

ISSN 2311-8806

# Modern European Researches

Issue 1 (T.1)  
2023



*Kirov, Russian Federation*

**MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2023) ISSUE 1 (T.1), 230 P.**

**Modern European Researches Journal** is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

**EDITORIAL BOARD**

*Olga Bermant-Polyakova, PhD, Israel*

*Tatyana Fedotova, PhD, Professor, Ukraine*

*Alla Gabidullina, PhD, Professor, Ukraine*

*Pavel Gorev, PhD, Associate Professor, Russia*

*Mariya Greb, PhD, Associate Professor, Ukraine*

*Natalya Korableva, PhD, Associate Professor, Ukraine*

*Nikolay Kotryahov, PhD, Professor, Russia*

*Kanat Lakbaev, PhD, Associate Professor, Kazakhstan*

*Galina Nekrasova, PhD, Professor, Russia*

*Aleksander Nosov, PhD, Professor, Russia*

*Gennadiy Senkevich, PhD, Associate Professor, Ukraine*

*Samvel Sukiasyan, PhD, Professor, Armenia*

*Eugene Vechtomov, PhD, Professor, Russia*

*Elena Visotskaya, PhD, Professor, Ukraine*

**EDITORIAL ADDRESS**

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,

KIROV, RUSSIAN FEDERATION

[PUBLISHER@DOAJ.NET](mailto:PUBLISHER@DOAJ.NET)

**ISSN2311-8806**

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.

Editorial opinion can differ from opinion of authors.

If reprinted, the reference to the journal is required.

© All Rights Reserved

Printed in Russian Federation, 2023



**CONTENTS**

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУКОЛЕЦ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ  
КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФЕ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ**

Андреева Татьяна Владимировна, Трофимов Яков Георгиевич  
6-17

**МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ,  
СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК ВНУТРЕННЕГО МОДУЛЯ**

Ахметова Фания Харисовна, Головина Анастасия Михайловна  
18-28

**НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ  
«МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ»**

Бахтиярова Ольга Николаевна, Птицына Инга Вячеславовна,  
Подзорова Марина Ивановна  
29-37

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА МОДУЛЬ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИЛЫ**

Бектыбаева Мадина Тимуровна, Решмин Сергей Александрович  
38-44

**О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛУКОЛЕЦ**

Белоусов Алексей Иванович  
45-54

**МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ  
«ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВТОРОГО РОДА»**

Бирюков Олег Николаевич, Келдыш Елизавета Петровна,  
Хасанов Наиль Алфатович  
55-62

**МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ  
МЕТОДА ОСТРОГРАДСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ**

Велищанский Михаил Александрович, Кандаурова Ирина Евгеньевна,  
Марченко Владимир Викторович  
63-71

**РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ СТУДЕНТОВ  
НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ**

Вергазова Ольга Бухтияровна, Королев Евгений Алексеевич,  
Силин Иван Дмитриевич  
72-77

**МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕН-  
ЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА  
МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ И ГИРА ЧЕТВЕРТЫХ ПОРЯДКОВ**

Виноградова Марина Станиславовна, Ткачева Ольга Сергеевна  
78-90

ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК  
В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Власов Павел Александрович, Андреева Татьяна Владимировна,  
Семенов Юрий Станиславович  
91-97

АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ  
СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Грибов Александр Федорович, Жидков Евгений Николаевич,  
Краснов Игорь Константинович  
98-103

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К ПРИМЕНЕНИЮ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ  
В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Жидков Евгений Николаевич, Краснов Игорь Константинович,  
Грибов Александр Федорович  
104-111

МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ  
ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА»

Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович  
112-119

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Кандаурова Ирина Евгеньевна, Чигирёва Ольга Юрьевна  
120-130

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ»  
В КУРСЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Ласковая Татьяна Алексеевна, Птицына Инга Вячеславовна  
131-138

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ  
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА СЕМИНАРЕ  
ПО ТЕМЕ «ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Нараленкова Ирина Игоревна  
139-143

ПРОВЕДЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО ЗАНЯТИЯ «ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ»

Панкратов Владимир Александрович, Тверская Елена Сергеевна  
144-156

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕЙ В КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

Подзорова Марина Ивановна, Птицына Инга Вячеславовна,  
Бахтиярова Ольга Николаевна  
157-165

ПРЕПОДАВАНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ПО РОССИЙСКИМ УЧЕБНИКАМ  
КОНЦА XVIII ВЕКА НА ПРИМЕРЕ УЧЕБНИКА  
П.И. ГИЛАРОВСКОГО «СОКРАЩЕНИЕ ВЫШНЕЙ МАТЕМАТИКИ»  
Птицына Инга Вячеславовна, Бахтиярова Ольга Николаевна,  
Подзорова Марина Ивановна, Птицына Елена Владимировна  
166-177

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
Санаева Татьяна Александровна  
178-181

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАУССА И ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА  
В ПРОТОКОЛАХ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА  
В КУРСЕ «КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОТОКОЛЫ»  
Семенов Юрий Станиславович, Андреева Татьяна Владимировна,  
Власов Павел Александрович  
182-188

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ  
Титов Александр Дмитриевич, Забелина Светлана Борисовна  
189-204

ОСОБЕННОСТИ АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА КАК ЯЗЫКА МЕЖДУНАРОДНОГО ДИСКУРСА  
Уткина Надежда Вениаминовна, Голубев Алексей Евгеньевич,  
Романычев Александр Иванович  
205-209

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ  
«ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
Хорькова Нина Григорьевна  
210-215

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ  
«ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»  
Чигирёва Ольга Юрьевна  
216-229

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУКОЛЕЦ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФЕ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

### Аннотация

В научно-исследовательской работе важную роль играет методическое обеспечение. Классические подходы можно найти в научной литературе или узнать из учебных курсов, в то время как при решении серьезных исследовательских задач иногда приходится эти подходы модифицировать или комбинировать. В статье рассмотрена хорошо известная задача построения кратчайших путей в графе. Для нее изложена методика решения, основанная на понятиях и методах теории полуколец. Проанализирован пример решения задачи с использованием предложенной методики.

### Ключевые слова

графы, пути, полукольца

### АВТОРЫ

**Андреева Татьяна Владимировна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
[t-v-andreeva@mail.ru](mailto:t-v-andreeva@mail.ru)

**Трофимов Яков Георгиевич,**  
студент ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», г. Москва  
[j.trofimov@outlook.com](mailto:j.trofimov@outlook.com)

### Введение

В статье изложен методический подход к выполнению научно-исследовательской работы, предлагаемой студентам старших курсов направления «Прикладная математика и информатика». Основной целью работы является углубленное изучение некоторых разделов теории графов и общей алгебры, выбор терминов и обозначений, необходимых для изложения изученного материала и решения задач. Кроме того, определенное внимание уделяется доказательствам некоторых фактов. Эти доказательства требуются для полноты изложения и понимания предмета. Ряд утверждений при этом доказан не в общей ситуации, а для частных случаев, с учетом специфики рассматриваемой задачи.

Настоящую статью можно рассматривать как продолжение работы [1]. В ней освещены некоторые новые моменты в применении алгебраических методов к решению задач теории графов.

Задача построения кратчайших по количеству ребер путей в ориентированном графе является одной из классических задач теории графов. Эта задача хорошо изучена и известен целый ряд алгоритмов ее решения (см., например, [2]). Отличие алгоритма, предлагаемого в данной статье, от широко известных алгоритмов состоит в том, что он позволяет находить все кратчайшие пути между всеми парами вершин графа.

Структура работы такова: в первом подразделе приведены основные понятия теории полуколец; далее описано полукольцо языков и доказано условие единственности решения уравнения в этом полукольце (теорема 2); в третьем подразделе описывается полукольцо матриц и обсуждается метод исключения неизвестных для решения системы уравнений в полукольце; в следующих подразделах приведены некоторые понятия теории графов и сформулирована задача о кратчайших путях; в подразделе 6 приведен пример решения задачи о кратчайших путях с использованием изложенной ранее методики.

## Методология и результаты исследования

### 1. Основные понятия теории полуколец

Рассмотрим алгебраическую структуру  $\mathcal{S} = (S; +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ , в которой “+” и “ $\cdot$ ” - бинарные операции сложения и умножения,  $\mathbb{0}, \mathbb{1}$  - константы (нульарные операции).

Алгебраическая структура  $\mathcal{S}$  называется *полукольцом*, если выполнены следующие тождества (аксиомы полукольца):

- |  |   |
|--|---|
| 1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,                 | 5) $\mathbb{1} \cdot a = a \cdot \mathbb{1} = a$ ,          |
| 2) $a + b = b + a$ ,                             | 6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ,              |
| 3) $\mathbb{0} + a = a$ ,                        | 7) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ ,              |
| 4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , | 8) $\mathbb{0} \cdot a = a \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$ . |

Полукольцо  $\mathcal{S}$  называется *идемпотентным*, если операция сложения идемпотентна, т.е.  $a + a = a$  для любого  $a \in S$ .

Приведенные здесь и далее определения и утверждения можно найти, например, в [3, 4].

