC,... по общему катету SO и острому углу при этом катете равны между собой. Значит, $OA = OB = OC...$Приходим к выводу, что около основания $ABC...$ пирамиды можно описать окружность с центром в точке O. Но точка O - центр окружности, вписанной в основание $ABC...$, ибо $OM_1 = OM_2 = OM_3...$ вследствие того, что равны соответствующие наклонные $KM_1 = KM_2 = KM_3...$ (как радиусы одной и той же сферы). А если описанная около многоугольника и вписанная в многоугольник окружности концентричны, то такой многоугольник правильный.

Достаточность. Пусть $SABC...$ - правильная пирамида (см. Рис. 2.2.2). Тогда точка K пересечения высоты пирамиды SO с плоскостью, перпендикулярной произвольной боковой грани и проходящей через биссектрису угла при основании этой грани, равноудалена от бокового ребра и ребра основания, а значит, и от всех ребер пирамиды.

Поскольку центр сферы и ее радиус определились однозначно, то такая сфера единственная. ■

Теорема 2.2.6. Для пирамиды существует одновременно полувписанная и полувневписанная сферы, если и только если пирамида правильная.

Доказательство. Пусть пирамида правильная. Докажем, что существует полувневписанная сфера. Легко установить, что произвольная точка луча SO (SO высота правильной пирамиды) равноудалена от сторон основания и от лучей SA, SB, SC,... правильной пирамиды $SABC...$ (см. Рис 2.1.2). Точка O'_p пересечения луча SO с плоскостью, перпендикулярной произвольной, например SAB, боковой грани и проходящей через биссектрису внешнего угла, например ABM, треугольника SAB являющегося упомянутой боковой гранью, равноудалена от стороны основания BA и продолжения бокового ребра BM, а значит, равноудалена от сторон основания и продолжений всех боковых ребер. Поэтому точка O'_p центр полувневписанной сферы (точка O'_p на Рис 2.1.2 не изображена).

Обратно. Пусть пирамида $SABC...$ такова, что существуют полувписанная и полувневписанная сферы. Докажем, что пирамида правильная. Поскольку каждый из центров упомянутых сфер равноудален от сторон основания, то они (центры) находятся на оси окружности, вписанной в основание пирамиды. Вместе с тем, поскольку каждый из центров этих сфер равноудален от боковых ребер пирамиды (или их продолжений), то любая точка прямой, проходящей через эти центры, равноудалена от боковых ребер (или их продолжений), т. е. линия центров наших сфер перпендикулярна основанию пирамиды и является осью конической поверхности, описанной около многогранного угла при вершине пирамиды. Значит, центр полувписанной сферы лежит на высоте пирамиды и поэтому пирамида правильная.

Итак, для правильной пирамиды существуют: описанная, вписанная, полувписанная, вневписанная, полувневписанная сферы; существуют также сферы, касающиеся основания и всех боковых ребер и основания (извне) и продолжений всех боковых ребер пирамиды. Центры этих сфер лежат на высоте пирамиды или ее продолжении.

Теорема 2.2.7. Для того чтобы существовала сфера, полувписанная в тетраэдр, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1) суммы длин скрещивающихся ребер равны;

2) суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны;

3) окружности, вписанные в грани, попарно касаются;

4) все четырехугольники, получающиеся на развертке тетраэдра, - описанные;

5) оси окружностей, вписанных в грани тетраэдра, пересекаются в одной точке;

6) оси конусов, описанных около трехгранных углов тетраэдра, пересекаются в одной точке;

7) плоскости, перпендикулярные граням тетраэдра и проходящие через биссектрисы внутренних углов соответствующих граней, пересекаются в одной точке.

□ *Необходимость* (Рис 2.2.3). Пусть шар касается ребер AB, BC, CA, AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M, N, P и Q соответственно. Из равенства отрезков касательных, проведенных к шару из одной точки, получаем, что $AN = AM = AK$, $BP = BK = BL$, $CQ = CL = CM$ и $DN = DP = DQ$. Следовательно, $AB + CD = BC + AD = AC + BD$.

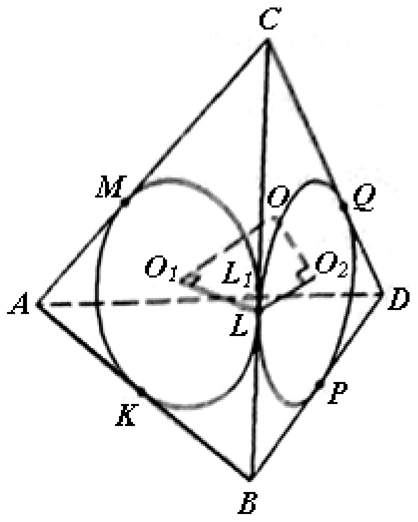


Рис. 2.2.3

Достаточность. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, в котором $AB + CD = BC + AD = AC + BD$.

Впишем в грани ABC и BCD окружности. Пусть эти окружности касаются ребер AB, BC, AC и BC, CD и BD в точках K, L, M и L_1, Q и P соответственно (Рис. 2.2.3). Так как $AB = AK + KB$, $CD = CQ + QD$, $AC = AM + MC$, $BD = BP + PD$, а $AK = AM$, $QD = PD$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки), то из равенства $AB + CD = AC + BD$ вытекает, что $KB + CQ = MC + BP$. Заменив отрезки KB, CQ, MC и BP на соответственно равные им отрезки BL, CL_1, CL и BL_1, получаем, что $BL + CL_1 = CL + BL_1$, следовательно, L и L_1 — это одна и та же точка.

Обозначив через O_1 и O_2 центры рассматриваемых окружностей, построим в плоскости O_1LO_2 перпендикуляры O_1X и O_2Y к прямым O_1L и O_2L соответственно. Так как $O_1L \perp BC$ и $O_2L \perp BC$, то $O_1LO_2 \perp BC$ (по признаку). Поэтому O_1X и O_2Y перпендикулярны прямой BC, а следовательно, перпендикулярны и плоскостям ABC и BCD соответственно.

Точка O пересечения прямых O_1X и O_2Y, удалена от всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра AD, на расстояние r. Тогда шар $B(O,r)$ касается всех ребер тетраэдра, кроме, быть может, ребра AD.

Проводя аналогичные рассуждения для окружностей, вписанных в грани ABC и ABD, мы получим шар $B'(O',r')$, касающийся всех ребер тетраэдра, кроме CD. Заметим теперь, что сферы, ограничивающие шары $B(O,r)$ и $B'(O',r')$, имеют общую окружность (вписанную в грань ABC) и общую точку P вне этой окружности. Следовательно, $B(O,r)$ и $B'(O',r')$ - один и тот же шар. Он касается всех ребер тетраэдра. ■

Заметим, что если существует шар, полувписанный в тетраэдр, то его центр есть точка пересечения перпендикуляров к граням, проходящих через центры вписанных в грани окружностей.

Пример 2.2.1. [1] В правильную усеченную треугольную пирамиду вписаны две сферы: одна касается всех граней пирамиды, а вторая - всех ее ребер. Найти: α - угол наклона бокового ребра к плоскости большего основания; β - двугранный угол при ребре большего основания; γ - плоский угол при вершине пирамиды, полученной, дополнением данной усеченной пирамиды до полной; δ - двугранный угол при боковом ребре.

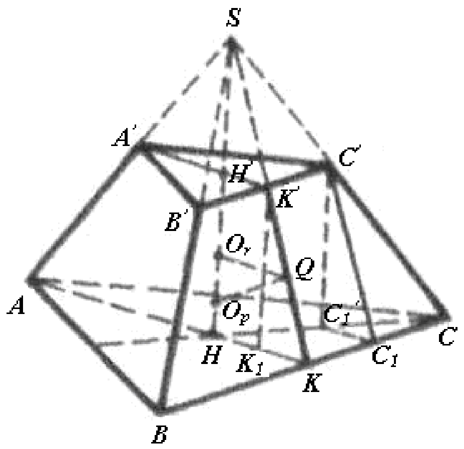


Рис. 2.2.4

Решение. Пусть стороны оснований данной пирамиды $BC = a$, $B'C' = b$.

Далее: $C'C_1 \perp BC$ (см. Рис. 2.2.4). $C_1C = \frac{a-b}{2}$, $C'C = l = \frac{a+b}{2}$. Тогда

$k = KK' = C_1C' = \sqrt{(CC')^2 - (C_1C)^2} = \sqrt{ab}$. С другой стороны: $k = KK' = HK + H'K' = \frac{a+b}{2\sqrt{3}}$. Имеем уравнение $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2\sqrt{3}}$, или $a^2 - 10ab + b^2 = 0$, или $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 10\frac{a}{b} + 1 = 0$, откуда $\frac{a}{b} = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Понятно, что если $a > b$, то $\frac{a}{b} = 5 + 2\sqrt{6}$, или $\frac{b}{a} = 5 - 2\sqrt{6}$.

Имеем далее из $\Delta CC_1C'$: $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{CC_1}{CC'} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Итак, $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Тогда, используя соотношения между углами в правильной n-угольной пирамиде, находим: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $tg\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\delta = \frac{2\pi}{3}(120^\circ)$.

Поставленная нами задача решена, и имеет место

Теорема 2.2.8. Если в правильной усеченной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120° и в боковую грань ее вписывается окружность, то в такую пирамиду вписываются две сферы: а) касающаяся всех ребер – полувписанная сфера и б) касающаяся всех граней.

□ Поскольку усеченная пирамида правильная и в боковую грань ее вписывается окружность, то существует полувписанная сфера. Докажем существование вписанной сферы. Поскольку двугранный угол при боковом ребре равен $-\frac{2\pi}{3}$, то $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Учитывая, что в боковую грань вписывается окружность, имеем $CC' = l = \frac{a+b}{2}$. Тогда из треугольника $\Delta CC_1C'$:

$\frac{CC_1}{CC'} = \sin\angle CC'C_1$ или $\frac{a-b}{a+b} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Откуда $b = a\left(5 - 2\sqrt{6}\right)$, или $\frac{a}{b} = 5 + 2\sqrt{6}$.

Дополним усеченную пирамиду до полной (см. Рис. 2.2.4). Пусть высота полной пирамиды h', а данной усеченной — h. Тогда $\frac{h'}{h'-h} = \frac{a}{b} = 5 + 2\sqrt{6}$.

Откуда $h' = SH = \frac{h}{4}\left(\sqrt{6} + 2\right)$.

Известно, что $r = h'\dfrac{\cos\beta}{1+\cos\beta}$, где h' - высота полной пирамиды, β - двугранный угол при ребре большего основания. Поскольку $tg\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$r = h'\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} : \frac{1+\sqrt{1+tg^2\beta}}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{h'}{1+\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{h'}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1} = h'\left(\sqrt{6}-2\right) = \frac{h}{4}\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right) = \frac{1}{2}h$$

Таким образом, сфера, вписанная в полную пирамиду, имеет диаметр h и поэтому касается плоскости верхнего основания данной усеченной пирамиды, а значит, сфера вписана в усеченную пирамиду. ■

Теорема 2.2.9. Для того чтобы существовала сфера, полувписанная в усеченную $n-$угольную пирамиду, необходимо и достаточно, чтобы пирамида была правильная и в боковую грань ее вписывалась окружность.

□ *Необходимость*. Пусть сфера касается всех ребер усеченной пирамиды. Тогда во все грани пирамиды вписываются окружности. Прямая, проходящая через центр сферы и перпендикулярная к плоскостям основании, пройдет через центры H и H' окружностей, вписанных в основания (см. рис. 2.2.4).

Поскольку $AH \parallel A'H'$, то прямая AA' лежит в одной плоскости с линией центров HH' окружностей, вписанных в основания, и пересекается с этой линией в некоторой точке S. Значит, вершина S полной пирамиды, полученной дополнением данной усеченной до полной пирамиды, лежит на линии центров, вписанных в основания окружностей.

Боковые ребра полной пирамиды касаются, по условию, сферы, и поэтому они равнонаклонены к высоте SH пирамиды, проходящей через центр O сферы, а значит, равнонаклонены к плоскостям оснований. А тогда около оснований можно описать окружности с центрами H и H'.

Поскольку вписанная и описанная около оснований окружности концентричны, то основания пирамиды правильные многоугольники. Теорема доказана, ибо уже упомянуто, что вершина S пирамиды проектируется в центры этих многоугольников.

Достаточность. Пусть усеченная пирамида правильная и в боковые грани вписываются окружности. Докажем, что существует сфера, касающаяся всех ребер пирамиды.

Из середин апофем пирамиды (центров вписанных в боковые грани окружностей) восставим перпендикуляры к боковым граням. Они пересекут линию центров окружностей HH', вписанных в основания, в одной и той же точке O. Точка O равноудалена от всех ребер пирамиды. Значит, полувписанная сфера существует.

Эту же теорему можно сформулировать так: сфера, касающаяся всех ребер усеченной пирамиды, существует, если и только если пирамида правильная и боковое ребро усеченной пирамиды равно полусумме сторон основания. ■

Следствие. Если в усеченную пирамиду можно вписать сферу, касающуюся всех ее ребер, то около этой пирамиды можно описать сферу. Центры вписанной, полувписанной и описанной сфер в усеченной пирамиде попарно совпасть не могут.

Пример 2.2.2. [1] Сторона основания правильной треугольной пирамиды равная a, боковое ребро пирамиды равно b. Найти радиус полувписанного шара.

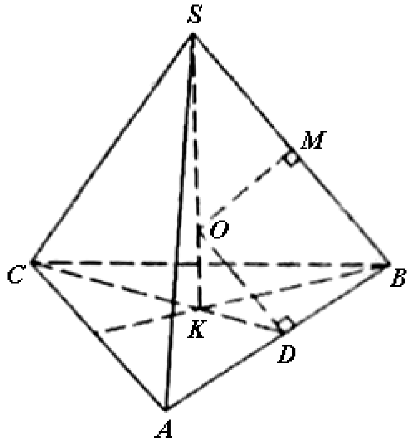


Рис. 2.2.5

□ *Решение*. Заметим сначала, что указанный шар существует (в силу теоремы 2.2.7.).

Пусть $SABC$ — данная пирамида, O — центр полувписанного шара, SK — высота пирамиды, $(OM)\perp(BS)$, $(OD)\perp(AB)$, $OM = OD = r$ - искомый радиус шара (Рис. 2.2.5).

$BM = BD = \frac{a}{2}$. Из подобия треугольников SOM и SBK находим, что

$$r = \frac{SM \cdot BK}{SK} = \frac{\left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

Рассмотрим куб, одна из вершин которого срезана плоскостью (Рис. 2.3.1). Можно ли полученный многогранник вписать в сферу? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какой именно плоскостью срезана вершина? С решением этой и предстоит ознакомиться.

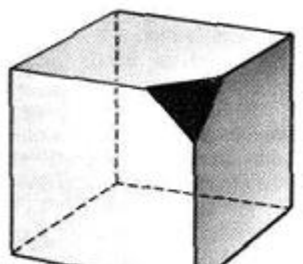


Рис. 2.3.1

Предположим, что нам дан выпуклый ограниченный многогранник, т. е. тело в пространстве, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками — гранями — и лежащее по одну сторону от плоскости каждой из своих граней. Требуется выяснить, можно ли данный многогранник вписать в сферу [2].

Обозначим весь многогранник буквой M, занумеруем по отдельности его грани, ребра и вершины и будем обозначать $i-$ую грань через Γ_i, $i-$ое ребро через P_i и $i-$ую вершину через B_i.

Принято говорить, что две *грани смежные*, если у них имеется общее ребро, а две *вершины соседние*, если они концы одного и того же ребра.

Чтобы решить поставленную задачу, надо прежде всего проверить, являются ли все многоугольники Γ_i вписанными. Затем для каждого ребра P_i рассмотрим пару граней Γ_i и Γ_j, граничащих по этому ребру, и обозначим через r_k расстояние от точки пересечения перпендикуляров, восставленных из центров окружностей, описанных около Γ_i и Γ_j, до одной из вершин многоугольника Γ_i или Γ_j; величина r_k, очевидно, не зависит от выбора вершины (Рис. 2.3.2).

Задача 2.3.1. Доказать, что многогранник M вписанный тогда и только тогда, когда все многоугольники Γ_i вписанные, и $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_m$, где $m-$ число ребер многогранника.

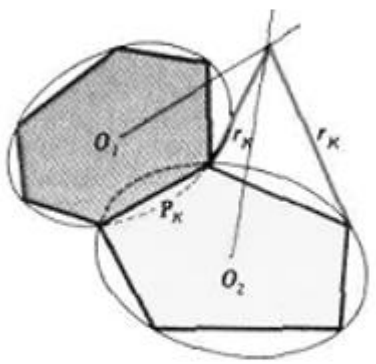


Рис. 2.3.2

Этот или аналогичный способ проверки вписанности M был известен очень давно, но вдруг в начале *XX* века обнаружилось, что в целом ряде случаев можно доказать, что M вписанным не является, не производя почти никаких вычислений.

Первым это заметил немецкий математик Э. Штейниц. В 1927 году вышла в свет его статья, в которой была доказана следующая теорема.

Теорема Штейница. Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы

I. Никакие две черные вершины не были соседними;

II. Число черных вершин было больше, чем число белых.

Тогда многогранник M нельзя вписать в сферу.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем некоторые замечания.

Путь у нас есть фиксированная сфера и некоторый двугранный угол, ребро которого эту сферу пересекает. Возьмем точку пересечения ребра со сферой и проведем через нее касательную плоскость (Рис. 2.3.3). Двугранный угол высекает в этой плоскости линейный угол. Этот угол мы назовем линейным углом двугранного угла относительно данной сферы или просто **относительным углом двугранного угла**. Очевидно, что относительный угол не зависит от выбора одной из двух точек пересечения ребра со сферой. Если же ребро касается сферы, то удобно положить величину относительного угла равной нулю.

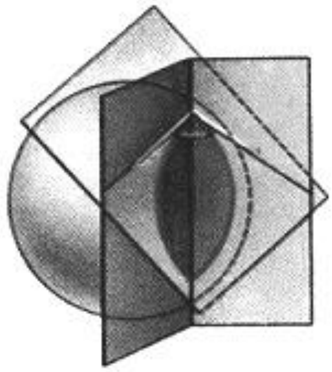


Рис. 2.3.3

Рассмотрим теперь выпуклый многогранный угол, все ребра которого пересекают данную сферу.

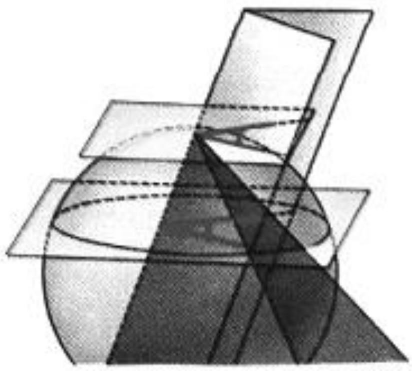


Рис. 2.3.4

Относительные углы его двугранных углов назовем **относительными углами данного многогранного угла**. Пусть у многогранного угла n граней, а его вершина лежит на сфере. Тогда сумма его относительных углов равна $\pi(n-2)$. В самом деле, проведем через вершину многогранного угла касательную плоскость, а затем проведем плоскость, ей параллельную, секущую и сферу, и все ребра многогранного угла (это возможно, так как все ребра угла пересекают сферу). Многогранный угол высекает в этой последней плоскости многоугольник, углы которого равны относительным углам, что следует из теоремы об углах с попарно параллельными сторонами (Рис. 2.3.4). Аналогичное равенство для суммы углов многоугольника хорошо известно.

Перейдем к доказательству самой теоремы. Предположим, что многогранник M вписан в сферу. Обозначим относительный угол двугранного угла с ребром P_i через γ_i. Пусть n_k — число ребер, сходящихся в вершине B_k.

Из доказанного выше следует, что сумма относительных углов при вершине B_k равна $\pi(n_k-2)$. Положим $\beta_i=\pi-\gamma_i$, угол β_i – *внешний относительный угол*, тогда $\gamma_i=\pi-\beta_i$. Если сумма внутренних относительных углов равна $\pi(n_k-2)$, то сумма внешних относительных углов равна 2π. Итак, если в вершине B_k сходятся ребра $P_i,P_j,...,P_l$, то

$$\beta_i+\beta_j+...+\beta_l=2\pi .$$

Выпишем аналогичные равенства для каждой вершины многогранника, потом умножим равенства, соответствующие черным вершинам, на -1 и сложим их все. Черных вершин больше, следовательно, в правой части будет стоять отрицательное число. Рассмотрим сумму, стоящую в левой части. Если $i-$ое ребро идет из черной вершины в белую, то число β_i входит в левую часть один раз со знаком «+» и один раз со знаком «-», в сумме 0; если — из белой в белую, то β_i оба раза входит с «+». Ребер с двумя черными концами не бывает. Итак, сумма чисел в правой части не меньше нуля и мы пришли к противоречию, предположив, что M — вписанный.

Заключение

Подобранный в данной статье материал представляет интерес не только как источник расширения стереометрического кругозора и более качественного освоения школьного курса стереометрии, но и как серьёзный аппарат, пригодный для использования в прикладных науках, например, в механике, аэрокосмических исследованиях. В контексте сказанного можно дополнить приведённую работу подробными исследованиями в области сферической геометрии. Но это уже тема другой статьи.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Безверхняя И.С. Методы изображений. / И.С. Безверхняя. – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2004.
2. Андреев Е. Невписываемые многогранники / Е. Андреев // Квант. – 1991. - №2. – с. 10-15.

Nikolai V.Bezverkhny,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nbezv@mail.ru
Alexey I. Belousov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
al_belous@bk.ru

Non-standard combinations of stereometric figures

Abstract. This article considers combinations of polyhedra and spheres inscribed in them in the usual sense and semi-inscribed, that is, touching the edges of polyhedra. Theorems are formulated and proved that characterize the properties of inscribed and non-inscribed polyhedra in both senses. In addition, the property of being inscribed is also considered. In addition to theorems, some problems are analyzed on combinations of polyhedra and spheres, Steinitz's theorem on a non-inscribed polyhedron is proved.

Keywords: inscribed polyhedron, excircled polytope, semi-embedded polytope.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ СТУДЕНТАМ-ПРОГРАММИСТАМ: ОСНОВЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Аннотация

Актуальность рассматриваемой методической задачи обусловлена тем, что в учебных планах студентов-программистов существенное место занимает математическая логика, и требуется отработка методики строгого и в то же время доступного указанному контингенту изложения основ математической логики. В статье рассматривается методика изложения основных понятий исчисления предикатов 1-го порядка. На основе понятия состояния (присваивания значений предметным переменным) рассматривается аксиоматика исчисления предикатов и предлагается доказательство логической общезначимости аксиом, альтернативное по отношению к известным источникам. Методика ориентирована на аудиторию студентов-программистов.

Ключевые слова

математическая логика, формальная теория, исчисление предикатов, интерпретация, логическая общезначимость, методические проблемы

АВТОРЫ

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Введение

Данная статья является продолжением публикаций по методике изложения разделов курса логики и теории алгоритмов [1-3] и посвящена изложению основ исчисления предикатов 1-го порядка: самому определению теории, ее аксиоматики, доказательству логической общезначимости аксиом и непротиворечивости теории.

Основная методическая инновация – использование понятия состояния как некоторого отображения множества предметных переменных в предметную область и новое доказательство логической общезначимости аксиом на основе этого понятия. С содержательной точки зрения задать состояние означает присвоить значения предметным переменным, инициализировать их, как говорят программисты. При этом множество предметных переменных можно уподобить пустой памяти. Это важно именно в программистской аудитории с учетом того, что языки высокого уровня устроены подобно исчислению предикатов. Это важно также с точки зрения приложения исчисления предикатов к теории схем программ [4, 5], к проблемам искусственного интеллекта [6]. Такой подход альтернативен к классическому изложению теории, как например в [7-10], но в целом, как и при изложении исчисления высказываний [11], мы следуем идеям книги Э. Мендельсона [12, 13].

Методология и результаты исследования

Рассматриваемая в статье методика основана на известных из перечисленных источников концепциях изложения математической логики с учетом особенностей аудитории, в которой читается курс.

Далее рассматриваются основные рубрики, по которым раскладывается теоретический материал. Следует заметить, что к моменту изложения исчисления предикатов аудитория имеет представление о необходимых для понимания материала результатах теории множеств и общей алгебры, в частности, наиболее важного для дальнейшего понятия алгебраической системы, так, как это представлено в базовом учебнике [14].

Язык исчисления предикатов. Термы и формулы

Для полноты изложения необходимо сначала определить теорию (исчисление предикатов 1-го порядка, далее ИП1) во всех ее компонентах. Заметим сразу, что рассматривается бестиповое исчисление в отличие, например, от [15].

Алфавит теории ИП1 включает следующие множества символов:

1) множество X индивидных переменных;

2) множество C индивидных констант;

3) множество F функциональных символов;

4) множество P предикатных символов;

5) множество логических символов, содержащее оба квантора и обозначения логических связок и обе логические константы (И («истина» и Л («ложь»);

6) множество вспомогательных символов: скобки и т. п.

Множества X, C, F, P предполагаются счетными, причем множество F есть дизъюнктное объединение множеств $F^{(k)}$ функциональных символов арности $k, k \geq 0$. При этом все символы из $F^{(0)}$ отождествляются с индивидными константами, т.е. $C = F^{(0)}$. Аналогично $P = \bigcup_{k \geq 1} P^{(k)}$, где $P^{(k)}$ - множество предикатных символов арности k.

Замечание. Строго говоря, указанные множества нельзя считать алфавитами, так как алфавит должен быть конечным. Однако можно их элементы закодировать в виде слов в конечном алфавите. Конкретные способы такой кодировки мы не обсуждаем. Мы предполагаем также, что элементы множеств X, C, F, P пронумерованы. Записывая x_i, мы имеем в виду переменную с номером i и т.д.

Чтобы определить понятие ***формулы*** в ИП1, введем сначала понятие ***терма***.

1) Каждая переменная из X и каждая константа из C есть терм.

2) Если слова $t_1, \ldots, t_n$ суть термы, а $f^{(n)} \in F^{(n)}$, то слово $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ есть терм.

3) Никаких других термов не существует.

Терм называют ***замкнутым***, если он не содержит переменных, в частности, является константой.

Замечание. Часто используют упрощенные формы записи термов $f^{(n)}(t_1,...,t_n)$ при $n=1$ или $n=2$. В последнем случае как правило используют так называемую *инфиксную форму записи*: вместо $f(t_1,t_2)$ пишут $(t_1 ft_2)$.

Формула ИП1 определяется так.

1) Всякое слово вида $p^{(n)}(t_1,...,t_n)$, где $p^{(n)} \in P^{(n)}$, а $t_1,...,t_n$ - термы, есть формула.

2) Если слово Φ есть формула, то слова $\neg\Phi,(\forall x)\Phi$, где $x \in X$, суть формулы.

3) Если слова Φ и Ψ суть формулы, то слово $(\Phi \to \Psi)$ есть формула.

4) Никаких других формул не существует.

Формулы, определенные согласно п. (1), называются ***атомарными***.

Связки дизъюнкции и конъюнкции вводятся так же, как и в исчислении высказываний. Кроме этого, вводится квантор существования, формально в виде сокращения записи некоторой формулы, а именно, полагаем

$$(\exists x)\Phi = \neg(\forall x)\neg\Phi .$$

Разберем подробнее структуру формул с кванторами.

В формуле $(\forall x)\Phi$ формула Φ называется областью действия квантора $(\forall x)$ (то же и для квантора существования). Каждое вхождение переменной x в область действия квантора по этой переменной называется ***связанным***, а если вхождение этой переменной не входит в область действия квантора по ней, то оно называется ***свободным***. Принято обозначение $FV(\Phi)$ для множества всех свободных вхождений переменных в формулу Φ. Одна и та же переменная в данную формулу может иметь и свободные, и связанные вхождения. Например, в формуле $(\forall x_1)(x_1 > x_2) \wedge (\exists x_2)(x_1 = x_2)$ первое вхождение переменной x_1 связанное, а второе свободное; первое вхождение переменной x_2 - свободное, а второе связанное. В формуле же $(\forall x_1)(\exists x_2)((x_1 > x_2) \vee (x_1 \le x_2))$ все вхождения переменных связанные. Формулу, в которой нет свободных вхождений переменных, называют ***замкнутой***. Примем также обозначение $\Phi(x_i)$ при условии, что переменная x_i имеет свободные вхождения в формулу Φ.

Введем теперь понятие терма, свободного для переменной формуле. Говорят, что ***терм*** t ***свободен для переменной*** x_i ***в формуле*** $\Phi(x_i)$, если никакое свободное вхождение переменной x_i в формулу $\Phi(x_i)$ не находится в области действия квантора по переменной, входящей в терм. Обозначим это как $Free(t, x_i, \Phi)$ (заметим, что это тернарный предикат в метаязыке).

Рассмотрим пример.

Пусть терм $t = x_1x_2 + x_3$, а формула

$$\Phi = (\forall x_1)((x \le x_3) \vee (x_2 + x_3 < x_1)) \to (\forall x_2)(x_3 > x_2) .$$

Анализируем по очереди все переменные.

Свободных вхождений переменной x_1 в нашей формуле нет, и поэтому условие для нее тривиально выполняется.

Свободное вхождение переменной x_2 находится в посылке импликации, но оно попадает в область действия квантора по переменной x_1, которая входит в терм. Следовательно,

$$\neg Free(t, x_2, \Phi) .$$

Все вхождения переменной x_3 в формулу свободны, но все они находятся в области действия квантора по переменной, входящей в терм, и, следовательно, условие не выполняется и для этой переменной.

В частности, условие свободности выполняется для замкнутого терма и для терма, совпадающего с переменной.

Обозначим через $\Phi(t)$ формулу, полученную в результате замены в формуле $\Phi(x_i)$ каждого свободного вхождения переменной x_i термом t. Иногда такую замену необходимо уточнить, и тогда пишут $\Phi(t\,|\,x_i)$

Интерпретации. Выполнимость, истинность, логическая общезначимость

Интерпретация I считается заданной, если фиксирована алгебраическая система $\mathfrak{I}=(A,\Omega,\Pi)$ и пара отображений $i_F : F \to \Omega$ и $i_P : P \to \Pi$, сопоставляющие каждому функциональному и предикатному символу операцию и предикат системы $\mathfrak{I}$ соответственно, причем каждому функциональному (предикатному) символу арности n сопоставляется операция (предикат) *той же* арности n. Множество A называется ***областью интерпретации***.

При заданной интерпретации $I = (\mathfrak{I}=(A,\Omega,\Pi), i_F, i_P)$ ***состояние*** – это отображение $\sigma: X \to A$ множества переменных в область интерпретации. Попросту, это присваивание значений переменным. Для простоты мы считаем, что значение присваивается каждой переменной, но, как правило, нас интересуют значения только некоторых переменных. Состояние может быть определено только, если задана интерпретация. Этот подход отличается от предложенного в [16], когда значения предметных переменных рассматриваются как последовательности в области интерпретации. На наш взгляд изложение дальнейших понятий, связанных с интерпретацией, выполнимостью, истинностью (в некоторой интерпретации) и логической общезначимостью, на основе понятия состояния делает определения и доказательства более прозрачными и согласуется с программистской интуицией.

Значение t^σ ***терма*** t ***в состоянии*** σ определяется следующим образом.

Если $t = x \in X$, то, то $t^\sigma = \sigma(x)$ (значение переменной); если $t = f^{(0)} \in F^{(0)} = C$, то $t^\sigma = i_F(f^{(0)})$ (значение константы); если $t = \varphi(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ для некоторого $\varphi \in F^{(n)}$ и некоторых термов $\theta_1,\ldots,\theta_n$, то $t^\sigma = i_F(\varphi)(\theta_1^\sigma,\ldots,\theta_n^\sigma)$.

Истинностное значение Φ^σ ***формулы*** Φ ***в состоянии*** σ определяется аналогично понятию истинностного значения формулы Φ в интерпретации I на последовательности σ.

Удобно ввести такое отношение на множестве состояний: $\sigma \underset{x}{=} \tau$ означает, что для каждой переменной $y \neq x$ выполняется $\sigma(y) = \tau(y)$, т.е. состояние τ отличается от состояния σ, может быть, только значением переменной x. Если $x = x_i$ (переменная с номером i), то будем писать $\sigma \underset{i}{=} \tau$ вместо $\sigma \underset{x_i}{=} \tau$.

В этих обозначениях $((\forall x_i)\Phi)^\sigma = И$ тогда и только тогда, когда для каждого состояния $\tau \underset{i}{=} \sigma$ имеет место $\Phi^\tau = И$.

Выполнимость формулы Φ в интерпретации означает, что для *некоторого* состояния σ имеет место $\Phi^{\sigma} = И$; истинность формулы Φ в интерпретации означает, что для *каждого* состояния σ имеет место $\Phi^{\sigma} = И$. Наконец, формула называется ***логически общезначимой***, если она истинна в каждой интерпретации.

Аксиомы и правила вывода

Исчисление предикатов первого порядка (сокращенно ИП1) является формальной теорией, теоремы которой суть логически общезначимые формулы.

ИП1 имеет пять схем аксиом, из которых первые три схемы совпадают со схемами аксиом исчисления высказываний (ИВ), то есть:

(1) $(A \to (B \to A))$,

(2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$,

(3) $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$,

а еще две схемы имеют вид:

(4) $(\forall x_i)A(x_i) \to A(t)$, где $Free(t, x_i, A)$

(5) $(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i)B)$ при условии $x_i \notin FV(A)$.

Здесь важно отметить следующее.

По форме, но именно только по форме, три первые схемы идентичны трем схемам аксиом исчисления высказываний в форме теории L [17]. Отличие состоит в том, что теперь, в новой теории, буквы означают формулы уже в смысле исчисления предикатов. В этой связи и понятие тавтологии приобретает другой смысл, о чем подробнее будет сказано ниже после определения правил вывода новой теории.

Полезно рассмотреть контрпримеры, показывающие важность условий логической общезначимости формул схем аксиом (4) и (5).

Пусть формула A в схеме (4) есть $\neg(\forall x_2)p^{(2)}(x_1, x_2)$, где $p^{(2)}$ - какой-нибудь предикатный символ арности 2, а терм t = x_2. Очевидно, этот терм не свободен для переменной x_1 в формуле A. Согласно схеме (4), получим формулу $(\forall x_1)(\neg(\forall x_2)p^{(2)}(x_1, x_2)) \to \neg(\forall x_2)p^{(2)}(x_2, x_2)$. Возьмем интерпретацию, в которой символу $p^{(2)}$ сопоставляется предикат тождества (совпадения элементов области интерпретации), а область интерпретации содержит не менее двух различных элементов. Тогда посылка записанной выше импликации истинна в выбранной интерпретации, а заключение ложно. Стало быть, и вся импликация ложна, и формула, полученная из схемы (4), не является логически общезначимой.

Из этого примера видно, что нарушение условия свободности для терма приводит, после замены на него свободного вхождения соответствующей переменной, к появлению новых связанных вхождений этой переменной, что существенно влияет на истинностное значение формулы.

Пусть в схеме (5) формула A совпадает с формулой B и совпадает с атомарной формулой $p^{(1)}(x_1)$ для какого-то предикатного символа $p^{(1)}$ арности 1.

Тогда формула $(\forall x_1)(p^{(1)}(x_1) \to p^{(1)}(x_1)) \to (p^{(1)}(x_1) \to (\forall x_1)p^{(1)}(x_1))$, полученная из схемы (5), не является логически общезначимой, так как ее посылка истинна в любой интерпретации, а для заключения можно найти интерпретацию, в которой оно ложно. Например, для области интерпретации, совпадающей с множеством целых чисел, и при сопоставлении предикатному символу $p^{(1)}$ предиката «быть четным». Возникает ситуация ложной индукции.

ИП1 имеет два правила (точнее, две схемы правил) вывода, из которых первое есть известное по исчислению высказываний правило MP (modus ponens)

$$\frac{A, A \to B}{B},$$

а второе, называемое правилом обобщения (сокращенное обозначение – Gen), есть однопосылочное правило вида:

$$\frac{A}{(\forall x_i)A}.$$

Логическая общезнчимость аксиом

Начнем с того, что обсудим подробнее понятие тавтологии в рамках новой теории. Можно принять по определению, что тавтологией в ИП1 является каждая формула, выведенная из аксиом, получаемых исключительно из первых трех схем посредством применения только правила MP.

В схемах аксиом буквы, как было отмечено в [18], следует понимать как переменные метаязыка, принимающие значения на множестве формул. Но каждая формула, как в исчислении высказываний, так и в исчислении предикатов, может принимать только одно из двух истинностных значений – «ложь» или «истина», то легко понять, что буквы в первых трех схемах с точки зрения вырабатываемого значения ведут себя точно так же, как обычные логические переменные и что любая формула, полученная из первых трех схем, будет логически общезначимой, в вместе с ними и все выведенные с помощью правила MP формулы. Можно представить себе, что все выводы исчисления высказываний переписываются соответственно новому пониманию формулы.

Таким образом, можно констатировать, что ***любая тавтология логически общезначима***.

Можно сказать, что исчисление высказываний является своего рода оболочкой в исчислении предикатов.

Поэтому неверно полагать, будто логически общезначимая формула не может иметь свободных вхождений переменных. Любая тавтология, составленная из произвольных атомарных формул, содержащих какие угодно переменные (свободные или связанные), будет логически общезначимой.

Например, для произвольного предикатного символа $p^{(1)}$ арности 1 формула $p^{(1)}(x_1) \to p^{(1)}(x_1)$ будет логически общезначимой, так как является тавтологией вида $A \to A$.

Но схемы (4) и (5) показывают, что не всякая логически общезначимая формула будет тавтологией. Наличие внешних кванторов существенно меняет ситуацию и усложняет доказательство логической общезначимости.

Рассмотрим это доказательство подробно.

Докажем, что любая формула, получаемая из схемы (4), логически общезначима.