На носителе  $S$  полукольца  $\mathcal{S}$  рассмотрим отношение естественного порядка  $\leq_S$ , согласованное с операциями:  $\mathbb{0} \leq_S a$ ; если  $a \leq_S b$ , то  $a \cdot c \leq_S b \cdot c$  и  $c \cdot a \leq_S c \cdot b$  для любых  $a, b, c \in S$ . Отсюда следует, что  $a \leq_S a + b$ . В общем случае естественный порядок является частичным порядком.

В идемпотентном полукольце  $a \leq_S b$  тогда и только тогда, когда  $a + b = b$ . Действительно, пусть  $a \leq_S b$ , тогда, с одной стороны,  $a + b \leq_S b + b = b$ , с другой стороны,  $b \leq_S a + b$ . Теперь пусть  $a + b = b$ , тогда  $a \leq_S a + b = b$ .

Отсюда следует, что  $a + b = \sup_S \{a, b\}$ , где  $\sup_S$  обозначает точную верхнюю грань в естественном порядке  $\leq_S$ .

Множество  $P$  называется *частично упорядоченным*, если на нем определено отношение частичного порядка. Непустое подмножество  $D$  частично упорядоченного множества  $P$  называется *направленным*, если каждая пара элементов подмножества  $D$  имеет точную верхнюю грань в  $D$ . Очевидно, что в идемпотентном полукольце с отношением естественного порядка любое подмножество, замкнутое относительно сложения, является направленным.

Образование  $f: P \rightarrow Q$ , где  $P$  и  $Q$  - частично упорядоченные множества, называется *непрерывным*, если оно сохраняет точную верхнюю грань каждого направленного множества, т.е. когда  $f(\sup D) = \sup f(D)$  для любого  $D \subseteq P$  такого, что  $\sup D$  существует.

Идемпотентное полукольцо  $\mathcal{S}$  называется *непрерывным*, если

1) для любого направленного множества  $X \subseteq S$  существует точная верхняя грань относительно естественного порядка этого полукольца;

2) для любого  $a \in S$  и для любого направленного множества  $X \subseteq S$  выполнены равенства



$$a + \sup_S X = \sup_S (a + X),$$

$$a \cdot \sup_S X = \sup_S (a \cdot X), \quad (\sup_S X) \cdot a = \sup_S (X \cdot a),$$

где  $a + X = \{a + x : x \in X\}$ ,  $a \cdot X = \{a \cdot x : x \in X\}$ ,  $X \cdot a = \{x \cdot a : x \in X\}$ .

Полукольцо  $S$  называется *полукольцом Конвея*, если в нем можно определить унарную операцию  $a \rightarrow a^*$ , для которой выполняются тождества

$$1) (a + b)^* = (a^*b)^*b^*,$$

$$2) (ab)^* = \mathbb{I} + a(ba)^*b.$$

В полукольце  $S$  для любого  $a \in S$  положим по определению  $a^0 = \mathbb{I}$ ,  $a^n = a \cdot a^{n-1}$  при натуральном  $n > 0$ .

В непрерывном полукольце значение  $a^*$  называется *итерацией* элемента  $a$  и может быть определено как точная верхняя грань множества  $\{a^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ :

$$a^* = \sup_S \{a^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Справедливо (см. [5])

**Утверждение 1.** *Любое непрерывное полукольцо является полукольцом Конвея.*

В непрерывном полукольце  $S$  рассмотрим уравнение

$$x = a \cdot x + b. \quad (1)$$

Далее для краткости символ « $\cdot$ » в формулах будем опускать.

Из пункта 2 определения полукольца Конвея следует что,  $a^* = \mathbb{I} + aa^*$ . Значит,  $x = a^*b$  является одним из решений уравнения (1).

**Теорема 1.** *Для решения  $x$  уравнения (1) в полукольце  $S$  справедливо*

$$1. x \geq_S b;$$

$$2. x \geq_S ax;$$

$$3. x \geq_S a^*b.$$

Из пункта 3 следует, что  $x_0 = a^*b$  - наименьшее решение уравнения (1).

**Доказательство.** 1. Прибавим к обеим частям равенства (1) слагаемое  $b$ . Тогда, ввиду идемпотентности,

$$x + b = ax + b + b = ax + b = x,$$

откуда  $x \geq_S b$ .

2. Прибавим к обеим частям равенства (1) слагаемое  $ax$ . Тогда, ввиду идемпотентности,

$$x + ax = ax + b + ax = ax + b = x,$$

откуда  $x \geq_S ax$ .

3. Умножая неравенство  $x \geq_S ax$  последовательно слева на  $a$ , получим цепочку неравенств

$$x \geq_S ax \geq_S a^2x \geq_S \dots \geq_S a^n x \geq_S a^{n+1}x \geq_S \dots \quad (2)$$

Отсюда  $a^*x = \sup_S \{x, ax, a^2x, \dots, a^n x, \dots\} = x$ .

Умножим неравенство  $x \geq_S b$  слева на  $a^*$ . Получим  $x = a^*x \geq_S a^*b$ , что и требовалось.

## 2. Полукольцо языков

Определение полукольца языков  $\mathcal{L}(A) = (2^{A^*}; +, \cdot, \emptyset, \{\lambda\})$  в конечном алфавите  $A$  дано, например, в [6].

Напомним, что  $L_1 + L_2 = L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 \cdot L_2 = \{u \cdot w : u \in L_1, w \in L_2\}$ , где  $u \cdot w$  - конкатенация слов  $u, w \in A^*$ ,  $\lambda$  - пустое слово.

Длина слова  $w \in A^*$  - количество букв в нем.



Можно доказать, что  $\mathcal{L}(A) = (2^{A^*}; +, \cdot, \emptyset, \{\lambda\})$  является непрерывным полукольцом. При этом отношение порядка  $\leq_{\mathcal{L}(A)}$  - это отношение включения. Следовательно, итерация языка  $L$  - это объединение всех его степеней:

$$L^* = \sup_{\mathcal{L}(A)} L^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \sum_{n=0}^{\infty} L^n.$$

**Теорема 2.** Пусть  $L, N \subseteq A^*$ . Если  $\lambda \notin L$ , то уравнение

$$x = Lx + N \quad (3)$$

в полукольце  $\mathcal{L}(A) = (2^{A^*}; +, \cdot, \emptyset, \{\lambda\})$  имеет единственное решение.

**Доказательство.** В силу теоремы 1, решением уравнения (3) является язык  $L^*N$ , причем это решение - наименьшее по включению. Рассмотрим произвольный язык  $B \subseteq A^*$  такой, что  $L^*N <_{\mathcal{L}(A)} B$ , т.е.  $L^*N \subset B$ , и положим  $M = B \setminus L^*N$ . Подставим  $B$  в правую часть уравнения (3):

$$LB + N = L(M + L^*N) + N = LM + LL^*N + N = LM + L^*N.$$

По предположению множество  $M$  не пусто, пусть  $r > 0$  - минимальная длина слова в языке  $M$ . Рассмотрим произвольное слово  $u \in M$ , имеющее длину  $r$ . Поскольку  $\lambda \notin L$ , минимальная длина слова в языке  $LM$  не меньше  $r + 1$ . Следовательно,  $u \notin LM$ , т.е.  $M \neq LM$ . По построению  $u \notin L^*N$ , значит,

$$B = M + L^*N \neq LM + L^*N = LB + N,$$

т.е. язык  $B$  не является решением уравнения (3), что и требовалось.

### 3. Полукольцо матриц. Итерация матрицы

При  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим множество  $M_n(S) = S^{n \times n}$  всех квадратных матриц порядка  $n$ , элементы которых принадлежат множеству  $S$ .

Алгебра  $\mathcal{M}_n(S) = (M_n(S); +, \cdot, \mathbb{O}_n, \mathbb{I}_n)$ , в которой операции сложения и умножения индуцированы операциями “+” и “·” полукольца  $\mathcal{S}$ ,

$$\mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

является полукольцом и обладает тем же набором свойств, что и полукольцо  $\mathcal{S}$  (см., например, [7]).

Следовательно, в идемпотентном непрерывном полукольце  $\mathcal{M}_n(S)$  можно рассматривать уравнение

$$X = CX + B \quad (3)$$

относительно матрицы  $X$ , причем одним из его решений является матрица  $X = C^*B$ , где  $C^*$  - итерация матрицы  $C$  в  $\mathcal{M}_n(S)$ .

Положив  $B = \mathbb{I}_n$  в уравнении (3), получим, что матрица  $X = C^*$  является решением уравнения

$$X = CX + \mathbb{I}_n.$$

В работах [8, 9] приведены примеры использования теории полуколец при решении некоторых задач теории графов. В этих примерах существенную роль играет итерация матрицы  $C \in M_n(2^{A^*})$ , поэтому представляют интерес методы нахождения этой матрицы. Как было отмечено ранее, в непрерывном полукольце  $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(A))$  матрица  $C^*$  является одним из решений матричного уравнения

$$X = CX + \mathbb{I}_n. \quad (4)$$

Рассмотрим векторное уравнение общего вида

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}, \quad (5)$$

где  $C \in M_n(2^{A^*})$ ,  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ ,  $b_i \in 2^{A^*}$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  и опишем условия единственности его решения и метод исключения неизвестных нахождения  $\vec{x}$ .

**Теорема 3.** Если матрица  $C \in M_n(2^{A^*})$  такова, что  $\lambda \notin c_{ik}$  для всех  $i, k = 1, \dots, n$ , то векторное уравнение (5) имеет единственное решение.

**Доказательство:** Уравнение (5) представим в виде системы линейных алгебраических (аффинных) уравнений

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + b_2, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + b_n. \end{cases}$$

В силу теоремы 2, из  $i$ -го уравнения можно однозначно выразить неизвестную  $x_i$ . Не ограничивая общности, рассмотрим  $i = 1$ :

$$x_1 = c_{11}^*(c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + b_1).$$

Далее можно подставить это выражение во все остальные уравнения, тем самым исключив из них неизвестную  $x_1$ . В получившейся системе  $i$ -е уравнение для любого  $i \neq 1$  будет иметь вид

$$x_i = (c_{i2} + c_{i1}c_{11}^*c_{12})x_2 + \dots + (c_{in} + c_{i1}c_{11}^*c_{1n})x_n + (b_i + c_{i1}c_{11}^*b_1),$$

при этом  $\lambda \notin c_{ik} + c_{i1}c_{11}^*c_{1k}$ , где  $k = 2, \dots, n$ .

Так для любого  $r$  можно последовательно исключить из  $r$ -го уравнения неизвестные  $x_1, \dots, x_{r-1}$ . Тогда  $n$ -е уравнение примет вид

$$x_n = K_n x_n + L_n,$$

где  $K_n, L_n \in A^*$ . Из теоремы 2 следует, что это уравнение имеет единственное решение  $x_n = K_n^* L_n$ . Найденное значение неизвестной можно подставить в остальные уравнения, это позволит последовательно найти значения неизвестных  $x_{n-1}, \dots, x_1$ . При этом каждое найденное таким образом значение неизвестной является единственным возможным, удовлетворяющим (5), что и требовалось.

При  $k = 1, \dots, n$  обозначим через  $\vec{e}^{(k)} = (\emptyset, \dots, \emptyset, \{\lambda\}, \emptyset, \dots, \emptyset)^T$  единичный вектор-столбец ( $k$ -й столбец матрицы  $\mathbb{I}_n$ ). Тогда  $k$ -й столбец матрицы  $C^*$  является одним из решений уравнения

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{e}^{(k)}.$$

**Следствие 1.** Если выполнены условия теоремы 3, то матрица  $C^*$  является единственным решением уравнения (4).

#### 4. Основные понятия теории графов

Напомним некоторые понятия теории графов (см. [10]). *Ориентированным графом (орграфом)* называется пара  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E \subseteq V^2$ . *Простой орграф* - это граф, в котором  $(v_i, v_i) \notin E$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

*Маршрут* в простом графе - это последовательность вершин  $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ , где  $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E$  для всех  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . Будем называть его  $[v_{i_0}, v_{i_m}]$ -маршрутом и обозначать  $v_{i_0} \rightarrow v_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i_{m-1}} \rightarrow v_{i_m}$ . Если  $v_{i_0} = v_{i_m}$ , то маршрут называется *замкнутым*. *Путь* (простой путь) - маршрут, все вершины которого, кроме, возможно, первой и последней, различны.

Число  $m$ , равное количеству ребер маршрута, называется *длиной маршрута*. Маршрут длины 0 - произвольная вершина графа.

Рассмотрим алфавит  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Для простого орграфа  $G = (V, E)$  определим в полукольце  $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(A))$  матрицу меток  $C(G)$  следующим образом:

$$c_{ij} = \delta((v_i, v_j)) = \begin{cases} \{a_j\}, & \text{если } (v_i, v_j) \in E, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Метку маршрута  $P = v_{i_0} \rightarrow v_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i_{m-1}} \rightarrow v_{i_m}$  определим как

$$\delta(P) = \prod_{k=1}^m \{a_{i_k}\}.$$

Если  $P$  - маршрут длины 0, то полагают  $\delta(P) = \{\lambda\}$ .

Формально метка маршрута является языком, состоящим из единственного слова. Далее для удобства будем называть метку маршрута словом.

Заметим, что для любого  $[v_i, v_k]$ -маршрута ненулевой длины последней буквой в метке этого маршрута является  $a_k$ .

Справедливо

**Утверждение 2.** При  $l \geq 0$  элемент  $c_{ij}^{(l)}$  матрицы  $C^l$  равен сумме меток всех  $[v_i, v_j]$ -маршрутов длины  $l$ .

В полукольце  $\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(A))$  итерацию матрицы  $C$  можно определить как

$$C^* = \sum_{n=0}^{\infty} C^n.$$

Из утверждения 2 следует, что элемент  $c_{ik}^{(*)}$  матрицы  $C^*$  равен сумме меток всех конечных  $[v_i, v_k]$ -маршрутов.

Несложно проверить, что, ввиду идемпотентности операции сложения, решением уравнения

$$\vec{x} = C \cdot \vec{x} + \sum_{k=1}^n \vec{e}^{(k)} \quad (6)$$

является сумма всех столбцов матрицы  $C^*$ . Кроме того,  $\lambda \notin c_{ik}$  для любых  $i, k$ . Уравнение (6) получается из уравнения (5), если положить  $(b_1, \dots, b_n)^T = (\{\lambda\}, \dots, \{\lambda\})^T$ .

Значит, для нахождения матрицы  $C^*$  достаточно рассмотреть только уравнение (6). Действительно, пусть  $(L_1, \dots, L_n)^T$  - решение уравнения (6). Рассмотрим язык  $L_i$  и положим  $L_{ik} = \{w \in L_i : w = a_{j_1} \dots a_{j_{l-1}} a_k\}$ . Из сказанного выше следует, что при  $i \neq k$   $c_{ik}^{(*)} = L_{ik}$ , а  $c_{ii}^{(*)} = L_{ii} \cup \{\lambda\}$ .

## 5. Задача построения всех кратчайших путей в графе

Пусть дан простой орграф  $G = (V, E)$ . Кратчайшим  $[v_k, v_j]$ -путем называется  $[v_k, v_j]$ -путь, имеющий минимальную длину.

Одной из важнейших задач является следующая: для заданных вершин  $u$  и  $v$  найти кратчайший  $[u, v]$ -путь. Для ее решения можно использовать, например, метод поиска в ширину.

Часто вместо этой задачи рассматривается более общая: найти кратчайшие пути из фиксированной вершины  $v$  во все остальные вершины. Для решения этой задачи можно использовать метод поиска в ширину, алгоритм Форда-Беллмана, алгоритм Дейкстры и другие.

Еще одна задача состоит в нахождении кратчайших путей между всеми парами вершин. Ее можно решить, например, с помощью алгоритма Флойда.

Все перечисленные алгоритмы для каждой пары вершин строят только один кратчайший путь, если он есть. Предлагаемый далее алгоритм позволяет построить множество всех кратчайших путей между всеми парами вершин графа  $G$ .

Определим матрицу  $Dis(G)$  следующим образом: элемент  $k$ -й строки и  $j$ -го столбца этой матрицы положим равным сумме меток всех кратчайших  $[v_k, v_j]$ -путей.

Очевидно, что  $Dis(G) \leq_{\mathcal{M}_n(\mathcal{L}(A))} C^*$  (сравнение матриц выполняется поэлементно). Следовательно, для того, чтобы решить задачу о всех кратчайших путях, достаточно, например, найти матрицу  $C^*$  и в каждом языке  $c_{ik}^{(*)}$  найти все слова минимальной длины.

**Утверждение 3.** Если в графе  $G$  существует  $[u, v]$ -маршрут, то существует и  $[u, v]$ -путь.

**Утверждение 4.** Любой подпуть кратчайшего пути в графе является кратчайшим путем.

На основании сказанного выше сформулируем замечания:

**Замечание 1.** Меткой пути является слово, в котором буквы не повторяются.

**Замечание 2.** Кратчайший  $[v_i, v_i]$ -путь состоит из единственной вершины и имеет метку  $\{\lambda\}$ .

**Замечание 3.** При  $i \neq k$  меткой кратчайшего  $[v_i, v_k]$ -пути является непустое слово вида  $a_{j_1} \dots a_{j_{l-1}} a_k$  из языка  $c_{ik}^{(*)}$ , имеющее минимальную длину. Кратчайших путей (как и соответствующих им слов) может быть несколько.

## 6. Пример решения задачи

Приведем пример решения задачи построения всех кратчайших путей в графе.