Доказательство проведем в два этапа: сначала индукцией по числу связок докажем, что это верно для любой бескванторной формулы, а потом разберем общий случай, проведя индукцию по числу кванторов.

Базис: формула A является атомарной: $A = p(t_1,...,t_n)(x_i)$ и содержит вхождение переменной x_i.

Тогда, если формула $(\forall x_i)\,p(t_1,...,t_n)(x_i)$ истинна в некотором состоянии σ, то это значит (по определению), что для любого состояния τ, отличного от σ, может быть, только значением переменной x_i (то есть $\tau =_i \sigma$) формула $p(t_1,...,t_n)(x_i)$ будет истинна. Следовательно, если заменить везде переменную x_i термом t, то значение переменной x_i станет равным значению терма t в состоянии σ. Это значит, что оценка формулы $p(t_1,...,t_n)(t)$ в состоянии σ даст тот же результат, что и оценка формулы $p(t_1,...,t_n)(x_i)$ в каком-то состоянии $\tau =_i \sigma$. Но значение последней формулы в любом таком состоянии τ равно «истине», т.е. и формула

$p(t_1,...,t_n)(t)$ в состоянии σ будет истинна. Тем самым формула $(\forall x_i)\, p(t_1,...,t_n)(x_i) \to p(t_1,...,t_n)(t)$ будет истинна в состоянии σ.

Переход. Пусть формула $A = B \to C$, где формулы $(\forall x_i)B(x_i) \to B(t)$ и $(\forall x_i)C(x_i) \to C(t)$ логически общезначимы, причем $D(t)^\sigma = D(x_i)^\tau$, где $\tau =_i \sigma$, а $D \in \{B, C\}$. Пусть формула $(\forall x_i)(B \to C)(x_i)$ истинна в некотором состоянии σ, т.е. для любого состояния $\tau =_i \sigma$ формула $(B \to C)(x_i)$ истинна. Значит, если формула B в состоянии τ истинна, то и формула C в этом состоянии также будет истинна. Но истинность формулы B в любом указанном выше состоянии τ означает, по предположению индукции, что и формула $B(t)$ будет истинна в исходном состоянии σ. Точно также заключаем к истинности формулы $C(t)$. Следовательно, импликация $(B \to C)(t)$ будет истинна.

Теперь пусть формула $A = \neg B$, где для формулы B справедливо предположение индукции, т.е. формула $(\forall x_i)B(x_i) \to B(t)$ логически общезначима, причем $B(t)^\sigma = B(x_i)^\tau$ для некоторого $\tau =_i \sigma$ (а следовательно, и $\neg B(t)^\sigma = \neg B(x_i)^\tau$).

Пусть тогда формула $(\forall x_i)\neg B(x_i)$ истинна в некотором состоянии σ. Тогда в любом состоянии $\tau =_i \sigma$ формула $\neg B(x_i)$ будет истинна, а формула $B(x_i)$ в любом таком состоянии будет ложна. Аналогично предыдущему заключаем, что и формула $B(t)$ в состоянии σ будет ложна (по предположению индукции оценка последней формулы в состоянии σ даст тот же результат, что и оценка формулы $B(x_i)$ в некотором состоянии $\tau =_i \sigma$, но в любом таком состоянии эта формула ложна) а, стало быть, формула $A(t) = \neg B(t)$ будет истинна в состоянии σ, и формула $(\forall x_i)A(x_i) \to A(t)$ логически общезначима.

Итак, для любой бескванторной формулы, получаемой из схемы (4) ее логическая общезначимость доказана. Проведем теперь индукцию по числу кванторов в формуле A в схеме (4).

Пусть $A = (\forall x_j)B$, где для формулы B справедливо индукционное предположение, т.е. из того, что B истинна в любом состоянии, отличающимся от σ, может быть, значением i-ой переменной, следует истинность формулы $B(t)$, полученной подстановкой терма t вместо свободных вхождений переменной x_i. При этом понятно, что переменная x_j не входит в терм t, так как иначе любое свободное вхождение переменной x_i в формулу B окажется в области действия квантора по переменной терма t (по условию этот терм свободен для переменной x_i в формуле A).

Пусть теперь посылка $(\forall x_i)(\forall x_j)B$ истинна в некотором состоянии σ. Это значит, что формула B истинна в любом состоянии τ, отличающимся от σ разве лишь значениями i-ой и j-ой переменной, в том числе в любом состоянии ρ, отличающимся от σ только, может быть, значением i-ой переменной. Тогда, по предположению индукции, формула $B(t)$ также будет истинна (в рассматриваемой произвольно фиксированной интерпретации), а так как сама формула B (до подстановки терма t) истинна в любом упомянутом выше состоянии τ, а терм t не содержит переменной

x_j (и в силу этого подстановка терма сохранит независимость значения формулы B от значения переменной x_j), то и формула $A(t)=(\forall x_j)B(t)$ будет истинна в состоянии σ, что и требовалось доказать.

Докажем теперь логическую общезначимость формулы, получаемой из схемы (5).

Пусть нашлась интерпретация *I* и состояние σ такие, что $(\forall x_i)(A \to B)^{\sigma} = И$, но $(A \to (\forall x_i)B)^{\sigma} = Л$, т.е. $A^{\sigma} = И, (\forall x_i)B^{\sigma} = Л$. Тогда для любого состояния $\sigma' \underset{i}{=} \sigma$ имеем $(A \to B)^{\sigma'} = И$. Так как в *A* нет свободных вхождений x_i, то $A^{\sigma'} = И$, но в силу предположения $((\forall x_i)B)^{\sigma} = Л$, откуда для некоторого состояния $\sigma' \underset{i}{=} \sigma$ будет $B^{\sigma'} = Л$. Но это невозможно ввиду истинности $A \to B$ в *любом* состоянии $\sigma' \underset{i}{=} \sigma$.

Итак, доказана

Теорема 1. Аксиомы ИП1 логически общезначимы.

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема 2. Всякая теорема ИП1 логически общезначима.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что применение правил MP и Gen сохраняет свойство логической общезначимости.

Пусть формулы A и $A \to B$ логически общезначимы, но формула B не является логически общезначимой. Это значит, что в некоторой интерпретации и в некотором состоянии эта формула ложна. Но тогда, поскольку формула A истинна в этом состоянии, то импликация $A \to B$ будет ложна в противоречии с ее логической общезначимостью.

Итак, применение правила MP к двум логически общезначимым формулам дает логически общезначимую формулу.

Пусть теперь к логически общезначимой формуле A применяется правило Gen, что дает формулу $(\forall x_i)A$. Если предположить, что эта формула не является логически общезначимой, то придется признать, что в некотором состоянии формула A ложна. Но это противоречит ее логической общезначимости.

Теорема 3. Теория ИП1 непротиворечива.

Доказательство. В силу доказанного выше достаточно доказать, что отрицание логически общезначимой формулы не является логически общезначимой формулой. Но это легко видеть: если некоторая формула A логически общезначима, а также логически общезначимо ее отрицание, то существует (при некоторой интерпретации) состояние, в котором истинна формула вместе с ее отрицанием, что невозможно.

Заключение

Основной результат статьи – доказательство логической общезначимости аксиом исчисления предикатов 1-го порядка на основе понятия состояния как отображения множества предметных переменных в предметную область (область интерпретации). Такой подход позволяет сделать основные определения и доказательства более прозрачными и лучше понимаемыми в программистской аудитории. Статья может быть полезна как студентам, изучающим курс математической логики, так и преподавателям, ведущим этот курс.

В следующих публикациях предполагается рассмотреть технику построения доказательств в исчисления предикатов 1-го порядка, особенности методики изложения метода резолюций как в исчислении высказываний, так и в исчислении предикатов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам // Modern European Researches 2021 .- № 2-1 .- С. 42 - 58
2. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов теории алгоритмов: проблема применимости для нормальных алгорифмов Маркова // Modern European Researches. – 2019. - №5. – С. 17-36.
3. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов теории алгоритмов: некоторые приемы разработки схем нормальных алгорифмов Маркова// Modern European Researches. – 2020. - №2 (Т.1). – С. 38-49.
4. Котов В.Е. Введение в теорию схем программ. – Новосибирск: Наука, 1978.- 258 с.
5. Котов В.Е., Сабельфельд В.К. Теория схем программ. – М.: Наука, 1991.- 248 с.
6. Косовская Т.М. Некоторые задачи искусственного интеллекта при их формализации на языке исчисления предикатов //Информационные технологии в управлении (ИТУ-2016): Материалы 9-й конференции по проблемам управления. – С. 67-70.
7. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. – 6 ed. – N.Y., CRC Perss.- 2015. – 499 pp.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1971. – 320 с.
9. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика.- М.: КомКнига, 2006.- 240 с.
10. Ершов С.С. Исчисление предикатов. – Учебное пособие.- Изд. Центр ЮУрГУ, Челяюинск, 2016. – 31 с.
11. Белоусов, 2021. Указ. соч.
12. Mendelson E. Указ. соч.
13. Мендельсон Э. Указ. соч.
14. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика// Учеб. для вузов. – 7-е изд. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – 703 с.
15. Задорин В.В. Исчисление предикатов с многосортными переменными как инструмент логического исследования социально-политических теорий // Парадигмы управления, экономики и права.- 2021. -№2(4).- С. 55-60.
16. Мендельсон Э. Указ. соч.
17. Белоусов, 2021. Указ. соч.
18. Там же.

***Alexey I. Belousov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
al_belous@bk.ru
***Nikolai V. Bezverkhny*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nbezv@mail.ru

On some methodological issues of teaching mathematical logic to students-programmers: foundations of the first order predicate calculus

Abstract. The relevance of the considered methodological problem is due to the fact that mathematical logic occupies a significant place in the curricula of student programmers, and it is required to develop a methodology for a rigorous presentation of the foundations of mathematical logic, which is at the same time accessible to the indicated contingent. The article discusses the method of presenting the basic concepts of the 1st order predicate calculus. On the basis of the concept of state (assignment of values to object variables), the axiomatics of predicate calculus is considered and a proof of the logical validity of the axioms is proposed, alternative to known sources. The technique is focused on the audience of students-programmers.

Keywords: mathematical logic, formal theory, predicate calculus, interpretation, logical validity, methodological problems.

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ БАЗОВЫХ ПОНЯТИЙ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Аннотация

Тензорное исчисление возникло во второй половине 19-го – начале 20-го века в связи с развитием дифференциальной геометрии и релятивистской физики и в настоящее время является основным математическим языком для механики сплошной среды, физики твёрдого тела, электродинамики и теории относительности, что фактически делает обязательным изучение основ тензорного исчисления студентами технических специальностей вузов. Вместе с тем в учебной литературе практически не представлено доступное для студентов нематематических специальностей изложение основных понятий, связанных с тензорами. В данной статье излагается методика введения некоторых базовых понятий тензорной алгебры, таких как ковариантные и контравариантные координаты, векторы и ковекторы, формулы поднятия и опускания индексов, двойственные и взаимные базисы.

Ключевые слова

тензорная алгебра, ковекторы, ковариантные и контравариантные координаты

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Введение

Тензорное исчисление возникло во второй половине 19-го – начале 20-го века в связи с развитием дифференциальной геометрии и релятивистской физики и в настоящее время является основным математическим языком для механики сплошной среды, физики твёрдого тела, электродинамики и теории относительности, что фактически делает обязательным изучение основ тензорного исчисления студентами технических специальностей вузов. Существует много популярных учебников по тензорам, однако вместе с тем в учебной литературе практически не представлено доступное для студентов нематематических специальностей изложение основных понятий, связанных с тензорами.

Одним из лучших учебников по тензорам является второй том «Лекций по геометрии» М.М. Постникова [1], однако он содержит слишком много абстрактных конструкций и написан в целом для математиков. Учебник Акивиса и Гольдберга [2] попроще, однако в нём полностью отсутствуют некоторые базовые понятия тензорного исчисления, такие как ковариантные и контравариантные координаты, метрический тензор, взаимные базисы. В книгах [3], [4], [5], [6] тензорная алгебра излагается сразу в криволинейных координатах и с применением производных. Учебник Г.В. Коренева [7] наиболее близок к предлагаемой далее методике изложения базовых понятий тензорной алгебры, однако в этом учебнике слишком много индексных обозначений.

В данной статье излагается методика введения основных понятий тензорной алгебры, таких как ковариантные и контравариантные координаты, векторы и ковекторы, формулы поднятия и опускания индексов, двойственные и взаимные базисы. При этом используются только алгебраические понятия и структуры, а формулы с индексами сопровождаются по возможности эквивалентной записью в матричном виде.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим евклидово n-мерное пространство V, т. е. векторное пространство со скалярным умножением, в котором максимум n векторов могут быть линейно независимыми. И пусть набор векторов $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ является базисом в пространстве V, т. е. векторы $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ являются линейно независимыми.

Контравариантными координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ называются коэффициенты в разложении вектора $\vec{x}$ по данному базису. Контравариантные координаты будем обозначать с верхними индексами, так что запись $\vec{x}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ означает, что

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i.$$

При записи сумм будем использовать ***правило Эйнштейна***: если в произведении переменных с индексами есть повторяющийся индекс, то по нему происходит суммирование по всем возможным его значениям, как правило, в диапазоне от 1 до n. С использованием этого правила разложение вектора по базису принимает вид:

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i.$$

Ковариантными координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ называются скалярные произведения вектора $\vec{x}$ с базисными векторами. Ковариантные координаты будем обозначать с нижними индексами:

$$x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Ковекторами называются упорядоченные наборы, состоящие из ковариантных координат: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

В случае ортонормированного базиса у базисного вектора $\vec{e}_i$ только i-я контравариантная координата равна 1, а остальные контравариантные координаты равны 0. Кроме того, скалярное произведение вычисляется как сумма произведений соответствующих контравариантных координат, поэтому

$$x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i = \left(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n\right) \cdot (0, \dots, 1, \dots, 0) = x^1 \cdot 0 + \dots + x^i \cdot 1 + \dots + x^n \cdot 0 = x^i,$$

т. е. ковариантные координаты вектора совпадают с его контравариантными координатами.

Для записи формулы, связывающей ковариантные и контравариантные координаты вектора в случае произвольного базиса, потребуется следующее понятие.

Матрицей Грама G базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ называется матрица скалярных произведений базисных векторов:

$$G = \left(g_{ij}\right),\ g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j.$$

Элементы g_{ij} матрицы Грама называются ***метрическими коэффициентами*** базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

В силу симметричности скалярного произведения ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$), матрица Грама также будет симметричной, т. е. $g_{ij} = g_{ji}$, $\forall i, j$.

В случае ортонормированного базиса базисные векторы попарно ортогональны и имеют каждый единичную длину, поэтому матрица Грама, очевидно, будет единичной матрицей.

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если известны их контравариантные координаты в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = (x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n)\cdot(y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \dots + y^n\vec{e}_n) =$$
$$= x^1y^1\vec{e}_1^{\,2} + x^1y^2\vec{e}_1\vec{e}_2 + \dots + x^1y^n\vec{e}_1\vec{e}_n + x^2y^1\vec{e}_2\vec{e}_1 + x^2y^2\vec{e}_2^{\,2} + \dots + x^2y^n\vec{e}_2\vec{e}_n +$$
$$+ \dots + x^ny^1\vec{e}_n\vec{e}_1 + x^ny^2\vec{e}_n\vec{e}_2 + \dots + x^ny^n\vec{e}_n^{\,2} = \textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x^iy^j\vec{e}_i\vec{e}_j,$$

Заменяя теперь скалярные произведения $\vec{e}_i\vec{e}_j$ на метрические коэффициенты, получаем ***формулу для скалярного произведения*** векторов через их контравариантные координаты в произвольном базисе:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}x^iy^j.$$

С помощью правила Эйнштейна данная формула выводится гораздо короче:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x^i\vec{e}_i\cdot y^j\vec{e}_j = x^iy^j\vec{e}_i\vec{e}_j = g_{ij}x^iy^j.$$

Заметим, что в последнем выражении суммирование идёт сразу по обоим индексам i и j, каждый из которых пробегает все значения от 1 до n, так что выражение содержит n^2 слагаемых.

Используя формулу для скалярного произведения, можно записать ***формулы для нахождения длины вектора и угла между векторами*** через их контравариантные координаты в произвольном базисе:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2} = \sqrt{g_{ij}x^ix^j}, \cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} = \frac{g_{ij}x^iy^j}{\sqrt{g_{ij}x^ix^j}\sqrt{g_{ij}y^iy^j}}.$$

Теперь можно получить формулу, связывающую ковариантные и контравариантные координаты вектора в произвольном базисе:

$$x_i = \vec{x}\cdot\vec{e}_i = (x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_i = x^1\vec{e}_1\vec{e}_i + x^2\vec{e}_2\vec{e}_i + \dots + x^n\vec{e}_n\vec{e}_i =$$
$$= g_{1i}x^1 + g_{2i}x^2 + \dots + g_{ni}x^n = \sum_{j=1}^n g_{ji}x^j = \sum_{j=1}^n g_{ij}x^j.$$

Или кратко по правилу Эйнштейна:

$$x_i = g_{ij}x^j.$$

Данное равенство можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Умножим слева обе части этого равенства на матрицу G^{-1}, обратную к матрице Грама. Элементы матрицы G^{-1} будем также обозначать буквой g, но с верхними индексами $G^{-1} = (g^{ij})$. Получим выражение для контравариантных координат через ковариантные:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & \dots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \dots & g^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & g^{n2} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

или в координатной записи:

$$x^i = g^{ij}x_j.$$

Равенства $x_i = g_{ij}x^j$ и $x^i = g^{ij}x_j$, связывающие ковариантные и контравариантные координаты одного и того же вектора в заданном базисе, называются ***формулами поднятия и опускания индексов***.

Найдём геометрическую интерпретацию для контравариантных и ковариантных координат. Для этого рассмотрим 3-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^3$ и будем понимать векторы как направленные отрезки в этом пространстве. Для нахождения контравариантных координат следует представить вектор в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$. Геометрически это означает, что следует построить параллелепипед, стороны которого равны $x^1\vec{e}_1$, $x^2\vec{e}_2$ и $x^3\vec{e}_3$, а диагональ совпадает с вектором $\vec{x}$. Сторону $x^i\vec{e}_i$ параллелепипеда можно рассматривать как проекцию вектора $\vec{x}$ на направление базисного вектора $\vec{e}_i$, причём проецировать надо параллельно двум другим базисным векторам, а координату x^i можно получить, если разделить длину этой проекции на длину базисного вектора $\vec{e}_i$.

Таким образом, правило поиска контравариантных координат можно сформулировать следующим образом: чтобы найти i-ю контравариантную координату вектора, надо спроецировать этот вектор на направление i-го базисного вектора $\vec{e}_i$ параллельно остальным базисным векторам и далее поделить длину полученной проекции на длину базисного вектора $\vec{e}_i$.

Ковариантные координаты – это скалярные произведения $x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i$. А скалярное произведение можно рассматривать как произведение длины одного вектора на проекцию второго вектора на первый, т. е. $x_i = |\vec{e}_i| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{e}_i}\vec{x}$. Отсюда получаем правило поиска ковариантных координат вектора: чтобы найти i-ю ковариантную координату вектора, надо спроецировать этот вектор на направление i-го базисного вектора $\vec{e}_i$ перпендикулярно этому базисному вектору и далее умножить длину полученной проекции на длину базисного вектора $\vec{e}_i$.

Пусть теперь в пространстве заданы два базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и $(\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$.

Матрицей перехода от базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ к базису $(\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$ называется матрица, в столбцах которой расположены контравариантные координаты векторов второго базиса, найденные в первом базисе.

Элементы матрицы перехода будем обозначать с одним верхним и одним нижним индексом $C = \left(c_j^i\right)$, где i указывает на номер строки, а j – на номер столбца. Тогда в j-м столбце матрицы C расположены контравариантные координаты вектора $\vec{e}_j'$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, т. е.

$$\vec{e}_j' = c_j^i\vec{e}_i = c_j^1\vec{e}_1 + c_j^2\vec{e}_2 + \ldots + c_j^n\vec{e}_n.$$

Данное равенство можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \ldots & \vec{e}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Умножим справа обе части этого равенства на матрицу C^{-1}, обратную к матрице перехода. Получим:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \ldots & \vec{e}_n' \end{pmatrix} \cdot C^{-1},$$

т. е. матрицей перехода от базиса $(\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$ к базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ является обратная матрица C^{-1}.

Пусть вектор $\vec{x}$ имеет контравариантные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и контравариантные координаты $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ в базисе $(\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$. Тогда

$$x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n = \bar{x}^1\vec{e}_1' + \bar{x}^2\vec{e}_2' + \ldots + \bar{x}^n\vec{e}_n'.$$

В правую часть этого равенства вместо каждого базисного вектора $\vec{e}_j'$ подставим его разложение через векторы $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$. Получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}^j \vec{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}^j \left(\sum_{i=1}^{n} c_j^i \vec{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x}^j c_j^i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^i \bar{x}^j \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^i \bar{x}^j \right) \vec{e}_i.$$

С помощью правила Эйнштейна вывод данной формулы записывается короче:

$$x^i \vec{e}_i = \bar{x}^j \vec{e}'_j = \bar{x}^j \left(c_j^i \vec{e}_i \right) = \left(c_j^i \bar{x}^j \right) \vec{e}_i.$$

В левой и правой частях этого равенства записаны два разложения вектора $\vec{x}$ по базису $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. И поскольку разложить вектор по базису можно единственным образом, коэффициенты в разложениях должны совпадать:

$$x^i = c_j^i \bar{x}^j.$$

Данное равенство называется ***формулой преобразования контравариантных координат***. Его можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix}.$$

Умножим слева обе части этого равенства на матрицу C^{-1}, получим:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор $\vec{x}$ имеет ковариантные координаты $(x_1, \dots, x_n)$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и ковариантные координаты $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ в базисе $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. Тогда

$$\bar{x}_i = \vec{x} \cdot \vec{e}'_i = \vec{x} \cdot \left(c_i^j \vec{e}_j \right) = c_i^j \left(\vec{x} \cdot \vec{e}_j \right) = c_i^j x_j.$$

Равенство $\bar{x}_i = c_i^j x_j$ называется ***формулой преобразования ковариантных координат***. Его можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Видим, что это равенство похоже на формулу связи двух базисов с помощью матрицы перехода.

Таким образом, при переходе к другому базису контравариантные координаты преобразуются по правилу $x^i = c_j^i \bar{x}^j$, а ковариантные - по правилу $\bar{x}_i = c_i^j x_j$.

Ковариантные координаты возникают также при рассмотрении линейных функционалов на векторном пространстве.

Линейным функционалом на векторном пространстве V называется всякая функция $f : V \to \mathbb{R}$, которая линейную комбинацию любых векторов отображает в линейную комбинацию их образов, т. е. для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и любых чисел λ и μ имеем $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$.

Линейный функционал f полностью определяется образами базисных векторов $f(\vec{e}_1)$, …, $f(\vec{e}_n)$. В самом деле, для любого вектора $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ его образ выражается через образы базисных векторов:

$$f(\vec{x}) = f(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ \dots + x^n\vec{e}_n) = x^1 f(\vec{e}_1) + x^2 f(\vec{e}_2) + \ \dots + x^n f(\vec{e}_n).$$

Набор чисел $f_1 = f(\vec{e}_1)$, …, $f_n = f(\vec{e}_n)$ будем называть ***компонентами*** линейного функционала и записывать $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Пусть функционал f имеет компоненты $(f_1, \dots, f_n)$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и компоненты $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ в базисе $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. Тогда

$$\bar{f}_i = f(\vec{e}'_i) = f\left(c_i^j \vec{e}_j\right) = c_i^j f\left(\vec{e}_j\right) = c_i^j f_j.$$

Видим, что компоненты линейного функционала при переходе к другому базису преобразуются так же, как и ковариантные координаты векторов. Поэтому компоненты линейного функционала можно считать его ковариантными координатами, а набор $(f_1, \dots, f_n)$ считать ковектором. Используя формулы поднятия и опускания индексов, можно для каждого линейного функционала определить также и контравариантные координаты по правилу: $f^i = g^{ij} f_j$. Аналогично, для каждого вектора $\vec{x}$ можно найти его ковариантные координаты, составив ковектор $(x_1, \dots, x_n)$ и получив тем самым линейный функционал с компонентами $(x_1, \dots, x_n)$. В этом факте проявляется двойственность между векторами и линейными функционалами, и отсюда же возникает следующее понятие двойственного пространства.

Обозначим через V^* множество всех линейных функционалов на векторном пространстве V. На множестве V^* введём операции сложения функционалов и умножения функционалов на числа по следующим правилам:

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}),\ (\lambda \cdot f)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}).$$

Можно показать, что эти две операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства, а значит, V^* является векторным пространством, причём той же размерности n, что и пространство V.

Векторное пространство V^* всех линейных функционалов на пространстве V называется ***двойственным*** (или ***сопряжённым***) к V.

Если в пространстве V зафиксирован базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, то в двойственном пространстве V^* можно определить так называемый ***двойственный*** (или ***взаимный***) ***базис***, состоящий из линейных функционалов со следующими компонентами:

$$h^1 = (1, 0, \dots, 0),\ h^2 = (0, 1, \dots, 0),\ \dots,\ h^n = (0, 0, \dots, 1).$$

Другими словами, линейные функционалы двойственного базиса h^1, …, h^n действуют на векторы исходного базиса $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ следующим образом: $h^i\left(\vec{e}_j\right) = \delta_j^i$, где δ_j^i - ***символ Кронекера***:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, \text{если } i = j; \\ 0, \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

При таком определении двойственного базиса каждый линейный функционал f с компонентами $(f_1, \dots f_n)$ представляется в виде линейной комбинации базисных функционалов h^1, …, h^n с коэффициентами, равными компонентам функционала. В самом деле:

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) = f_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + f_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + f_n \cdot (0, 0, \dots, 1) =$$
$$= f_1 \cdot h^1 + f_2 \cdot h^2 + \dots + f_n \cdot h^n.$$

Таким образом, компоненты линейного функционала являются его ковариантными координатами в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и контравариантными координатами в двойственном базисе $(h^1, \dots, h^n)$.

Найдём теперь для линейных функционалов двойственного базиса h^1, …, h^n их контравариантные координаты в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Заметим, что для базисного функционала h^i его j-я ковариантная координата $\left(h^i\right)_j = \delta_j^i$. Поэтому по формулам поднятия и опускания индексов имеем:

$$\left(h^i\right)^j = g^{jk}\left(h^i\right)_k = g^{jk}\delta_k^i = g^{ji}.$$

Получаем, что в столбцах матрицы $G^{-1} = \left(g^{ij}\right)$ расположены контравариантные координаты функционалов двойственного базиса, найденные в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Тем самым матрица G^{-1}, обратная к матрице Грама базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, является матрицей перехода от базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к двойственному базису $(h^1, \dots, h^n)$.

Зная контравариантные координаты функционалов h^1, …, h^n, можно найти их скалярные произведения и тем самым матрицу Грама двойственного базиса:

$$h^i \cdot h^j = g_{km}\left(h^i\right)^k\left(h^j\right)^m = g_{km}g^{ik}g^{jm} = g^{ij}.$$

Здесь выполняется суммирование по всем возможным значениям индексов k и m. И так как g_{km} и g^{ik} являются элементами взаимно обратных матриц G и G^{-1} соответственно, то сумма (по всем значениям индекса k) произведений вида $g_{km}g^{ik}$ даёт единичную матрицу, т. е. δ^i_m. И далее сумма (по всем значениям индекса m) произведений вида $\delta^i_m g^{jm}$ даёт g^{ij}, т. е. элементы матрицы G^{-1}.

Таким образом, матрицей Грама двойственного базиса $(h^1, \dots, h^n)$ является матрица G^{-1}, обратная к матрице Грама базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Заключение

В данной статье рассмотрены только некоторые базовые понятия тензорной алгебры. Следующим шагом будет определение понятия тензора и рассмотрение алгебраических операций над тензорами. При этом у учащихся уже не должны возникнуть тудности понимания разницы между верхним и нижним расположением индексов, изменения положения индексов с помощью метрических коэффициентов, сравнения тензоров с полилинейными функционалами.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978.
4. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. – М.: МЦНМО, 2005.
5. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1986.
6. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.
7. Коренев Г.В. Тензорное исчисление: Учеб. пособие: Для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с..

***Oleg N. Biryukov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru
***Nail A. Khasanov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nail_khasanov@mail.ru

Methodology of presentation of some basic concepts of tensor algebra

Abstract. Tensor calculus emerged in the second half of the 19th - early 20th century in connection with the development of differential geometry and relativistic physics and is currently the main mathematical language for continuum mechanics, solid state physics, electrodynamics and relativity theory. This actually makes it mandatory for students of technical specialties of universities to study the basics of tensor calculus. At the same time, there is practically no presentation of the basic concepts related to tensors available to students of non-mathematical specialties in the educational literature. This article describes the methodology for introducing some basic concepts of tensor algebra, such as covariant and contravariant coordinates, vectors and covectors, formulas for raising and lowering indices, dual and mutual bases.

Keywords: tensor algebra, convectors, covariant and contravariant coordinates.

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ 2-ГО ПОРЯДКА И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Аннотация

Представлены наглядные доказательства известных оптических свойств кривых 2-го порядка, находящих широкое практическое применение. Последний параграф посвящён инженерному приложению гиперболы – звукометрическому способу нахождения объекта. Содержание работы будет полезно как студентам 1-го курса негуманитарных специальностей, так и преподавателям аналитической геометрии.

Ключевые слова

эллипс, гипербола, парабола, оптическое свойство

АВТОРЫ

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Кандаурова Ирина Евгеньевна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
iriskan07@gmail.com

Марченко Владимир Викторович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
wmarchenko@rambler.ru

Введение

Кривые 2-го порядка составляют содержание одного из важных разделов курса аналитической геометрии первого семестра для негуманитарных специальностей. Не в последнюю очередь его важность определяется инженерными приложениями, основанными, в частности, на оптических свойствах кривых 2-го порядка. Хорошо известно, что указанные свойства могут быть без особого труда доказаны средствами математического анализа. Однако изложение такого доказательства первокурсникам представляется весьма нежелательным. И дело даже не в том, что ко времени изложения этого материала студенты ещё не владеют курсом анализа в достаточной степени. Главный недостаток такого доказательства – в полном отсутствии наглядности, что весьма нежелательно, особенно для будущего инженера.

В настоящей работе представлены «геометрические» доказательства указанных оптических свойств всех трёх (исключая вырожденные случаи) кривых 2-го порядка. При этом в случае эллипса доказательство следует работе [1] (с незначительными изменениями, включая замену некоторых архаизмов их современными аналогами).

Доказательства для гиперболы и параболы, хоть и следуют той же идее, являются авторскими.

Последний параграф авторы посвящают изложению, в соответствии с [2], одного из возможных практических применений гиперболы – звукометрического способа определения объекта.

Определения кривых 2-го порядка и формулировки оптических свойств даются по учебнику [3].

Методология и результаты исследования

Оптическое свойство эллипса

Как известно, *эллипсом* называется *плоская кривая, состоящая из всех точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, есть фиксированная величина*.

С самого начала мы будем предполагать, что в каждой точке эллипса может быть проведена касательная к нему (гладкость эллипса), имеющая с ним лишь одну общую точку, и что весь эллипс располагается по одну сторону от каждой касательной (выпуклость эллипса).

Пусть T_1T_2 – касательная к эллипсу в точке B.

Напомним известное из школьного курса геометрии свойство касательной к окружности: она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

В случае эллипса оно обобщается следующим образом.

Теорема 1 *(оптическое свойство эллипса). Луч света, выпущенный из фокуса* F_1*, отразившись от эллипса в точке* B*, попадёт в фокус* F_2*. Более точно, фокальные радиусы* F_1B *и* F_2B *образуют с касательной равные углы* F_1BT_1 *и* F_2BT_2 *(рис. 1).*

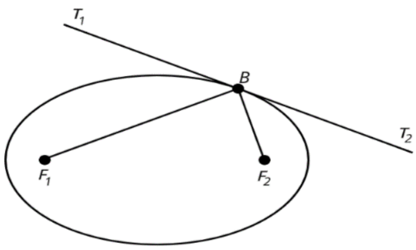


Рис. 1

Доказательство. Рассмотрим зеркальное отражение одного из фокусов, например F_2, относительно касательной – точку F_2' (рис. 2).

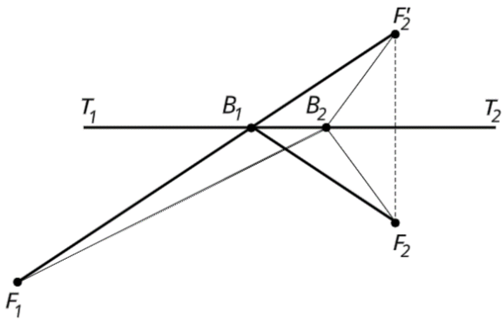


Рис. 2

Будем рассматривать пути вида

$$F_1B_2 + B_2F_1, \qquad (1)$$

имеющие общую точку B_2 с касательной. Так как очевидно, что $B_2F_2 = B_2F_2'$, то вместо указанной суммы отрезков можно рассматривать сумму

$$F_1B_2 + B_2F_2' \qquad (2)$$

Теперь зададимся вопросом: какой из указанных путей будет самым коротким? С одной стороны, из соображений выпуклости эллипса и используя известное неравенство треугольника, легко понять, что кратчайшим среди путей (1) будет тот, в котором точка B2 является точкой касания, т.е. совпадает с B.

С другой стороны, кратчайшим среди путей (2) будет путь, равный отрезку F_1F_2', пересекающий касательную в точке B_1. А значит, точки B_1 и B также совпадают.

Таким образом, точки F_1, B и F_2 лежат на одной прямой, а значит, углы F_1BT_1 и $F_2'BT_2$ равны (как вертикальные). Но, по построению, углы $F_2'BT_2$ и F_2BT_2 также равны, откуда следует требуемое равенство.

Оптическое свойство гиперболы

Напомним, что *гиперболой* называется *плоская кривая, составленная из всех точек, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов гиперболы) есть фиксированная величина*.

Как и в случае эллипса, мы предполагаем, что гипербола – гладкая и выпуклая кривая (каждая её ветвь).

Для определённости будем рассматривать правую ветвь гиперболы, ближайшую к фокусу F_2.

Оптическое свойство гиперболы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2 *(оптическое свойство гиперболы). Луч света, выпущенный из фокуса гиперболы F_2, отразившись от гиперболы в точке B, пойдёт по лучу BF' - так, как будто он был выпущен из фокуса F_1. Более точно, фокальные радиусы F_1B и F_2B образуют с касательной равные углы F_1BT_1 и F_2BT_1 (рис. 3).*

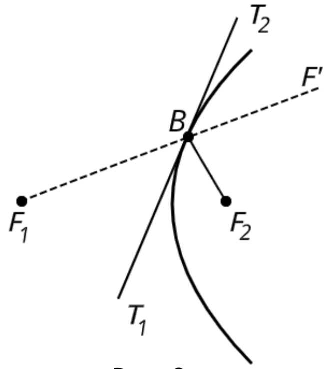


Рис. 3

Доказательство. Для определённости рассмотрим правую ветвь гиперболы, т.е. ту, где $BF_1 > BF_2$. Среди всех точек B_2 касательной разность

$$B_2F_1 - B_2F_2 = B_2F_1 - B_2F_2'$$

будет минимальной в том случае, если точка B_2 совпадает с точкой B_1 пересечения прямой F_1F_2 с касательной (рис. 4). С другой стороны, по неравенству треугольника, она будет минимальной для точки, лежащей на гиперболе, т. е. для B.

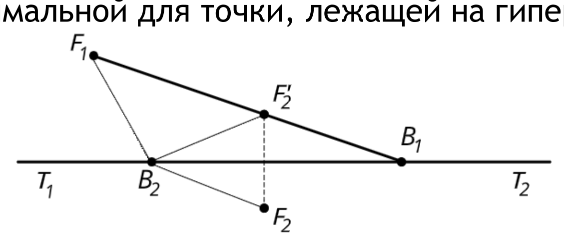


Рис. 4

Здесь, как и выше, F_2' - точка, симметричная точке F_2 относительно касательной T_1T_2. Таким образом, углы F_1BT_1 и F_2BT_1 равны, что и требовалось доказать.

Оптическое свойство параболы

Парабола – это множество точек на плоскости, расстояния от которых до данной точки (фокуса параболы) и данной прямой (директриса параболы) равны.

Теорема 3 *(оптическое свойство параболы). Луч света, выпущенный из фокуса F, отразившись от параболы в точке B, пойдёт по лучу BF', параллельному оси параболы. Более точно,* углы T_2BF' и T_1BF равны (рис. 5).

Доказательство. Среди всех путей $F'B_2 + B_2F$, где B_2 - некоторая точка касательной, кратчайшим будет $F'B + BF$.

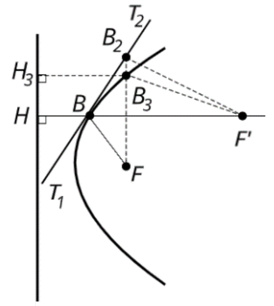


Рис. 5

Действительно,

$F'B_2 + B_2F \geq F'B_3 + B_3F = F'B_3 + B_3H_3 \geq F'B + BH = F'B + BF$,где B_3 - точка пересечения B_2F и параболы. Здесь мы дважды использовали определение параболы.

С другой стороны, кратчайший путь $F_1B_2 + B_2F$ будет соответствовать такому положению B_1 точки B_2 (рис. 6), что углы $F'B_1T_2$ и FB_1T_1 равны (ср. аналогичное рассуждение для эллипса). Значит, равны углы T_2B_1F' и T_1B_1F, что и требовалось доказать.

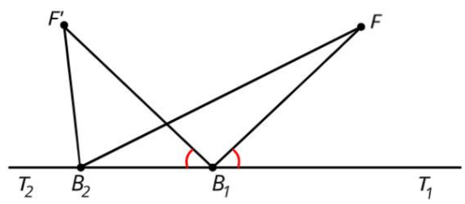


Рис. 6

Практическое применение гиперболы (звукометрический способ нахождения объекта)

Описанный ниже способ определения местонахождения объекта (вражеского орудия) применялся во время Второй мировой войны.

Известно, что скорость распространения звука в воздухе (при температуре $0^{\circ}C$ и нормальном давлении) составляет примерно 330 м/с [4] (ср. [5]). Предположим, что два приёмника сигнала, находящиеся в точках F_1 и F_2, фиксируют звук одного и того же выстрела вражеского орудия, находящегося в точке M. Если приёмник F_1 сигнала зафиксировал звук на t сек раньше, то разность расстояний $MF_1 - MF_2$ равна $330t$ м.

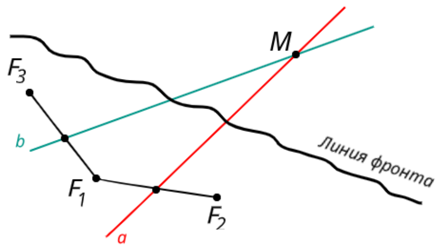


Рис. 7

Значит, точка M находится на соответствующей гиперболе с фокусами в точках F_1 и F_2, а именно на правой её ветви (рис. 3, рис. 7). Поскольку на практике приёмники сигналов располагаются на значительном удалении от вражеского орудия, то с высокой точностью можно считать, что искомая точка M находится на асимптоте a, которая однозначно задаётся известными параметрами гиперболы.

Расположив ещё один приёмник сигнала в некоторой точке F_3, аналогично определяется ещё одна асимптота b гиперболы с фокусами в точках F_1 и F_3. Искомая точка M находится на пересечении прямых a и b.

Заключение

В работе приведены наглядные доказательства оптических свойств эллипса, гиперболы и параболы, находящих широкое практическое применение. Рассказано об одном из возможных применений гиперболы на практике – звукометрическом способе нахождения объекта.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. – М., Л. Гос. Изд-во технико-теор. лит., 1951.
2. И. П. Натансон. Краткий курс высшей математики. – Спб. Лань, 1999.
3. А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. Аналитическая геометрия. – М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
4. Britannica, https://www.britannica.com/science/speed-of-sound-physics .
5. Большая российская энциклопедия, https://bigenc.ru/physics/text/3624120

Mikhail A. Velishchanskiy,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
velmiha@yandex.ru
Irina E. Kandaurova,
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
iriskan07@gmail.com
Vladimir V. Marchenko,
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
wmarchenko@rambler.ru

Focal properties of conic sections and a practical application of a hyperbola

Abstract. Elementary proofs of the known focal properties of conic sections, which are widely used in practice, are given. The last paragraph is devoted to an engineering application of a hyperbola, namely the sound ranging method of targeting an object. The present paper can be useful both to first year students and analytic geometry teachers.

Keywords: *ellipse, hyperbola, parabola, focal property.*

СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Аннотация

В статье предлагается метод подачи материала лекций и семинаров с использованием слайдов, позволяющий лучше воспринимать абстрактную информацию. В качестве инструментов создания презентаций лекций и семинаров предлагается использовать систему компьютерной вёрстки LaTeX и графический редактор CorelDraw для создания рисунков. Метод описан на примере лекции по курсу «дискретная математика». Статья снабжена иллюстрациями в виде слайдов презентации. Содержание статьи может быть полезно для преподавателей и студентов математических и IT-специальностей.

Ключевые слова

алгоритмы, графы, презентация, LaTeX

АВТОРЫ

Виноградова Марина Станиславовна,
кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель кафедры математического моделирования
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва,
m-s-vinogradova@yandex.ru

Ткачева Ольга Сергеевна,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва,
tkolga17@gmail.com

Введение

Курс «Дискретная математика» играет важную роль при обучении студентов IT-специальностей. Дисциплина охватывает такие разделы как теория множеств и отношений, абстрактная алгебра, теория графов, теория конечных автоматов и многое другое. Насыщенность курса и, в следствии этого, высокая скорость изложения материала вызывают сложности в его освоении студентами. Также характерной особенностью курса «Дискретная математика» является высокий уровень абстракции и обобщенности понятий, используемый при изложении материала. Для освоения таких понятий необходим достаточно высокий уровень развития абстрактного мышления. Хорошим методом предоставления абстрактных понятий является визуализация информации [1,2]. Как было показано Национальной тренинговой лабораторией США (National Training Laboratories in Bethel, Maine) в 1980г. на лекции, не сопровождаемой слайдами, либо другим видом иллюстративного материала, усваивается, как правило, 5–10 процентов, особенно информации с высоким уровнем абстракции. Материал лекции, подкрепленный слайдами, усваивается более чем на 30% от общей информации [1].

Успешное освоение курса «Дискретная математика» лежит в основе умения студентов IT-специальностей работать с различными алгоритмами, понимать принципы и логику работы различных информационных систем и систем обработки и хранения данных.

Материал для данной статьи был подготовлен с учетом опыта проведения занятий со студентами IT специальностей в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Методология и результаты исследования

При изучении курса студенты должны освоить такие абстрактные понятия как «n-арное отношение», «бинарная операция», «полукольцо», «графы», «алгоритмы на графах» и др., и получить навыки активного использования этих понятий для решения практических задач.

При освоении абстрактных понятий студенты часто испытывают следующие проблемы и трудности:

- неточное восприятие со слуха материала, излагаемого преподавателем;
- непонимание материала вследствие пробелов в знаниях, возникших на предыдущих этапах обучения;
- отсутствие навыков абстрактного мышления.

Точные определения и формулировки являются основой для правильного понимания абстрактного материала. Анализ студенческих конспектов показывает, что базовые определения и формулировки теорем записываются с ошибками и пропусками.

Для решение этой проблемы по каждой лекции и семинару подготовлен опорный конспект в виде презентации. Такая презентация является подробным конспектом лекции или семинара и включает точные формулировки всех определений, теоремы, снабженные подробным доказательством, примеры и связывающий текст.

Текст в презентации воспроизводится блоками. Один экран обычно разбит на 4 – 5 смысловых блоков, что позволяет воспроизводить на экране материал в том же темпе, каком этот материал озвучивается преподавателем.

Наличие такого конспекта существенно снижает психологическую нагрузку на студента, поскольку позволяет «в домашних условиях» восполнить пропуски и пробелы, образовавшиеся в конспекте на занятиях.

Пример одного экрана лекционной презентации приведен на рис. 1. На рисунке оранжевыми прямоугольниками указаны места разбиения текста на блоки.

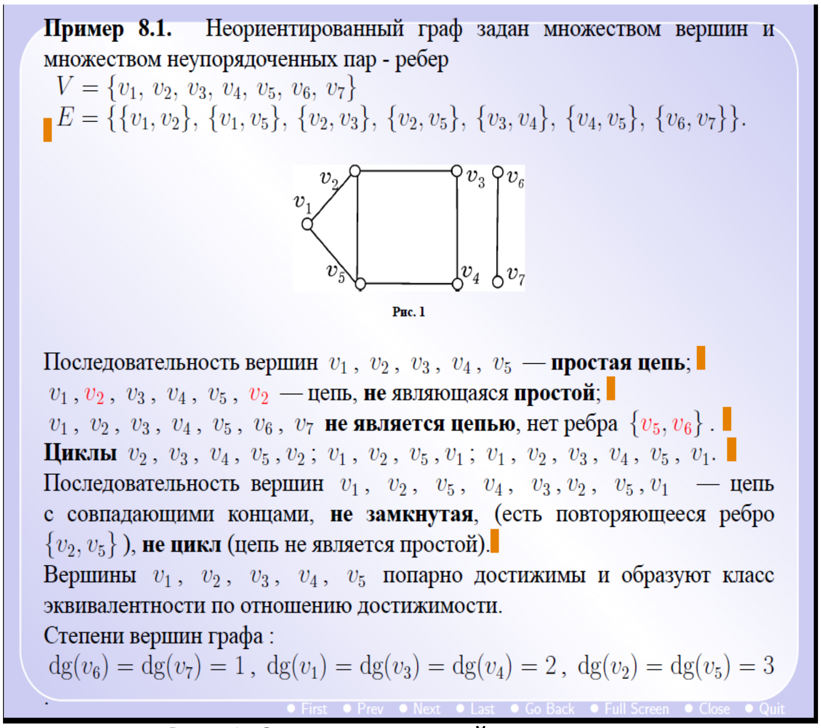


Рис. 1. Экран лекционной презентации

Отметим, что все презентации доступны студентам до начала курса, поэтому студенты имеют возможность их распечатать и делать в тексте пометки по ходу лекции. Опасения, что наличие готовых лекций приведет к низкой посещаемости, не оправдались. Связано это прежде всего с тем, что выведенный на экран опорный конспект служит основой для организации работы в аудитории, но занятие не сводится к зачитыванию выведенной на экран информации. Обязательным является наличие в аудитории рабочей доски (меловой, фломастерной или интерактивной), где обсуждаются дополнительные вопросы и проводится разъяснение непонятных мест.

При наличии опорного конспекта можно наблюдать несколько моделей поведения на занятиях. Основными являются две: работа с готовым конспектом с внесением в него дополнительной информации и написание собственного конспекта с использованием опорного конспекта в качестве справочного материала.

Презентация по опорному конспекту выдается студентам без разбивки по блокам. Такой вариант удобен как для самостоятельного повторения, так и для печати материалов лекции.

Файлы презентаций выдаются студентам в формате *.pdf (Portable Document Format) и могут быть прочитаны, практически, на любых устройствах с любой операционной системой, с сохранением оригинального форматирования текста, шрифтов, рисунков независимо от ОС или устройства. Программа для чтения файлов формата *.pdf доступна для скачивания пользователями бесплатно, то есть не требует от студента дополнительных расходов.

Полезным элементом лекционных и семинарских презентаций является покадровая анимация для иллюстрации работы различных алгоритмов. Рассмотрим такую презентацию на примере алгоритма поиска в глубину в неориентированном графе.

Текст для презентации подготавливается в системе компьютерной верстки (пакете) LaTeX, распространяемом в свободном доступе. Пакет позволяет задавать и описывать новые команды, необходимые, как и для описания теоретической части материала, например, отдельные формулы, так и для создания отдельных анимационных эффектов. Многие системы аналитических вычислений и численных методов, например, MatLab, Maple, Mathematica позволяют экспорт документов в формат *.tex. Таким образом, имея некоторую заготовку на базе LaTex, можно создавать презентации для сопровождения разных курсов [4].

Рассмотрим подготовку материала на примере темы «Алгоритмы на графах. Поиск в глубину в неориентированном и ориентированном графе». Суть данного алгоритма состоит в том, чтобы «нырнуть вглубь» насколько это возможно.

Для улучшения восприятия дальнейшего материала напомним некоторые определения и термины из теории графов [5] и покажем, как это воспроизводится на экране.

Неориентированный граф G задается двумя множествами G=(V,E), где V – конечное множество, элементы которого называют вершинами, E – множество неупорядоченных пар на V, элементы которого называют ребрами. Запись означает $u|-|v$, что ребро соединяет вершины u и v, то есть ребро $\{u, v\}$ является элементом множества ($\{u, v\} \in E$). Вершины u и v, для которых $u|-|v$ называют смежными, а также концами ребра $\{u, v\}$.

Если $u|-|v$, говорят, что вершины u и v связаны отношением непосредственной достижимости.

Ребро e называют инцидентным вершине v, если она является одним из его концов.

Степенью вершины v называют число dg(v) всех инцидентных ей ребер.

. Лемма о «рукопожатиях».

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер.

Приведем листинг кода вышеизложенного текста в редакторе LaTeX:

```
\begin{slide} %#2
{\bf Неориентированные графы }
{\bf Неориентированный граф} $G$ задается двумя множествами
$$ G = ( V, E) , $$
где $V$~--- конечное множество, элементы которого называют {\bf
 вершинами}, $E$~--- множество неупорядоченных пар на $V$, элементы
которого называют {\bf ребрами}.
$u \chainn v$ ---ребро соединяет вершины $u$ и $v$; ${\{u, v\} \in E},$ . \pause
Вершины $u$ и $v,$ для которых ${u \chainn v},$ называют {\bf
смежными}, а также {\bf концами ребра} $\{u, v \}$. \pause
Если ${u \chainn v},$ говорят, что вершины $u$ и $v$ связаны {\bf
отношением непосредственной достижимости}.
Ребро $e$ называют {\bf инцидентным} вершине $v$, если она является
одним из его концов. \pause
{\bf Степенью вершины} $v$ называют число $\dg(v)$ всех инцидентных
ей ребер. \pause
{\bf Лемма {\al}о рукопожатиях{\ar}}
Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер .
\end{slide} \newpage
```

Показывать текст на экране блоками позволяет команда \pause, которая, заметим, не является стандартной командой LaTeX и описана в отдельном пакете. На экране эти определения имеют вид, представленный на рис 2, место остановки вывода отмечено оранжевыми прямоугольниками. Остальные команды связаны с выделением текста полужирным шрифтом, специальными символами для математических обозначений и т.д.

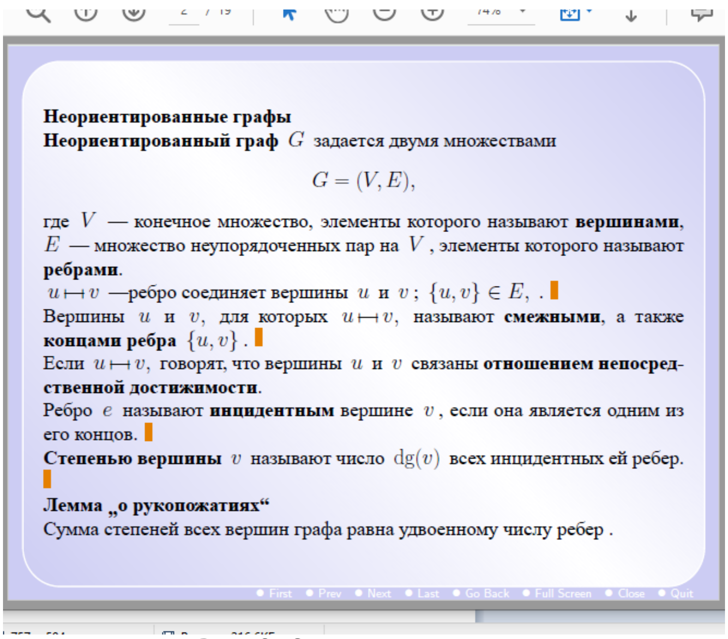


Рис. 2. Экран презентации

Для «расслайдирования» текста используется скрипт, написанный на языке Java. После обработки слайд примет вид, представленный на рис 3.

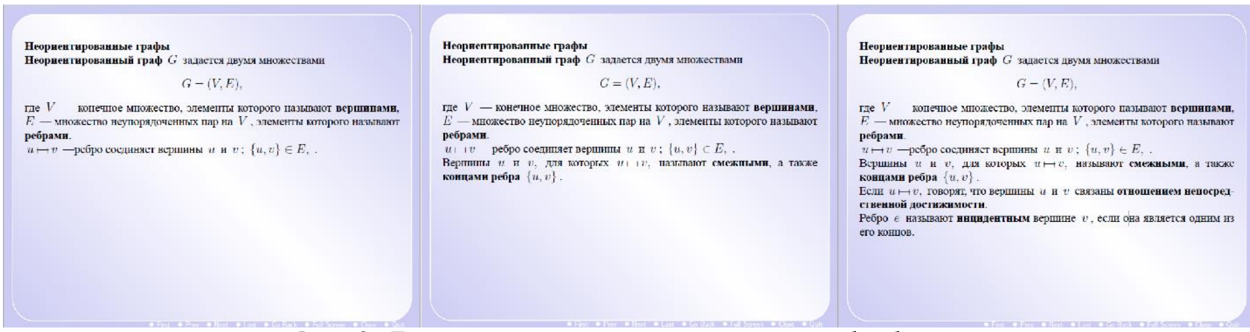


Рис. 3. Пример экрана презентации после обработки

Кратко опишем сам алгоритм поиска в глубину в неориентированном графе (depth-first search, DFS). Это рекурсивный алгоритм обхода графа, начинающий в заранее заданной вершине, позволяет обойти все вершины графа таким образом, чтобы каждая вершина была отмечена ровно один раз. Обычно, такой обход сопровождается нумерацией вершин графа в том порядке, в котором они посещаются и классификацией (маркировкой) ребер графа. Если достигнута последняя вершина в цепи неориентированного графа (непосещенных вершин в списке смежности данной вершины нет), но не все вершины графа еще посещены, то осуществляется возврат к точке разветвления и от нее начинается поиск. [5,6].

Определим еще несколько терминов, необходимых для понимания алгоритма.

Список смежности – это вершины однонаправленный список, в котором для каждой вершины указаны все смежные с нею вершины. Массив лидеров – это матрица-столбец, элементами которой могут быть некоторые объекты (например, элементы списка смежности).

Цепь в неориентированном графе G — это последовательность вершин (конечная или бесконечная) $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, такая, что для любого i $v_i|-|v_{i+1}$, если v_{i+1} существует. Простая цепь — это цепь, все вершины которой, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны, и все ребра попарно различны. Простую цепь ненулевой длины с совпадающими концами называют циклом. Граф, не содержащий циклов, называют ациклическим.

Неориентированный граф $G1=(V_1,E_1)$ называется подграфом неориентированного графа G=V,E, если $V_1 \subseteq V$ и $E_1 \subseteq E$. G_1 называется собственным подграфом графа G, если хотя бы одно из двух включений в определении строгое. G1 называется остовным подграфом графа G, если $V_1=V$. Подграф $G_1 \subseteq G$ называется максимальным подграфом, обладающим данным свойством P, если он не является собственным подграфом никакого другого подграфа графа G, обладающего свойством P.

Неориентированным деревом называют связный и ациклический неориентированный граф. Произвольный ациклический граф называют неориентированным лесом.

Описание алгоритма поиска в глубину в неориентированном графе. На вход алгоритма подается граф, заданный списками смежности, собранными в массив лидеров. При поиске вершинам графа присваиваются номера, обозначаемые D[v] (D-номера). В процессе обхода также ищутся фундаментальные циклы графа.

Маркировка ребер графа. Пусть в неориентированном графе G=(V,E) произвольно фиксирован максимальный остовный лес или Для связного графа это будет максимальное остовное дерево. Множество ребер остовного дерева обозначаются T (Tree), все ребра из T называются древесными, а ребра исходного графа G, не принадлежащие T, называются обратными. Фундаментальный цикл графа G — это любой цикл графа, содержащий только одно обратное ребро.

Для организации работы алгоритма необходимо хранить уже посещенные вершины, для этого используем структуру данных стек. Элементы в стеке организованы по принципу LIFO (last in – first out, «последним пришёл – первым вышел»). При работе алгоритма, по мере прохождения по вершинам графа, уже посещенные вершины помещаются в стек, далее, если из последней помещенной в стек вершины идти некуда, вершины извлекаются из стека, начиная с последней помещенной туда.

Итак, рассмотрим обсуждаемый метод подачи материла на примере вышеизложенного алгоритма. Нам необходимо показать динамическую маркировку ребер, изменения состояния стека, вычеркивания элементов из списков смежности и присваивания D-номеров вершинам. При данном типе анимации один экран отражает один шаг работы алгоритма. При этом для повышения наглядности часть элементов графа выделяется цветом. При переходе к следующему экрану за счет специального позиционирования изображения у зрителя создается ощущение пошагового выполнения алгоритма. При печати же формируется последовательность экранов, отражающая работу алгоритма.

Для подготовки рисунков был использован графический редактор векторной графики CorelDRAW [7]. При необходимости такой рисунок можно адаптировать под нужный размер, внести изменения или добавления. В редакторе имеется возможность импортировать и экспортировать файлы практически любого формата, в частности для внедрения рисунков в текст использовался формат *.png. Пример такого рисунка показан ниже (рис. 4.).

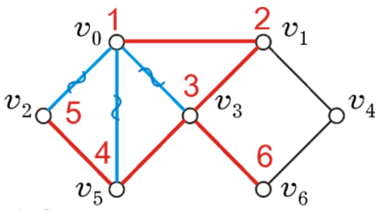


Рис. 4. Рисунок для внедрения в текст

Для внедрения рисунков в текст можно использовать встроенные команды LaTeX или средствами LaTeX написать собственный пакет для внедрения рисунков в текст, позволяющий в дальнейшем стандартизировать и ускорить работу.

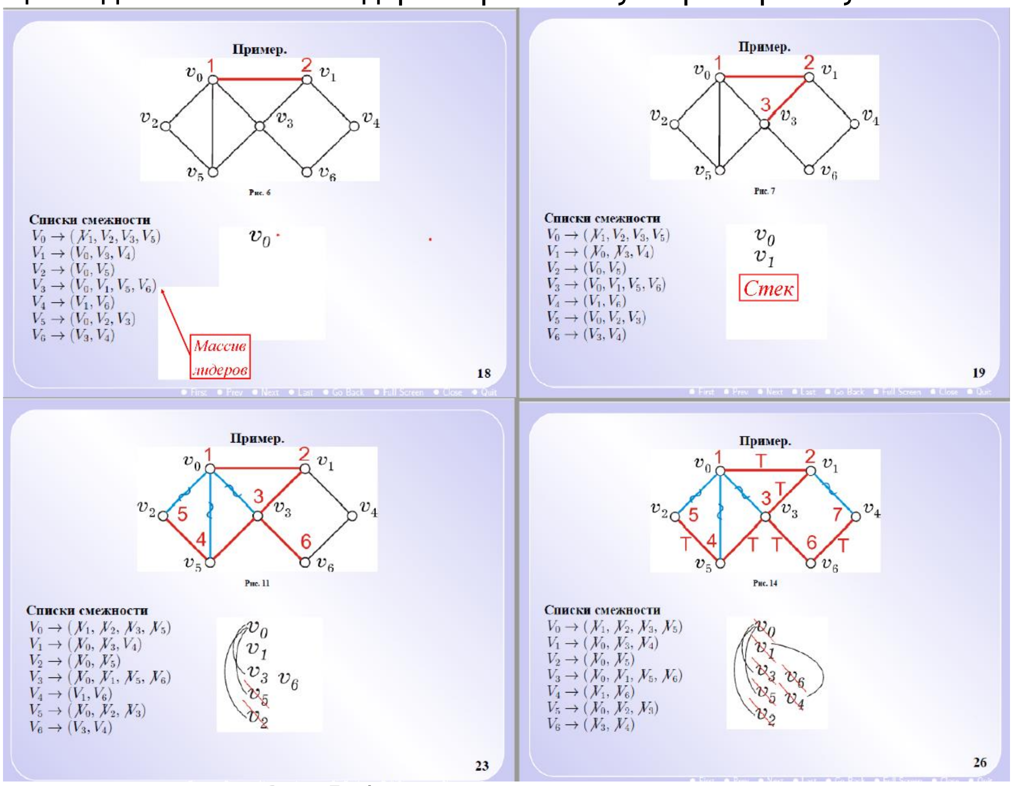


Рис. 5. Фрагмент анимации алгоритма

На рис. 5 приведена последовательность (неполная) экранов слайдов лекции при изложении алгоритма поиска в глубину в неориентированном графе. Здесь показано изменение состояния стека вершин, заполнение и последующая очистка стека (вычеркивание вершин), динамическое формирование остовного дерева по мере прохождения по графу, ребра остовного дерева выделяются красным цветом, обратные ребра окрашиваются голубым маркируются символом ~ (тильда), в конце демонстрации работы алгоритма ребра остовного дерева маркируются буквой T (слайд № 26).

Заключение

Дисциплина «Дискретная математика» вызывают сложности в его освоении студентами. В данной статье предложен метод подачи материала, который вкупе с устными комментариями лектора позволит лучше воспринимать информацию. Метод подачи информации построен на визуализации процесса, в данном случае – это презентация по соответствующей теме. Визуализация материала позволяет подробно изучить и лучше освоить курс «Дискретная математика», что может вызвать дальнейший интерес к изучаемому предмету. Приведен пример презентации лекции с анимацией алгоритма поиска в глубину в неориентированном графе. Для создания презентации использовали систему компьютерной вёрстки LaTex, приведен листинг кода одного слайда из презентации, использующейся для примера визуализации. Все иллюстрации в презентации были выполнены в графическом редакторе векторной графики CorelDRAW.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Марченко И. В. Визуализация абстрактных объектов и понятий при обучении математическим дисциплинам Образование и самообразование в цифровую эпоху : материалы Международной научно-практической конференции, 17–18 октября 2019 г., Минск, Бела-русь / БГУ, Главное управление образовательной деятельности ; – Минск : БГУ, 2019. – С. 169-174.
2. Возженников А. П., Голубев В. О. Технология визуализации математических объектов и понятий Прикладная информатика. 2008. №4, стр.22-26. http://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-vizualizatsii-matematicheskih-obektov-i-ponyatiy
3. Стародуб И. В. Пути решения проблем обучения взрослых в Многофункциональном центре прикладных квалификаций / И. В. Стародуб. — Текст : непосредственный // Проблемы и перспективы развития образования : материалы III Междунар. науч. конф. (г. Пермь, январь 2013 г.). — Т. 0. — Пермь : Меркурий, 2013. — С. 139-142. — URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/66/3315/ (дата обращения: 26.03.2022).
4. Львовский С. М. Набор и вёрстка в системе LATEX. 5-е изд., переработанное. М.: МЦНМО, 2014. 400 с.
5. Белоусов А. И., Ткачёв С. Б. Дискретная математика : учебник для . (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIX) 6-е изд. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020. - 703 с. : ил.
6. А. В. Ахо, Д. Хопкрофт, Д. Д. Ульман. Структуры данных и алгоритмы. : Пер. с англ. : Уч. пос. — М. : Из-во Издательский дом "Вильяме", 2000. — 384 с. : ил.
7. Комолова Н., Яковлева Е. CorelDRAW 2021 СПб. :- Изд-во БХВ-Петербург, 2022 432 с.

***Marina S. Vinogradova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
m-s-vinogradova@yandex.ru
***Olga S. Tkacheva*,**
Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov Academy of Sciences, approved by the Presidium of the Russian Academy of Sciences, Moscow
tkolga17@gmail.com

Special resource support by discipline "Discrete Math".

Abstract. The article proposes a method of presenting the material of lectures and seminars using slides, which makes it possible to better perceive abstract information. As tools for creating presentations of lectures and seminars, it is proposed to use the LaTeX computer layout system and the CorelDraw graphics editor to create drawings. The method is described on the example of a lecture on the course "Discrete Mathematics". The article is illustrated in the form of presentation slides. The content of the article may be useful for teachers and students of mathematical and IT specialties.

Keywords: algorithms, graphs, presentation, LaTeX.

СОВРЕМЕННЫЕ КОНЦЕПЦИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена резким ускорением процесса регенерации двойников науки, которые имитируют научно-познавательную деятельность и наносят тем самым серьезный ущерб репутации науки. Цель исследования - проанализировать современные концепции идентификации научного познания, выдвинутые зарубежными и отечественными авторами. Выяснено, что водораздел между наукой и её подделками проводился как по единичному признаку, так и на основе совокупности нескольких критериев. Результаты работы могут быть использованы при разработке лекционных курсов по дисциплинам «История и философия науки», «Методология науки».

Ключевые слова

научное познание, критерии научности, псевдонаука

АВТОРЫ

Голубев Алексей Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
старший научный сотрудник лаборатории механики систем
ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук», г. Москва
v-avgolu@hotmail.com

Уткина Надежда Вениаминовна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
utkina-nv@yandex.ru

Введение

К XIX веку наука конституировалась, приобрела четкие очертания и методологическое сознание, которое обеспечивает ее успешное функционирование. Внутри различных методологических направлений основания идентификации науки трактовались по-разному. Различия в философских интерпретациях природы познания вообще и научного познания в частности привели к весьма значительным расхождениям в трактовке относительной значимости тех или иных критериев научности. Многие методологические программы (К. Поппер, Л. Лугг, П. Таггард) допускали возможность однозначной, раз и навсегда устанавливаемой идентификации подлинной науки. Однако во второй половине XX века убеждение методологов в существовании абсолютно четких и однозначных критериев научности было поколеблено. К середине 70-х годов XX века такая позиция представлялась подавляющему большинству методологов как анархизм и в методологии науки утвердилась точка зрения, согласно которой понятие научности не следует связывать с какими-либо строго заданными логико-гносеологическими процедурами и даже вообще с каким-либо определенным набором критериев. Г. Фридрих относит проблему выдвижения данных критериев к «весьма сложным проблемам философии науки и считает ее вообще неразрешимой» [1]. Представитель позитивистской философии науки американский философ Л. Лаудан заявляет о «вероятной тщетности поиска эпистемологической версии критерия демаркации» и считает саму проблему демаркации между наукой и псевдонаукой «псевдопроблемой» [2]. Однако данная ситуация вовсе не оправдывает релятивистскую точку зрения и хорошо известный принцип П. Фейерабенда «допустимо все» (anything goes) [3]. Мы соглашаемся с тем, что не существует абсолютно обязательных принципов научного познания. Сами ученые не всегда и не во всем ведут себя в согласии с идеалами науки. И все же не следует отказываться от попытки определить границу подлинной науки и фиктивной. В существе проблемы не заложен элемент неразрешимости. По мнению В. С. Степина, «общие, инвариантные принципы, выражающие идеалы научности, существуют, и их разделяют представители различных наук» [4]. Философии науки необходимо решить нормативную задачу: почему одни формы исследования ведут к (аппроксимативно) истинному знанию, другие же, претендующие на научность, считается, что производят только иллюзорное знание. Таким образом, сложившаяся ситуация вскрывает проблемы, для решения которых целесообразно обратиться к всестороннему анализу разграничения научного знания и девиантного.

Методология и результаты исследования

Фразы «демаркация науки» и «демаркация науки от псевдонауки» часто используются многими авторами как синонимы. В их представлении задача проведения внешних границ науки является по существу тем же самым, что и проведение границы между подлинной наукой и ее подделками. Эта картина весьма упрощена, так как не всё ненаучное ложно. Наука взаимодействует с различными формами знания, которые получены в других областях познавательной деятельности – в искусстве, философии, морали, правовом и политическом дискурсе, в сфере обыденного познания и т. д. Такого рода знания можно обозначить как ненаучные, поскольку они не являются результатами собственно научного исследования, а вырабатываются в других областях культуры. Философа науки, в частности, не интересует демаркация науки от такой ненаучной деятельности. Прежде всего, он заинтересован в демаркации подлинной науки от ее двойников, то есть когнитивной деятельности, отклоняющейся от норм научного исследования и ведущей к ложному, иллюзорному знанию.

Монокритерии. Попытки определить то, что мы сегодня называем наукой, имеют длинную историю, восходящую к «Posterior Analytics» Аристотеля [5]. Однако только в XX веке подлинная наука и псевдонаука стали противопоставляться друг другу. По мнению некоторых авторов, водораздел между наукой и её подделками можно провести на основе единичного признака. Проанализируем отдельные такие попытки.

Позиция логического позитивизма. В 1930-х годах логические позитивисты «Венского Кружка» выдвинули принцип верифицируемости. Основной целью неопозитивистов было различение смысла и бессмыслицы. Предложение считалось (семантически) наполненным смыслом, если и только если оно верифицируемо, в противном случае оно бессмысленно. По мнению неопозитивистов, утверждения науки верифицируемы и, следовательно, наполнены смыслом, а утверждения метафизики нет, поэтому они являются абсурдом [6]. Главный принцип заключается в том, что проверяемость выступает необходимым условием (семантического) значения: значение → проверяемость.

Единственной проблемой данной точки зрения является то, что она рассматривает вещи в неправильном направлении. Например, при эмпирической проверке утверждения «безработица способствует росту преступности» мы должны уже знать, что обозначает данное предложение. Следовательно, значение в действительности является необходимым условием проверяемости, а не наоборот: проверяемость → значение. Итак, ненаучное высказывание может быть семантически наполнено смыслом несмотря на то, что мы не можем установить его достоверность опытным путем.

Когда христианин говорит нам: «Иисус ходил по воде», мы достаточно хорошо знаем, о чем идет речь, хотя и не способны верифицировать данное утверждение. Мы расцениваем его просто как явление религиозного чуда. Оно может быть отклонено по многим причинам, но не из-за бессмысленности.

Следует признать, что редко удается верифицировать утверждение в строгом смысле, то есть показать, что оно истинно. Например, мы можем легко верифицировать такое ограниченное в пространстве и времени экзистенциальное утверждение, как «в моем офисе розовый слон». Однако, когда мы сталкиваемся с такими общими утверждениями как «для всех X: если A, тогда B», выведение A подтверждает B, но только индуктивно, никогда окончательно. Утверждения законов не являются строго верифицируемыми. К. Р. Поппер, критикуя индукцию, предложил отказаться от верифицируемости. Следует отметить, что принцип верифицируемости часто использовался и для демаркации науки от девиантной науки. Однако исторически он не является верным, так как целью верифицированных высказываний выступало разрешение совершенно другой проблемы, а именно разграничение науки и метафизики.

Фальсификационизм. К. Р. Поппер описал проблему демаркации как «источник почти всех других проблем теории познания». Он отверг верифицируемость в качестве критерия научности и взамен предложил критерий фальсифицируемости, точнее, «высказывания или системы высказываний должны быть способны вступать в конфликт с возможными, или мыслимыми, наблюдениями» [7]. По мнению философа, данный критерий способен провести границу между высказываниями, относящимися к эмпирическим наукам, и «всеми другими высказываниями – религиозными, метафизическими или просто псевдонаучными» [8]. Это была альтернатива и критерию верифицируемости логических позитивистов, и критерию разграничения науки и псевдонауки. Хотя К. Поппер не подчеркивал различия, данные критерии, конечно, представляют две разные проблемы. К. Поппер утверждал, что метафизические утверждения могут быть «далеко не бессмысленными», а оценки девиантных высказываний он не дает.

Критики вскоре указали, что не все научные утверждения универсальны: существуют неограниченные экзистенциальные утверждения, такие как «имеются позитроны» [9]. Данное утверждение можно верифицировать, если мы обнаружим хотя бы один экземпляр позитрона. Однако оно не может быть фальсифицируемо, так как мы не в состоянии обыскать всю вселенную, чтобы с полной уверенностью сказать, что она не содержит даже единственного позитрона. Другие критики отметили, что ученые не отказываются от теории (из-за ее ненаучности) при наличии некоторых опровержимых данных, пока не найдется лучшей теории. Таким образом, можно сделать вывод, что критерий К. Поппера не подходит для научной практики.

В свете такого критического анализа К. Поппер позднее разъяснил свою позицию, подчеркивая, что это не практическая, а логическая фальсифицируемость. Утверждение логически фальсифицируемо, если имеется, по крайней мере, хотя бы одно потенциальное наблюдаемое следствие, противоречащее ему. Предложив фальсифицируемость в качестве демаркационного критерия подлинной науки от девиантной, К. Поппер имел в виду психоанализ З. Фрейда. Согласно выдвинутой психоаналитиком гипотезе, некоторые неврозы пациентов являются следствием неразрешимого Эдипова комплекса (бессознательного чувства ненависти к своему отцу). Агрессивное отношение к отцу подтверждает диагноз, если же сын выражает любовь и уважение, то данный факт можно проинтерпретировать как подавление вражды из-за бессознательного страха к родителю. Таким образом, как бы не вел себя пациент, гипотеза психоаналитика будет всегда подтверждаться. Она не фальсифицируема в принципе. Снова критики не замедлили отметить, что ко всему психоанализу это не относится [10]. В то время как одни утверждения действительно неопровержимы, другие – фальсифицируемы (гипотеза о происхождении содержания сновидений из бессознательного) и опровергнуты (некоторые частные гипотезы психоанализа получили подтверждение во внеклинических наблюдениях и экспериментах). То же самое можно сказать и про астрологию и креационизм. Астрология, справедливо рассматриваемая К. Поппером как необыкновенно яркий пример девиантной науки, была фактически проверена и полностью опровергнута. Основной догмат креационизма о создании мира сверхъестественной сущностью на самом деле неопровержим. Однако такие утверждения креационистов, как «возраст земли насчитывает 6000 лет», фальсифицируемы. Таким образом, критерий демаркации К. Поппера подвергся критике за то, что он позволял придавать некоторым девиантным образованиям научный статус. Согласно Л. Лаудану, «его неудачным следствием является то, что любое замысловатое высказывание, которое содержит заведомо ложные утверждения, рассматривается как «научное» [11]. Итак, критерий фальсификации может быть полезен при устранении некоторых девиантных утверждений, и все же он принимает слишком много фальсифицируемых утверждений за научные, хотя есть серьезные основания не считать их таковыми. По всем этим причинам фальсифицируемость была почти единодушно отвергнута в качестве демаркационного критерия подлинной науки.

Критерий прогрессивности научного знания. Критерий демаркации К. Поппера касается логической структуры теорий. И. Лакатос описал его как «весьма ошеломляющий». Теория может быть научной, не имея свидетельств в свою пользу, и наоборот, она может быть псевдонаучной, даже если все доступные свидетельства говорят в ее пользу. Это значит, что научный или ненаучный характер теории может быть определен независимо от наличных фактов» [12]. Вместо этого И. Лакатос предложил модификацию критерия Поппера, которую он назвал «утонченным фальсификационизмом», или методологией научно-исследовательских программ [13]. В соответствии с данной точкой зрения, критерий демаркации должен быть применен не к отдельной гипотезе или теории, а к целой исследовательской программе, которая характеризуется множеством теорий. Исследовательская программа может быть теоретически прогрессивной, когда каждая ее новая теория обладает большей эвристичностью, чем конкурирующая программа, и эмпирически прогрессивной – когда подтверждается, что она ведет к открытию нового факта. Исследовательская программа прогрессирует, когда наблюдается ее теоретический и эмпирический рост, иначе программа расценивается как дегенеративная. И. Лакатос считает исследовательскую программу научной, когда она, по меньшей мере, теоретически прогрессивна. Если исследовательская программа не удовлетворяет данному требованию, она – псевдонаучная.