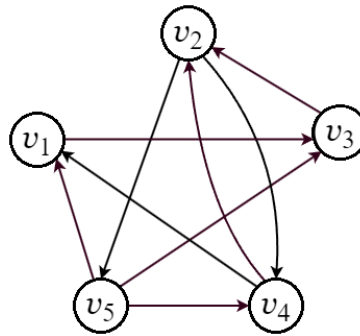


Рис. 1

Для графа  $G$ , изображенного на рис. 1, матрица меток имеет вид

$$C = C(G) = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \{a_3\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{a_4\} & \{a_5\} \\ \emptyset & \{a_2\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{a_1\} & \{a_2\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{a_1\} & \emptyset & \{a_3\} & \{a_4\} & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Далее мы будем опускать фигурные скобки в обозначении языков, подразумевая, что

$$a_1 = \{a_1\}, \quad a_1 + \lambda = \{a_1, \lambda\}, \quad (a_1 + \lambda)a_3 = \{a_1 a_3, a_3\}.$$

Составим систему уравнений вида (6):

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4x_4 + a_5x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2x_2 + \lambda, \\ x_4 = a_1x_1 + a_2x_2 + \lambda, \\ x_5 = a_1x_1 + a_3x_3 + a_4x_4 + \lambda. \end{cases} \quad (7)$$

Применим к этой системе метод исключения неизвестных, описанный в доказательстве теоремы 3. Однако отметим, что мы не будем искать ее решение, т.е. матрицу  $C^*$ . Наша цель - найти матрицу кратчайших путей  $Dis(G)$ .

Из замечаний 1 - 3 следует, что при исключении неизвестных, а также при последовательном вычислении значений неизвестных можно отбрасывать слова, являющиеся метками циклов, метками маршрутов, длина которых больше длины уже найденных маршрутов, а также метками маршрутов, не являющихся (простыми) путями. Таким образом, мы будем переходить не к равносильным системам, а к системам, имеющим более простой вид, не теряя при этом искомым решений.

Проанализируем систему (7). В  $i$ -м уравнении слагаемое вида  $a_kx_k$  означает, что в графе есть ребро  $(v_i, v_k)$ , а значит, длина кратчайшего  $[v_i, v_k]$ -пути равна 1. Слагаемое  $\lambda$  означает, что длина кратчайшего  $[v_i, v_i]$ -пути равна 0.

Прямым ходом будем исключать неизвестные в порядке  $x_1, \dots, x_5$ .

1) Исключим  $x_1$ . В первом уравнении неизвестная  $x_1$  уже выражена через остальные неизвестные, подставим это выражение в оставшиеся четыре уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4x_4 + a_5x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2x_2 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2x_2 + a_1a_3x_3 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_1 + \lambda)a_3x_3 + a_4x_4 + \lambda. \end{cases}$$

Рассмотрим  $i$ -е уравнение этой системы. При  $i = 2, \dots, 5$  оно имеет вид

$$x_i = L_{i1}a_1 + L_{i2}a_2x_2 + \dots + L_{i5}a_5x_5 + \lambda,$$

где язык  $L_{ij}a_j$  состоит из меток некоторых  $[v_i, v_j]$ -маршрутов,  $\lambda$  - метка  $[v_i, v_i]$ -пути длины 0.

Например, в уравнении

$$x_5 = a_1 + (a_1 + \lambda)a_3x_3 + a_4x_4 + \lambda$$

слагаемое  $(a_1 + \lambda)a_3x_3$  содержит метки двух  $[v_5, v_3]$ -путей: длины 1 и длины 2. Согласно утверждению 4, путь  $v_5 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3$  не может быть подпутем никакого кратчайшего пути, отбросим соответствующее слагаемое:

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4x_4 + a_5x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2x_2 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2x_2 + a_1a_3x_3 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + a_3x_3 + a_4x_4 + \lambda. \end{cases}$$

2) Исключим  $x_2$ . Во втором уравнении неизвестная  $x_2$  уже выражена через остальные неизвестные, подставим это выражение в остальные три уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4x_4 + a_5x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2 + a_2a_4x_4 + a_2a_5x_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1a_3x_3 + a_2a_4x_4 + a_2a_5x_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + a_3x_3 + a_4x_4 + \lambda. \end{cases}$$

Проанализируем уравнение

$$x_4 = a_1 + a_2 + a_1 a_3 x_3 + a_2 a_4 x_4 + a_2 a_5 x_5 + \lambda.$$

Слагаемое  $a_2 a_4 x_4$  содержит метку  $[v_4, v_4]$ -пути, имеющего длину 2. В силу замечания 2, отбросим это слагаемое:

$$\begin{cases} x_1 = a_3 x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4 x_4 + a_5 x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2 + a_2 a_4 x_4 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1 a_3 x_3 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \lambda. \end{cases}$$

3) Исключим  $x_3$ . В третьем уравнении неизвестная  $x_3$  уже выражена через остальные неизвестные, подставим это выражение в остальные два уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = a_3 x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4 x_4 + a_5 x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2 + a_2 a_4 x_4 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + (\lambda + a_1 a_3) a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_3 a_2 a_4 x_4 + (a_1 a_3 a_2 + a_2) a_5 x_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + a_3 a_2 + a_3 + (\lambda + a_3 a_2) a_4 x_4 + a_3 a_2 a_5 x_5 + \lambda. \end{cases}$$

В этой системе в уравнении

$$x_4 = a_1 + (\lambda + a_1 a_3) a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_3 a_2 a_4 x_4 + (a_1 a_3 a_2 + a_2) a_5 x_5 + \lambda$$

слагаемое  $(\lambda + a_1 a_3) a_2$  содержит метки двух  $[v_4, v_2]$ -путей: длины 1 и длины 3. Слагаемое  $(a_1 a_3 a_2 + a_2) a_5 x_5$  содержит метки двух  $[v_4, v_5]$ -путей: длины 2 и длины 4. Воспользуемся утверждением 4 и отбросим метки более длинным путей.

Слагаемое  $a_1 a_3 a_2 a_4 x_4$  отбросим в силу замечания 2.

К пятому уравнению применим аналогичные соображения, получим систему

$$\begin{cases} x_1 = a_3 x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4 x_4 + a_5 x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2 + a_2 a_4 x_4 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + a_3 a_2 + a_3 + a_4 x_4 + \lambda. \end{cases}$$

4) Исключим  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 = a_3 x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4 x_4 + a_5 x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2 + a_2 a_4 x_4 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_5 = (\lambda + a_4) a_1 + (a_3 + a_4) a_2 + (\lambda + a_4 a_1) a_3 + a_4 + a_4 a_2 a_5 x_5 + \lambda. \end{cases}$$

В силу замечаний 1 - 3, перейдем к системе

$$\begin{cases} x_1 = a_3 x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_4 x_4 + a_5 x_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2 + a_2 a_4 x_4 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_5 x_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4) a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$

На этом этапе найдено значение неизвестной  $x_5$ , т.е. построены все кратчайшие пути из  $v_5$  во все остальные вершины, причем есть два кратчайших  $[v_5, v_2]$ -пути, см. рис. 2.

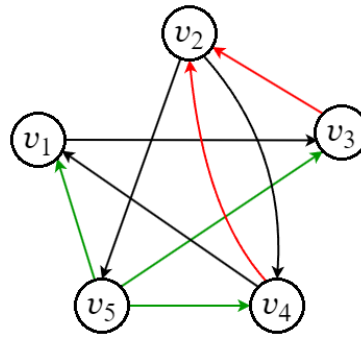


Рис. 2.

Теперь выполним обратный ход и найдем значения остальных неизвестных.

5) Подставим в уравнения найденный  $x_5$ :

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_5a_1 + a_5(a_3 + a_4)a_2 + a_5a_3 + a_4x_4 + a_5a_4 + a_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2a_5a_1 + (\lambda + a_2a_5(a_3 + a_4))a_2 + a_2a_5a_3 + a_2a_4x_4 + a_2a_5a_4 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_4 = (\lambda + a_2a_5)a_1 + (\lambda + a_2a_5(a_3 + a_4))a_2 + (a_1 + a_2a_5)a_3 + a_2a_5a_4 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4)a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$

В уравнении

$$x_3 = a_2a_5a_1 + (\lambda + a_2a_5(a_3 + a_4))a_2 + a_2a_5a_3 + a_2a_4x_4 + a_2a_5a_4 + a_2a_5 + \lambda,$$

слагаемое  $a_2a_4x_4$  содержит метку  $[v_3, v_4]$ -пути длины 2, слагаемое  $a_2a_5a_4$  является меткой  $[v_3, v_4]$ -пути длины 3. Этот путь не является подпутем никакого кратчайшего пути, отбросим его:

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = a_5a_1 + a_5a_3 + a_4x_4 + a_5a_4 + a_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2a_5a_1 + a_2 + a_2a_4x_4 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1a_3 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4)a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$

6) Подставим в уравнения найденный  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = (a_4 + a_5)a_1 + a_4a_2 + (a_5 + a_4a_1)a_3 + (\lambda + a_5)a_4 + (\lambda + a_4a_2)a_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2(a_5 + a_4)a_1 + (\lambda + a_2a_4)a_2 + a_2a_4a_1a_3 + a_2a_4 + (a_2 + a_2a_4a_2)a_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1a_3 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4)a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$

В силу замечаний 1 - 3, перейдем к системе

$$\begin{cases} x_1 = a_3x_3 + \lambda, \\ x_2 = (a_4 + a_5)a_1 + a_5a_3 + a_4 + a_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2(a_5 + a_4)a_1 + a_2 + a_2a_4 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1a_3 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4)a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$

7) Подставим в уравнения найденный  $x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = a_3a_2(a_5 + a_4)a_1 + a_3a_2 + a_3 + a_3a_2a_4 + a_3a_2a_5 + \lambda, \\ x_2 = (a_4 + a_5)a_1 + a_5a_3 + a_4 + a_5 + \lambda, \\ x_3 = a_2(a_5 + a_4)a_1 + a_2 + a_2a_4 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1a_3 + a_2a_5 + \lambda, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4)a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$



Воспользовавшись замечаниями 1 - 3 и утверждением 4, мы нашли значения всех неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + a_3 a_2 + a_3 + a_3 a_2 a_4 + a_3 a_2 a_5, \\ x_2 = (a_4 + a_5) a_1 + \lambda + a_5 a_3 + a_4 + a_5, \\ x_3 = a_2 (a_5 + a_4) a_1 + a_2 + \lambda + a_2 a_4 + a_2 a_5, \\ x_4 = a_1 + a_2 + a_1 a_3 + \lambda + a_2 a_5, \\ x_5 = a_1 + (a_3 + a_4) a_2 + a_3 + a_4 + \lambda. \end{cases}$$

Найденный вектор не является решением системы (7), однако он содержит метки всех кратчайших путей между всеми парами вершин графа  $G$ .

Теперь построим матрицу кратчайших путей:

$$Dis = Dis(G) = \begin{pmatrix} \lambda & a_3 a_2 & a_3 & a_3 a_2 a_4 & a_3 a_2 a_5 \\ (a_4 + a_5) a_1 & \lambda & a_5 a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 (a_5 + a_4) a_1 & a_2 & \lambda & a_2 a_4 & a_2 a_5 \\ a_1 & a_2 & a_1 a_3 & \lambda & a_2 a_5 \\ a_1 & (a_3 + a_4) a_2 & a_3 & a_4 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Отметим в заключение основные моменты при построении кратчайших путей в графе с применением уравнений над полукольцами.

1) Чтобы найти все кратчайшие пути между парой заданных вершин  $v_i$  и  $v_k$  графа, достаточно рассмотреть векторное уравнение (5), положить в нем  $\vec{b} = \vec{e}^{(k)}$  и найти значение неизвестной  $x_i$ .

2) Чтобы найти все кратчайшие пути между заданной вершиной  $v_i$  и всеми остальными вершинами, в уравнении (5), достаточно положить  $\vec{b} = \sum_{\{k=1\}}^n \vec{e}^{(k)}$  и найти значение неизвестной  $x_i$ .

3) Чтобы найти все кратчайшие пути между всеми парами вершин графа, в уравнении (5) надо положить  $\vec{b} = \sum_{\{k=1\}}^n \vec{e}^{(k)}$ , найти значения всех неизвестных и построить матрицу  $Dis$ .

### Заключение

В работе описано применение теории полуколец для нахождения всех кратчайших путей в графе, приведен пример решения задачи с помощью описанного алгоритма.

Статью можно использовать в качестве примера практического выполнения научно-исследовательской работы.

Подходы, описанные в статье, могут быть также использованы для решения других задач теории графов. Поиск таких задач и их последующее решение может стать одной из целей научно-исследовательской или выпускной квалификационной работы.

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Андреева Т.В., Трофимов Я.Г. Использование методов алгебры при решении задач теории графов в научно-исследовательской работе // Modern European Researches. – 2022. – Т. 1, № 3. – С. 6-16.
2. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд. испр. и доп. — Санкт-Петербург: Лань, 2010. — 368 с.
3. W. Kuich, A.Salomaa Semirings, Automata, Languages, EATCS Monographs in Theoretical Computer Science, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
4. Ésik Z, Kuich W. Inductive \*-Semirings, Theoretical computer science, vol. 324, issue 1, 2004, 3-33. DOI: 10.1016/j.tcs.2004.03.050
5. Droste M., Kuich W., Vogler H. (Eds.) Handbook of Weighted Automata, Monographs in Theoretical Computer Science, EATCS Series, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

6. W. Kuich, A.Salomaа Указ. соч.
7. Droste M., Kuich W., Vogler H. Указ. соч.
8. Андреева Т.В., Трофимов Я.Г. Указ. соч.
9. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 7-е изд. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – 703 с.
10. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Указ. соч.

---

**Tatiana V. Andreeva,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[t-v-andreeva@mail.ru](mailto:t-v-andreeva@mail.ru)

**Yakov G. Trofimov,**

*Student, Russian University of Transport (MIT)*

[j.trofimov@outlook.com](mailto:j.trofimov@outlook.com)

**An application of semirings for solving the problem of finding the shortest paths in graphs in research work**

**Abstract.** Methodology plays an important role in scientific research. Classical approaches can be found in scientific literature or courses. Sometimes these approaches should be modified for solving new research problems. In the article we consider the well-known problem of finding the shortest paths in graphs. For solving this problem, a methodical approach based on the concepts and methods of semiring theory is presented. An example of solving this problem with the help of the proposed methodology is analysed.

**Keywords:** graphs, paths, semirings.

## МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК ВНУТРЕННЕГО МОДУЛЯ

### Аннотация

В статье рассмотрены практические приемы построения графиков различного уровня сложности. На примере тригонометрических функций, содержащих знак внутреннего модуля, изучено поведение графиков в области их определения. Цель работы заключается в том, чтобы показать, как максимально быстро и просто можно построить график сложной функции с помощью основных линейных преобразований, свойств модуля и свойств четных, нечетных функций. Содержание статьи будет полезно студентам младших курсов, а также преподавателям.

### Ключевые слова

тригонометрические функции, графики функций, линейные преобразования, модуль

### АВТОРЫ

**Ахметова Фания Харисовна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
dobrich2@mail.ru

**Головина Анастасия Михайловна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
nastya\_gm@mail.ru

### Введение

В настоящей работе речь пойдет о построении графиков тригонометрических функций, содержащих знак внутреннего модуля. Эта тема авторами была выбрана не случайно. Во-первых, существует большое число учебников, учебных и учебно-методических пособий, в которых описывается понятие функции, её свойства и методы построения графиков (например, работы [1-4]). Все они, в основном, предназначены для учащихся старших классов.

Имеется также ряд учебных пособий и статей для студентов начальных курсов (например, работы [5-12]). Однако во всех этих работах шла речь либо о построении графиков отдельно взятых функций: линейных, квадратичных, дробно-рациональных, тригонометрических и др., либо о построении графиков функций, содержащих знак модуля внешнего или внутреннего.

В настоящей работе было решено объединить два этих подхода и рассказать о построении именно тригонометрических функций, при этом, содержащих знак внутреннего модуля. Это было сделано не случайно. Именно тригонометрические функции вызывают немало трудностей не только у старшеклассников, но и у абитуриентов, студентов первых курсов различных высших учебных заведений. Если в аналитическом задании функции присутствует знак модуля, то старшеклассники, абитуриенты

и студенты порой теряются и не знают с какой стороны «подойти» к такой задаче. Именно это является первой причиной выбора авторами темы исследования.

Второй причиной выбора данной темы являются графический метод решения для задач с параметрами. Именно в задачах с параметрами часто встречаются тригонометрические функции и знак модуля.

Теперь обсудим материал, изложенный в работе. Приведено достаточно большое число подробно разобранных примеров на построение эскизов графиков тригонометрических функций, содержащих знак внутреннего модуля. Сформулирован алгоритм построения подобного рода функций. Свойства и построение тригонометрических функций, содержащих знак внешнего модуля, в этой работе не рассматриваются, так как это уже было описано авторами ранее в работах [13], [14].

### Методология и результаты исследования

Построение эскиза графика функции  $y = f(|x|)$ , где  $f(x)$  - тригонометрическая функция проводится не сразу, а последовательно:

1. Сначала изображается эскиз графика функции  $y = f(x)$  только при  $x > 0$ .
2. Затем производится симметричное относительно оси  $Oy$  отображение эскиза уже построенного графика функции.

Рассмотрим применение данного алгоритма на конкретных примерах.

**Пример 1.** Изобразить эскиз графика функции  $y = 2\sin|x| + 1$ .

Построение будем выполнять последовательно.

Сначала построим эскиз графика функции  $y = \sin x$ . Отметим, что данная функция является периодичной с периодом  $T = 2\pi$ ,  $D(y) = R$ ,  $E(y) = [-1, 1]$ .

Затем построим эскиз графика функции  $y = 2\sin x$ . Для этого нужно увеличить в два раза амплитуду колебаний функции  $y = \sin x$ . Областью значений функции  $y = 2\sin x$  является отрезок  $[-2, 2]$ .

Далее строим эскиз графика функции  $y = 2\sin x + 1$ . Для этого эскиз графика функции  $y = 2\sin x$  сдвигаем на одну единицу вверх по оси  $Oy$ . Это приведёт к тому, что зависимая переменная  $y$  функции  $y = 2\sin x + 1$  будет пробегать все значения отрезка  $[-1, 3]$ .

Эскизы графиков функций  $y = \sin x$ ,  $y = 2\sin x$ ,  $y = 2\sin x + 1$ , заданные на всей области определения приведены на рис. 1.

Предположим теперь, что эскиз графика функции  $y = 2\sin x + 1$  изображён не на всей области определения, а только при  $x > 0$ . Проводя симметричное относительно оси  $Oy$  отражение, получаем эскиз графика искомой функции  $y = 2\sin|x| + 1$ , который приведён на рис. 2.