П. Тагард также выдвигает прогрессивность теории или дисциплины в качестве критерия научности [14]. Главное различие между подходами П. Тагарда и И. Лакатоса заключается в том, что последний классифицировал бы регрессивную исследовательскую программу как псевдонаучную, даже если бы исследователи упорно трудились над ее улучшением и превращением в прогрессивную программу.

Однако такие критики, как Л. Лаудан, отметили, что прогресс возможен и в ненаучных областях, например в философии, и что некоторые отрасли науки не имели прогресса в течение нескольких периодов своей. А что, если какая-нибудь наука в действительности открыла и объяснила всё, что нужно было открыть и объяснить в своей области? А что, если действительно существует такая вещь, как «конец науки», в свое время предложенная А. Эйнштейном в качестве окончательной цели науки, и позднее рассмотренная Дж. Хорганом [15]? Будет ли такая теория или дисциплина считаться ненаучной только потому, что она не прогрессирует, или вернее, не может дальше прогрессировать? Существует и противоположная проблема радикально новых теорий: могут ли они быть научными, не будучи частью существующей исследовательской программы? Следовательно, критерий роста и прогрессивности, полезный во многих случаях, также не может являться решающим демаркационным критерием.

Несколько подобен И. Лакатасу и П. Тагарду ход мыслей у Д. Ротбарта, осуществившего попытку сформулировать метакритерий (адекватное условие) для любого демаркационного критерия. Таковым условием является способность к проверке гипотезы или теории, то есть она выбирается как самая предпочтительная для экспериментирования. С этой целью гипотеза должна удовлетворять определенным требованиям преемственности до всякой проверки. Если она не соответствует даже одному из этих требований, то она не способна к проверке и, следовательно, ненаучна. Фактическая демаркация достигается установлением следующих норм преемственности. Во-первых, предложенная теория должна объяснять все факты, которые объясняет ее конкурирующая второстепенная теория, во-вторых, результаты проверки теории должны находиться в противоречии со следствиями конкурирующей теории [16].

Критерий способности решать головоломки. Т. Кун предложил сосредоточиться не столько на фальсифицируемости теорий, сколько на их способности решать проблемы. Точка зрения Т. Куна на проблему демаркации наиболее четко выражена в его сравнении астрономии с астрологией. По мнению философа, астрономия с древних времен занималась решением теоретических и математических головоломок и поэтому считается наукой. Неподтвердившийся прогноз астронома был головоломкой, которую он мог надеяться разрешить, например перепроверив старые измерения или скорректировав теорию. Напротив, у астролога таких головоломок не было. «То, что неудачи случаются, он мог объяснить, но отдельные неудачи не подталкивали его к исследованию головоломок, поскольку никто, независимо от чьих бы то ни было способностей, не смог бы их использовать при попытке конструктивного пересмотра астрономической традиции» [17]. Поэтому, согласно Т. Куну, астрология никогда не была наукой.

Критерий включения области знания в другие науки. Дж. Райш реанимирует идеал единства науки логического позитивизма, хотя не в его редукционистской форме. Он предлагает идентифицировать различные теоретические и методологические взаимосвязи наук, которые образуют единую сеть, и выдвигает требование апперципации дисциплины в другие науки. Область знания, которая не может быть включена в существующую сеть общепризнанных наук, не разрушая ее, должна быть отклонена как девиантная. Креационизм, например, не является наукой, потому что его основные принципы и утверждения несовместимы с массивом научных знаний. Такая демаркация не фиксирует границу науки, а учитывает, что относится к ее сети и что нет. Таким образом, неопозитивистский аспект точки зрения Дж. Райша проявляется в утверждении, что спецификация взаимосвязей в науках выступает, по существу, научной формой установления границ и не относится к философской [18].

Критерий принадлежности к научному сообществу. Решение задачи демаркации науки от псевдонауки вполне возможно, по мнению А. В. Юревича, в социальной плоскости научного познания. В социальном плане ученый – это субъект, принадлежащий к научному сообществу, то есть в условиях современной, институционализированной науки получивший соответствующее образование, работающий в одном из научно-исследовательских или образовательных учреждений, имеющий публикации в научных журналах и т. п. Человека, не обладающего этими атрибутами, А. В. Юревич советует не считать членом научного сообщества вне зависимости от того, кем он себя ощущает и что именно (принадлежность к каким мифическим академиям, например) обозначено на его визитной карточке [19].

Мультикритерии. По мнению М. Бунге, демаркация на основе единичного критерия не дает адекватного определения науки, для этой цели необходима совокупность нескольких признаков [20]. Некоторые авторы предложили отличать научные формы знания, используя многокритериальный подход.

Так, в анализе креационизма П. Китчер концентрирует свое внимание на трех характеристиках науки. Во-первых, вспомогательные гипотезы, задействованные при проверке любой научной теории, сами являются независимо тестируемыми. Во-вторых, научные практики представляют собой единую целостность, а не мозаику отдельно изолированных методов, для решения широкого круга проблем используется небольшое количество стратегий. В-третьих, хорошие научные теории являются плодотворными, поскольку они открывают новые горизонты для исследования [21]. Следует признать неполноту в качестве одной из причин плодотворности научных теорий, при которой ряд проблем остается нерешенным. Таким образом, нерешенные проблемы являются и недостатком, и источником прогресса.

Большой вклад по выявлению необходимых и желательно-возможных признаков хорошей научной теории внес Г. Фоллмер. В качестве необходимых условий ученый выделяет отсутствие порочного круга в обосновании, внутренняя логичность (непротиворечивость), внешняя связность (совместимость с большой частью хорошо подтвержденного знания), объясняющая ценность, проверяемость и успешность проверки (подтверждение). В качестве желательных признаков Г. Фоллмер называет предсказуемость и воспроизводимость, а также эффективность (плодотворность) и простоту (экономичность). Предсказуемость и воспроизводимость не являются необходимыми условиями, иначе бы исторические науки, такие, как эволюционная биология, геология, космология, и, конечно, «история человечества», не считались бы научными, потому что их предсказуемость и воспроизводимость весьма ограничены. Однако даже в исторических областях не все события уникальны, но по-своему воспроизводимы. События одного и того же вида могут происходить более или менее регулярно. Следовательно, если сама природа некоторого события повторима, невоспроизводимость может указывать на ошибочность претензии данной области на научность [22].

Для определения научности знания В. В. Ильин использует следующие показатели: логические критерии (непротиворечивость, логицизм, формализм, интуицизм); эмпирические критерии (эмпирическое подтверждение: верификация, фальсификация); экстралогические и неэмпирические критерии (простота, красота, эвристичность, конструктивность, нетривиальность, информативность, логическое единство, концептуальная и когерентная обоснованность, оптимальность, эстетичность, прагматичность) [23].

В. С. Степин при выяснении природы научного также выделяет систему отличительных признаков науки, среди которых главными являются: а) установка на исследование законов преобразования объектов и реализующая эту установку предметность и объективность научного знания; б) выход науки за рамки предметных структур производства и обыденного опыта и изучение ею объектов относительно независимо от сегодняшних возможностей их производственного освоения (научные знания всегда относятся к широкому классу практических ситуаций настоящего и будущего, который никогда заранее не задан). Все остальные необходимые признаки, отличающие науку от других форм познавательной деятельности, по мнению В. С. Степина, могут быть представлены как зависящие от указанных главных характеристик и обусловлены ими [24].

М. Шермер проводит грань между наукой и девиантной наукой на основании следующего набора критериев: 1) насколько можно доверять автору открытия; 2) часто ли этот автор делает «великие открытия»; 3) подтверждены ли эти открытия другими специалистами; 4) как новое открытие укладывается в сложившуюся картину мира; 5) искал ли автор гипотезы способы ее опровергнуть или подбирал аргументы только в ее пользу; 6) подтверждает ли большинство фактов новую гипотезу или факты в основном указывают в другую сторону; 7) используются ли в исследовании принятые методы рассуждения и инструменты или они заменены другими, дающими желательные автору результаты; 8) объясняет ли новая гипотеза больше наблюдаемых фактов, чем старая, или просто отрицает старое толкование; 9) объясняет ли новая гипотеза хотя бы столько же фактов, сколько и старая; 10) определяются ли выводы автора гипотезы его личными верованиями и пристрастиями [25].

Одна из самых всесторонних характеристик научного познания была предложена М. Бунге. Он представляет научное познание в виде комплексного вектора с десятью координатами, которые выступают десятью признаками научности: 1) «C» – научное сообщество, которое принимает участие в обучении, продолжает традицию исследования, имеет устойчивые взаимосвязи; 2) «S» – организация, поддерживающая действия «C»; 3) «D» – универсум дискурса членов «C» (например, сбор фактических или вымышленных объектов члены «C» относят к своему дискурсу); 4) «G» – философский фон, состоящий из а) онтологии или общего представления о природе вещей, б) эпистемологии или общего представления о природе знания, в) методологии, аксиологии и этики получения и обработки знания; 5) «F» – формальный фон, совокупность логических или математических предположений или теорий, принятых на веру в процессе исследования; 6) «B» – специфичный второстепенный фон, элементы знания (утверждения, процедуры, методы), заимствованные из других эпистемологических областей; 7) «P» – совокупность проблем; 8) «K» – фонд знания, элементы знания (предложения, теории, процедуры), полученные предыдущими и настоящими членами «C» в ходе их познавательной деятельности; 9) «A» – цели членов «C»; 10) «M» – методика, общие и специальные методы, используемый членами «C» в своем исследовании членов «D» [26].

М. Бунге дает весьма широкую и целостную характеристику научного знания. Однако следует отметить, что первые две координаты являются крайне неопределенными, они представляют собой только субъектов без познавательной деятельности. Несомненно, что познание и знание являются результатом деятельности реальных людей в особой социальной окружающей среде. Учитывая эти аспекты, можно сразу сконцентрировать внимание на специфике научного исследования. Если «C» является фактически подсистемой «S», то для какой цели различать «C» и «S? Поскольку сообщество «C» может иметь социологические особенности, достойные исследования, оно может проявить себя или устареть, не обязательно оказав серьезный эффект на все общество, в котором оно существует или существовало. Здесь следует подумать о «сайентологической церкви» (дианетика) Л. Рона Хаббарда.

Первые три координаты этого вектора М. Бунге назвал материальной основой эпистемологической области, хотя и признал, что это некорректное употребление термина в случае с областями, такими, как математика и гуманитарные науки, которые в большинстве своем или исключительно состоят из нематериальных объектов. В любом случае, объекты «C» и «S» представляют людей и системы людей. Остальные семь координат, состоящие главным образом из абстрактных объектов, образуют концептуальную основу области, которая может также приравниваться понятию парадигмы Т. Куна или дисциплинарной матрицы. Это название также является некорректным употреблением в некоторых случаях, так как методика «M» не обязательно состоит из правил и процедур как концептуальных сущностей, она может также включать материальные объекты (артефакты), такие, как измерительные приборы.

Заключение

На границе между наукой и ненаукой кроме позитивных форм возникают негативные, которые паразитируют на теле науки и ведут к деформациям ее ценностного ядра. Необходимость обнаружения всевозможных отклоняющихся от норм научного исследования течений, отграничение их от подлинной науки обусловливает выработку системы оценки научности. В качестве демаркационного критерия используются как единичные признаки, например, фальсифицируемость, так и система гносеологических оснований.

СЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Friedrich. H. Ist die Alchemie eine Pseudowissenschaft? // Hermetik und Alchemie: Betrachtungen am Ende des 20. Jahrhunderts / hrsg. von K. Figula, H. Gebelein. – Gaggenau: Scientia Nova, Verlag Neue Wissenschaft. – S. 103-120.
2. Laudan. L. Beyond positivism and relativism: theory, method and evidence. – Boulder, Col.: Westview Press, 1996. – 277 p.
3. Фейерабен. П. Избранные труды по методологии науки. – М.: Прогресс, 1986. – 542 с.
4. Степин. В. С. Философия науки. М.: Гардарики, 2006. – 384 с.
5. Laudan.L Beyond positivism and relativism: theory, method and evidence. Boulder, Col.: West view Press, 1996.– 277 p.
6. Витгенштейн. Л. Логико-философский трактат. Tractatus logico-philosohicous. – М.: Канон+, 2008. – 288 с.
7. Поппер. К. Р. Логика и рост научного знания. Избранные работы. – М.: Прогресс, 1983. – 604 с.
8. Поппер. К. Р. Предположения и опровержения: рост научного знания; пер. с англ. – М.: АСТ: Ермак, 2004. – 638 с.
9. Bunge. M. Treatise on basic philosophy. Epistemology and methodolo-gy II: understanding the world. D. Reidel: Dordrecht , 1983. – Vol. 6. – 296 p.
10. Grünbaum. A. Epistemological liabilities of the clinical appraisal of psychoanalytic theory // Contemporary thought. – 1979. – № 2. – P. 451–526.
11. Laudan. L. Beyond positivism and relativism: theory, method and evidence. – Boulder, Col.: West view Press, 1996.– 277 p.
12. Лакатос. И. Наука и псевдонаука // Здравый смысл. – 2003. – № 3 (28). – С. 17–20.
13. Лакатос. И. Фальсификация и методология научно-исследовательских программ. // Структура научных революций / пер. с англ. – М.: Изд-во АСТ, 2003. – С. 269–453.
14. Thagard. P. Why astrology is a pseudoscience. // Philosophy of science: the central issues / ed. M. Curd, J. A. Cover. – N. Y.: Norton, 1998. – P. 27–37.
15. Хорган, Дж. Конец науки: взгляд на ограниченность знания на закате века науки. – СПб.: Амфора, 2001. – 479 с.
16. Rothbart. D. Demarcating genuine science from pseudoscience // Philosophy of science and the occult / ed. P. Grim. – 2. ed. – N. Y.: State Univ. of New York Press, 1990. – P. 111–122.
17. Кун. Т. Логика открытия или психология исследования? // Структура научных революций / пер. с англ. – М.: Изд-во АСТ, 2003. – С. 539–576.
18. Reisch. G. A. Pluralism, logical empiricism, and the problem of pseudoscience // Philosophy of science. – 1998. – № 65. – P. 333–348.
19. Юревич. А. В. Психология и методология. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2005. – 312 с.
20. Bunge, M. Diagnosing pseudoscience // Philosophy in crisis. The need for reconstruction. N.Y.: Prometheus Books, – 2001. – P. 161–189.
21. Kitcher. P. Abusing science: the case against creationism. – Cambridge, Mass.: MIT ress, 1982. – 213 p.
22. Vollmer. G. Wissenschaftstheorie im Ersatz: Beiträge zu einer selbstkritischen Wissenschaftsphilisophie. – Stuttgart: Hirzel, 1993. – 226 S.
23. Ильин. В. В. Критерии научности знания. – М.: Высш. шк., 1989. – 128 с.
24. Степин. В. С. Философия науки. – М.: Гардарики, 2006. – 384 с.
25. Шермер. М. Как провести грань между наукой и псевдонаукой? // Наука и жизнь. – 2002. – № 1. – С. 32–33.
26. Bunge. M. Treatise on basic philosophy. Epistemology and methodolo-gy I: exploring the world. – D. Reidel: Dordrecht, 1983. – Vol. 5. – 404 p.

Alexey E. Golubev
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Senior researcher, ishlinsky institute for problems in mechanics of Russian academy of science, Moscow, Russia
v-avgolu@hotmail.com
Nadezhda V. Utkina
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
utkina-nv@yandex.ru

Modern concepts of identification of scientific knowledge

Abstract. Nowadays there is a sharp upward trend in the regeneration process of science imitators which can seriously damage the world of science and research activity. The aim of the study is to analyze modern concepts of identification of scientific knowledge proposed by foreign and Russian authors. The philosophers applied both a single criterion and a combination of criteria in evaluating science and pseudoscience. The results of the study can be used in delivering a course of lectures "History and Philosophy of science", "Methodology of science".

Keywords*:* scientific cognition, scientific criteria, pseudoscience

ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ ФИЗИКИ В ЗАДАЧАХ (НАСЫЩЕННЫЙ ПАР И ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА) ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ И СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ

Аннотация

Работа является продолжением статьи «Методические рекомендации к решению задач по физике», в которой рассматривался алгоритмический подход к решению задач по темам насыщенный пар и влажность воздуха. В статье, в процессе решения задач, проиллюстрированы основные теоретические положения, приведенные в методических рекомендациях. Работа адресована учащимся 10-х, 11-х классов, студентам младших курсов и педагогам для организации учебного процесса.

Ключевые слова

насыщенный пар, идеальный газ, влажность воздуха, относительная влажность, газовые законы

АВТОРЫ

Грибов Александр Фёдорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Краснов Игорь Константинович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Введение

Решение качественных и расчетных задач, связанных с темами насыщенный пар и влажность воздуха традиционно вызывает трудности у учащихся. Алгоритмический подход заключается в том, что первоначально из условий определяется физическое явление, описанное в задаче. Далее устанавливаются закономерности между величинами, характеризующими рассматриваемое явление (процесс) и записываются соответствующие математические формулы. И, наконец, осуществляется анализ полученных соотношений, и определяются искомые величины.

Методология и результаты исследования

Общие рекомендации к решению задач

При решении задач целесообразно придерживаться следующего плана.

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Вспомнить законы (закономерности и факты), описывающие указанные процессы.
3. Представить указанные закономерности в виде математических соотношений.
4. Провести необходимые вычисления и записать ответ.

Приведем теперь основные факты и закономерности, которые необходимо помнить при решении задач на данную тему.

Напомним, что пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью называется насыщенным паром. Пар, не достигший состояния динамического равновесия со своей жидкостью, называется ненасыщенным. Насыщенный пар обладает рядом свойств.

1. Насыщенный пар имеет при данной температуре наибольшее количество молекул в единице объема, а, следовательно, и наибольшую плотность и оказывает наибольшее давление.

2. Состояние насыщенного пара можно приближенно описывать состоянием идеального газа (подтверждено экспериментом). В частности, имеем соотношение между давлением и плотностью насыщенного пара

$$P_H = \frac{\rho_H}{\mu} RT,$$

где P_H, ρ_H — давление и плотность насыщенного пара; *R* – универсальная газовая постоянная; *T* - температура, *μ* - молярная масса.

Возможна и другая формула для определения рассматриваемых соотношений:

$$P_H = nKT,$$

где *n* - концентрация $(n = N/V)$ — число молекул в единице объема; *K* - постоянная Больцмана.

3. Газовые законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака, Шарля можно применять только к ненасыщенному пару, а насыщенный пар им не подчиняется.

4. При изотермическом уменьшении объема насыщенного пара его давление не возрастает, а остается постоянным из-за перехода части пара в жидкость.

5. При изохорном повышении температуры насыщенного пара его давление растет не пропорционально абсолютной температуре, а быстрее, потому что при этом увеличивается не только скорость молекул, но и их концентрация из-за испарения жидкости в том же сосуде, где находится насыщенный пар.

6. Если насыщенный пар изохорно охлаждать или изотермически сжимать, то он конденсируется.

7. Если насыщенный пар изохорно нагревать или изотермически расширять, то он переходит в ненасыщенный.

8. Если ненасыщенный пар изохорно охлаждать или изотермически сжимать, то ненасыщенный пар переходит в ненасыщенный.

9. Если ненасыщенный пар нагревать или расширять, то он так и будет ненасыщенным.

Решение задач на тему насыщенный пар и влажность воздуха

Задача 1. Найти среднее расстояние между молекулами насыщенного пара при $t = 30°\text{C}$. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $P_{\text{н.п.}} = 4.2 \cdot 10^4 \text{Па}$.

Дано: $t = 30°\text{C}, P_{\text{н.п.}} = 4.2 \cdot 10^4 \text{Па}, d_{\text{ср}} = ?$

Решение. Поскольку $P = nkT$, концентрация молекул пара равна $n = P/kT$. Объем, приходящийся на одну молекулу, составляет $V_M = 1/n = kT/P$. Следовательно, расстояние между молекулами $d = \sqrt[3]{kT/P} = 3.2 \cdot 10^{-13}$ М.

Ответ: $d = 3.2 \cdot 10^{-13}$ М.

Задача 2. В сосуд объема $V = 10^{-2} M^3$, наполненный сухим воздухом при давлении $P_0 = 10^5 \text{Па}$ и температуре $0°\text{C}$, вводят $m = 3$ г воды. Сосуд нагревают до $100°\text{C}$. Каково давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре?

Дано: $m = 3$ г (3$\cdot$ 10^{-3} КГ), $V = 10^{-2} M^3$, $P_0 = 10^5 \text{Па}, T_0 = 273\ K, P = ?$

Решение. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений воздуха и пара: $P = P_\text{в} + P_\text{п}$. Предположим, что вся вода испарилась. Давление паров определим из уравнения

$$P_\text{п} = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{0.003 \cdot 8.31 \cdot 373}{0.018 \cdot 10^{-2}} = 5.2 \cdot 10^4 \text{Па}.$$

Давление пара меньше, чем давление насыщенного пара ($P_\text{н.п.} = 1.013 \cdot 10^5$ Па), поэтому наше предположение о том, что вся вода испарилась справедливо. Давление воздуха при нагревании увеличивается по закону Шарля:

$$P_\text{в} = \frac{P_0}{T_0} T = \frac{10^5}{273} 373 = 1.37 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Таким образом

$$P = P_\text{в} + P_\text{п} = 1.89 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $P = 1.89 \cdot 10^5$ Па.

Задача 3. В цилиндрическом сосуде под поршнем с площадью основания $S = 8\ \text{см}^2$ налита вода при температуре $t = 18°\text{C}$. Основание поршня касается поверхности воды. Какая масса воды *m* испарится, если поршень поднять на высоту $h = 5$ см над водой.

Дано: $S = 8\ \text{см}^2, t = 18°\text{C}, h = 5\ \text{см}, m = ?$

Решение. Между поверхностью воды и основанием поршня в замкнутом пространстве объемом $V = S \cdot h$ образуется насыщенный пар при температуре $t = 18°\text{C}$. По таблице находим его плотность $\rho_\text{нас} = 15.45\ \text{г/м}^3$.

Теперь, зная плотность пара, найдем массу по формуле $m = \rho_\text{нас} V$ или $m = \rho_\text{нас} h S$. Выразим все единицы в системе СИ:

$$8\ \text{см}^2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{м}^2, 5\ \text{см} = 0.05\ \text{м}, 15.4\ \text{г/м}^3 = 0.0154\ \text{кг/м}^3.$$

Проведем вычисления: $m = 0.0154 \cdot 0.05 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 0.2 \cdot 10^{-7} \text{кг}$.

Ответ: $m = 0.2 \cdot 10^{-7} \text{кг}$.

Задача 4. Закрытый сосуд объема $V = 0.5\ \text{м}^3$ содержащий воду массы $m = 0.5$ кг нагрели до температуры $T = 420$ К. На какую величину ΔV следует изменить объем сосуда, чтобы в нем содержался только насыщенный пар?

Давление насыщенного пара при температуре $T = 420$ К равно $P_0 = 0.47$ МПа. Молярная масса воды $\mu = 0.018$ кг/моль.

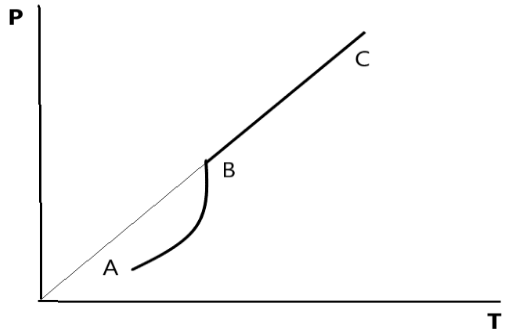
Дано: $V = 0.5\ \text{м}^3, m = 0.5\ \text{кг}, T = 420\ \text{К},\ P_0 = 0.47\ \text{МПа}, \mu = 0.018\ \text{кг/моль},\ \Delta V = ?$

Решение. Насыщенный пар массы *m* при давлении *P*, согласно уравнению состояния, должен занимать $V' = RT/\mu P$.

Следовательно, $\Delta V = V' - V = \frac{mRT}{\mu P} - V = -0.29\ \text{м}^3$ (знак минус показывает, что объем должен быть уменьшен).

Ответ: $\Delta V = -0.29\ \text{м}^3$.

Задача 5. График изменения давления пара в закрытом сосуде при повышении его температуры имеет форму, показанную на рисунке.



Какое заключение можно сделать относительно процессов испарения внутри сосуда?

Решение. В сосуде находилось некоторое количество жидкости. Точке излома соответствует полное испарение жидкости.

Задача 6. В откачанном герметически закрытом сосуде объемом 10 л находится открытая коробочка, содержащая 10 г воды. Сосуд прогревается до 100℃. Какая масса воды испарится?

Дано: $m_{\text{в}} = 10 \text{ г}, V = 10\text{л}, T = 100℃, m_{\text{п}} =?$

Решение. Сделаем предположение, что не вся вода испариться. Тогда пар в сосуде будет насыщенным. Запишем уравнение Менделеева-Клайперона для пара в сосуде:

$$PV = \frac{m_{\text{п}}}{\mu} RT$$

Давление насыщенного пара при $100℃$ равно 10^5Па. Из уравнения находим $m = PV\mu/RT = 6$г. Этот результат подтверждает сделанное предположение. Если бы в результате расчетов оказалось, что полученная масса пара превышает массу воды в колбочке, то следовало бы сделать вывод, что вся вода испарилась.

Ответ: $m = 6$г.

Задача 7. При изотермическом сжатии 9 г водяного пара при температуре *T=373* К его объем уменьшился в 3 раза, а давление возросло вдвое. Найти начальный объем пара.

Дано: $m = 9 \text{ г}, T = 373K, V =?$

Решение. Из условия задачи можно заключить, что в процессе сжатия масса пара меняется, так как если бы она была постоянна, то в соответствии с законом Бойля-Мариотта при уменьшении объема в 3 раза давление увеличилось бы так же в 3 раза. Таким образом, в какой-то момент пар становится насыщенным и при дальнейшем сжатии давление остается постоянным и вдвое больше начального. Запишем закон Бойля-Мариотта для начального состояния пара и состояния пара в тот момент, когда он стал насыщенным $P_1V_1 = P_2V_2$ и уравнение Менделеева-Клайперона для второго состояния (в момент, когда пар стал насыщенным)

$$P_2V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$$

Учитывая, что согласно условию задачи $P_2 = 2P_1$ и давление насыщенного пара при температуре 375 К (100℃) равно $P_2 = 10^5\text{Па}$, находим, что

$$V_1 = 2V_2 = 2\frac{mRT}{P_2\mu} = 30\text{л}$$

Ответ: $V_1 = 30\text{л}$

Задача 8. Паровой котел частично заполнен водой, а частично смесью воздуха и насыщенного пара при температуре $t_1 = 100℃$. Начальное давление в котле $P = 3P_0 = 3 \cdot 10^5 \text{Па}$. Найти давление в котле в случае, когда температуру в нем понижали до значения $t_2 = 10℃$. Давлением насыщенного пара при $10℃$ пренебречь.

Дано: $t_1 = 100℃, P = 3 \cdot 10^5 \text{Па}\,, t_2 = 10℃, P' = ?$

Решение. Давление насыщенного пара при температуре $t \ = 100℃$ равно $P_\text{н} = 10^5 \text{Па}$, тогда давление воздуха $P_\text{в}$ равно $P_\text{в} = P - P_\text{н} = 2 \cdot 10^5 \text{Па}$. Используя условие неизменности объема воды (объемомом, получившимся при конденсации охлаждающего пара пренебрегаем, так как он мал), имеем

$$\frac{P'}{T_2} = \frac{P_\text{в}}{T_1}$$

Тогда $P' = \frac{P_\text{в} T_2}{T_1} = 1.5 \cdot 10^5 \text{Па}$.

Ответ: $P' = 1.5 \cdot 10^5 \text{Па}$.

Задача 9. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре *T* находится насыщенный пар. Определить массу конденсировавшегося при изотермическом вдвигании поршня пара, если при этом совершается работа *A*.

Дано: *T*, *A*, $\mu, \Delta m = ?$

Решение. Так как насыщенный пар конденсируется, то при его сжатии давление постоянно. Работа по сжатию

$$A = F\Delta l = PS\Delta l = PSV = P(V - V_0),$$

где V и V_0 - конечный и начальный объемы пара. К пару можно применить уравнение газового состояния

$$PV_0 = \frac{m_0}{\mu} RT, PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Тогда

$$A = P(V - V_0) = \frac{m - m_0}{\mu} RT.$$

Отсюда масса конденсировавшего пара равна $\Delta m = A\mu / RT$.

Ответ: $\Delta m = A\mu / RT$.

Задача 10. Давление водяного пара *P* при 14℃ равно 1 кПа. Является ли этот пар насыщенным?

Дано: $t = 14℃, P = 1 \text{кПа}, \text{пар насыщенный?}$

Решение. Из таблицы находим, что давление насыщенного пара при 14℃ равно $P_\text{н} = 1.6 \text{ кПа}$, то есть больше давления, данного в условии задачи. Отсюда заключаем, что пар не является насыщенным. При этом относительная влажность

$\varphi = \frac{P}{P_\text{н}} \cdot 100\% = 62.5\%$ меньше 100%. Если бы в условии задачи вместо давления 1 кПа была бы величина, превышающая 1.6 кПа, например 3.2 кПа, то мы бы имели $\varphi = 200\%$, то есть перенасыщенный пар. Такое состояние пара неустойчиво: при переходе в устойчивое состояние часть его конденсируется. Создать перенасыщенный пар можно, например, за счет быстрого сжатия ненасыщенного или насыщенного пара.

Задача 11. Найти относительную влажность при 18°С, если при 10°С образуется роса.

Дано: $t_1 = 18°\mathrm{C}, t_2 = 10°\mathrm{C}, \varphi = ?$

Решение. Согласно определению, относительная влажность при 18°С

$\varphi = \frac{\rho}{\rho_н} \cdot 100\%$, где плотность насыщенного пара при 18°С согласно табличным данным равна $\rho_н(18)$ =15.4 г/м^3, а ρ — плотность пара при 18°С. Поскольку с понижением температуры плотность паров не изменяется (до тех пор, пока не начался процесс конденсации) находим $\rho = \rho_H(10) = 9.4$ г/м^3 (согласно табличным данным плотность насыщенного пара при 10°С равна 9.4 г/м^3). Подставляя полученные значения ρ и $\rho_н$, получим $\varphi = \frac{9.4}{15.4} \cdot 100\% \approx 64\%$.

Ответ: $\varphi \approx 64\%$.

Задача 12. Вечером температура воздуха была $t_1 = 15°\mathrm{C}$, относительная влажность $\varphi = 80\%$. Ночью температура воздуха понизилась до $t_2 = 8°\mathrm{C}$. Была ли роса? При температуре 15°С плотность насыщенного водяного пара $\rho_{н1} = 12.8$ г/м^3, а при 8°С — $\rho_{н2} = 8.3$ г/м^3 .

Дано: $t_1 = 15°\mathrm{C}, t_2 = 8°\mathrm{C}, \varphi = 80\%, \rho_{н1} = 12.8\ \frac{г}{м3}, \rho_{н2} = 8.3\ \frac{г}{м3}$, была ли роса?

Решение. Насыщенный пар - это пар, имеющий максимальную плотность при данной температуре. Поэтому, чтобы узнать, была ли роса, найдем плотность ρ_1 водяного пара при температуре t_1 и сравним ее с плотностью $\rho_{н2}$ насыщенного водяного пара при температуре t_2. Если $\rho_1 < \rho_{н2}$ пар конденсироваться не будет (не будет росы). Если же $\rho_1 > \rho_{н2}$, то роса будет, причем из каждого 1 м^3 влажного воздуха конденсируется масса пара численно равная разности $\rho_1 - \rho_{н2}$. Так как относительная влажность $\varphi = \rho_1/\rho_{н1}$, то $\rho_1 = \varphi\rho_{н1} = 0.9 \cdot 12.8 \approx 10.2$ г/м^3 . Сравнивая это значение с $\rho_{н2} = 8.3$ г/м^3 , делаем вывод: роса была, причем из каждого 1 м^3 воздуха сконденсировалось 1.9 г пара.

Ответ: роса была.

Задача 13. Чему равна абсолютная и относительная влажность воздуха, заполняющего баллон емкостью $V = 700$ л при температуре $t = 24°\mathrm{C}$, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем воду массой $m = 6.2$ г ? Давление насыщенных водяных паров при этой температуре равна $P_н = 3$ кПа, молярная масса воды $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$кг/моль.

Дано: $V = 700$ л, $t = 24°\mathrm{C}$, $m = 6.2$ г, $P_н = 3$ кПа, $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$кг/моль, $\rho = ?, \varphi = ?$

Решение. Массу воды, которую необходимо испарить в баллоне для полного насыщения пара, можно представить как разность между массой пара m_1, который был первоначально в баллоне, и массой пара m_2, который будет в баллоне после испарения воды: $m = m_2 - m_1$. Из уравнения Менделеева-Клайперона, записанного для пара до и после испарения воды

$$PV = \frac{m_1}{\mu}RT, P_нV = \frac{m_2}{\mu}RT$$

находим

$$m_1 = \frac{\mu PV}{RT}, m_2 = \frac{\mu P_н V}{RT}, m = m_2 - m_1 = \frac{\mu V}{RT}(P_н - P).$$

Следовательно, первоначальное давление пара и его масса

$$P = P_н - \frac{m}{\mu V} RT, m_1 = \frac{\mu PV}{RT} = \frac{\mu P_н V}{RT} - m$$

Используя определения абсолютной ρ и относительной φ влажности, получим

$$\rho = \frac{m_1}{V} = \frac{\mu P_н}{RT} - \frac{m}{V} \approx 13\ г/м^3,\ \varphi = \frac{P}{P_н} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{mRT}{\mu P_н V}\right) \cdot 100\% \approx 60\%$$

Ответ: $\rho \approx 13\ г/м^3$, $\varphi \approx 60\%$.

Заключение

В работе приведены примеры решения задач по теме «Насыщенный пар и влажность воздуха». Предложен план предварительного анализа таких задач, в котором так же представлены основные положения (факты) теории, знание которых позволяет успешно решить широкий круг задач по данной теме.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М. Сборник задач по физике. М.: Вербрум,2003. — 264 с.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика. Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл. Профильный уровень : учеб. для общеобразовательных учреждений - М. : Дрофа, 2010 – 349 с.
3. Касаткина И.Л. Репетитор по физике. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика – Ростов н/Д: Феникс, 2006 – 848 с.
4. Грибов А.Ф., Краснов И.К. Методические рекомендации к решению задач по физике // Modern European Researches.- Salzburg, 2021. – Т. 1. №3.- Р. 86-92

Alexander F.Gribov**,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
alexandr-gribov@list.ru
Igor K. Krasnov**,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
igorkrsnv@yandex.ru

Selected sections of physics in problems (saturated steam and air humidity) for applicants and undergraduate students

Abstract. The work is a continuation of the article "Methodological recommendations for solving problems in physics", which considered an algorithmic approach to solving problems on the topics of saturated steam and air humidity. In the article, in the process of solving problems, the main theoretical provisions given in the methodological recommendations are illustrated. The work is addressed to students of the 10th, 11th grades, junior students and teachers to organize the educational process.

Keywords: saturated steam, ideal gas, air humidity, relative humidity, gas laws.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ И НЕКОТОРЫЕ СВЯЗАННЫЕ С ЭТИМ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Аннотация

При рассмотрении вопроса об интегрировании рациональных дробей в курсе математического анализа для высших технических учебных заведений основная теорема о рациональных дробях обычно принимается без доказательства. Если же такое доказательство рассматривается, то, как правило, ограничиваются лишь доказательством существования разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших. В настоящей статье предлагаются усовершенствования такого доказательства. Предлагается также упрощение интегрирования простейших дробей.

Ключевые слова

Интегрирование рациональных дробей, разложение рациональной дроби в сумму простейших, интегрирование простейших дробей

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.obuhov@outlook.com

Введение

При изучении методов интегрирования рациональных дробей важную роль играет основная теорема о рациональных дробях.

Рациональной дробью (или рациональной функцией) называется отношение двух многочленов

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad (1)$$

Такая дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. Поскольку мы будем рассматривать вопросы интегрирования рациональных дробей, то мы можем ограничиться лишь правильными дробями, т.к. всегда можно, разделив (если надо) с остатком числитель на знаменатель, представить произвольную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, интегрирование же многочлена не представляет сложностей.

Мы можем также считать рассматриваемую рациональную дробь несократимой.

По основной теореме алгебры запишем знаменатель дроби (1) в виде:

$$Q(x) = b_n(x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где $a_1,\ a_2, \cdots, a_r$ попарно различные вещественные числа, а квадратные трёхчлены $x^2+p_jx+q_j$, $j=1,2,\cdots,s$ попарно различны и не имеют вещественных корней. Без ограничения общности, мы можем считать, что старший коэффициент b_n многочлена $Q(x)$ равен единице (если это не так, то числитель и знаменатель дроби (1) разделим на b_n, и после этого указанное условие будет выполняться). Простейшими (а также простыми или элементарными) дробями называются дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k},\frac{Bx+C}{(x^2+px+q\,)^k},$$

где A, B, C, a, b, c - вещественные числа, k=1, 2, … , и квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней.

Основная теорема о рациональных дробях. *Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы нескольких простейших дробей. Такое представление единственно с точностью до порядка слагаемых*.

В настоящей работе предлагаются некоторые методические приёмы, позволяющие улучшить доказательство этой теоремы.

Методология и результаты исследования

1. К вопросу о доказательстве основной теоремы о рациональных дробях.

Обычно эта теорема доказывается в курсе высшей алгебры. Поскольку в технических вузах курс высшей алгебры, как правило, не читается, то основная теорема о рациональных дробях включается в курс математического анализа (при достаточно подробном его изучении). Доказательство этой теоремы опирается на две леммы, которые мы здесь сформулируем и кратко обсудим некоторые аспекты их доказательств.

Лемма 1. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная несократимая дробь, и пусть* $Q(x)=(x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(a)\neq 0$. *Тогда существует ненулевое число* A *такое, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-l}\,Q_1(x)}, \quad (2)$$

где $0\leq l\ \leq k$ *, и последняя дробь несократима*.

В формулировке этой леммы (см., например [1]-[3]) обычно не требуют, чтобы дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ была несократимой. Поскольку по ходу доказательства устанавливается, что $A=\frac{P(x)}{Q(x)}$, то без последнего условия мы не можем поручиться, что A отлично от нуля. Далее, в формулировке леммы в указанных выше учебниках число l в знаменателе последней дроби из правой части (2) равно 1. В такой ситуации мы не можем считать, что эта дробь несократима, и применить вновь лемму 1 в приведённой выше формулировке не получится. Возможно, разумнее сначала сократить числитель и знаменатель на разность $x-a$ в соответствующей степени, чтобы оказаться в условиях сформулированной выше леммы 1, а после доказательства равенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{\tilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-l}\,Q_1(x)},$$

если окажется, что последняя дробь сократима, произвести требуемые сокращения (которые сведутся к делению числителя и знаменателя на $(x-a)$ в соответствующей степени, т.к. легко проверяется, что многочлены $\tilde{P}_1(x)$ и $Q(x)$ взаимно просты). Предложенные изменения леммы 1 представляются полезными, т.к. в традиционной формулировке возможно равенство $A = 0$, и может случиться так, что «любознательный» студент не сумеет самостоятельно разобраться, что же делать в такой ситуации.

В доказательстве леммы 2 фигурируют комплексные числа (сопряжённые корни z_0 и $\overline{z}_0$ квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$). Поэтому следует предварительно рассмотреть некоторые свойства комплексных чисел. Их немного: во-первых $z \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $z = \overline{\overline{z}}$, и

во-вторых выполняются равенства $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

Лемма 2. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *—несократимая дробь, и пусть* $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$*, где* $Q_1(z_0) \neq 0$; z_0 *— существенно комплексный корень квадратного трёхчлена* $x^2 + px + q$. *. Тогда существуют не равные одновременно нулю числа* B *и* C *такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^l Q_1(x)}, \quad (3)$$

где $0 < l \leq m$*, и последняя дробь несократима.*

Здесь остаются в силе сделанные выше замечания относительно числа l (почему в некоторых случаях это число может быть больше единицы, и почему упомянутая дробь несократима).

Доказательство существования чисел B и C в стандартных учебниках (см. упомянутые выше книги [1]-[3]) выглядит весьма искусственным, и потому является трудным для запоминания. Возможно, разумнее действовать так. Преобразуем дробь из левой части (3):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P(x) - (Bx + C)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^m Q_1(x)}, (4)$$

где B и C — числа, подлежащие определению. Поскольку теорема Безу справедлива и в комплексном случае, то для того, чтобы в последней дроби можно было сократить квадратный трёхчлен $(x^2 + px + q)^m$ в числителе и знаменателе достаточно (и необходимо) потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$P(z_0) - (Bz_0 + C)Q(z_0) = 0,$$
$$P(\overline{z}_0) - (B\overline{z}_0 + C)Q(\overline{z}_0) = 0.$$

Отсюда ясно, что числа B и C определяются из системы линейных уравнений

$$(Bz_0 + C) = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)},$$
$$(B\overline{z}_0 + C) = \frac{P(\overline{z}_0)}{Q(\overline{z}_0)}, \quad (5)$$

определитель которой

$$\begin{vmatrix} z_0 & 1 \\ \overline{z}_0 & 1 \end{vmatrix} = z_0 - \overline{z}_0 = 2\mathrm{Im}\, z_0$$

отличен от нуля, если $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, что и имеет место в рассматриваемом случае, т.к. у квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ нет вещественных корней. Поэтому система уравнений для нахождения B и C имеет единственное решение, а сами эти числа определяются равенствами

$$B = \frac{\begin{vmatrix} P(z_0)/Q(z_0) & 1 \\ P(\overline{z}_0)/Q(\overline{z}_0) & 1 \end{vmatrix}}{z - \overline{z}_0} = \frac{\frac{P(z_0)}{Q(z_0)} - \frac{P(\overline{z}_0)}{Q(\overline{z}_0)}}{z - \overline{z}_0},$$

$$C=\frac{\begin{vmatrix} z_0 & P(z_0)/Q(z_0) \\ \overline{z}_0 & P(\overline{z}_0)/Q(\overline{z}_0) \end{vmatrix}}{z-\overline{z}_0}=\frac{z_0\frac{P(\overline{z}_0)}{Q(\overline{z}_0)}-\overline{z}_0\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}}{z-\overline{z}_0}.$$

Ясно, что B и C не равны одновременно нулю (т.к. не равны нулю дроби из правых частей системы (5)); чтобы убедиться, что эти числа вещественные, проверим, например, равенство $B=\overline{B}$. Имеем

$$\overline{B}=\frac{\overline{\left(\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}-\frac{P(\overline{z}_0)}{Q(\overline{z}_0)}\right)}}{\overline{z_0-\overline{z}_0}}=\frac{\frac{P(\overline{z}_0)}{Q(\overline{z}_0)}-\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}}{\overline{z}_0-z_0}=B.$$

Здесь мы пользуемся тем, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют вещественные коэффициенты, а также тем, что для любого $z\in\mathbb{C}$ выполняется равенство $\overline{\overline{z}}=z$. Таким образом, $B\in\mathbb{R}$, и аналогично проверяется, что также и $C\in\mathbb{R}$. Хотя приведённое рассуждение несколько длиннее того, которое обычно применяется для доказательства леммы 2, оно имеет всё же некоторые достоинства. Во-первых, оно является более естественным и поэтому легко запоминается. И оно также демонстрирует основной способ доказательства того, что комплексное число z является вещественным: доказательство состоит в проверке выполнения равенства $z=\overline{\overline{z}}$.

Окончание доказательства леммы 2 не представляет интереса: следует проверить, является ли число z_0 корнем (простым или кратным) числителя последней дроби из равенства (4), и разделить (если требуется) числитель и знаменатель этой дроби на $x^2+px=q$ в соответствующей степени.

2. Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании простейших дробей.

К простейшим рациональным дробям относятся дроби следующих четырех типов:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\ 2)\ \frac{A}{(x-a)^k};\ 3)\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q};\ 4)\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$

где A,B,C,a,p,q — вещественные числа. Предполагается, что квадратный трехчлен x^2+px+q в знаменателе дробей вида 3) и 4) не имеет вещественных корней, так что

$$\frac{p^2}{4}-q<0 \text{ или } q-\frac{p^2}{4}>0.$$

Используя свойство инвариантности неопределенного интеграла, подведем под знак дифференциала в неопределенных интегралах от дробей 1) и 2) типа простейшую подстановку $t=x-a,$ получим табличные интегралы:

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\,\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^k}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Интеграл от дроби третьего типа преобразуем следующим образом. В числителе подынтегральной функции выделяем производную квадратного трехчлена знаменателя и представляем исходный интеграл в виде суммы двух интегралов с соответствующими коэффициентами. Первый интеграл после подведения под знак дифференциала квадратного трехчлена знаменателя дроби превращается в табличный. Второй интеграл после выделения полного квадрата в трехчлене знаменателя дроби и подведения под знак дифференциала соответствующей подстановки превращается также в табличный.

$$\int \frac{B\,x + C}{x^2 + px + q}dx = \int \frac{\frac{B}{2}\cdot(2x+p) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{x^2 + px + q}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q\,) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Интеграл от дроби вида 4) после выделения полного квадрата в знаменателе и подстановки $t = x + \frac{p}{2}$ можно представить суммой интегралов:

$$M\int \frac{t\,dt}{(t^2 + a^2)^n} + N\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}\,.$$

Первый интеграл после подведения под знак дифференциала соответствующей подстановки превращается в табличный. Второй интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы, которую необходимо вывести. Имеем

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n} =$$

$$= \begin{vmatrix} t = x + \dfrac{p}{2} \Rightarrow x = t - \dfrac{p}{2}; \\ dx = dt;\, a^2 = \left(q - \dfrac{p^2}{4}\right) \end{vmatrix} = \int \frac{Bt + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$\frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{B}{2}\left(-\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$. (6)

Применим к нему формулу интегрирования по частям:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Примем:

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, dv = dx \implies du = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, v = x,$$

Получим

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx.$$

Преобразуем последний интеграл следующим образом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2J_{n+1}.$$

Получаем соотношение

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,J_n - 2na^2J_{n+1}$$

Получаем рекуррентное соотношение

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n\,.$$

Основная проблема, как видим, состоит в получении последнего рекуррентного соотношения.

Получение этого соотношения сложно назвать стандартной вычислительной процедурой. При попытке воспроизвести её самостоятельно через некоторое время возникает желание заглянуть в справочник. Можно предложить другой способ, который легко запоминается и не содержит каких-либо нестандартных шагов. В интеграле (6) осуществим замену $x = a\,tg\,t$ и воспользуемся равенством $tg^2x + 1 = \frac{1}{cos^2x}$.

Имеем

$$J_n = \frac{1}{a^{2n-1}}\int cos^{2n}t\cdot\frac{dt}{cos^2t} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int cos^{2(n-1)}\,t\,dt,$$

и дело сводится к вычислению интегралов $I_n = \int cos^{2(n-1)}t\,dt, n = 1,2,\cdots,$

при этом $J_n = \frac{1}{a^{2n-1}}I_n$.

Здесь нетрудно получить рекуррентное соотношение

$$I_{n+1} = \int \cos^{2n}t\,dt = \int \cos^{2n-1}t d\sin t = \cos^{2n-1}t\sin t + (2n-1)\int \cos^{2(n-1)}t\sin t dt =$$

$$= \cos^{2n-1}t\sin t + (2n-1)\int \cos^{2(n-1)}t\,dt - (2n-1)\int \cos^{2n}t\,dt.$$

Отсюда

$I_{n+1} = \frac{1}{2n}(\cos^{2n-1}t\,\sin t + (2n-1)I_n),$

и требуемое соотношение получено. Например,

$I_1 = \int dt = t + C;\ J_1 = \frac{1}{a}\,I_1 = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + \frac{C}{a},$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\cos t \ \sin t + I_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{tg\ t}{1 + tg^2 t} + t + C\right)$$

Подставляя в последнее выражение $t = arctg\ \frac{x}{a}$, получаем

$$J_2 = \frac{1}{a^3} I_2 = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\frac{x}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + arctg\ \frac{x}{a} + C\right) =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\ \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3}\ arctg\ \frac{x}{a} + C_1,$$

где $C_1 = \frac{C}{2a^3}$.

Заключение

Предложенные усовершенствования в доказательства основных лемм, с помощью которых устанавливается возможность проинтегрировать любую рациональную дробь в конечном виде, могут быть использованы в реально читаемом курсе математического анализа для студентов технических вузов. Эти усовершенствования помогут студентам лучше усвоить соответствующий материал и успешно сдать экзамен по рассматриваемой теме. Это же замечание относится и к интегрированию простейших дробей, содержащих степень квадратного трёхчлена в знаменателе. Получены без искусственных приемов рекуррентные соотношения для простейших дробей, содержащих степень квадратного трёхчлена в знаменателе, что позволит студентам практически легко интегрировать такие дроби.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т II/ Г.М. Фихтенгольц. М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 656 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ: т. II/ Л.Д. Кудрявцев. М.: Высшая школа, 1973. 470 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т., Т.1 М.: Наука, 1985. 432 с.

Pavel L. Ivankov**,**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
ivankovpl@mail.ru
Victor P. Obuhov**,**
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
v.obuhov@outlook.com

Integration of rational fractions and some related methodical problems.

Abstract. While considering the question of rational fractions in the course of calculus for higher technical colleges the main theorem on rational fractions is usually accepted without proof. If one considers such a proof then one as a rule restricts oneself only by a proof of the existence of the resolution of the proper fraction into a sum of partial fractions. In this paper we propose some improvement of this proof. Besides that a simplification of the integration of partial fractions has been proposed.

Keywords: integration of rational fractions, resolution of rational fraction into a sum of partial fractions, integration of partial fractions.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗАХ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ КВАТЕРНИОНОВ

Аннотация

В статье обосновывается необходимость включать в лекции по аналитической геометрии информацию об истории научных математических открытий и их философском значении для формирования профессиональной культуры студентов. Материал исследования – тема кватернионы. Результатом исследования стал дополнительный материал по истории математики и по геометрической интерпретации кватернионов; а также выводы о необходимости вводить такого рода информацию на лекциях по описательной геометрии и другим математическим дисциплинам.

Ключевые слова

кватернионы, аналитическая геометрия, Уильям Гамильтон, комплексные числа

АВТОР

Нараленкова Ирина Игоревна,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва
i.i.naralenkova@gmail.com

Введение

В основе методического подхода к изучению математических дисциплин в технических вузах традиционно лежит цель – формирование у студентов практических навыков решения задач. Ни в коей мере не пытаясь критиковать данный подход и соответствующую цель, считаем, однако, необходимым высказать некоторые соображения относительно важности расширения знаний учащихся об истории математики в связи с изучением тех или иных математических тем. Знание фактов из биографии ученых, совершивших то или иное математическое открытие, понимание учащимися тех трудностей, с которыми сталкивались математики, осознание философской значимости решеной проблемы приводит не только к пониманию важности открытия, но и к большей заинтересованности студентов, способствует формированию их профессиональной культуры.

Для подтверждения данного тезиса обратимся к теме кватернионы. Эта тема, с нашей точки зрения, обладает большим методическим потенциалом, прежде всего потому, что в силу многоаспектности выводит на такие темы, описание вращений в трехмерном пространстве, спины, природа чисел.

Актуальность данного исследования обусловлена целесообразностью вводить в лекционные курсы по математическим дисциплинам материалы по истории и философии математике.

Цель состоит в обосновании необходимости включать в лекции по аналитической геометрии информацию об истории научных математических открытий и их философском значении. В задачи исследования входила разработка дополнительного материала по истории математички для студентов технических вузов в рамках изучения предмета аналитическая геометрия и обоснование введение такого материала на лекциях по аналитической геометрии, а также разработка материала по геометрической интерпретации кватернионов. В ходе исследования были использованы историко-описательный и объяснительно-иллюстративный методы.

Методология и результаты исследования

В курсе аналитической геометрии предполагается одну лекцию посвятить изучению комплексных чисел. По учебному плану надо разобрать их алгебраическая, тригонометрическая и экспоненциальная форму записи, действия над комплексными числами, возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа, формулы Эйлера, основную теорему алгебры.

Зачастую студенты уже проходили эти темы в школе. В этом случае можно рассказать на лекции об истории изучения комплексных чисел и о кватернионах.

Расширение множества действительных чисел и построение теории комплексных чисел дало мощный толчок для решения многих проблем, стоящих перед учеными. У математиков возникает идея о расширении множества комплексных чисел, тем более, что этому способствовала геометрическая интерпретация действительных и комплексных чисел. Арифметические операции над ними являются преобразованиями плоскости: параллельный перенос, гомотетия, поворот и их композиции.

Поисками новой числовой системы, которая геометрически реализовалась бы с помощью трёхмерного пространства, вплотную занялся Уильям Гамильтон (1805-1865).

Разносторонние способности Гамильтона проявились еще в раннем детстве: в 10 лет он изучил «Начала» Евклида; в 13 лет - «Всеобщую арифметику» Ньютона, он цитировал Гомера, знал более двенадцати языков, писал стихи. В 22 года он стал профессором и директором обсерватории Дублинского университета.

Гамильтон стал рассматривать комплексные числа как упорядоченную пару действительных чисел, для которых определенным способом введены арифметические операции. Он строит систему новых чисел, которые являются упорядоченными тройками действительных чисел (a,b,c). Для комплексных чисел удобна запись $a+bi$, аналогично для новых чисел он вводит запись $a+bi+cj$, где i, j - мнимые единицы, то есть $i^2=-1$; $j^2=-1$, такие числа автор назвал «триплетами» («триплет» в переводе с латинского значит три).

Будучи уверенным в том, что построение теории триплетов не вызовет особых проблем, статью 1837 г., посвященную комплексным числам Гамильтон заканчивает обещанием в ближайшее время опубликовать теорию триплетов. И действительно проблем при определении равенства двух триплетов, умножении триплетов на действительное число, определении суммы и разности этих чисел у него не возникло. Ключевым здесь являлось слово *покомпонентно*.

Однако при определении произведения таких чисел Гамильтон столкнулся с трудностями. Для него важно было найти для новой системы такое правило умножения двух чисел, при котором бы сохранились все законы арифметики, которые известны для действительных и комплексных чисел: коммутативный закон сложения и умножения, ассоциативный закон для сложения и умножения, дистрибутивный закон умножения относительно сложения. Но на первое место Гамильтон ставил вопрос о решении уравнения: $a\cdot x=b$, где $a\neq 0$, a и b - триплеты. Это уравнение всегда должно иметь решение и при этом только одно. Здесь и возникло затруднение: при любом, подобранном Гамильтоном способе умножения триплетов, всегда находились два числа a и b такие, что $a\neq 0$; $b\neq 0$, а их произведение равно нулю. Значительно позднее было доказано, что для триплетов не существует такого способа умножения, при котором уравнение $a\cdot x=0$, где $a\neq 0$ всегда имело единственное решение $x=0$.

В 1843 г. Гамильтон нашел решение данной проблемы: как обойти трудности, возникшие при попытке расширить множество комплексных чисел. Это произошло во время прогулки с женой по Королевской набережной. «*Казалось, что замкнулась электрическая цепь, возникла искра, пришел вестник долгих многих лет неуклонной работы мысли*», – писал он впоследствии. Он понял, что для решения вопроса должна быть рассмотрена числовая система не с тремя единицами, а с четырьмя $1, i, j, k$, где одна единица действительная, а три единицы мнимые, то есть он пришел к пониманию необходимости рассматривать не упорядоченную тройку чисел, а упорядоченную четверку чисел и записывать эти числа в виде $a+bi+cj+dk$, где a,b,c,d - действительные числа, названные Гамильтоном кватернионами от латинского слова «quaterni» – по четыре. Будучи пораженным своим открытием Гамильтон вырезал перочинным ножом на деревянных перилах мостика формулу: $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$, которая явилась основой для составления таблицы умножения.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Правило умножения базисных кватернионов получается циклической перестановкой

$$i \to j \to k \to i \to j \to k$$
$$i \cdot j = k;\ j \cdot k = i, k \cdot i = j,$$

если меняем их местами, то знак произведения меняется с плюса на минус.

Арифметика кватернионов оказалась таковой: чтобы выражения $z = a+bi+cj+dk$ можно было назвать числами, должны быть определены равенства этих чисел, правила сложения, вычитания, умножения и деления.

Сложение, вычитание и умножение на действительное число вводятся естественным образом [1, с. 489]. А вот чтобы определить умножение кватернионов задается таблица умножения мнимых единиц. При определении операции деления кватернионов появляются понятия левого и правого частного.

Таким образом, оказалось, что в исчислении кватернионов для разных действий используются разные законы: ассоциативный и коммутативные законы для сложения, ассоциативный закон для умножения и дистрибутивный закон для умножения относительно сложения. А вот коммутативный закон для умножения не выполняется.

Этого исторического материала вполне достаточно, чтобы студенты вполне справлялись с задачами о нахождении суммы, разности и произведения таких необычных чисел.

Гамильтон ввел следующие определения.

Определение. Если у кватерниона

$$z = a + bi + cj + dk$$

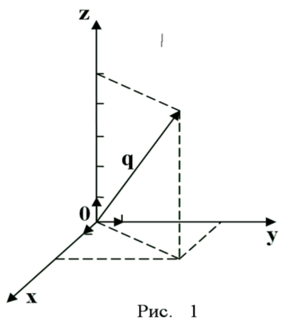
компоненты $b = c = d = 0$, то он называется скаляром; если $a = 0$, то

$$z = bi + cj + dk$$

и Гамильтон назвал его ***вектором***.

Лат. **vector** – несущий.

Пример.



$q = 3i + 4j + 6k$

Рис. 1

Введение понятия скаляра, вектора, модуля вектора позволяет студентам исследовать далее свойства кватернионов, а также доказывать, например, что уравнение вида $z^2 + 1 = 0$ имеет бесконечно много решений в исчислении кватернионов. Каждый кватернион, который является вектором с единичным модулем, является корнем такого уравнения. Т.к. если взять вектор $z = bi + cj + dk$, причем $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Тогда

$$z^2 = (bi + cj + dk)\cdot(bi + cj + dk) = b^2 i^2 + cbij + dbki + bcij + c^2 j^2 + dckj + bdik + cdjk + d^2 k^2 =$$

$$= -b^2 - cbk + dbj + bck - c^2 - dci - bdj + cdi - d^2 = -b^2 - c^2 - d^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0.$$

При помощи данной теории можно, например, доказать, что число, равное 2580, можно представить в виде суммы четырёх квадратов целых чисел.

Действительно, $2580 = a \cdot b$, причем

$a = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ и $b = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86$,

Пусть $z_1 = 1 + 2i + 3j + 4k$ и $z_2 = 3 + 4i + 5j + 6k$.

Тогда $|z_1|^2 = |1 + 2i + 3j + 4k|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

$$|z_2|^2 = |3 + 4i + 5j + 6k|^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i + 3j + 4k)\cdot(3 + 4i + 5j + 6k) =$$

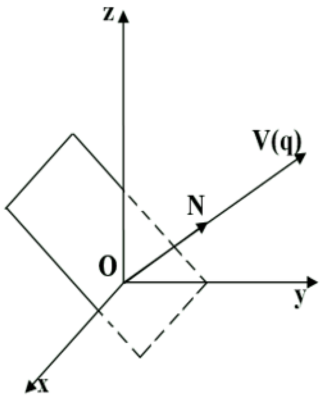
$$= 3 + 6i + 9j + 12k + 4i - 8 - 12k + 16j + 5j + 10k - 15 + 2oi + 6k - 12j + 18i - 24 =$$

$$= -44 + 8i + 18j + 16k$$

$$z_1 \cdot z_2 = 44^2 + 8^2 + 18^2 + 16^2 = 2580 .$$

Таким образом $2580 = 44^2 + 8^2 + 18^2 + 16^2$.

В геометрии кватернионов [2, с. 14] удобным оказалось представление их в тригонометрической форме. А именно, пусть $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = S(q) + V(q)$, где $S(q)$ - скалярная, $V(q) = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ - векторная часть кватерниона q. Тогда длина данного вектора равна $|V(q)| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Если выбрать угол φ такой, что его $\cos\varphi = \dfrac{S(q)}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \dfrac{q_0}{|q|}$, а $\sin\varphi = \dfrac{|V(q)|}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \dfrac{|V(q)|}{|q|}$, то кватернион примет вид $q = |q| \cdot (\cos\varphi + n \sin\varphi)$.



Определив таким образом форму и рассмотрев свойства, можно, например, найти ось кватерниона $q = 1 + i + j + k$ и его аргумент и записать этот кватернион в тригонометрической форме. Либо, имея два вектора, задаваемых кватернионами, определить третий, образованный поворотом первого вектора относительно второго на заданный угол.

Открытие кватернионов имело огромное значение для развития науки: на базе исчисления кватернионов возникло векторное исчисление, они успешно используются в геометрии, теории чисел, механике, теоретической физике. В последние десятилетия стало ясно, что теория кватернионов является удобным аппаратом для специальной теории относительности.

Заключение

В статье представлен дополнительный материал, который может быть использован на лекциях по аналитической геометрии при изучении темы *кватернионы*.

Сделаны следующие выводы:

1. в лекции по аналитической геометрии и другим математическим дисциплинам в технических вузах целесообразно включать материл по истории математики;

2. понимание научного контекста, истории математических открытий, безусловно, повышает интерес студентов к специальности, способствует росту их профессиональных компетенций и расширению их общекультурного и общенаучного горизонта.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – М.: «Факториал пресс», 2002. – 544 с
2. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2009.

***Irina I. Naralenkova*,**
Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
i.i.naralenkova@gmail.com

History of Mathematics as a motivational tool in teaching undergraduate students of technical universities (on the example of study of quaternions)

Abstract. The article justifies the necessity of introducing some information on the history of mathematical discoveries in their philosophical meaning during lectures on Analytic Geometry in order to form professional culture of students. The material of the study is the theme *Quaternions*. The result section of the research paper contains appendix on the History of Mathematics aimed to develop students' competence in geometrical interpretation of quaternions, and conclusions about the necessity of introducing such additional materials into various courses on Disciplines of Mathematics.

Keywords: quaternions, Analytic Geometry, William Hamilton, complex numbers.

ПРОВЕДЕНИЕ СЕМИНАРСКОГО ЗАНЯТИЯ «МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ ХАУСХОЛДЕРА»

Аннотация

В работе представлен материал для проведения семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика на Python». Данный материал является необходимым минимумом для дальнейшего освоения курса по вычислительной математике. В статье предложены: теоретическое обоснование метода отражений, его приложение к QR-разложению матрицы, приведены реализации алгоритмов и вычислительные эксперименты с использованием языка программирования Python и его библиотек.

Ключевые слова

методы вычислений, метод отражений, метод Хаусхолдера,
QR-разложение, Python, Numpy

АВТОРЫ

Панкратов Владимир Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.a.pankratov@bmstu.ru

Тверская Елена Сергеевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
e_tverskaya@bmstu.ru

Введение

Прикладная линейная алгебра – один из наиболее динамично развивающихся разделов вычислительной математики. Реализация подавляющего большинства численных алгоритмов в основной части сводится к решению задач линейной алгебры – решение линейных алгебраических систем и оценка спектров матриц [1]. В итоге каждому специалисту, выполняющему численные расчеты приходится иметь дело с вычислительной линейной алгеброй.

Вычислительная математика, как никакая другая наука, связана с реализацией алгоритмов на электронных вычислительных машинах, поэтому важность демонстрации изучаемых алгоритмов в виде программных кодов трудно переоценить. К сожалению, наблюдается определенный недостаток подобных методических материалов, а большинство пособий и учебных курсов [3,4] ориентированы на изучение теории. Реализации, изученных алгоритмов обычно выполняются студентами самостоятельно при выполнении лабораторного практикума.

Уникальность предложенного методического материала обусловлена иллюстрацией программных реализаций, изучаемых в рамках семинарского занятия алгоритмов, в виде программной реализации на современном языке программирования Python. На сегодняшний день, по данным индекса Tiobe [5] на март 2022 г, Python является самым популярным языком программирования. Язык распространяется под свободной лицензией Python Software Foundation License, позволяющей использовать его в любых приложениях, что особенно важно в условиях западного санкционного давления, ограничивающего доступ к проприетарному программному обеспечению.

Python представляет собой высокоуровневый интерпретируемый язык программирования с динамической типизацией. Синтаксис языка нацелен на простоту разработки и чтения. Применение Python позволяет, с одной стороны, продемонстрировать эффективную реализацию численных методов, с другой стороны, простота синтаксиса позволяет сконцентрироваться на сути алгоритма, а не на особенностях его конкретной программной реализации.

Отдельно следует отметить эффективность Python для демонстрации алгоритмов вычислительной математики. Дело в том, что, как классические списки Python, так и высокоэффективные массивы Numpy поддерживают срезы, позволяющие эффективно работать с подматрицами. В рамках семинара, алгоритмы будут реализовываться на базе библиотеки Numpy, предоставляющей, кроме того, и основные операции матричной алгебры.

Методология и результаты исследования

1. Отражения на плоскости

Определение 1.1. Ортогональная матрица $H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ называется *матрицей отражения* [1], если

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Если $\mathrm{y} = \mathrm{Hx} = \mathrm{H^T x}$, то y получается отражением x относительно оси, определяемой как

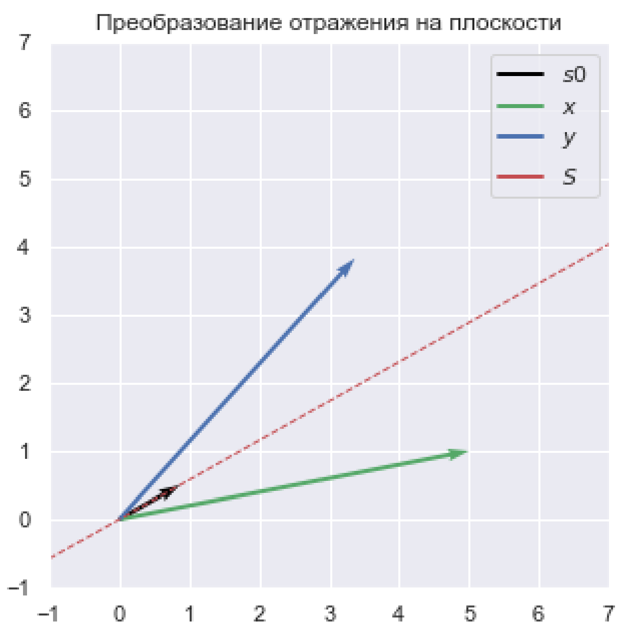
$$\mathrm{S} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right\}.$$

Пример 1.1. Разработать скрипт на языке Python выполняющий отражение вектора $\vec{x} = [5,1]^{\mathrm{T}}$ относительно оси, образующей угол $\frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси Ox. Проиллюстрировать решение графически.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.lines import Line2D
import numpy as np

theta = np.pi / 3; theta05 = 0.5 * theta
s0 = np.array([np.cos(theta05), np.sin(theta05)])
H = np.array([[np.cos(theta), np.sin(theta)],
              [np.sin(theta), -np.cos(theta)]])
x = np.array([5, 1])
y = np.matmul(H, x)
```

```
O = np.zeros(3)
X = np.array([s0[0], x[0], y[0]])
Y = np.array([s0[1], x[1], y[1]])

fig, ax = plt.subplots(figsize = (5, 5))
ax.quiver(O, O, X, Y,
          angles='xy', scale_units='xy', scale=1,
          color=['black', 'g', 'b'])

k = s0[1]/s0[0]

ax.plot([-1, 7], [-k, 7*k], 'r--', linewidth=1, label = '$S$')

ax.set_xlim(-1, 7)
ax.set_ylim(-1, 7)

ax.set_title('Преобразование отражения на плоскости')

legend_elements = [
                    Line2D([0], [0], color='black', lw=2, label='$s0$'),
                    Line2D([0], [0], color='g', lw=2, label='$x$'),
                    Line2D([0], [0], color='b', lw=2, label='$y$'),
                    Line2D([0], [0], color='r', lw=2, label='$S$')
    ]
ax.legend(handles=legend_elements, loc='upper right')

plt.show()
```

В результате выполнения данного скрипта будет выведен рисунок.



2. Многомерные отражения

Пусть $\omega \in \mathbb{R}^n$ - произвольный ненулевой вектор; $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{\omega\}$ - одномерное линейное пространство; $\mathcal{H}^\perp$ - ортогональное дополнение $\mathcal{H}$.

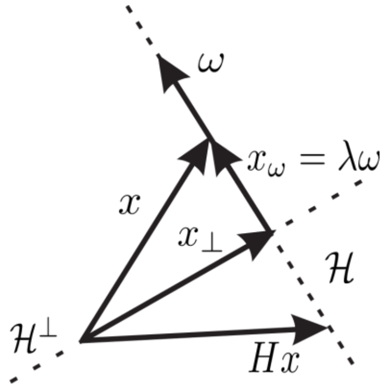
Тогда, $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x = x_\omega + x_\perp$, где $x_\omega = \lambda\omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ - ортогональная проекция вектора x на $\mathcal{H}$; $x_\perp$ - его ортогональная составляющая.

Рассмотрим преобразование

$$Hx = H(x_\perp + x_\omega) = x_\perp - x_\omega = x - 2x_\omega = x - 2\lambda\omega.$$

Пусть теперь $\| \omega \| = 1$, тогда $\lambda = (x, \omega)$ и следовательно

$$Hx = x - 2(x, \omega)\omega = x - 2\omega(x, \omega) =$$
$$= x - 2\omega(\omega, x) = x - 2\omega(\omega^T x) = x - 2(\omega\omega^T)x =$$
$$= (E - 2\omega\omega^T)x.$$



Определение 2.1. Оператор $\mathcal{H}$ называется *оператором отражений* или *оператором Хаусхолдера* [1,2]. Матрицу $H = E - 2\omega\omega^T$, соответствующую данному оператору, называют *матрицей отражений* или *матрицей Хаусхолдера* [1,2].

Пусть вектор $v \in \mathbb{R}^n$: $v \neq 0 \Rightarrow \omega = \frac{v}{\|v\|}$, тогда матрицу оператора Хаусхолдера можно записать в виде

$$Hx = x - 2(x, \omega)\omega = x - 2\omega(x, \omega) = x - 2\omega(\omega, x) = x - 2\frac{v(v, x)}{||v||^2} =$$
$$= x - \frac{2v(v^T x)}{v^T v} = \left(E - \frac{2vv^T}{v^T v}\right)x.$$

Таким образом $H = E - \frac{2vv^T}{v^T v}$, где вектор v называют *вектором Хаусхолдера*.

2.1 Свойства оператора отражений

Линейность и *симметричность* преобразования Хаусхолдера очевидны.

Докажем, что оператор Хаусхолдера ортогонален:

$$H \cdot H^T = H \cdot H = (E - 2\omega\omega^T)(E - 2\omega\omega^T) = E - 2\omega\omega^T - 2\omega\omega^T + 4\omega\omega^T\omega\omega^T =$$
$$= \{\omega^T\omega = 1\} = E.$$

Из ортогональности H следуют свойства, связанные с собственными значениями и собственными векторами оператора отражений.

Собственными числами оператора P являются ± 1.

- Собственному значению -1 отвечает собственный вектор ω:
$$H\omega = E\omega - 2\omega\omega^T\omega = \{\omega^T\omega = 1\} = \omega - 2\omega = -1 \cdot \omega.$$
- Произвольный вектор $\nu \neq 0$, ортогональный ω, является собственным вектором H:
$$H\nu = E\nu - 2\omega\omega^T\nu = \{\omega^T\nu = 0\} = +1 \cdot \nu,$$
отвечающим собственному числу $+1$.

Теорема 2.1. Если оператор для некоторого единичного вектора $\omega \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

- $H\omega = -1 \cdot \omega$;
- $\forall \nu \neq 0$: $\nu \perp \omega \Rightarrow H\nu = +1 \cdot \nu$,

тогда оператор H задает зеркальное отражение вектора x относительно гиперплоскости, ортогональной вектору ω.

Доказательство: Произвольный вектор x можно представить в виде $x = x_\perp + x_\omega$, где $(x_\perp, \omega) = 0$, $x_\omega = \lambda\omega$, следовательно $x_\omega = (x, \omega)$ и $x_\perp = x - (x, \omega)\omega$. Тогда $Hx = H(x_\perp +$

$\mathrm{x}_\omega) = \mathrm{Hx}_\perp + \mathrm{Hx}_\omega$, а вектор $\mathrm{x}_\perp$ ортогонален ω и, значит, является собственным вектором H, отвечающим собственному числу $+1$. В результате

$$\mathrm{Hx} = \mathrm{x}_\perp + (\mathrm{x},\omega)\mathrm{H}\omega = \{\mathrm{H}\omega = -\omega\} = \mathrm{x}_\perp - (\mathrm{x},\omega)\omega = \mathrm{x}_\perp - \mathrm{x}_\omega = \mathrm{x} - 2\mathrm{x}_\omega\,,$$

что и требовалось доказать.

2.2 Вычисление вектора Хаусхолдера

Теорема 2.2. Для произвольных вектора x и единичного вектора e можно подобрать вектор ω, определяющий оператор Хаусхолдера H, таким образом, чтобы в результате преобразования $y = Hx$ полученный вектор имел направление вектора e, т. е. $\forall x, e\ (\| e \| = 1 \Rightarrow \exists Hx = \pm\alpha e)$, где $\alpha > 0$, H - оператор Хаусхолдера.

Доказательство: $Hx = x - 2(x,\omega)\omega$, следовательно $Hx - x = -2(x,\omega)\omega = \pm\alpha e - x$, а значит $\omega \in \mathrm{span}\{x \pm \alpha e\}$. Поскольку вектор ω единичен, $\omega = \frac{x\pm\alpha e}{\|x\pm\alpha e\|}$, значит результат преобразования

$$y = \mathrm{Hx} = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x},\omega)\omega = \mathrm{x} - 2\frac{(\mathrm{x},\mathrm{x}\pm\alpha\mathrm{e})}{\|\mathrm{x}\pm\alpha\mathrm{e}\|^2}(\mathrm{x}\pm\alpha\mathrm{e}) =$$

$$= \mathrm{x} - \frac{2\|x\|^2 \pm 2\alpha(\mathrm{x},\mathrm{e})}{\|x\|^2 \pm 2\alpha(\mathrm{x},\mathrm{e}) + \alpha^2\|e\|^2}(\mathrm{x}\pm\alpha\mathrm{e})\,.$$

Заметим, что при ортогональных преобразованиях длины векторов сохраняются, поэтому $\|\mathrm{Hx}\| = \|\mathrm{x}\| = \|\alpha\mathrm{e}\| = \alpha\|\mathrm{e}\| = \alpha \Rightarrow \|\mathrm{x}\| = \alpha$, следовательно

$$y = Hx = \mathrm{x} - \frac{2\|\mathrm{x}\|^2 \pm 2\alpha(\mathrm{x},\mathrm{e})}{2\|\mathrm{x}\|^2 \pm 2\alpha(\mathrm{x},\mathrm{e})}(\mathrm{x}\pm\alpha\mathrm{e}) = \mathrm{x} - \mathrm{x} \mp \alpha\mathrm{e} = \mp\alpha\mathrm{e} = \mp\|\mathrm{x}\|\,\mathrm{e}\,,$$

что и требовалось.

Замечание. На практике отражения Хаусхолдера применяются для обнуления всех компонент вектора начиная с некоторой [1,2]:

$$(x_1,\dots,x_k,x_{k+1}\dots,x_n) \xrightarrow{H} (y_1,\dots,y_k,0\dots,0)\,.$$

При обнулении всех компонент вектора, кроме первой, в результате преобразования $y = Hx$, вектор y должен быть коллинеарен $\mathrm{e}_1 = (1,0,\dots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^\mathrm{n}$, тогда, если выбрать $v = x \pm \alpha_1 e_1 = x \pm \| x \| e_1$, получим $y = Hx = \left(E - \frac{2vv^\mathsf{T}}{v^\mathsf{T}v}\right)x = \mp\sqrt{x^\mathsf{T}x}\cdot e_1$.

Выбор знака, при вычислении вектора Хаусхолдера, обусловлен следующими соображениями [2]. Если x почти коллинеарен e_1, то вектор

$$v = x - \mathrm{sign}x_1\sqrt{x^\mathsf{T}x}\,e_1$$

имеет малую норму. Поэтому возможно появление большой относительной ошибки при вычислении множителя $\frac{2}{v^\mathsf{T}v}$. При выборе $v = x + \mathrm{sign}x_1\sqrt{x^\mathsf{T}x}e_1$ подобных сложностей не возникает. Нетрудно заметить, что при таком выборе знака $\| v \|_\infty = |v_1|$.

Замечание. Полезно также придерживаться такой нормировки вектора v, что $v_1 = 1$. Данное условие можно выполнить, если первую компоненту взять равной единице, т. е. $v_1 = 1$, а все остальные компоненты получить как

$$v_i = \frac{v_i}{x_1 + \mathrm{sign}x_1\sqrt{x^\mathsf{T}x}}.$$

Данное представление упрощает хранение векторов Хаусхолдера, при использовании преобразования отражения, для построения *QR*-разложения.

Алгоритм 2.1. Вычисление вектора Хаусхолдера. По $x \in \mathbb{R}^n$ разработанная функция вычисляет $v \in \mathbb{R}^n$, такой, что $v_1 = 1$ и все компоненты вектора $y = \left(E - \frac{2vv^\mathsf{T}}{v^\mathsf{T}v}\right)x$, кроме y_1, равны нулю.