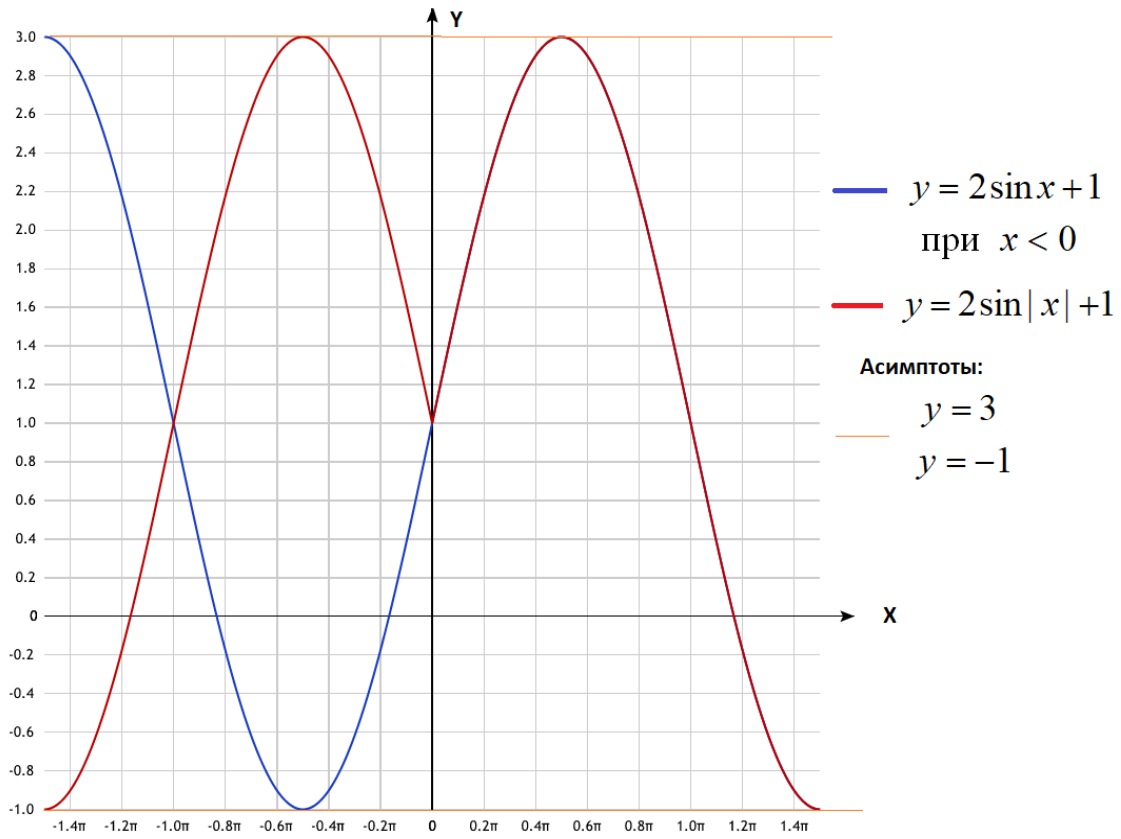


Рис. 1. Эскизы графиков функций  $y = \sin x$ ,  $y = 2 \sin x$ ,  $y = 2 \sin x + 1$

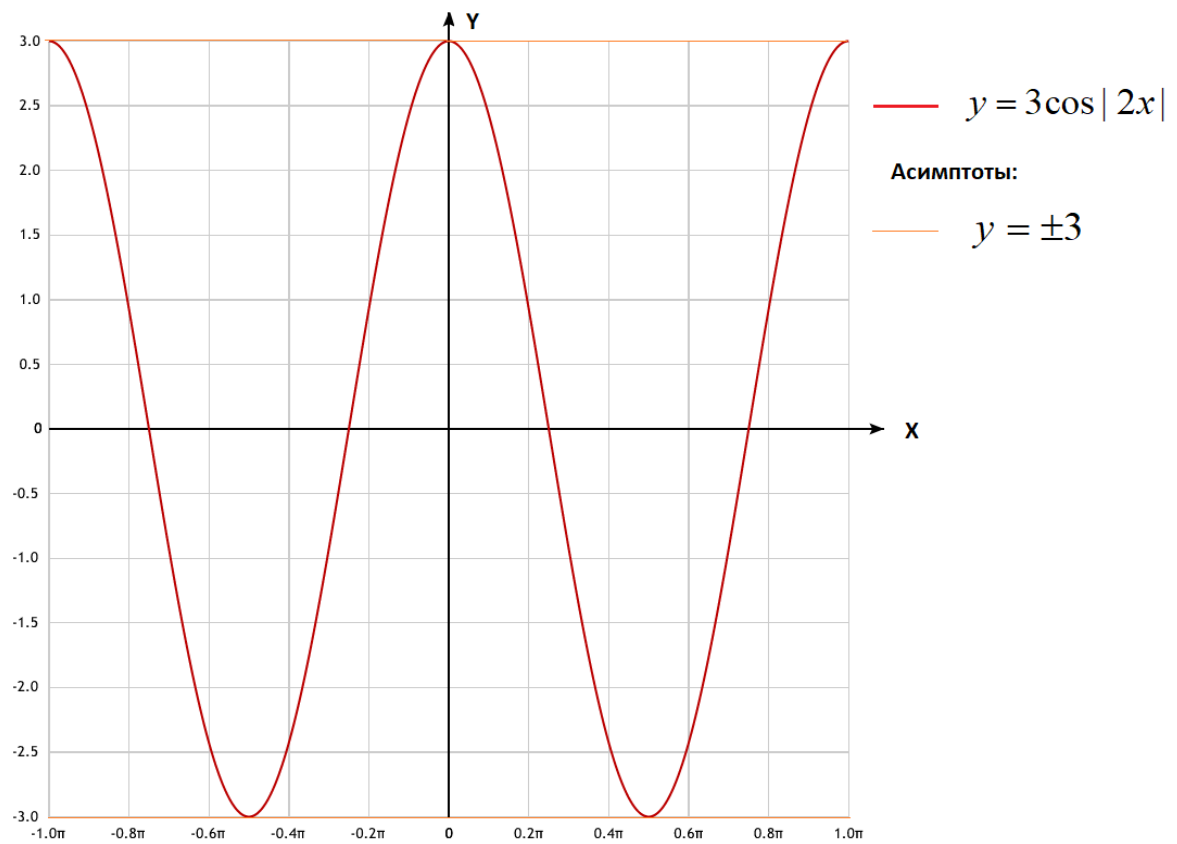


Рис. 2. Эскиз графика функции  $y = 2 \sin |x| + 1$

**Пример 2.** Изобразить эскиз графика функции  $y = 3\cos|2x|$ .

Построение эскиза указанного графика функции  $y = 3\cos|2x|$  вновь выполняем последовательно. Начинаем с построения графика функции  $y = \cos x$ . Эта функция также является периодической с периодом  $T = 2\pi$ ,  $D(y) = R$ ,  $E(y) = [-1,1]$ . Переходим к построению эскиза графика функции  $y = 3\cos x$ , который получается из предыдущего увеличением амплитуды колебаний в три раза. Областью значений функции  $y = 3\cos x$  является отрезок  $[-3,3]$ . Далее переходим к построению эскиза графика функции  $y = 3\cos 2x$ . Для этого сжимаем относительно оси  $Ox$  эскиз графика функции  $y = 3\cos x$ . Функция  $y = 3\cos 2x$  является периодической с периодом  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

Вновь предполагаем, что эскиз графика функции  $y = 3\cos 2x$  изображён не на всей области определения, а лишь при  $x > 0$ . Проводя симметричное относительно оси  $Oy$  отражение эскиза графика функции  $y = 3\cos 2x$ , получаем эскиз изначально заданного графика функции  $y = 3\cos|2x|$ , который изображён на рис. 3.

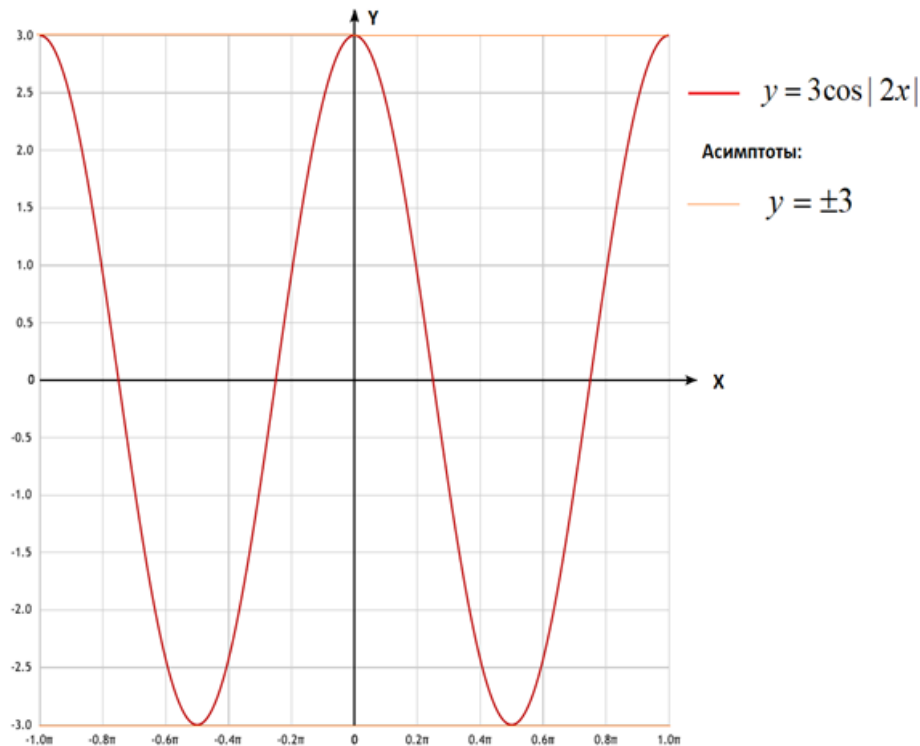


Рис. 3. Эскиз графика функции  $y = 3\cos|2x|$

**Замечание:** Так как функция  $y = \cos x$  является четной, то есть  $y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$ , то графики функции  $y = \cos x$  и  $y = \cos|x|$  совпадают.

Еще раз подчеркнем, что данное свойство наблюдается только у четных функций  $y = f(x)$ .

**Пример 3.** Изобразить эскиз графика функции  $y = 2ctg\left|\frac{\pi}{2} + 3x\right| - \frac{\pi}{4}$ .

Область определения функции  $y = 2ctg\left|\frac{\pi}{2} + 3x\right| - \frac{\pi}{4}$  разбивается точкой  $x = -\frac{\pi}{6}$  (точка, в которой выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль) на две области:  $x > -\frac{\pi}{6}$  и  $x < -\frac{\pi}{6}$ .

В первой области, то есть при  $x > -\frac{\pi}{6}$ , выражение  $\left|\frac{\pi}{2} + 3x\right|$  раскрываем со знаком «плюс». Таким образом, при  $x > -\frac{\pi}{6}$  имеем функцию  $y = 2ctg\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \frac{\pi}{4}$ .

Во второй области, то есть при  $x < -\frac{\pi}{6}$ , выражение  $\left|\frac{\pi}{2} + 3x\right|$  раскрываем со знаком «минус». Таким образом, при  $x < -\frac{\pi}{6}$  имеем функцию

$$y = 2ctg\left(-\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\right) - \frac{\pi}{4} = -2ctg\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \frac{\pi}{4}.$$

В итоге получаем, эскиз графика кусочной функции

$$y = 2ctg\left|\frac{\pi}{2} + 3x\right| - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} 2ctg\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \frac{\pi}{4}, & x > -\frac{\pi}{6}, \\ -2ctg\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \frac{\pi}{4}, & x < -\frac{\pi}{6}, \end{cases}$$

который представлен на рис. 4.

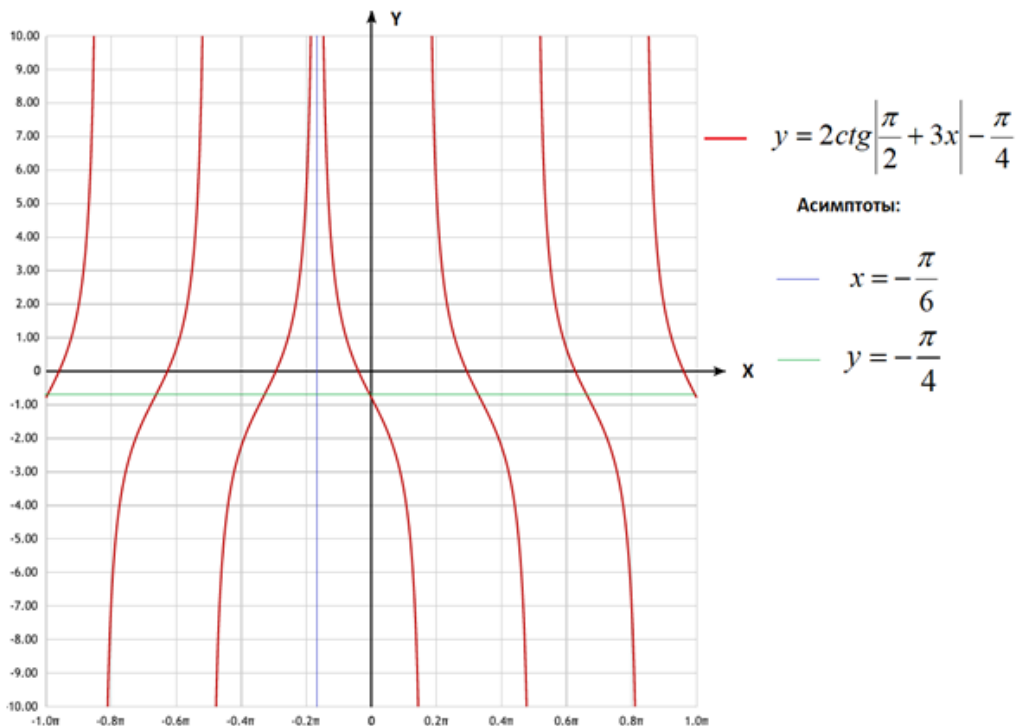


Рис. 4. Эскиз графика функции  $y = 2ctg\left|\frac{\pi}{2} + 3x\right| - \frac{\pi}{4}$



### Алгоритм построения эскизов графиков функций

Итак, сформулируем теперь этапы построения графиков функций вида  $y = f(|ax+b|)$ , где  $f(x)$  - тригонометрическая функция,  $a \neq 0$ ,  $b$  - некоторые числа.

1. Разбиваем область определения функции на промежутки точками, в которых выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль. Например,  $ax+b=0$ , тогда  $x = -\frac{b}{a}$ . Получаем два промежутка: первый  $x > -\frac{b}{a}$ , второй  $x < -\frac{b}{a}$ .

2. Раскрываем знак модуля в каждом из полученных промежутков либо с «плюсом», либо с «минусом»; пользуясь четностью и нечетностью тригонометрических функций, приходим к кусочной функции вида:

$$y = f(|ax+b|) = \begin{cases} g(x), x > -\frac{b}{a}, \\ h(x), x < -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Здесь функции  $g(x)$  и  $h(x)$  зависят также от констант  $a$  и  $b$  и выражаются через функцию  $y = f(x)$ .

3. Строим график, полученной кусочной функции.

Ещё раз продемонстрируем действие данного алгоритма на конкретных примерах.

**Пример 4.** Изобразить эскиз графика функции  $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right| + \frac{\pi}{3}$ .

1. Приравняем выражение, стоящее под знаком модуля, к нулю  $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x = 0$

Тогда  $\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}x$ ,  $\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}x$ , а  $x = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом получаем две области:  $x > \frac{\pi}{2}$  и  $x < \frac{\pi}{2}$ .

2. Рассматриваем каждую область по отдельности,

при  $x > \frac{\pi}{2}$  имеем:

$$y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}x \right) + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right) + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3},$$

при  $x < \frac{\pi}{2}$  имеем:  $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right) + \frac{\pi}{3}$ .

В итоге получаем кусочную функцию:

$$y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \left| \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right| \right) + \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}, x > \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}, x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

эскиз графика, которой

изображён на рис.5.

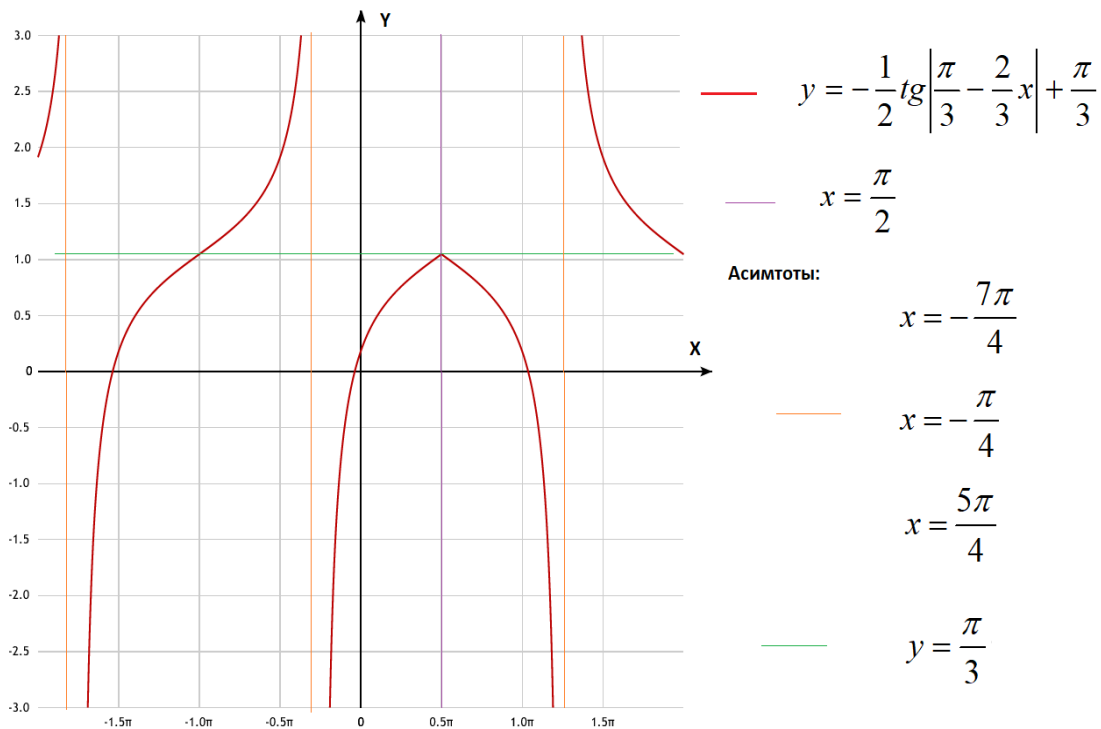


Рис. 5. Эскиз графика функции  $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right| + \frac{\pi}{3}$