```
def house(x):
    n=len(x); mu=np.linalg.norm(x); v=np.copy(x)
    if mu:
        beta=x[0]+(1.0 if x[0] >= 0 else -1.0)*mu
        v[1:]/=beta
    v[0]=1.0
    return v
```

3. *QR*-разложение

Определение 3.1. Представление матрицы $A \in R^{m\times n}$ в виде произведения

$$A = QR,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ - ортогональная, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ - верхняя треугольная. Здесь будем считать $m \geq n$. Если A имеет полный столбцовый ранг, то первые n столбцов матрицы Q образуют ортонормированный базис подпространства rank(A). Тем самым *QR*-разложение дает один из способов получения ортонормированного базиса для набора векторов.

Проиллюстрируем алгоритм построения *QR*-разложения с помощью $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Пусть матрицы Хаусхолдера H_5 и H_4 таковы, что

$$\mathrm{H_4H_5A} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу Хаусхолдера $\widetilde{H_3}$ размера 3×3 такую, что

$$\widetilde{\mathrm{H}_3}\begin{bmatrix} \otimes \\ \otimes \\ \otimes \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \otimes \\ \times \\ \times \end{bmatrix}.$$

Если $H_3 = \mathrm{diag}\left(E_2, \widetilde{H_3}\right)$, то

$$\mathrm{H_3H_4H_5A} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Выполнив 4 таких шага, мы получаем верхнюю треугольную матрицу $H_2H_3H_4H_5A = R$, следовательно $Q^T = H_2H_3H_4H_5$.

Обобщая алгоритм на $m\times n$-матрицу $Q = H_nH_{n-1}\dots H_2$ имеем $A = QR$, где Q - ортогональная матрица, а R - верхняя треугольная матрица.

При применении преобразования отражения к матрицам, нецелесообразно явно формировать матрицу Хаусхолдера. Для повышения вычислительной эффективности, необходимо учесть специальную структуру матрицы Хаусхолдера [2].

Пусть A - матрица, $H = E - \frac{2vv^{\mathrm{T}}}{v^{\mathrm{T}}v}$, тогда для умножения на матрицу отражения слева, можно получить соотношение:

$$\mathrm{HA} = \left(\mathrm{E} - \frac{2\mathrm{vv^T}}{\mathrm{v^Tv}}\right)\mathrm{A} = \mathrm{A} - \frac{2\mathrm{vv^TA}}{\mathrm{v^Tv}} = \mathrm{A} - \frac{2\mathrm{v}\left(\mathrm{A^Tv}\right)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{v^Tv}} = \mathrm{A} + \mathrm{v}\cdot\left(\frac{-2}{\mathrm{v^Tv}}\mathrm{A^Tv}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A} + \mathrm{vw^T},$$

где $\beta = -\frac{2}{v^{\mathrm{T}}v}$ и $w = \beta A^{\mathrm{T}}v$. В результате, для вычисления произведения матриц, вместо выделения памяти для матрицы Хаусхолдера, достаточно создать два вектора v и w.

Теперь рассмотрим умножение на матрицу Хаусхолдера справа

$$\mathrm{AH} = \mathrm{A}\left(\mathrm{E} - \frac{2\mathrm{vv^T}}{\mathrm{v^Tv}}\right) = \mathrm{A} - \frac{2\mathrm{Avv^T}}{\mathrm{v^Tv}} = \mathrm{A} - \frac{2(\mathrm{Av})\mathrm{v^T}}{\mathrm{v^Tv}} = \mathrm{A} + \left(\frac{-2}{\mathrm{v^Tv}}\mathrm{Av}\right)\cdot\mathrm{v^T} = \mathrm{A} + \mathrm{wv^T},$$

где $w = \beta A\, v$.

Таким образом, хаусхолдерова модификация матрицы складывается из умножения матрицы на вектор и модификации внешним произведением векторов. Если бы мы не заметили этого и обращались бы с H, как с матрицей общего вида, то объем работы возрос бы на порядок [2]. Преобразование Хаусхолдера никогда не требует явного формирования матрицы Хаусхолдера. Следующие две функции формально подтверждают это.

Алгоритм 3.1. Умножения на матрицу Хаусхолдера слева. Для данной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^m$, где $v_1 = 1$, следующий алгоритм строит на месте матрицы A матрицу $HA = A + vw^{\mathrm{T}}$, где $\beta = -\frac{2}{v^{\mathrm{T}}v}$ и $w = \beta A^{\mathrm{T}} v$.

```
def row_house(A,v):
    beta = -2.0 / np.dot(v,v)
    w = beta * np.matmul(A.T,v)
    A+=np.outer(v,w)
```

Алгоритм 3.2. Умножение на матрицу Хаусхолдера справа. Для данной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^m$, где $v_1 = 1$, следующий алгоритм строит на месте матрицы A матрицу $AH = A + wv^{\mathrm{T}}$, где $\beta = -\frac{2}{v^{\mathrm{T}}v}$ и $w = \beta A\, v$.

```
def col_house(A,v):
    beta = -2.0 / np.dot(v,v)
    w = beta * np.matmul(A,v)
    A+=np.outer(w,v)
```

Алгоритм 3.3. *QR*-разложение с использованием преобразования Хаусхолдера. По матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ при $m \geq n$, алгоритм находит хаусхолдеровы матрицы H_1, …, H_n: если $Q = H_1 \cdot \ldots \cdot H_n$, то матрица $Q^{\mathrm{T}}A = R$ будет верхней треугольной. При этом содержательная часть (верхний треугольник) матрицы R записывается на место верхнего треугольника матрицы A, а содержательные компоненты векторов Хаусхолдера записываются в нижней части.

```
def house_QR(A):
    m,n=A.shape
    for j in range(n):
        v=house(A[j:,j])
        row_house(A[j:,j:],v)
        if j<m-1:
            A[j+1:,j]=v[1:]
```

4. Факторизованное представление матрицы Q

На практике, при применении *QR*-разложения зачастую не требуется явного формирования матрицы Q, а достаточно вычисления результата ее произведения на другую матрицу [1,2]. Этот результат вычисляется накоплением результатов произведений на матрицы отражений, которые формируются векторами Хаусхолдера:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{Q}_r, \qquad \mathrm{Q}_j = E - 2\frac{v^{(j)}{v^{(j)}}^T}{{v^{(j)}}^T v^{(j)}},$$

где $r \leq n$ и каждое $v^{(j)} = \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1}, 1, v_{j+1}^{(j)}, \ldots, v_n^{(j)}\right)^{\mathrm{T}}$. Векторы $v^{(j)}$, после применения алгоритма 3.3, хранятся в нижней части матрицы A.

Алгоритм 4.1. Прямое накопление. По матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и матрице $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ вычисляет произведение BQ. Матрица $Q \in R^{m\times m}$ формируется векторами Хаусхолдера, содержательная часть которых хранится под главной диагональю матрицы A. Подразумевается, что данный алгоритм должен применяться после алгоритма 3.3.

```
def house_dir_accum(A,B):
    m,n=A.shape
    v=np.zeros(m)
    for j in range(n):
        v[:j]=0.0; v[j]=1.0; v[j+1:]=A[j+1:,j]
        col_house(B,v)
```

Алгоритм 4.2. Обратное накопление. По матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и матрице $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ вычисляет произведение QB. Матрица $Q \in R^{m\times m}$ формируется векторами Хаусхолдера, содержательная часть которых хранится под главной диагональю матрицы A. Подразумевается, что данный алгоритм должен применяться после алгоритма 3.3.

```
def house_rev_accum(A,B):
    m,n=A.shape
    v=np.zeros(m)
    for j in range(n-1,-1,-1):
        v[j]=1.0; v[j+1:]=A[j+1:,j]
        row_house(B[j:,j:],v[j:])
```

Анализируя алгоритмы прямого и обратного накопления, можно заметить следующие особенности. В алгоритме 4.2 в начале обратного накопления матрица Q близка к единичной и заполняется постепенно в процессе итераций. Это обстоятельство используется для сокращения требуемого количества вычислительных операций. Напротив, при прямом накоплении матрица Q заполняется уже после первого шага. Ввиду этого прямой порядок перемножения матрицы Q менее экономичен [2].

Когда в приложениях требуется явное формирование матрицы Q, то для ее вычисления достаточно вместо матрицы B передать единичную матрицу в качестве аргументов функций, определенных в алгоритмах 4.1 и 4.2. С точки зрения вычислительной эффективности, обратное накопление является наилучшей стратегией [2].

Пример 4.1. Вычислить *QR*-разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \end{bmatrix}.$$

```
A=np.array([[1, 2, 3, 4],
            [7, 8, 9, 10],
            [12, 13, 14, 15],
            [16, 17, 18, 19],
            [19, 20, 21, 22]],dtype='float64')
house_QR(A)

m,n=A.shape
Q=np.eye(m)
house_rev_accum(A,Q)

R=np.zeros((m,n))

for j in range(n):
    R[:j+1,j]=A[:j+1,j]

print(Q@R)
```

В результате выполнения данного скрипта будет выведен результат:

```
[[ 1.  2.  3.  4.]
 [ 7.  8.  9. 10.]
 [12. 13. 14. 15.]
 [16. 17. 18. 19.]
 [19. 20. 21. 22.]]
```

Заключение

Применение *QR*-преобразования является одним из наиболее надежных подходов к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов [2], т. е. задачи о минимизации функционала $\| Ax - b \|_2$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ортогональное преобразование не изменяет нормы вектора, и, если $A = QR$, то $\| Ax - b \|_2 = \| Q^T \|_2 \| Ax - b \|_2 = \| Rx - Q^{\mathrm{T}}b \|_2$. Таким образом, нахождение минимума функционала можно свести к решению системы $Q^{\mathrm{T}}Ax = Q^{\mathrm{T}}b \Leftrightarrow Rx = c$, где $c = Q^{\mathrm{T}}b$. Нетрудно заметить, что последняя система легко решается обратной подстановкой.

Основными методами построения *QR* факторизации матриц [2] являются метод отражений и метод вращений. Отражения Хаусхолдера полезны при необходимости масштабных обнулений, а когда необходимо избирательное зануление элементов предпочтительнее использовать вращения Гивенса.

В работе был предложен материал для проведения семинарского занятия по методу отражений Хаусхолдера. В рамках семинара были сформулированы и доказаны свойства оператора Хаусхолдера, а потом оператор отражений был применен к *QR*-разложению матрицы. Для всех алгоритмов, применяемых на практике, приведен программный код для их реализации.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Уоткинс Д. С. Основы матричных вычислений / Д. Уоткинс; Пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017 – 664 с.
2. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с
3. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров : учеб. пособие для вузов / Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. - 2-е изд., доп. - М. : Изд-во МЭИ, 2003. – 594 с.
4. Фаддеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры - СПб.: Лань, 2002. – 733 с.
5. TIOBE Programming Community Index Definition. URL : https://www.tiobe.com/tiobe-index/ (дата обращения: 28.02.2022).

Vladimir A. Pankratov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
ivankovpl@mail.ru
Elena S. Tverskaya,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
e_tverskaya@bmstu.ru

A lesson "The Householder reflection method"

Abstract. The paper presents the material for seminars of the course "Computational mathematics in Python". This material is a necessary minimum for further development of the course in computational mathematics. The article proposes a theoretical material of the reflection method, its application to the *QR*-decomposition of a matrix, implementations of algorithms and computational experiments using the Python programming language and its libraries.

Keywords: calculation methods, reflection method, Householder method, QR-decomposition, Python, Numpy.

УЧЕБНИКИ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ И ИНЖЕНЕРОВ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XVIII ВЕКА

Аннотация

Актуальность темы исследования обусловлена исследованием вопроса о математической подготовке для различной профессиональной деятельности. Цель работы заключается в изучении разнообразных способов подачи материала в отечественных учебниках по геометрии второй половины XVIII века, предназначенных для подготовки учителей и инженеров. Методом исследования является изучение учебников, изданных в рассматриваемый период. Проведен краткий обзор всех изданных учебных пособий по геометрии. Материалы статьи могут быть полезными педагогам педагогических и технических вузов, старших классов школы и специалистам по истории российского образования.

Ключевые слова

педагогическое образование, инженерное образование,
математическое образование, геометрия, учебники,
М.Е. Головин, Е.Д. Войтяховский

АВТОРЫ

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Елена Владимировна,
студентка ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова», г. Москва
elena-pt@yandex.ru

Введение

Одной из проблем современного высшего образования является единообразное строение учебников по математике, недостаточно учитывающее будущую профессиональную деятельность обучающихся. В данной статье представлены совершенно отличные подходы к созданию учебников по геометрии для учительской семинарии Санкт-Петербурга и математической инженерной школы Москвы второй половины XVIII века, в начале становления профессионального отечественного образования.

Методология и результаты исследования

Методом исследования является анализ оригинальных старинных учебников. Более подробно рассмотрены учебники по геометрии М.Е. Головина и Е.Д. Войтяховского. Методические подходы к составлению учебников могут быть использованы современными авторами.

Краткий обзор учебников по геометрии во второй половине XVIII века

Во второй половине XVIII века в Российской империи образовательная деятельность государственных и общественных сил приобрела невиданные до этих пор масштабы. Это выразилось в совершенствовании образования высших сословий, расширения возможностей для получения образования стремящимся к нему разночинцами, создания системы народного образования для всех низших сословий, кроме крепостных, но также разрушением почти всех традиционных и основанных на частной инициативе образовательных форм, не вписывающихся в единую систему подготовки российских подданных.

По образцу образовательной реформы Австрии и Пруссии с 1786 года создавалась система народных училищ и в России. Устав народных училищ, практически все программы и учебники являлись переводами с некоторыми переработками иностранных образцов. Для соответствующей подготовки учителей для народных училищ была организована учительская семинария.

Учительская семинария была уникальным для России учебным заведением как в момент своего основания, так и впоследствии. Созданная сначала при первом (по времени основания) главном народном училище Санкт-Петербурга, она затем отделилась и стала самостоятельным *педагогическим образовательным учреждением*. Обучающиеся в учительской семинарии проходили не только предметы своего будущего преподавания и методику преподавания каждого предмета, но и изучали их более подробно и широко под руководством преподавателей из Академии наук (В.Ф. Зуева, М.Е. Головина, И.Ф. Гакмана, В.П. Светова) и Московского университета (Е.Б. Сырейщикова). В частности, для образования будущих учителей П.И. Гиларовским в 1796 году было издано «Сокращение вышней математики, содержащее начала дифференциального, интегрального исчислений и криволинейную геометрию».

Однако к концу XVIII века образование учителей народных училищ в санкт-петербургской учительской семинарии свелось только к изучению предметов преподавания в минимальном необходимом объеме, преподаватели из Академии наук и Московского университета были заменены выпускниками самой семинарии. Ни одного самостоятельного педагогического учреждения для подготовки учителей народных училищ в XVIII веке не было создано: *выпускники главных народных училищ или кандидаты со стороны экзаменовались на теоретическое знание способа преподавания, изучить который они могли в самих народных училищах*, и по результатам получали звание учителей. *Однако изучение методики преподавания предметов осталось главной составляющей педагогического образования*.

В качестве примера изучения предмета вместе с элементами методики его преподавания мы рассмотрим учебник по геометрии, написанный М.Е. Головиным для 4-х классов главных народных училищ. Обучение в 4-х классах занимало два года. Предметы, изучаемые в курсе математики в народных училищах представлено в таблице 1.

Таблица 1. Предметы, изучаемые в курсе математики
в народных училищах, созданных при Екатерине II

Область знания	*Предметы*	*Учебники по Уставу народных училищ*
Математика	1. Гражданская архитектура (IV класс) 2. Арифметика (II и III классы) 3. Геометрия (IV класс)	1. Архитектура 2. Арифметика (2 части) 3. Геометрия

Рассмотрим инженерное, преимущественно военное, образование в Российской империи. К инженерному образованию мы относим обучение геодезии, артиллерии, морской навигации и фортификации, а также строительству и архитектуре. Инженерное военное образование приобреталось в основном в военных корпусах: Сухопутном, Инженерном, Артиллерийском и Морском. Их учебники до середины XVIII века в основном являлись переводами с иностранных языков. Но во второй половине XVIII века началось активное создание отечественных оригинальных учебных пособий[1].

Высоким уровнем образования отличались гимназии при Московском университете, гимназия в Казани, Благородный пансион при Московском университете, а также некоторые частные пансионы и школы.

Одной из таких частных математических школ являлась математическая школа Е.Д. Войтяховского в Москве, многие выпускники которой по окончании школы производились в офицеры-артиллеристы без окончания соответствующего корпуса. Это свидетельствует о высочайшем уровне преподавания специальных, в том числе математических, дисциплин.

При изучении геометрии во второй половине XVIII века использовались учебные пособия, представленные в таблице 2 (по материалам Российской Государственной Библиотеки, в скобках указаны даты изданий и последующие переиздания). При упоминании переизданий мы ограничиваемся только переизданиями, произведенными в рассматриваемый исторический период.

Таблица 2. Учебные пособия по геометрии, изданные во второй половине XVIII века

Отечественные	*Переводные*
1. Назаров С. Практическая геометрия. В 2 ч. (1760-1761, 1768-1772, 1775). 2. Румовский С.Я. Сокращения мате-матики. Ч.1, содержащая начальныя основания арифметики, геометрии и тригонометрии (1760). 3. Крафт Г.В. Краткое руководство к теортической геометрии (1762). 4. Курганов Н.Г. Генеральная геометрия или Общее измерение протяжения, составляющее теорию и практику оной науки (1765). 5. Аничков Д.С. Теоретическая и прак-тическая геометрия (1780). 6. Головин М.Е. Краткое руководство к геометрии (1786, 1790, 1796). 7. Войтяховский Е.Д. Теоретической и практической курс чистой математи-ки, содержащий в себе арифметику, геометрию, тригонометрию, с практикою и описанием пропорцио-нальнаго циркуля или сектора, алгебру с вышними степенями, криволинейную геометрию с теориею и практикою искусства бросания бомб (1787-1790, 1794-1798).	1. Вейдлер И.В., пер. Аничков Д. Геометрия теоретическая и практи-ческая (1765, 1776, 1787). 2. Евклид, пер. Курганов Н.Г. Элементы геометрии, то есть первыя основания науки о измерении протяжения (1769). 3. Канкрин Ф.Л, пер. Бусырский Н.И. др. Первые основания искусства горных и соляных производств. Ч.6 [Отделение 1], содержащая маркшер-дерскаго искусства первое отделе-ние, заключающее арифметику, гео-метрию и плоскую тригонометрию (1789). 4. Додсли Р., пер. Петров А.А. Учитель, или Всеобщая система воспитания, в которой предложены первые основа-ния наук, особенно нужных молодым людям. Ч.1 [Отделение 2], О математике вообще, об арифметике и геометрии (1789). 5. Кестнер А.Г., пер. Пахомов М.С. и Иноходцев П.Б. Начальные основа-ния математики. Ч.2, содержащая геометрию, тригонометрию плоскую и сферическую, перспективу и сечения конуса (1794).

8. Розин М.В. Начальныя основания теоретической и практической геомет-рии (1797). 9. Гурьев С.Е. Опыт о усовершении элементов геометрии, составляющий первую книгу математических трудов академика Гурьева (1798). 10. Фусс Н.И. Геометрия. В 2 ч. Ч.1, со-держащая планиметрию. Ч.2, содер-жащая стереометрию (1799).	6. Безу Э., пер. Загорский В. Курс математики господина Безу, члена Французской академии наук, экзами-натора воспитанников Артиллерий-скаго и Морскаго корпусов, и коро-левскаго цензора. Ч.2, содержащая геометрию и плоскую тригонометрию (1798). 7. Безу Э., пер. Гребенщиков Ф. Основы геометрии, переведенные из Курса, сочиненнаго г-м Безу (1798).

Для сравнения добавим, что за всю первую половину XVIII века по материалам Российской Государственной библиотеки было издано значительно меньше книг по геометрии, учитывая их переиздания.

Отечественные учебники: П.И. Панина (1709), неизвестного автора (1714), Я. Германа (1728), А.Д. Фарвансона (1739), С.И. Мордвинова (1748).

Переводные учебники: А. Деграфа (1701), А.Э. Буркхарда фон Пюркенштейна (1708, 1708, 1709, 1725), Г.В. Крафта (1748).

Учебники по геометрии М.Е. Головина и Е.Д. Войтяховского

Головин Михаил Евсеевич (1756-1790) — уроженец села Матигоры Архангельской губернии [2], племянник М.В. Ломоносова, преподаватель математики в Санкт-петербургской учительской семинарии [3], один из лучших учеников Л. Эйлера. В конце жизни Эйлер почти потерял зрение, но продолжал заниматься наукой. Его помощниками были Головин и Фусс Николай Иванович: Эйлер записывал свои вычисления мелом на черной столе, а адъюнкты переписывали их в большую книгу [4].

По общепринятому мнению, Головин являлся одним из первых российских методистов в области преподавания различных математических дисциплин [5]. Головиным и под его руководством были переведены учебники для народных училищ [6-10]:

Руководство к арифметике (1784),

Руководство к механике (1785).

Головин считается автором следующих учебников для народных училищ:

Краткое руководство к геометрии (1790),

Краткое руководство к математической географии и к познанию небеснаго шара (1790),

Краткое руководство к гражданской архитектуре или зодчеству (1789).

Головину принадлежит авторство книги

Плоская и сферическая тригонометрия (с алгебраическими доказательствами, собранными Михаилом Головиным) (1789).

Все перечисленные книги многократно переиздавались.

Войтяховский Ефим Дмитриевич (1742-1812) — уроженец Смоленской губернии, артиллерист, после 22-летней службы открывший в Москве математическую школу и более 40 лет преподававший в ней [11]. Образование было очень качественное: например, известно, что в один из выпусков 25 из 48 учеников были сразу произведены в офицерский чин, а Комиссия по обследованию частных школ Москвы 1785 года особенно отметила труды Войтяховского [12]. Войтяховский был учеником генерала-майора Н.В. Верещагина [13] – передового педагога-математика [14]. Некоторые источники утверждают, что учениками Войтяховского были граф Николай Михайлович Каменский, Алексей Петрович Ермолов и граф Александр Иванович Кутайсов, которые «свое умение не раз потом в сражениях подтверждали» [15].

Войтяховским были написаны учебники по различным математическим дисциплинам:

в 1790 году «Полная наука военнаго укрепления, или Фортификация, содержащая в себе начальные основания, с приобщением двадцати двух расположений укрепления тринадцати знатнейших европейских инженеров» [16]. Переиздан в 1796 году.

в 1787-1790 годах «Теоретической и практической курс чистой математики, содержащий в себе арифметику, геометрию, тригонометрию, с практикою и описанием пропорциональнаго циркуля или сектора, алгебру с вышними степенями, криволинейную геометрию с теориею и практикою искуства бросания бомб» в 4-х томах [17]:

Т.1. Арифметика,

Т.2. Геометрия,

Т.3. Тригонометрия,

Т.4. Алгебра.

Все тома «Теоретического и практического курса чистой математики» несколько раз переиздавались, но том 5 этого учебника по криволинейной геометрии издан не был;

Рассмотрим учебники по геометрии Головина М.Е. и Войтяховского Е.Д.

Учебник Головина «Краткое руководство к геометрии»

Учебник Головина «Краткое руководство к геометрии» начинается с Предисловия, в котором объясняется польза от изучения геометрии и ее взаимосвязь с другими науками: землемерием, архитектурой, мореплаванием, физикой, механикой, а также художествами и рукоделиями. В Предисловии излагаются основы методики преподавания дисциплины, что в некоторой степени является повторением переводного учебника по механике. После решения задачи привести примеры ее полезного использования «в общежитии». Рекомендуется решать практические задачи на столе с помощью ниток и булавок, а также в поле с помощью кольев и цепей; использовать орудия: астролябию, компас и прочие; тела делать вместе с учениками из бумаги для «лучшего и легчайшего преподаваемых предметов уразумения». В конце Предисловия указано, что книга содержит только «самонужнейшие предложения, без знания коих в общежитии всякому гражданину обойтись затруднительно».

Книга состоит из Вступления и трех частей, названных отделениями:

Отделение I. Об измерении долгот (Лонгиметрия).

Отделение II. Об измерении поверхностей (Планиметрия).

Отделение III. Об измерении тел (Штереометрия).

Во Вступлении автор определяет предмет геометрии, точки, линии, поверхности, тела, понятие измерения, меры и связанные аксиомы. Например, «если равные величины к равным будут приданы, то и сложенные будут равны между собою».

Ограничимся рассмотрением содержания Отделений I и II.

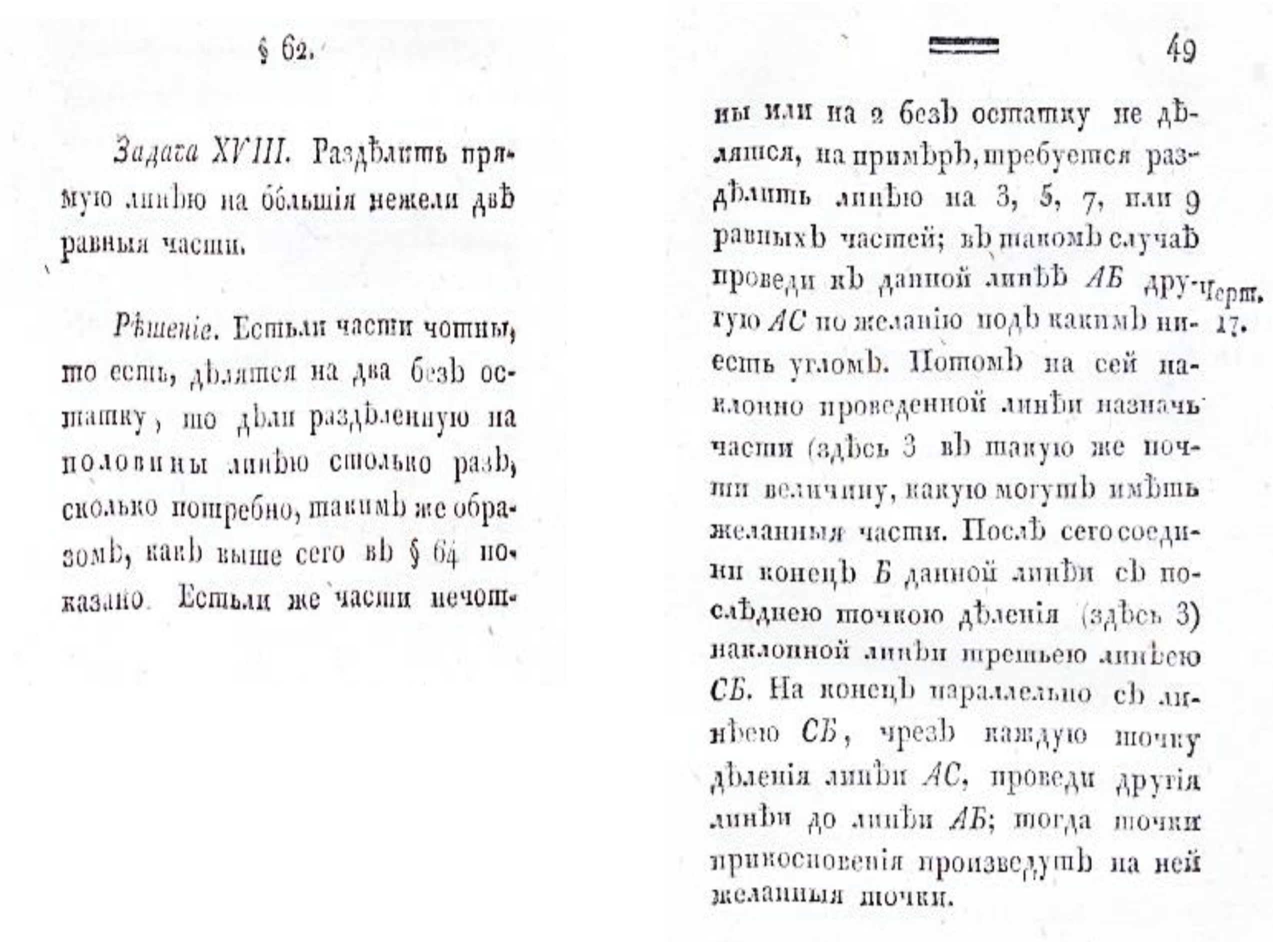
Учебник хорошо оформлен и структурирован. Например, в Отделении I *Глава 1* посвящена исключительно основным определениям различных видов линий и углов, а *Глава 2* – теоремам о них. Следствий к теоремам не приводится.

В *Главе 3* показано, как производить многие простейшие построения. Причем практически все из них – на столе и в поле. Доказательств в задачах на построение не приводится. Среди задач на построение есть элементарные задачи, важность которых для будущих учителей и их учеников несомненна.

Например, Задача I: Провести на бумаге прямую линию, Задача II: Исследовать, исправно ли сделана линейка, Задача III: На длинном дереве, камне, или на какой ни есть материи провесть прямую линию, Задача IV: Провесть на поле прямую линию, Задача VI: Из данной на линии точки поднять перпендикулярную линию (Решение на бумаге и не поле) и т. д.

Глава 4 содержит более сложные построения, также без доказательств и без необходимых предшествующих предлагаемому решению теорем. Например, Задача

XVIII: Разделить прямую линию на больше нежели [чем] две равные части. Решение данной задачи приведено на рисунке 1.


§ 62.

49

Задача XVIII. Раздѣлить прямую линѣю на большія нежели двѣ равныя части.

Рѣшеніе. Естьли части чотны, то есть, дѣлятся на два безъ остатку, то дѣли раздѣленную на половины линѣю столько разъ, сколько потребно, такимъ же образомъ, какъ выше сего въ § 64 показано. Естьли же части нечотны или на 2 безъ остатку не дѣлятся, на примѣръ, требуется раздѣлить линѣю на 3, 5, 7, или 9 равныхъ частей; въ такомъ случаѣ проведи къ данной линѣѣ *АБ* другую *АС* по желанію подъ какимъ ни-есть угломъ. Потомъ на сей наклонно проведенной линѣи назначь части (здѣсь 3 въ такую же почти величину, какую могутъ имѣть желанныя части. Послѣ сего соедини конецъ *Б* данной линѣи съ послѣднею точкою дѣленія (здѣсь 3) наклонной линѣи третьею линѣею *СБ*. На конецъ параллельно съ линѣею *СБ*, чрезъ каждую точку дѣленія линѣи *АС*, проведи другія линѣи до линѣи *АБ*; тогда точки прикосновенія произведутъ на ней желанныя точки. Черт. 17.

Рисунок 1. Решение задачи XVIII на построение в учебнике Головина М.Е.

Мы видим, что разобраны не все случаи построения и построение не обосновано (например, с помощью теоремы Фалеса), что невозможно сделать без пройденной теории. Это в данном случае мы относим к недостаткам учебника.

Приводятся задачи, ориентированные на полевые условия, например, Задача XXVI: Смерять долготу линии цепью, которая начинается со слов «При каждом конце цепи должен быть человек и шест, который всовывается в кольцо при цепи находящееся ...»; для измерения углов предлагается использование разных инструментов: шестов и кольев (Задача XXXII), мерного столика (Задача XXXIII), астролябии (Задача XXXIV), компаса (Задача XXXV).

Наконец, *Глава 5* «Употребление предложенных учений на самом деле» посвящена исключительно работам на местности с использованием полученных в предыдущих главах знаний. К большинству задач приведено несколько решений с использованием разных инструментов, как и в конце главы 4, но объектами являются не линии, углы и т.д., а мосты, башни, деревья и другие реальные объекты, а сами задачи носят более практический характер. Например, Задача XLI: Вымерять высоту башни, к основанию коея подойти можно, Задача XLII: Вымерять высоту башни, к коея основанию подойти не можно.

Практическая ориентация учебника делает геометрический курс максимально доступным (хотя иногда эта доступность кажущаяся из-за недостаточной обоснованности) и практически полезным.

Отделение II, посвященное планиметрии, имеет похожую структуру.

В *Главе I* приводятся необходимые определения, в основном связанные с многоугольниками, в *Главе II* – построения многоугольников, опять же без доказательств. Используются глаголы повелительного наклонения «сыщи», «протяни», «сделай» и другие.

Глава III посвящена понятиям равенства и подобия. В ней сформулированы и доказаны теоремы о равенстве треугольников (все три теоремы – в одной теореме) и о подобии треугольников. Никаких следствий и обсуждений теорем не приводится.

В *Главе IV* содержится пять доказанных простейших теорем о треугольниках и многоугольниках, с Прибавлениями (следствиями).

В последующих главах содержатся задачи практического содержания, в решении которых автор не опирается на теоремы, то есть теоремы изучаются просто как наиважнейшие, но оторванные от практики, факты. Например (Задача в §70 на с. 135), объяснив вычисление площади прямоугольника (Теорема 3 на с. 116), автор говорит без объяснений, что при вычислении площади треугольника надо помножить основание на половину высоты или высоту на половину основания или основание на высоту и разделить на два.

В *Главе VII* приведены решения некоторых задач о «разделении фигур» на равные (равновеликие) части и о «превращении» фигур (построить фигуру той же площади, что и данная).

Автор убежден, что знакомство с геометрическими понятиями, основанное на интуитивных ощущениях и практическом опыте, должно предшествовать теоретическим обоснованиям. Но при таком обучении геометрии обоснование будет казаться ненужным, причем, как известно, интуиция не всегда приводит к правильным результатам. Мы должны понимать, что так учили учителей для народных училищ, и так же они должны были учить своих учеников. Так как геометрия, как и вообще *математика, способствует развитию критического мышления*, то *задача его развития в низших сословиях не ставилась*. С другой стороны, умение придать наглядность и практическое содержание задачам является необходимым умением, необходимым учителю.

Учебник Е.Д. Войтяховского «Теоретической и практической курс чистой математики»

В учебниках Е.Д. Войтяховского «Теоретической и практической курс чистой математики» геометрии посвящены три тома 2 – 4, хотя лишь том 2 назван «Геометрия». Уровень знаний, предлагаемый автором, очень высокий.

Предисловие к курсу, располагаемое в начале тома 1 столь важно, что мы приведем основные мысли автора дословно.

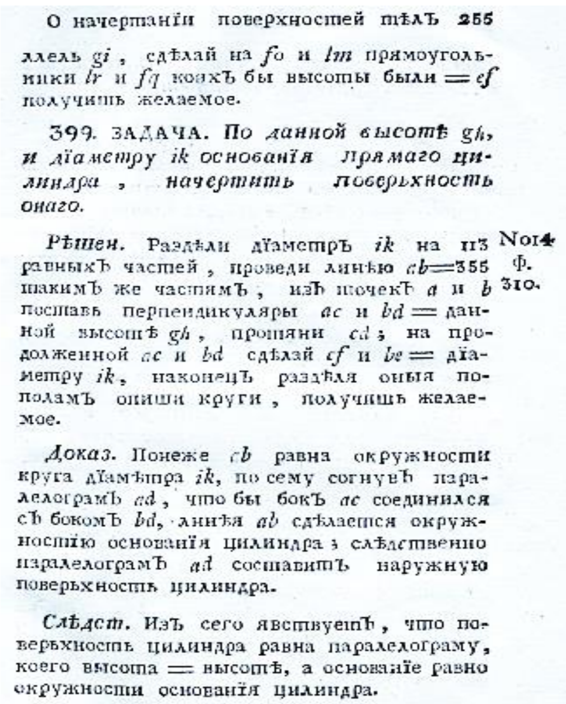
«Хотя математических книг довольное число уже издано на российском языке: но как в некоторых из них видим мы одну только теорию без всякаго принадлежащего к ней употребления, а в иных содержатся практические правила без оснований, и изъясняются одними только примерами; то часто случается, что молодые люди не усиливая привычкою к тому своего разсуждения, и обучив на основании оных книг одну только теорию, с немалым трудом приступают к решению и самых легчайших задач; а другие затвердя одни только примеры, и несколько приуча себя без всякаго доказательства к решению оных, вступают иногда в такие споры, о основании коих сами слабое понятие имеют, и нередко справедливость решения геометрических задач, утверждают измерением через масштаб и цыркуль. Причиною сего от части по малолетству легкое разсуждение, и к тому от учения получаемая привычка, а от части порядок учения» [18].

«Того ради не довольно обучающемуся, но и всякому упражняющемуся в математике, необходимо должно твердо знать, вообще основания математики с ея практическими употреблениями, то есть, при всяком теоретическом предложении разсматривать, какие могут произойти от того практические употребления (задачи), наблюдая притом строгость математического порядка; который состоит в том, чтоб ничего кроме известного и ясно доказаннаго, за основание принимать» [19].

«... курс … старался … расположить таким образом … дабы вступающий в оныя ... начало свое восприять мог от понятий самых простых и известных, и … постепенно приучить себя, не чувствуя никакой тягости и отвращения от науки, и к труднейшим понятиям» [20].

Понимая объемность своего курса, автор предлагает три способа его изучения: полный, сокращенный и практический. При сокращенном способе изучения можно исключить предложения, напечатанные мелкими буквами, и некоторые разделы. При практическом способе изучения можно ограничиться определениями и задачами, исключая другие предложения и доказательства.

«Желающие познать основательно какого либо преподаваемого учения истину, не должны быть легкомысленны и верить всему для того только, что сказал им о том какой ни есть учитель славящийся своим знанием; сего недовольно, что только от учителя слышать истину, но должно и самим понимать что то, есть самая истинна, и быть уверенным своим умом, что преподаваемое учителем истолковано справедливо. Сие сказано ... не в таком смысле, чтоб всякому надлежало быть математиком; но когда *кто обучаясь математике, получит способность разсуждать порядочно: по тому же твердому и основательному порядку последовать будет и в разсуждениях о других вещах*» (курсив авторов статьи).


О начертаніи поверхностей тѣлъ 255

ллель *gi*, сдѣлай на *fo* и *lm* прямоугольники *lr* и *fq* коихъ бы высоты были $= cf$ получишь желаемое.

399. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ gh, и діаметру ik основанія прямаго цилиндра, начертить поверьхность онаго.*

Рѣшен. Раздѣли діаметръ *ik* на 113 равныхъ частей, проведи линѣю $cb = 355$ такимъ же частямъ, изъ точекъ *a* и *b* поставь перпендикуляры *ac* и $bd =$ данной высотѣ *gh*, протяни *cd*; на продолженной *ac* и *bd* сдѣлай *cf* и $be =$ діаметру *ik*, наконецъ раздѣля оныя пополамъ опиши круги, получишь желаемое. No 14 Ф. 310.

Доказ. Понеже *cb* равна окружности круга діамѣтра *ik*, по сему согнувъ паралелограмъ *ad*, что бы бокъ *ac* соединился съ бокомъ *bd*, линѣя *ab* сдѣлается окружностію основанія цилиндра; слѣдственно паралелограмъ *ad* составитъ наружную поверьхность цилиндра.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что поверьхность цилиндра равна паралелограму, коего высота $=$ высотѣ, а основаніе равно окружности основанія цилиндра.

Рисунок 2. Пример оформления задачи в томе 2 Войтяховского Е.Д.

Том 2 «Геометрия» не так блестяще оформлен и структурирован, как учебник Головина: не разделен на Отделения соответственно трем геометрическим разделам, определения и теоремы не излагаются в отдельных главах. Отметим, что разделение тома 2 на три части было сделано в последующих изданиях. Однако автор захватывает читателя логикой, обоснованностью, стремительным стилем изложения. Определения перемежаются с теоремами и их следствиями, за теоремами следует множество связанных задач с доказанными решениями, опирающимися на предшествующие теоремы. После задач часто следуют Примечания и Следствия.

Решениям задач измерения на местности, задачам геодезии, использованию специальных приборов для измерений посвящена большая часть тома 3 Тригонометрия.

143. ЗАДАЧА. *Извѣстны румбическіе углы kCD зюйдъ остъ 79°, и уголъ lDE зюйдъ вестъ 30°, сыскать астролабической уголъ CDE.*

Рѣшен. Сложа данные углы, сумму ихъ вычти изъ 180 градусовъ, получишь требуемой уголъ CDE то есть, $79^\circ + 30^\circ = 109^\circ$. $180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$ = углу CDE.

Доказ.

156 О задачахъ къ геодезіи

Доказ. Уголъ $kCD = CDr$, для параллельныхъ линѣй, по сему уголъ (CDr) $KCD + EDl + EDC = 180^\circ$ (Геом. § 16), слѣдовательно $180^\circ - (kCD + lDE)$ равно требуемому углу CDE.

Рисунок 3. Пример задачи из тома 3 Войтяховского Е.Д.

Том 4 «Алгебра» содержит приложения алгебры к геометрии, здесь приведены многочисленные примеры геометрических задач, решаемых как алгебраическим, так и геометрическим спос8
обом.

Задача XV. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC сумма боковъ $AB+BC+AC$ и площадь онаго извѣстны, найти каждой бокъ порознь (*Фиг.* 26).

Рѣшен. Алгебраич. Положимъ площадь треугольника $ABC = d^2$, бокъ $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$, и сумма боковъ $x+y+z=b$, откуда найдется $x+y=b-z$ (A). Для прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, то есть $x^2+y^2=z^2$, и $xy=2d^2$, придай удвоенное послѣднее уравненіе къ первому, будетъ $x^2+2xy+y^2=z^2+4d^2$, а по извлеченіи квадратнаго корня выйдетъ $x+y=\sqrt{(z^2+4d^2)}=b-z$; возвысь части сего уравненія во вторую степень, выйдетъ $z^2+4d^2=b^2-2bz+z^2$ или $2bz=b^2-4d^2$, а по раздѣленіи на $2b$ найдется $z=\frac{b^2-4d^2}{2b}$, посредствомъ чего найдутся и прочіе бока треугольника ABC.

Рѣшен. Геометрич. Продолживъ діогональ AC въ обѣ стороны, сдѣлай $CE=BC$, и $AD=AB$; начерти на линѣи DE квадратъ DQTE, въ которомъ проведя діогональ EQ, протяни къ DQ параллельныя линѣи AR и CS, а чрезъ точки

I

Геометрическихъ. 427

I и N линѣи KG и MP параллельно къ DE, при чемъ произойдетъ $QMNR = \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, $NHIO = \overline{AC}^2$, $CIKE = \overline{BC}^2$ и GDAH = удвоенной площади треугольника ABC; но какъ $DE = AB+AC+BC$, то раздѣля извѣстную площадь квадрата DETQ на двѣ равныя части, будетъ имѣть площадь треугольника EDQ, изъ которой вычтя удвоенную площадь треугольника ABC=GDAH, останется площадь многоугольника QGHAEQ; но поелику прямоугольникъ HC = прямоугольнику OK, и сумма треугольниковъ $ICE+QMN=\triangle NOI$ (потому что сумма квадратовъ $ICEK+QMNR=NHIO$), по сему площадь прямоугольника MGKP=QGHAEQ будучи извѣстна, и основаніе онаго $MP=DE=AB+AC+BC$ также извѣстно, найдется высота $HN=HI=AC$, и наконецъ по извѣстной площади треугольника ABC, діогонали AC и суммѣ боковъ $AB+BC$ сыщется BF, AB и BC (Часть II § 138 и 175).

Рисунок 4. Пример алгебраического и геометрического доказательств решения задачи в томе 4 Войтяховского Е.Д.

Высокий уровень задач, разнообразные приложения геометрии делали учебники Войтяховского востребованными для глубокого изучения математики в его математической школе, а также профессионального обучения будущих инженеров-артиллеристов.

Заключение

В работе проведено сравнение учебных книг по геометрии для профессионального образования двух авторов Головина М.В. и Войтяховского Е.Д. Учебник Головина М.В. был предназначен для обучения в народных училищах и также являлся учебником для обучения учителей. Учебник Войтяховского Е.Д. предназначался для обучения математике будущих военных. Имеющий много достоинств, таких как наглядность и практическая польза, учебник по геометрии Головина, не имел главного: приучения к рассуждению. Учебники Войтяховского, напротив, способствовали развитию способности к обоснованным выводам. Учебники обоих авторов несколько раз переиздавались, что было отражением социального запроса и социального заказа второй половины XVIII века.

Сравнение количества печатных изданий учебных книг по геометрии в первой и во второй половине XVIII века, а также увеличивающейся доли оригинальных российских учебников, свидетельствует о стремительно увеличивающейся потребности общества к образованию.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Птицына И.В., Бахтиярова О.Н., Шклянко В.А., Птицына Е.В. Учебная литература для образования инженеров второй половины XVIII века // Педагогика. Вопросы теории и практики. – 2021. – №5. – С. 791-804.
2. Прудников В.Е. Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков. - М.: Учпедгиз, 1956. – 640 с.
3. Депман И.Я. История арифметики. - М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
4. Кордемский Б.А. Великие жизни в математике. – М.: Просвещение, 1995. – 192 с.
5. Мельников Р.В. Юбилейные и памятные даты 2016 года // Вестник Елецкого государственного университета (Серия «Педагогика» (История и теория математического образования)). – 2016. – №37. – С. 41-53.
6. Головин М.Е. Руководство к арифметике: Для употребления в народных училищах Российской империи: Изданное по высочайшему повелению царствующей императрицы Екатерины Вторыя. СПб.: Тип. Вильковского, 1792-1797. – Ч.1. – 1792, 87 с.; Ч.2. – 1797, 138 с.
7. Головин М.Е. Руководство к механике: Издано для народных училищ Российской империи по высочайшему повелению царствующия императрицы Екатерины Вторыя. Пер. Головина М.Е. – СПб.: Тип. Брейткопфа, 1785. – 130 с.
8. Головин М.Е. Краткое руководство к геометрии: Издано для народных училищ Российской империи по высочайшему повелению царствующия императрицы Екатерины Вторыя. СПб.: Тип. Вильковского, 1790. – 220 с.
9. Головин М.Е. Краткое руководство к математической географии и к познанию небеснаго шара: Изданное для народных училищ Российской империи по высочайшему повелению царствующия императрицы Екатерины Вторыя. – СПб.: Тип. Брейткопфа, 1790. – 75 с.
10. Головин М.Е. Плоская и сферическая тригонометрия: С алгебраическими доказательствами, собранными Михаилом Головиным, надворным советником, Академии наук членом и Учительской семинарии профессором. – СПб.: При Имп. Акад. наук, 1789. – 64 с.
11. Депман И.Я. История арифметики. - М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
12. Аполлос, Хотунцевский В., Барсов А., Шаден И.М., Бантыш-Каменский И., Бабушкин С. Частные пансионы и школы Москвы в 80-х годах XVIII в. - Исторический архив, Том VI. – М.-СПб., 1951. – URL: https://drevlit.ru/docs/russia/XVIII/1780-1800/Castn_pansiony/text1.php.
13. Лютов С.Н. Антология истории русской военной книги: сб. оригин. соч. и ст. XIX – начала XX в. – Новосибирск: Гос. публич. науч.-техн. б-ка Сиб. Отд-ния Рос. акад. Наук, 2007. – 416 с.

14. Саввина О.А. Становление и развитие обучения высшей математике в отечественной средней школе: дис. ... д-ра пед. наук. Елецкий гос. ун-т им. И. А. Бунина; науч. консультанты В. П. Кузовлев, Г. Л. Луканкин. – Елец, 2002. – 485 с.
15. Полынкин А. Учитель Каменского и Ермолова. – Блог газеты «Орловский вестник». – 2013. – URL: https://vestnik57.livejournal.com/255796.html.
16. Войтяховский Е.Д. Полная наука военнаго укрепления, или Фортификация: Содержащая в себе начальныя основания, с приобщением двадцати двух разположений укрепления тринадцати знатнейших европейских инженеров : В пользу и употребление юношества и упражняющихся / Сочиненная артиллерии штык-юнкером и партикулярным в Москве благороднаго юношества математики учителем Ефимом Войтяховским. – М.: Вольная Типография Хр. Клаудия, 1790. – 392 с.
17. Войтяховский Е.Д. Теоретической и практической курс чистой математики: Содержащий в себе арифметику, геометрию, тригонометрию, с практикою и описанием пропорциональнаго циркуля или сектора, алгебру с вышними степеньми, криволинейную геометрию с теориею и практикою искуства бросания бомб: В пользу и употребление юношества и упражняющихся в математике / Сочиненной артиллерии штык-юнкером и партикулярным в Москве благороднаго юношества учителем математики Ефимом Войтяховским. – М.: Вольная Типография у Хр. Клаудия, 1787-1790. – Т. 1, Арифметика. – 1787. –, 293 с.; Т. 2, Геометрия. – 1787. – 368 с.; Т. 3, Тригонометрия. –1787. – 308 с.; Т. 4, Алгебра. – 1790. – 440 с.
18. Там же.
19. Там же.
20. Там же.

Inga V. Ptitsyna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
iinpt@mail.ru
Olga N. Bakhtiyarova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
olga-bakh06@mail.ru
Elena V. Ptitsyna,
Student, Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Moscow, Russia
elena-pt@yandex.ru

Textbooks on geometry for the training of teachers and engineers of the second half of the XVIII century

Abstract. The relevance of the research topic is due to the study of the question of various mathematical training for various professional activities. The purpose of the work is to study various ways of presenting material in domestic textbooks on geometry of the second half of the XVIII century, intended for the training of teachers and engineers. The research method is the study of textbooks published during the period under review. A brief review of all published textbooks on geometry is carried out. The materials of the article may be useful to teachers of pedagogical and technical universities, high schools and specialists in the history of Russian education.

Keywords: pedagogical education, engineering education, mathematical education, geometry, textbooks, M.E. Golovin, E.D. Voityakhovsky.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Аннотация

Для повышения качества преподавания дисциплин математического моделирования необходим поиск новых форм, методов, приемов обучения, новых информационно-коммуникационных технологий. В целях развития самостоятельности студентов, выработки навыков самообразования; повышения уровня теоретической подготовки студентов, развития навыков построения математических моделей, описывающих различные процессы; выработки умений применять математические методы при решении практических задач в экономике и управлении разработано электронное учебно-методическое пособие.

Ключевые слова

математическое моделирование, экономико-математические методы и модели, электронное учебно-математическое пособие, самостоятельная работа студентов

АВТОР

Санаева Татьяна Александровна,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
tatyanasanaeva@yandex.ru

Введение

В современном мире использование экономико-математических моделей и электронно-вычислительной техники в целях оптимизации планирования и управления производством, составления оценки прогнозов в различных сферах человеческой деятельности вызывает огромный интерес. Основой обработки информации, анализа полученных данных, компьютерного моделирования поставленных задач являются математические модели, которые позволяют выявлять закономерности экономических процессов. Внедрение математических методов и моделей является актуальным в условиях рынка, как на уровне деятельности малого предприятия, так и в макроэкономике в планировании и анализа аспектов экономической деятельности региона или страны.

В реальных экономических условиях существует множество возможных вариантов решения любых производственных задач. На практике необходимо рассматривать множество различных вариантов решения одной и той же задачи, принимать один из более эффективных вариантов решения. В связи с этим математическое моделирование является лучшим аппаратом выбора наиболее эффективного варианта действий.

При решении производственных проблем и задач управления производством применение экономико-математических методов предполагает:

- построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;
- изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

Цели и задачи преподавания математического моделирования заключаются в том, чтобы дать студентам представление о математическом аппарате исследования операций; показать сферы приложений основных методов исследования операций; анализе и использовании задач на нахождение экстремума функции на множестве допустимых вариантов; определить множество задач в области информационных и коммуникационных технологий, решаемых методами дисциплины; сформировать навыки формализации, разработки математических моделей и реализации вычислительных алгоритмов задач исследования операций.

Методология и результаты исследования

В условиях информатизации образования стали актуальными вопросы использования информационных технологий в преподавании математического моделирования, как для компьютерного моделирования различных процессов, так и для совершенствования подходов и методов обучения, связанных с применением в учебном процессе электронных обучающих систем и комплексов.

Развитие вычислительной техники и программирования привело к созданию систем символьной математики, которые имеют большое количество встроенных математических функций и методов решения математических задач, включают языки программирования. К таким системам относятся Mathcad, Mathematica, Maple, Mathlab. В системах символьной математики реализовано практически все, что необходимо в экономических, социологических, статистических и других исследованиях. Применение в учебном процессе систем, обладающих понятным интерфейсом, мощными математическими возможностями и графическими средствами для визуализации результатов расчетов, позволяет студентам избежать рутинных громоздких вычислений и помогает представить результаты моделирования в наглядной форме.

Исходя из опыта преподавания, был разработан лабораторный практикум по математическому моделированию. В качестве программного средства реализации выбраны пакеты Mathcad и Maple. Учебно-методическое пособие предназначено для использования на практических занятиях и студентами в самостоятельной работе. Задачи для практикума взяты из пособия [5], оно содержит образцы моделирования и численного решения задач с использованием математических пакетов по всем основным разделам дисциплины: линейному программированию, целочисленному программированию, теории игр, балансовым моделям, задачам нелинейного и динамического программирования. В каждом разделе содержатся по 10 вариантов заданий для самостоятельного решения.

Самостоятельная работа студентов является одной из важнейших составляющих образовательного процесса и наряду с аудиторной работой и представляет одну из форм учебного процесса, являясь существенной его частью. Повышаются требования к самостоятельной работе студентов. Содержание самостоятельной работы студентов должно быть описано в рабочей программе каждой дисциплины. В процессе работы со студентами сталкиваемся с серьезным противоречием между требованиями стандарта и неподготовленностью студента к самостоятельной работе, которая требует применение сформированных в школе навыков теоретических знаний к различным практическим ситуациях.

Для совершенствования преподавания математического моделирования авторами было разработано электронное учебно-методического пособия в целях:

- развития самостоятельности студентов, выработки навыков самообразования;
- повышения уровня теоретической подготовки студентов, развития навыков построения математических моделей, описывающих различные процессы;
- выработки умений применять математические методы при решении практических задач в экономике и управлении.

В нем излагается теоретический материал - основные понятия, определения, теоремы, формулы, необходимые для решения задач; приведены методические рекомендации по построению математических моделей, решению типовых задач; имеются задания для самостоятельного решения, контрольные работы.

Электронное пособие разработано с использованием гипертекстовой технологии, навигация организована по гиперссылкам, связывающим основные разделы пособия и различные виды изучаемого материала (теоретический, практический, контрольные задания) внутри каждого раздела.

Электронное учебное пособие включает в себя темы: «Целочисленное программирование», «Теория игр», «Линейный межотраслевой баланс», «Нелинейное программирование», «Динамическое программирование».

Каждый раздел пособия включает теоретический материал, примеры решения задач, варианты расчетно-графических работ и методические указания к их выполнению, задания для самостоятельной работы. По каждой теме приводятся примеры решения задач, подробно объяснены методы их решения, приведены образцы оформления задач и геометрическая интерпретация решений. Приведены задания различного уровня сложности для самостоятельного решения. Составлено 25 вариантов расчетно-графических работ, состоящих из 7 заданий.

Рассмотрим подробнее содержание отдельных разделов.

В *разделе I* рассмотрены модели целочисленного программирования. Даны теоретические основы, постановка и примеры типовых задач, алгоритм метода Гомори, раскрыта суть метода ветвей и границ.

Примерная задача, рассматриваемая в данном разделе.

Компания владеет фабрикой, которая производит изделия трех типов. Необходимые трудовые затраты и потребности сырья для производства одной единицы каждого из трех типов изделий приведены в таблице.

Тип изделия	Необходимое времы (час./ед.)	Необходимое сырье (фунт/ед.)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Наличный Дневной объем	100	100

Доходы от производства единицы каждого из трех изделий равны 20, 35 и 40 долл. соответственно. Если будет производиться изделие типа 3, то его ежедневный объем производства должен быть не менее 5 единиц. Сформулируйте задачу в виде задачи целочисленного программирования, чтобы найти оптимальное решение.

Раздел II посвящен теории игр. Здесь рассмотрены основные положения теории игр, решение матричных игр в чистых стратегиях, методы решения игр в смешанных стратегиях: графический, с использованием теоремы об активных стратегиях, метод сведения игры к задаче линейного программирования. Рассмотрены игры с природой. Приведен ряд критериев принятия решений, которые используются при выборе оптимальной стратегии.

Задача раздела теории игр.

Две фирмы производят два конкурирующих товара. Каждый товар в настоящее время контролирует 50% рынка. Улучшив качество товаров, обе фирмы собираются развернуть рекламные кампании. Если они не будут этого делать, то существующее состояние рынка не изменится. Однако если какая-либо фирма будет более активно рекламировать свои товары, то другая фирма потеряет соответствующий процент своих потребителей. Исследование рынка показывает, что 50% потенциальных потребителей получают информацию посредством телевидения, 30% - через газеты и 20% - по радио. Сформулируйте задачу в виде игры двух лиц с нулевой суммой и выберите подходящие средства рекламы для каждой фирмы.

В *разделе III* описан линейный межотраслевой баланс. Раздел содержит основные понятия, формулы для вычисления коэффициентов прямых материальных затрат, коэффициентов полных материальных затрат, условие продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Раздел IV посвящен моделям нелинейного программирования. Дана постановка задач нелинейного программирования. Описываются классические методы оптимизации: метод нахождения условного экстремума функции нескольких переменных, метод множителей Лагранжа. Приведено решение задач с ограничениями равенствами и ограничениями неравенствами.

Задача, рассматриваемая в четвертом разделе.

Предприятие выпускает изделия двух видов, при изготовлении которых используется сырье I и II. Известны запасы сырья первого вида 30, второго вида - 60, нормы его расхода на единицу изделия $x_{11}=5$, $x_{12}=2$, $x_{21}=8$, $x_{22}=11$, оптовые цены первого и второго видов изделия 8 и 7 за единицу изделия и себестоимость $c_1=6+0,1x_1$, $c_2=4+0,1x_2$. Составить план выпуска изделий, дающий предприятию максимальную прибыль.

В *разделе V* рассмотрены задачи динамического программирования, приведен принцип оптимальности Беллмана, разбирается решение таких актуальных задач, как задача об оптимальном распределении инвестиций, задача инвестирования.

Примерная задача пятого раздела.

Необходимо инвестировать 4000 долл. сейчас и 2000 долл. в начале каждого года, от второго до четвертого, считая от текущего года. Первый банк выплачивает годовой сложный процент 8% и премиальные на протяжении следующих четырех лет в размере 1,8; 1,7; 2,1 и 2,5% соответственно. Годовой сложный процент, предлагаемый вторым банком, на 0,2% ниже, чем предлагает первый банк, но его премиальные на 0,5% выше. Задача состоит в максимизации накопленного капитала к концу четвертого года.

Заключение

Электронное учебно-методическое пособие будет полезно студентам, изучающим дисциплины «Математическое моделирование», «Экономико-математические методы и модели», «Исследование операций» и выполняющим индивидуальные и расчетно-графические задания по предмету. Пособие может быть использовано преподавателями, как на аудиторных практических занятиях, так и для организации самостоятельной работы студентов. Форма обучения – групповая, индивидуальная.

Организация учебного процесса на базе электронных учебников активизирует самостоятельную деятельность студентов, создает условия для быстрой адаптации студентов к использованию информационных и коммуникационных технологий, повышает эффективность обучения.

Таким образом, внедрение информационных технологий обеспечивает новое качество математического образования, расширяет возможности использования новых методик и технологий в изложении теоретического и практического материала, в задачах компьютерного моделировании различных процессов, а также стимулирует активное отношение студентов к учебе, помогает организовать самостоятельную работу, повышает эффективность обучения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2005.
2. Исследование операций в экономике/Под ред. Кремер Н. Ш. – М.: ЮНИТИ, 2003.
3. Экономико-математические методы и модели / Под ред. С. И. Макарова. – М.: КНОРУС, 2007.
4. Невежин В. П., Кружилов С. И. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование». – М.: ОАО «Издательский Дом «Городец», 2005.
5. Санаева Т. А. Математическое программирование : учебно-методическое пособие. Чебоксары, ЧЭИИ, 2008.
6. Таха Х. А. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.

***Tatyana A. Sanaeva*,**
Associate Professor, Department of mathematical modeling, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
tatyanasanaeva@yandex.ru

Research on the choice of task forms

Annotation. To improve the quality of teaching mathematical modeling disciplines, it is necessary to search for new forms, methods, teaching methods, new information and communication technologies. In order to develop students' independence, develop self-education skills; increase the level of theoretical training of students, develop skills in constructing mathematical models describing various processes; develop skills to apply mathematical methods in solving practical problems in economics and management, an electronic teaching aid has been developed.

Keywords: mathematical modeling, economic and mathematical methods and models, electronic educational and mathematical manual, independent work of students.

МНОГООБРАЗИЕ ФОРМ ДЕВИАНТНОЙ НАУКИ

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена возникновением широкого разнообразия форм девиантных образований, которые пытаются выдавать себя за научные направления. Цель исследования – систематизировать основные формы девиантной науки. Выяснено, что девиантная наука фиксируется посредством множества терминов, большинство которых возникло на границе науки и мировоззрения. Предложена перспективная классификация основных форм девиантной науки. Результаты работы могут быть использованы при разработке лекционных курсов по дисциплинам «История и философия науки», «Методология науки».

Ключевые слова

научное познание, критерии научности, девиантная наука

АВТОРЫ

Уткина Надежда Вениаминовна,
Кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
utkina-nv@yandex.ru

Голубев Алексей Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана»,
старший научный сотрудник лаборатории механики систем
ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук», г. Москва
v-avgolu@hotmail.com

Введение

У науки, как особого вида познавательной деятельности, направленного на выработку объективных, системно организованных и обоснованных знаний о мире, сложилась своя система познавательных идеалов. Эти идеалы стали канонами, ибо они присущи всей истории науки и присутствуют в любом современном исследовании. Необходимо признать, что вокруг современной науки возникла целая группа феноменов, которые пытаются ей подражать и выдавать себя за научные направления. Данные феномены имеют самые различные наименования: «псевдонаука» (греч. *pseudos* - ложь, мнимость), «паранаука» (греч. *para* – рядом, возле), «квазинаука» (лат. *quasi* - как будто), «лженаука», «экстранаука» (лат. *extra* – сверх), «альтернативная наука» (лат. *alter* – другой), «маргинальная наука» (лат. *marginalis* – край, граница, сторона), «девиантная наука». В силу их значительного разнообразия необходима классификация форм девиантного знания.

Методология и результаты исследования

В философии науки были предприняты попытки сгруппировать данные образования. Классификация, разработанная С. П. Щавелевым, включает в себя семь форм знания с позиции их референтов в области общественной практики: 1) феномены, которых заведомо нет и быть не может (спиритизм); 2) объекты, в действительности, может быть, существующие, а может быть, и нет (биополе, Йетти, Лохнесское чудовище); 3) явления, вполне реально имеющиеся, но получающие явно искаженное отражение в причудливом зеркале псевдонауки (галлюцинации, оптические эффекты в атмосфере, обломки авиа- и других катастроф, обычные предметы вроде птиц, самолетов, выдаваемые за «НЛО»); 4) события, происшедшие в прошлом, но уже переведенные ходом событий в инобытие остатка (Тунгусский метеорит, сооружения в пустыне Наска, Атлантида); 5) эффекты, что могут возникнуть, быть созданы в будущем (искусственный интеллект, воскрешение законсервированных покойников); 6) временные допущения инструментального свойства, что недостаточно точно или полно решают определенную проблему науки или практики, но недостающей информацией или практической разницей, ущербом можно или приходится пренебречь (неподтвердившийся флогистон, «бертильонаж»); 7) альтернативные концепции, выдвигаемые в качестве намеренной противоположности общепринятым, парадигмальным в определенной области знания на данном этапе ее истории (концепция А. Л. Чижевского) [1].

Дж. Холтон предложил различать: патологическую «науку» (то есть занятия людей, убежденных, что они творят «подлинную» науку, но на самом деле находящихся в плену своих болезненных фантазий и иллюзий); псевдонауку (астрология, «наука» о паранормальных явлениях, откровенная чепуха и суеверие типа историй о «духах пирамид» и т. п.); сциентизм (чрезмерный энтузиазм веры в силу науки, выражающийся в навязывании всенаучным областям культуры «научных» моделей и рецептов) [2].

Квазинаука (форма, которую принимает наука в условиях иерархически организованного научного сообщества = некое научное учение, отрицающее аналогичную мировую науку) и лженаука (некое учение, находящееся с аналогичной по названию мировой наукой в состоянии взаимного отрицания, например мичуринская биология, которая противостояла мировой науке) являются основными элементами в классификации В. А. Леглера [3].

В. В. Ильин разграничивает 1) ненаучные формы познавательной деятельности (практически – обыденный опыт), донауку – протознание – базис грядущей науки; лженауку – домыслы, предрассудки, камуфлирующиеся под науку (френология); паранауку – знание, не удовлетворяющее науке по своему гносеологическому статусу (парапсихология); антинауку – намеренное искажение научного взгляда на мир – буржуазные социальные утопии в обществознании [4].

Н. И. Мартишина определяет примыкающие к науке знания по оценке методов и нормативов развития знания в рамках каждого конкретного типа околонаучного знания. Выделяются народная наука; экстранаука (учения мистического плана, основной объект которых лежит за пределами данного бытия, представляя собой сверхреальность, а методы иррациональны и противопоставляются научным, как примитивным и грубым (мистическая танатология), к экстранауке примыкают также своеобразные учения, объект которых лежит за пределами наличного бытия, но при этом персонифицирован); паранаука (совокупность концепций, базирующихся на ненормативных интерпретациях рациональных в своей основе исходных положений, где воспроизводятся специфические признаки научного знания при замещении ряда критериев научности противоположными ориентациями); псевдонаука (лженаука) (концепции, построенные на принципиально неверных основаниях, претендующие на самодостаточность в данной предметной области, базирующиеся на эмпирическом материале, полученном с существенными отклонениями от нормативных процедур научного исследования, и аналогичных теоретических построений (концепция Т. Д. Лысенко), девиантная наука (маргинальные исследования, отклоняющиеся от научных стандартов своего времени концепция А. Л. Чижевского) [5].

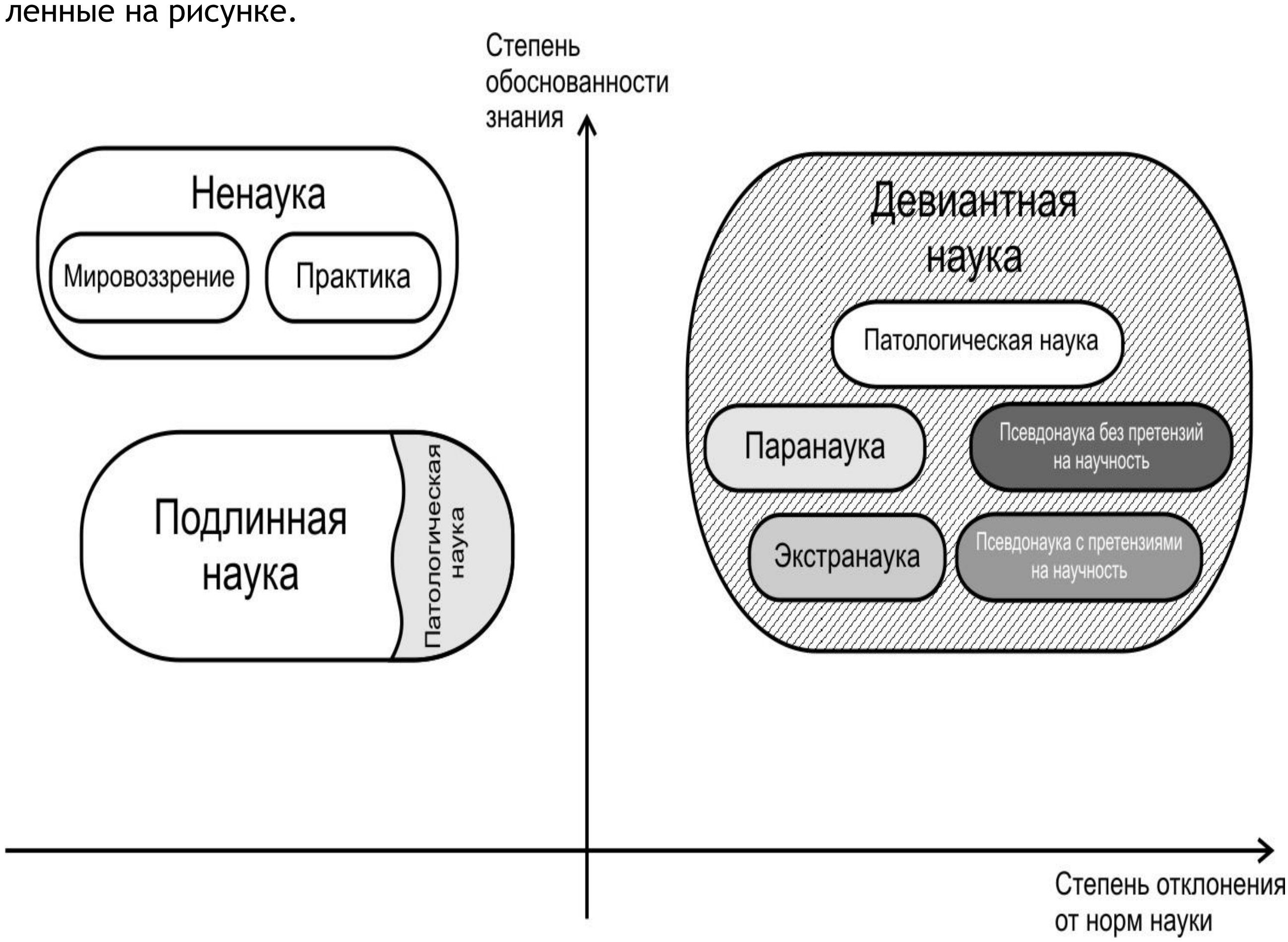
В классификации В. И. Дынича, М. А. Ельяшевича, Е. А. Толкачева, Л. М. Томильчика и др. охватывается достаточно большой круг познавательных феноменов. Выделяются: анормального знание – 1 («появляется в результате непримиримого для индивидуума… расхождения регулятивов «здравого смысла» с нормами и методами науки»); анормальное знание – 2 (появляется в результате расхождения с регулятивами господствующей парадигмы); анормальное знание – 3 («возникает при попытках объединения норм и идеалов из принципиально различающихся … форм человеческой деятельности») [6].

М. Манер предлагает ограничиться только псевдонаукой (опирается на псевдонаучные теории или элементы теории) и паранаукой (бредовые идеи) [7].

Следует признать, что данные классификации являются относительно узкими и не позволяют учитывать некоторые формы знания. Эти знания по своей сути такие же дефектные, как классические девиантные науки, но не претендуют на статус научности. С. О. Ханссон справедливо указал, что иногда области исследования, часто включаемые в категорию девиантных наук, в действительности таковыми не являются [8]. Они не заявляют о своих правах на научность, а только включают некоторые (часто традиционные) теории об определенных проблемах. Например, традиционная китайская медицина включает «биологическую» теорию жизненной энергии «ци», индийская теория чакр утверждает, что человеческое тело содержит тысячи энергетических центров (чакр), на которые можно оказывать влияние медитацией (например, тантра). Точно так же теория реинкарнации утверждает, что душа человека действительно переживает смерть тела и может быть рождена заново в каком-нибудь другом теле (необходимо отметить, что традиционное буддистское понятие перевоплощения не включает выживание некоторой духовной субстанции).

Многие формы познания в обширном мире эзотерики, оккультизма также не претендуют на научность. Некоторые являются даже прямо антинаучными, отклоняют научный подход к знанию в пользу различных «альтернативных способов познания». Они расценивают научное представление мира если уж не полностью ложным, то в лучшем случае недальновидным и, следовательно, испытывают большую потребность в «дополнительных» формах познания, таких, как «холистические», «спиритуальные» или «мистические». В качестве примеров выступают такие формы «альтернативного лечения», как шаманство, или эзотерические представления мира, как антропософия и др. [9]. Никто не будет называть ученым шамана, действительно лечащего своих соплеменников. Вполне возможно, в языке его народа и слова такого «наука» нет. Очевидно, что определение девиантной науки как ненаучной формы знания с научными претензиями не может применяться к таким областям. Эти эзотерические области действительно конкурируют с наукой, утверждая, что они производят или имеют в своем распоряжении важное фактическое знание. Кроме того, предполагаемое знание, произведенное в этих областях, часто конфликтует с хорошо обоснованным научным знанием. Поэтому можно сделать вывод, что «альтернативное знание», полученное в таких областях, столь же иллюзорно, как в стандартных девиантных науках.

По этим причинам целесообразно употреблять обобщенное понятие, которое позволит учитывать отклоняющиеся от подлинной науки формы знания с претензией на научность и без претензий на научность. С этой целью мы предлагаем использовать термин «девиантная наука», который объединяет паранауку, псевдонауку с претензиями на научность, псевдонауку без претензий на научность, экстранауку, представленные на рисунке.



Типы познания и формы девиантной науки

Паранаука. Данная форма познания представляет собой некую «периферию» научного познания, научную «экзотику», которая действительно выглядит как когнитивная (но не социальная) прослойка между наукой и околонаучными системами воззрений, такими, как религия, здравый смысл и т. д. Данная девиация совершается представителями самой науки. Такие ученые могут иметь научную степень (кандидата или доктора наук), быть признанными научным сообществом (член-корреспондент или академик) и иметь в прошлом высокий авторитет. Их современная маргинальность определяется тем, что они разработали и предложили коллегам такую концепцию, которая у большинства из них вызывает возражения. Типичным примером паранауки выступает парапсихология. Можно допустить, что некоторые положения парапсихологии со временем войдут в состав нормальной научной психологии, при условии, конечно, их радикального переосмысления.

Псевдонаука с претензиями на научность. Это деятельность, имитирующая науку, но по своей сути таковой не являющаяся. Данную форму знания можно разделить по видам деятельности на практико-ориентированную псевдонауку и поисковую псевдонауку. Первый вид обозначает безрезультативные действия, имитирующие форму результативных. Данный вид очень разнообразен. Псевдонаучная «тень» имеется едва ли не у каждого раздела естествознания и обществоведения. Практико-ориентированными псевдонауками считаются псевдофизико-механические технологии (perpetua mobilia и другие так называемые машины свободной энергии с устройствами антигравитации), псевдогеологические технологии (лозоискательство), биомедицинские псевдотехнологии (гомеопатия, хиропрактика, иридодиагностика и биоритмология). Кандидатами на психологические псевдонауки выступают психоаналитическая терапия, френологический и графологический диагноз, астротерапия и гороскопы, нейролингвистическое программирование и прикладная кинезиология. Данные виды практико-ориентированной псевдонауки мотивированы как виды оплачиваемых услуг.

Другой вид псевдонауки с претензиями на научность – поисковая псевдонаука. Речь идет о фиксации неопознанных летающих объектов (НЛО), поисках «снежного человека», бермудского треугольника, пропавших людей и т. п. Если не подключать спекуляции о тонких и параллельных мирах, то имеется в виду поиск феноменов, в чем-то напоминающий научную эмпирию. И все же здесь не работают многие нормы исследовательского опыта. Главная из них требует точного и объективного удостоверения факта. Как правило, уфологи и другие «поисковики» предоставляют словесные описания того, что они якобы видели и чувствовали, фото- и киноматериалы, которые чаще всего не выдерживают экспертных заключений. Хотя идеал чистого поиска здесь может присутствовать, как правило, он подогревается жаждой сенсационности для СМИ. Поисковая псевдонаука, как правило, оперирует не фактами, а артефактами (искусственными феноменами).

Термин **экстранаука** введен для обозначения позиции ученого, радикально отличной от общепринятой на данный период философии и реализующей её на уровне фундаментальной теории. В истории науки существует множество примеров такого рода. В 1920-х годах в физике сложилась такая фундаментальная теория, как квантовая механика. Но её философские основания были неопределенны, и до середины 1930-х годов шли бурные дискуссии теоретиков. Обозначились две полярные позиции: 1) «Копенгагенская школа» (Н. Бор, В. Гейзенберг и др.) доказывала, что новая теория является нормальным и относительно завершенным результатом науки; хотя она позволяет вычислять лишь вероятностные величины, они вполне удовлетворительны, ибо даже отдельный микрообъект имеет статистическую природу; 2) А. Эйнштейн, Э. Шредингер и еще несколько физиков оценивали вероятности как существенный недостаток квантовой механики, который нужно устранять и добиваться теории с однозначными значениями. Такой вывод вытекал из философии голландского мыслителя Б. Спинозы, где «природа-бог не играет в кости», то есть исключает вероятностное знание. В ходе многолетних дискуссий победила точка зрения «копенгагенской школы», и она стала общепринятой, войдя в учебники. Концепцию Эйнштейна разделяют редкие ученые, среди которых можно выделить Д. Бома (США). Таков удел типичной «экстранауки».

Другой разновидностью «экстранауки» является симбиоз научной теории с религией и теологией. Здесь речь идет только о негативной форме союза науки и мировоззрения, которая питается кризисными социальными условиями. На территориях бывшего СССР произошел переход от былого неприятия религии к религиозному возрождению и свободе совести. За последние пятнадцать лет в России вышло много публикаций с тематикой «единства науки и религии». Однако некоторые авторы не выдерживают границ принципа толерантности и диалога, призывая к экспансии религии в сферу науки. Конечно, связь науки и религии неоднозначна. Так же, как и философия, религия способна играть позитивную роль, если из нее берутся должные представления (знания), но не ценностные нормы. Совсем другое дело, когда науке начинают прививать ценности религии. Проект создания науки на религиозных идеалах вредит как науке, так и религии, ибо такой кентавр нежизнеспособен. Противоположность научных и религиозных ценностей показательна их основными целевыми установками. Если наука ориентирована на новое истинное знание, то религия создаёт смыслы особого образа жизни, центрированные верой в сверхъестественное. Принять идеалы религии для исследовательской деятельности – значит, отказаться от ведущих норм науки.

Если метафизика есть мать наук, то теология должна быть ее путеводной звездой. Таково идейное кредо еще одного представителя экстранауки – доктора физико-математических наук Ю. С. Владимирова. Первичность теологии он обосновывает динамикой смены объектов физики. Классическая физика изучала макротела и микрочастицы, или то, что на философском языке называется материей. Неклассическая физика (СТО, ОТО) сконцентрировалась на пространстве – времени, что соответствует идеальному плану реальности. Современная физика исследует поля (электромагнитные, гравитационные, слабые, сильные), соответствующие Святому Духу. Вот почему полевая парадигма выдвигает теологию на первое место [10].

Переходы автора от физики к философии и теологии строятся на искусственных натяжках. Физическая материя здесь грубо обделена. Если у Декарта пространство отождествляется с материей, то для Владимирова это уже тяжкий грех, простительный только для материалиста. Выше всякого понимания таинственная связь физических полей со Святым Духом. Что касается теологии, то она неспособна быть впереди философии. По своему идейному потенциалу метафизика неизмеримо богаче первой. Кроме того, степеней свободы мысли у философии гораздо больше, чем у теологии. Если религиозная вера склонна к догматизации, то философия живет культурой сомнения, что и соответствует поисковому духу науки. Следует признать, что ценности религии противоположны идеалам науки. Диалог ученых с религией правомерен тогда, когда ее образы проходят испытания научным методом и теряют ценностный характер.

Псевдонаука без претензий на научность. Этот вид познавательной деятельности не содержит даже намеков на сходство с наукой. Здесь предполагаются феномены типа шаманизма, колдовства. Такие формы познавательного освоения действительности максимально удалены от научного познания, их ценностную основу составляют предфилософские формы мировоззрения: анимизм, магия и т. п.

Для понимания сути девиантной науки необходимо рассмотреть такое явление как **«патологическая наука»**. Данный термин был предложен И. Ленгмюром. Речь идет о процессе в науке, когда ученые фальсифицируют результаты исследования, принимая желаемое за действительное, то есть это «наука о явлениях, которых на самом деле нет» [11]. В данном случае не приходится сомневаться в персональной честности исследователей, которые были введены в заблуждение и пришли к неправильным результатам из-за того, что они не понимали, насколько далеко могут увести человека от истины субъективные эффекты, предвзятые мнения или пороговые взаимодействия.

Классическим примером выступает «поливода». Поливода (аномальная вода, модифицированная вода, сверхплотная вода, полимеризованная вода, вода II) – это гипотетическая полимеризованная форма воды, которая может образовываться за счет поверхностных явлений и обладать уникальными физическими свойствами. Открытие и активное изучение «поливоды» происходило в 60-е годы XX века. Результаты экспериментов были невоспроизводимы и были убедительно опровергнуты множеством учёных – исследование «поливоды» часто рассматривается как пример девиантной науки.

Другими примерами патологической науки могут служить *N*-лучи, эффект Дэвиса–Барнса, эффект Эллисона, холодный ядерный синтез. Также другие теории и подходы в науке считались девиантными, например, космология стабильного состояния, антропный принцип, субъективистская интерпретация квантовой теории, теория квантовых измерений, эволюционная психология, теория обработки информации в психологии [12]. Некоторые феномены, такие, как опровержение Холокоста, даже несколько отклонились от академической историографии, чтобы сформировать свою особую область исследования, при этом создается впечатление, что они превратились в настоящие девиантные науки.

Не следует считать патологической наукой, появление при объяснении эмпирических фактов появляются новых доказательств, способствующих улучшению теории. Сам И. Ленгмюр был когда-то сторонником кубического атома, простой модели атомистической теории. От этой модели позже отказались в пользу атома Бора, который предложил более простое и более богатое понимание собранных экспериментальных результатов. В данном феномене не было никакой «патологии». Когда появилась модель Бора, к теории кубического атома пропал интерес, и о ней быстро забыли.

Необходимо отметить, что и в девиантных науках могут существовать элементы знания, которые не обязательно будут ложными. В качестве примера возьмем акупунктуру (иглоукалывание). Хотя нет никакой надежды на волшебную теорию традиционной китайской медицины, лежащей в основе практики иглоукалывания, необходимо отметить, что существуют некоторые факты терапевтического эффекта при воздействии иглами на определенные точки тела человека [13]. Если они подтвердятся, то иглоукалывание станет областью биомедицинского исследования и получит объяснение, которое, вероятнее всего, не будет иметь много общего с его сверхъестественным происхождением. Следует отметить также, что некоторые девиантные науки, такие, как парапсихология, используют научные методы, поэтому не все происходящее в отклоняющихся от подлинной науки формах знания обязательно будет ложным.

Протонаука и иноверие. Протонаука представляет собой первичные формы осмысления реальности, возникающие в процессе становления конкретно-исторического типа научного знания при отсутствии необходимого эмпирического материала и нестабильности (или неразработанности) методов исследования и нормативов построения теории. Опираясь в равной степени как на существующие достоверные сведения, так и на субъективные предположения исследователя (неизбежно окрашенные духовной атмосферой эпохи), протонаука строится как результат «игры» творческого воображения с наличным эмпирическим материалом. Протонаучное знание служит основанием построения более достоверных теоретических моделей, «строительными лесами» научной теории, исчезая с появлением последней.

Следует признать, что точный статус некоторых форм знания определить весьма сложно. Во-первых, часто появляется желание отклонить гипотезу как девиантную в силу ее неортодоксальности (еретичности), хотя на самом деле она может оказаться протонаучной. Во-вторых, некоторые формы знания, которые на сегодняшний день считаются девиантными, возможно, раньше были протонаучными [14]. Таким образом, отнесение форм познавательного освоения действительности к девиантным должно происходить на основании детального анализа деформаций ценностного ядра науки.

Заключение

Классическим примером выступает «поливода». Поливода (аномальная вода, модифицированная вода, сверхплотная вода, полимеризованная вода, вода II) – это гипотетическая полимеризованная форма воды, которая может образовываться за счет поверхностных явлений и обладать уникальными физическими свойствами. Открытие и активное изучение «поливоды» происходило в 60-е годы XX века. Результаты экспериментов были невоспроизводимы и были убедительно опровергнуты множеством учёных – исследование «поливоды» часто рассматривается как пример девиантной науки.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Щавелев С. П. Практическое познание: философско-методологические очерки. – Воронеж: Университет, 1994. – 232 с.
2. Холтон Дж. Что такое «антинаука» // Вопросы философии. – 1992. – № 2. – С. 26–58.
3. Леглер В. А. Наука, квазинаука, лженаука // Вопросы философии. – 1993. – № 2. – С. 49–55.
4. Ильин В. В. Критерии научности знания. – М.: Высш. шк., 1989. – 128 с.
5. Мартишина. Н. И. Когнитивные основания паранауки. – Омск: Изд-во ОмГГУ, 1996 – 186 с.
6. Дынич. В. И. Вненаучное знание и современный кризис научного мировоззрения // Вопросы философии. – 1994. – № 12. – С. 122–133.
7. Manner M. Demarcating science from non-science. – Amsredam: Elsevier, 2007. – P. 515–575.
8. Hansson S. O. Defining pseudo-science // Philosophia naturalis. – 1996. – № 33. – P. 169–176.
9. Glymour C. Examining holistic medicine. – Buffalo, N. Y.: Prometheus Books, 1989. – 406 p.
10. Владимиров Ю. С. Соотношение фундаментальной физики, философии и религии. – Кострома: Изд-во МИИЦАОСТ, 1996. – 228 с.
11. Langmuir I. Pathological science // Physics today. – 1989. – № 10. – P. 36–48.
12. Bunge M. The Sociology-philosophy connection. – New Brunswick: Translation publishers, 1999. – 244 p.
13. Ernst E. The desktop guide to complementary and alternative medicine. – Edinburgh: Mosby, 2001. – 466 p.
14. Toulmin S. The new philosophy of science and the «paranormal» // Skeptical inquirer. – 1984. – № 9 (1). – P. 48–55.

***Nadezhda V. Utkina*,**
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
utkina-nv@yandex.ru
***Alexey E. Golubev*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Senior researcher, ishlinsky institute for problems in mechanics of Russian academy of science, Moscow, Russia
v-avgolu@hotmail.com

The variety of deviant science forms.

Abstract. The relevance of the study is due to the emergence of a wide variety of deviant science forms imitating scientific activity. The aim of the work is to systematize the main forms of deviant science. The study shows that deviant science is presented by a variety of terms, most of which arose on the border of science and world view. A promising classification of the main forms of deviant science is proposed. The results of the study can be used in delivering a course of lectures "History and Philosophy of science", "Methodology of science".

Keywords: scientific cognition, scientific criteria, deviate science.

О ПРОВЕДЕНИИ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ «ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Аннотация

С целью повышения уровня математической подготовки студентов необходимо особое внимание уделять базовым вопросам математики. Изучение кратных интегралов является важной составляющей математического образования студентов и является обязательной темой в курсе математического анализа для студентов математических и технических специальностей. Успешное освоение этой темы помогает студентам осваивать также и другие дисциплины. В данной работе рассмотрено применение криволинейных систем координат как эффективный способ вычисления некоторых тройных интегралов. Содержание статьи представляет интерес, как для преподавателей, так и для студентов.

Ключевые слова

вычисление тройных интегралов, криволинейные системы координат

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Введение

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость рассматривать интегралы от функций нескольких переменных. Умение находить кратные интегралы очень важно, оно может быть использовано для решения не только теоретических, но и практических задач.

Криволинейные координаты плотно вошли в нашу жизнь, долгота и широта в навигаторе, например, по сути, — углы в общепринятой на нашей планете обобщенной сферической системе координат. Поэтому умение грамотно использовать криволинейные системы координат очень важно. Это умение пригодится студентам и в дальнейшем для решения многих прикладных задач.

Данная статья является логическим продолжением работы [1], в которой рассмотрен переход к некоторым криволинейным системам координат для вычисления двойных интегралов.

Методология и результаты исследования

Тема «вычисление тройных интегралов» идет в курсе математического анализа сразу после темы «вычисление двойных интегралов». На нее выделяется в зависимости от сложности и продолжительности курса от двух до четырех занятий, большая часть которых должна быть посвящена переходу к криволинейным системам координат.

При этом предполагается, что студенты уже знают основные способы интегрирования, а также имеют навыки построения кривых на плоскости, плоскостей и поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве, а также умеет вычислять двойные интегралы в декартовых и полярных системах координат.

Теоретический материал [2,3], примеры решения задач [2-5], задачи для самостоятельного решения преподаватель может разместить на своем сайте, персональной странице официального сайта вуза или использовать облачные технологии, чтобы любой из студентов имел доступ ко всем материалам в любое удобное время. Делать это следует за несколько дней до проведения практических занятий.

По ходу освоения темы «вычисление тройных интегралов» следует объяснять: в каких случаях целесообразно находить интегралы непосредственно в декартовых координатах, а в каких случаях правильнее перейти к тем или иным криволинейным системам координат. Для начала, необходимо отработать со студентами умение правильно расставлять пределы интегрирования в тех или других криволинейных координатах. Поэтому первые задания должны быть связаны с переходом из декартовой системы координат к криволинейным без непосредственного вычисления тройных интегралов.

Замена переменных в тройном интеграле

При замене переменных в тройных интегралах руководствуются следующей теоремой [2].

Теорема (о замене переменных в тройном интеграле). Пусть отображение

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w)\,, \quad (u,v,w) \in G \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область G на область Ω, причем якобиан $J(u,v,w)$ этого отображения отличен от нуля в каждой точке G. Если $f(x,y,z)$ непрерывная в области Ω функция, то верна следующая формула замены переменных в тройном интеграле:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right|dudvdw.$$

Цилиндрическая система координат. Одним из важных видов криволинейных координат в трехмерном пространстве, изучаемых студентами в курсе математического анализа являются цилиндрические координаты (r,φ,z), связанные с декартовыми координатами (x,y,z) соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\,, \\ z = z \end{cases} \begin{cases} r \in [0,\infty) \\ \varphi \in [0,2\pi)\,. \\ z \in (-\infty,\infty) \end{cases}$$

При этом якобиан

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r$$

обращается в ноль только при $r=0$, что соответствует оси Oz в декартовой системе координат.

Следует объяснить, что цилиндрические координаты являются расширением полярных координат, заданных на плоскости, посредством добавления третьей координаты z, которая задает высоту точки над этой плоскостью. Осуществлять переход к цилиндрическим координатам полезно в следующих случаях:

1. В случаях, когда область интегрирования удобнее и проще задается в цилиндрических координатах, чем в декартовых. Как правило, это области, проекция которых на одну из координатных плоскостей является кривой, удобно задаваемой в полярных координатах.

2. В случаях, когда в цилиндрических координатах подынтегральная функция становится проще. Как правило, это функции вида $f(x^2+y^2, z)$ или $f(x/y, z)$.

Пример 1. Вычислим интеграл $I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, где Ω - область, ограниченная плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$ и поверхностью $y=\sqrt{2x-x^2}$ (рисунок 1).

В прямоугольной системе координат этот интеграл преобразуется в повторный следующим образом:

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz.$$

Замкнутая область D, являющаяся проекцией трехмерной области Ω на плоскость xOy, изображена на рисунке 2. Переходя к полярным координатам в плоскости xOy, получаем следующее представление области D:

$$D=\{(r,\varphi):0\le\varphi\le\pi/2,\,0\le r\le 2\cos\varphi\}.$$

С помощью этого представления, учитывая, что якобиан $J(r,\varphi,z)=r$, переходим к цилиндрическим координатам (r,φ,z) в исходном интеграле:

$$I=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^2dr\int_0^a z\,dz=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} r^3\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=\frac{8}{9}a^2.$$

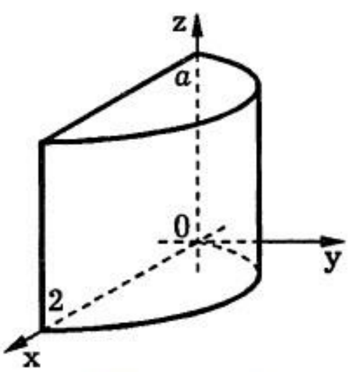


Рисунок 1

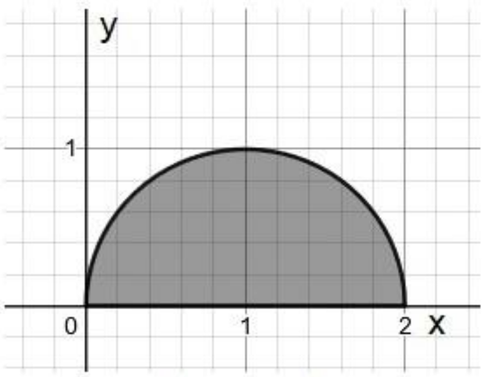


Рисунок 2

Пример 2. Вычислим интеграл $I = \iiint\limits_{\Omega} z e^{x^2+y^2} dxdydz$, где область интегрирования $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le A\}$. Эта область представляет собой цилиндр высоты A и радиуса R.

В прямоугольной системе координат этот интеграл преобразуется в повторный следующим образом:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z e^{x^2+y^2} dxdydz = \int\limits_0^A zdz \int\limits_{-R}^{R} e^{x^2} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{y^2} dy.$$

Вычислять этот интеграл непосредственно в декартовой системе координат не удастся, поскольку функция e^{y^2} не имеет элементарных первообразных. При переходе к цилиндрической системе координат получим несложный интеграл:

$$I = \int\limits_0^A zdz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{r^2} rdr = A^2 \pi \frac{1}{2} e^{r^2}\Big|_0^R = \frac{\pi}{2} A^2 (e^{R^2} - 1).$$

Вычисление следующих интегралов при помощи перехода к цилиндрическим координатам также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [4,5]:

1) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dz \int\limits_{-A}^{A} x^2 (y^2 + z^2) dx$; 2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} dy \int\limits_1^{x^2+y^2+1} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} dz$; 3) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz$;

4) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} (x^2 + y^2) dz$; 5) $\iiint\limits_{4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le z \le 2} z / \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$.

Сферическая система координат. Другим немаловажным видов криволинейных координат в трехмерном пространстве, обязательным для изучения студентами в курсе математического анализа, являются сферические координаты (r, φ, ϕ), связанные с декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \cos\phi \\ y = r\sin\varphi \cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases}, \quad \begin{cases} r \in [0, \infty) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ \phi \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}.$$

При этом якобиан

$$J(r,\varphi,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\phi & -r\sin\varphi\cos\phi & -r\cos\varphi\sin\phi \\ \sin\varphi\cos\phi & r\cos\varphi\cos\phi & -r\sin\varphi\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{vmatrix} = r^2 \cos\phi.$$

Следует объяснить студентам, что сферические координаты являются аналогом общепринятыми координатами на нашей планете (φ - долгота, $\varphi = 0$ - гринвичский нулевой меридиан, ϕ - широта, $\phi = 0$ - экватор, r - расстояние до центра Земли, $r = r_0$ - уровень мирового океана). Данные пояснения помогают студентам иметь наглядное представление о том, что собой представляют эти криволинейные координаты.

Как и в случае цилиндрических координат, осуществлять переход к сферическим координатам полезно в случаях, когда область интегрирования удобнее и проще задается в сферических координатах. Как правило, это области, ограниченные сферой или ее частью.

Пример 3. Вычислим интеграл $I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, где область интегрирования $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le z^2\}$. Эта область лежит между конусом и сферой. Шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ можно задать в сферических координатах неравенством $r \le 1$, конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ задается равенствами $\sin^2\phi = \cos^2\phi$ или $\phi = \pm\pi/4$. Учитывая эти представления, область интегрирования в сферических координатах имеет вид:

$$\Omega = \{(r, \varphi, \phi) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\pi/4 \le \phi \le \pi/4\}.$$

Учитывая, что якобиан $J(r, \varphi, z) = r^2\cos\phi$, имеем:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\phi \int\limits_0^1 r^3\cos\phi\, dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \sin\phi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Вычисление следующих интегралов при помощи перехода к цилиндрическим координатам также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [4,5]:

1) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)dz$;

2) $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{R-x^2-y^2}}^{\sqrt{R-x^2-y^2}} xzdz$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz$;

4) $\iiint\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \frac{z}{x^2 + y^2}\,dxdydz$.

Некоторые другие криволинейные системы координат. Если уровень подготовки студентов и время позволяет, то можно разобрать некоторые другие криволинейные системы координат.

1) Если область интегрирования является эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, или его частью, или подынтегральная функция имеет вид $f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$, то целесообразно использовать обобщенные сферические координаты

$$\begin{cases} x = a\,r\cos\varphi\, cos\phi \\ y = b\,r\sin\varphi\cos\phi \\ z = c\,r\sin\phi \end{cases}.$$

При этом якобиан $J(r, \varphi, \phi) = a\,b\,c\,r^2\cos\phi$.

Пример 4. Найдем объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Перейдем к обобщенным сферическим координатам (r,φ,ϕ). В этих координатах область интегрирования описывается неравенством $r^4 \le r^2\cos^2\phi$, или $0 \le r \le \cos\phi$. Имеем:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\cos\phi} abcr^2 \cos\phi \, d\phi = \frac{4\pi\, abc}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4\phi \, d\phi = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

2) В некоторых случаях, когда область интегрирования такова, что проекция этой области на одну из координатных плоскостей есть эллипс, или подынтегральная функция имеет вид $f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, z\right)$, следует использовать обобщенные цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

В этом случае якобиан $J(r,\varphi,z) = abr$.

Пример 5. Найдем объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$ и поверхностью $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z=2$. Проекцией этой поверхности на плоскость xOy является эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$. Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам $x=3\cos\varphi$, $y=2\sin\varphi$, $z=z$. В этих координатах поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z=2$ имеет уравнение $z=2-r^2$, а эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ - уравнение $r=\sqrt{2}$. Имеем:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{2-r^2} 3\cdot 2\cdot r\, dz = 12\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)\, dr = 12\pi(2-1) = 12\pi.$$

3) Можно привести пример перехода к другим криволинейным координатам.

Пример 6. Вычислим интеграл Дирихле $\iiint\limits_{\Omega} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \, dxdydz$, где Ω - область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$. Полагается, что $p>0$, $q>0$, $r>0$, $s>0$.

Перейдем к криволинейным координатам (u,v,w), связанным с исходными (x,y,z), равенствами:

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ y+z=uv \\ z=uvw \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x=u(1-v) \\ y=uv(1-w) \\ z=uvw \end{cases}, \text{ откуда получаем } \begin{cases} u=x+y+z \\ v=(y+z)/(x+y+z) \\ w=z/(y+z) \end{cases}.$$

В новых переменных область интегрирования существенно упрощается:

$$\Omega = \{(u,v,w): 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 1,\ 0\le w\le 1\}.$$

Подынтегральная функция имеет вид:

$$f(u,v,w) = (u(1-u))^p (uv(1-w))^q (uvw)^r (1-u)^s = u^{p+q+r}(1-u)^s v^{q+r}(1-v)^p w^r (1-w)^q$$

В этом случае якобиан $J(u,v,w)=u^2v$ и интеграл Дирихле равен:

$$\iiint\limits_{\Omega} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dxdydz=\int\limits_0^1 u^{p+q+r+2}(1-u)^s\,du\int\limits_0^1 v^{q+r+1}(1-v)^p\,dv\int\limits_0^1 w^r(1-w)^q\,dw=$$

$$B(p+q+r+3,s+1)\cdot B(q+r+2,p+1)\cdot B(r+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)\cdot\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

Здесь $B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ - Бета-функция, $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ - Гамма-функция.

Заключение

В работе описано использование криволинейных систем координат для нахождения тройных интегралов. В статье разобраны примеры, указаны наглядные алгоритмы, даны пояснения по организации учебного процесса и решению задач, что позволяет в сжатые сроки и в полном объёме успешно усвоить учебный материал.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Хасанов Н.А., Бирюков О.Н. О проведении занятий на тему «Замена переменных для вычисления двойных интегралов» // Modern European Researches, 2021. - № 3. - P. 131-136.
2. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.- 492 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб. пособие для втузов. Том 2. - М.: Интеграл-Пресс, 2001, - 544 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу для втузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. - М.: Изд-во Астрель, 2004. - 495 с.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московского ун-та, ЧеРо, 1997. - 624 с.

***Nail A. Khasanov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nail_khasanov@mail.ru
***Oleg N. Biryukov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru

About conducting classes on the topic "replacing variables for calculating triple integrals"

Abstract. In order to improve the level of students, it is necessary to pay special attention to the basic issues of mathematics. The study of multiple integrals is an important component of students' mathematical education and is a mandatory topic in the course of mathematical analysis for students of mathematical and technical specialties. Successful mastering of this topic helps students to master other disciplines as well. In this paper, we consider the use of curved coordinate systems as an effective way to calculate some triple integrals. The content of the article is of interest to both teachers and students.

Keyword: calculation of triple integrals, curved coordinate systems.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В ВИДЕ КВАЗИПОЛИНОМА

Аннотация

В статье рассматривается методика решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома, основанная на подборе решения по виду правой части уравнения. Целью работы является изложение приемов, позволяющих сокращать объем вычислений при решении дифференциальных уравнений рассматриваемого типа, и демонстрация работы этой техники вычислений на конкретных примерах. Также предложен алгоритм генерирования заданий рассматриваемого вида. Статья может быть полезна преподавателям и студентам.

Ключевые слова

линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, квазиполином, метод подбора

АВТОРЫ

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Введение

В стандартных курсах дифференциальных уравнений в техническом университете изучается метод подбора решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома. При решении задач на эту тему студенты часто сталкиваются с необходимостью выполнения достаточно громоздких расчетов. По этой причине иногда в заданиях предлагается указать лишь вид частного решения. Однако при решении задач по данной теме важно проконтролировать умение студента правильно записать окончательный ответ. Также подобные уравнения студентам приходится решать при изучении других дисциплин. Поэтому важно обучить студентов приемам, упрощающим вычисления.

Методология и результаты исследования

В данной работе рассматриваются линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами $c_0, \dots, c_n$ порядка n

$$c_n y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y = F(x), \tag{1}$$

где функция $F(x)$ является квазиполиномом (или квазимногочленом). Напомним, что квазиполиномом называют функцию вида

$$F(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x \ + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (2)$$

где α и β — заданные действительные числа, а $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно.

Стандартная схема решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома методом подбора выглядит следующим образом.

1. Сначала надо найти общее решение $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения

$$c_n y^{(n)} - c_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y = 0. \qquad (3)$$

Для решения уравнения (3) составляется его характеристическое уравнение

$$c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0, \qquad (4)$$

по корням которого определяют вид функции $y_{\text{оо}}$.

2. Затем проверяем, является ли корень $\lambda_{\text{кп}} = \alpha + i\beta$ квазиполинома (2) корнем характеристического уравнения, после чего частное решение неоднородного уравнения записываем в виде

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_N(x)\cos\beta x \ + \tilde{Q}_N(x)\sin\beta x\right), \qquad (5)$$

где r — кратность корня $\lambda_{\text{кп}}$ квазиполинома (2) как корня характеристического уравнения, $N = \max(n, m)$, $\tilde{P}_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$ — многочлены степени N с неопределенными коэффициентами, подлежащими нахождению.

3. Выражение из правой части формулы (5) подставляем в уравнение (1) и, пользуясь независимостью функций, находим неизвестные коэффициенты многочленов $\tilde{P}_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$.

4. Записываем общее решение уравнения (1) в виде $y = y_{\text{оо}} + \ y_{\text{чн}}$.

Заметим, что принцип суперпозиции решений линейных дифференциальных уравнений позволяет применять эту схему и при решении неоднородных уравнений, у которых в правой части стоит сумма квазиполиномов.

При решении задач студентами наибольшее время отнимает выполнение пункта 3, особенно в тех случаях, когда корень $\lambda_{\text{кп}}$ квазиполинома правой части уравнения оказывается комплексным числом или когда его кратность больше единицы. Также решение усложняется при повышении порядка уравнения. Опишем один несложный прием, который позволяет сократить время решения задач.

В рассматриваемых случаях частное решение неоднородного уравнения записывается в виде произведения функций, что приводит к необходимости дифференцировать несколько раз это произведение. Выпишем формулы для производных порядка 2,3 и 4 произведения двух функций, которые можно получить, применяя несколько раз правило дифференцирования произведения двух функций:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$
$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''',$$
$$(fg)^{\text{IV}} = f^{\text{IV}}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{\text{IV}}.$$

Эти формулы легко запомнить, учитывая, что коэффициенты перед слагаемыми являются биномиальными коэффициентами и расположены в соответствующей строке треугольника Паскаля

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . .

Кроме того, из-за специфического вида функций, входящих в квазиполином, выражения для производных произведения fg можно упростить. Например, если $f(x) = e^{\alpha x}$, то $f' = \alpha f$, $f'' = \alpha^2 f$, и т.д. Если $g(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, то $g'' = -\beta^2 g$, $g''' = -\beta^2 g'$, $g^{\text{iv}} = \beta^4 g$. Покажем на примерах, как работают эти простые соображения.

Примеры

Пример 1. Решим уравнение

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x. \tag{6}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается по инструкции (случай кратного корня):

$$y_{\text{оо}} = (C_1 x + C_2)e^x .$$

Корень $\lambda_{\text{кп}} = 1 + i$ квазиполинома $F(x) = e^x \sin x$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = e^x (A\cos x + B\sin x).$$

Положим $f = e^x$, $\mathrm{g} = A\cos x + B\sin x$. Тогда при подстановке $y_{\text{чн}}$ в уравнение (6), получим

$$(f''g + 2f'g' + fg'') - 2(f'g + fg') + fg = e^x \sin x.$$

Так как $f'' = f' = f = e^x$, $g'' = -g$, получим уравнение

$$(g + 2g' - g) - 2(g + g') + g = \sin x,$$

из которого следует, что $g = -\sin x$. Таким образом, общее решение уравнения (6) имеет вид

$$y = (C_1 x + C_2 - \sin x)e^x.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y^{\text{iv}} + 8y'' + 16y = \sin x. \tag{7}$$

В данном примере корень $\lambda_{\text{кп}} = i$ квазиполинома $F(x) = \sin x$ снова не является корнем характеристического уравнения $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$. По инструкции частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = A\cos x + B\sin x = g.$$

Учитывая, что $g^{\text{iv}} = -g'' = g$, получаем $9g = \sin x$, откуда следует, что $A = 0, B = 1/9$. Итак, общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x\cos 2x + C_4 x\sin 2x + \frac{1}{9}\sin x.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 8\cos x. \tag{8}$$

В рассматриваемом уравнении корень $\lambda_{\text{кп}} = i$ квазиполинома $F(x) = 8\cos x$ является кратным корнем характеристического уравнения $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$. По инструкции частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = x^2 (A\cos x + B\sin x).$$

Положим $f = x^2$, $\mathrm{g} = A\cos x + B\sin x$. После подстановки в уравнение (8) получим

$$(12g'' + 8xg''' + x^2 g^{\text{iv}}) + 2(2g + 4xg' + x^2 g'') + x^2 g = 8\cos x.$$

Учитывая, что $g^{\text{iv}} = -g'' = g, g''' = -g'$, получаем $-8g = 8\cos x$, откуда следует, что $A = -1, B = 0$. Итак, общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x\cos x + C_4 x\sin x - x^2\cos x.$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y^{\text{iv}} + 16y = 3e^x \sin 2x. \tag{9}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^4 + 16 = 0$ являются корнями 4 степени из комплексного числа -16: $\lambda_{1-4} = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = e^{\sqrt{2}x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) + e^{-\sqrt{2}x}\left(C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{чн}} = e^x\,(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Положим $y_{\text{чн}} = fg$, где $f = e^x$, $g = A\cos 2x + B\sin 2x$. Учитывая, что $g^{\text{iv}} = -4g'' = 16g, g''' = -4g'$, $f^{\text{iv}} = f''' = f'' = f' = f$, после подстановки $y_{\text{чн}} = fg$ в уравнение (9) получим

$$(g + 4g' - 6⍰4\,g - 4⍰4g' + 16g) + 16g = 3\sin 2x,$$

или

$$9g - 12g' = 3\sin 2x.$$

После подстановки $g = A\cos 2x + B\sin 2x$ получим

$$3(A\cos 2x + B\sin 2x) - 8(-A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x,$$

или

$$(3A - 8B)\cos 2x + (8A + 3B)\sin 2x = \sin 2x,$$

откуда следует, что $A = 8/73,\ B = 3/73$. Итак, общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{\sqrt{2}x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) + e^{-\sqrt{2}x}\left(C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x\right) + \\ + \frac{1}{73}e^x\,(8\cos 2x + 3\sin 2x).$$

О генерировании заданий на метод подбора решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома

Алгоритм генерирования заданий следующий. По заданному набору корней $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ программа составит характеристическое уравнение $(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$, вычислит коэффициенты соответствующего однородного уравнения, а также сгенерирует его общее решение.

В качестве квазиполинома $F(x)$, являющегося правой частью неоднородного уравнения, предлагается выбирать функции вида

$$\cos\beta x, \sin\beta x, e^{\alpha x}, e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}\ x^3e^{\alpha x}, \\ x\cos\beta x, x\sin\beta x,\ x^2\cos\beta x, x^2\sin\beta x\,.$$

Меняя значения параметров α и β, получим серию задач, в которых искомое уравнение будет линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома $F(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$. При этом исключаются случаи, когда в частном решении неоднородного уравнения (формула (5)) будут присутствовать произведения трех функций. Решения полученных уравнений можно записать в общем виде с набором параметров и получить серию заданий с ответами.

Заключение

В работе рассмотрен метод подбора решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома. Предложена методика генерирования задач для контроля знаний студентов по данной теме.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. - М.: Изд-во МГТУ, 2004. - 352 с.
2. Безверхний Н.В., Хорькова Н.Г. Математические аспекты генерирования заданий по вариационному исчислению. – Modern European Reaserches – 2021. - № 2.1 – с.36-42.
3. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М.: Эдиториал УРСС, 2014. 208 с.
4. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М.: Изд-во МГТУ, 2006. - 487 с.

***Nina G. Khorkova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
ninakhorkova@bmstu.ru
***Nikolai V. Bezverkhny*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nbezv@mail.ru

A method for solving linear differential equations with constant coefficients and the quasi-polynomial right side

Abstract. The article considers a technique for solving linear inhomogeneous differential equations with constant coefficients and the right side in the form of a quasi-polynomial, based on the selection of a solution according to the form of the right side of the equation. The purpose of this work is to present methods that allow reducing the amount of calculations when solving differential equations of the type under consideration, and to demonstrate this technique on examples. An algorithm for generating tasks of the considered type is also proposed. The article will be useful to teachers and students.

Keywords: linear differential equations with constant coefficients, quasi-polynomials.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 1 (T.1), 2022
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Privatuniversität Schloss Seeburg, Salzburg

EDITORIAL ADDRESS
Seeburgstrasse 8, 5201 Seekirchen am Wallersee, Salzburg, Austria
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”
printed by permission of Privatuniversität Schloss Seeburg, Salzburg, Austria

Sent for printing 30-03-2022
Circulation 1000
Order 013117/125