**Замечание:** Отметим, что эскиз графика функции  $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}$  при  $x < \frac{\pi}{2}$  получается путем симметричного отражения эскиза графика функции  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}$  при  $x > \frac{\pi}{2}$  относительно прямой  $x = \frac{\pi}{2}$ . Этим фактом можно воспользоваться при построении эскиза графиков функций  $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x \right) + \frac{\pi}{3}$  при  $x < \frac{\pi}{2}$  и  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( -\frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{3}$  при  $x > \frac{\pi}{2}$ .

**Пример 5.** Изобразить эскизы графиков функций: а)  $y = 4 \operatorname{tg} |3x|$ , б)  $y = -2 \operatorname{ctg} |5x|$ .

а) Цепочка элементарных преобразований функции  $y = \operatorname{tg} x$  при построении эскиза графика функции  $y = 4 \operatorname{tg} |3x|$  имеет следующий вид:

$$y = \operatorname{tg} x \rightarrow y = 4 \operatorname{tg} x \rightarrow y = 4 \operatorname{tg} 3x \rightarrow y = 4 \operatorname{tg} |3x|.$$

$$1. y = \operatorname{tg} x, D(y) = \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}, E(y) = \mathbb{R}, T = \pi.$$

$y = 4 \operatorname{tg} x$ . Производим сжатие эскиза графика  $y = \operatorname{tg} x$  относительно оси  $Oy$ .

2.  $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ . Данная функция периодичная с периодом  $T = \frac{\pi}{3}$  и областью опре-

деления:  $D(y) = \left( -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k \right)$ . Эскизы графиков вышеуказанных функций изображены на рис. 6.

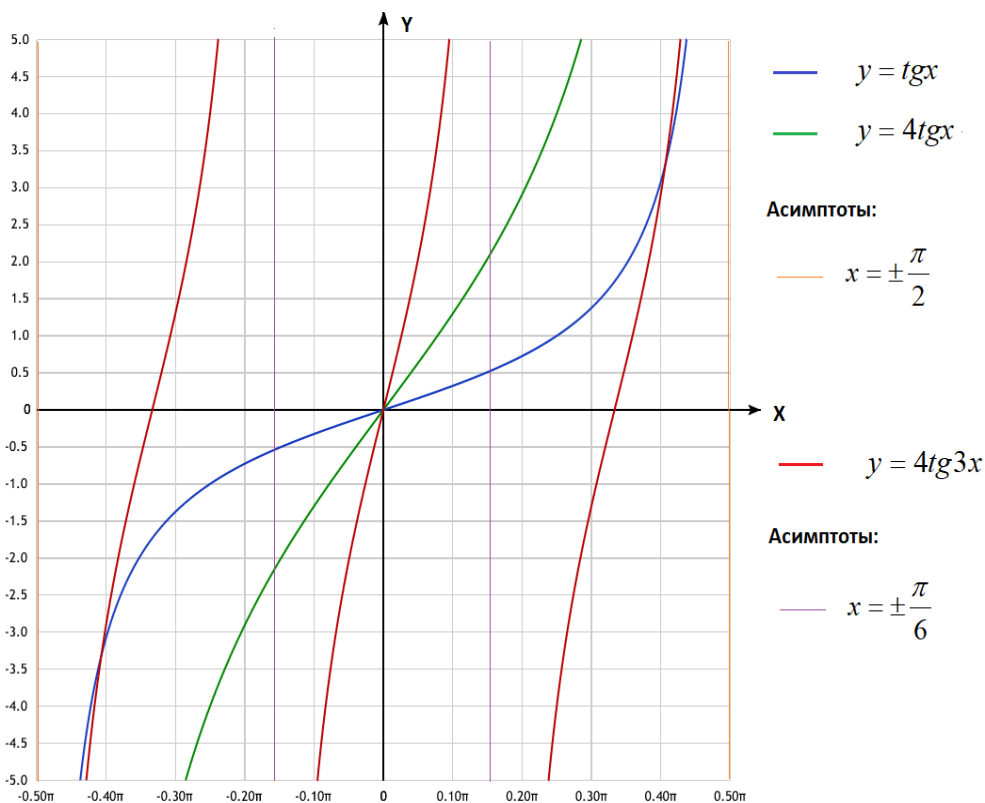


Рис. 6. Эскизы графиков функций  $y = tgx$ ,  $y = 4tgx$ ,  $y = 4tg3x$

3. Отражаем симметрично оси  $Oy$  график функции  $y = 4tg3x$ , построенный при  $x > 0$ . В итоге получаем эскиз графика заданной функции, который изображён на рис.7.

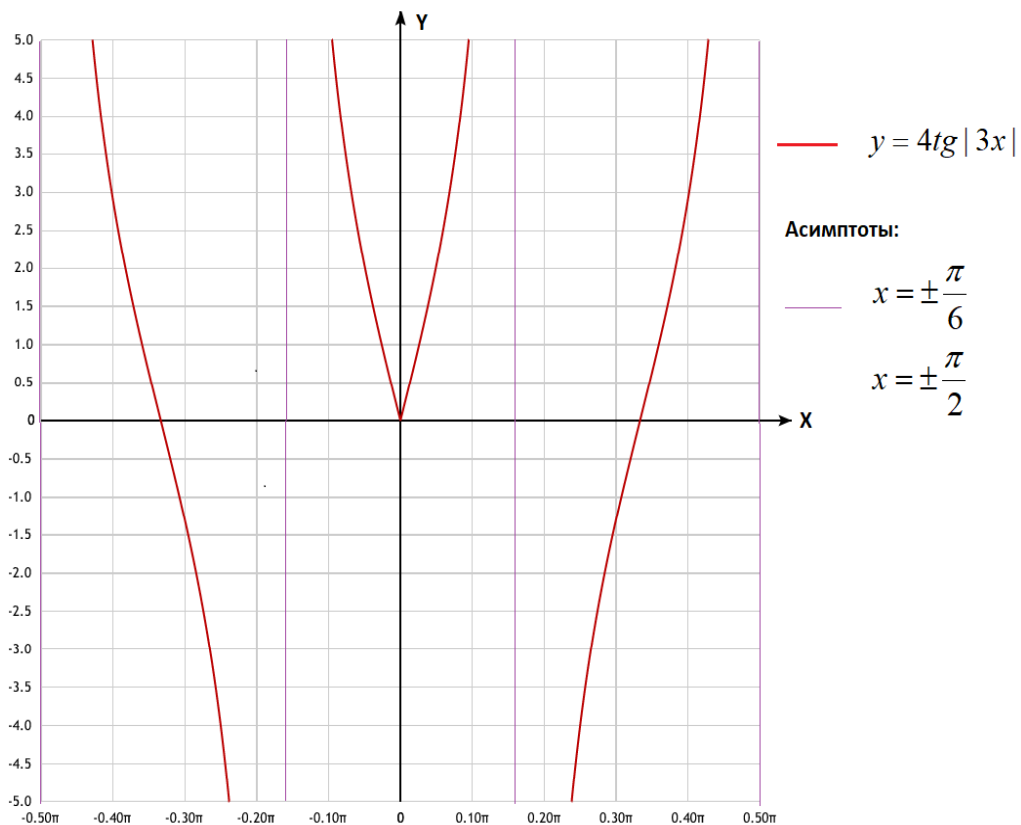


Рис. 7. Эскиз графика функции  $y = 4tg|3x|$

б) Рассмотрим функцию  $y = -2ctg|5x|$ .

Цепочка элементарных преобразований функции  $y = ctgx$  при построении эскиза графика функции  $y = -2ctg|5x|$  имеет следующий вид:

$$y = ctgx \rightarrow y = 2ctgx \rightarrow y = -2ctgx \rightarrow y = -2ctg5x \rightarrow y = -2ctg|5x|.$$

1.  $y = ctgx$ ,  $D(y) = (\pi k, \pi + \pi k)$ ,  $k \in Z$ ,  $E(y) = R$ ,  $T = \pi$ .

$y = 2ctgx$ . Производим сжатие в два раза относительно оси  $Oy$  эскиза графика функции  $y = ctgx$ .

$y = -2ctgx$ . Производим замену значений функции следующим образом: те значения функции  $y = 2ctgx$ , которые были положительными, для функции  $y = -2ctgx$  являются отрицательными и наоборот.

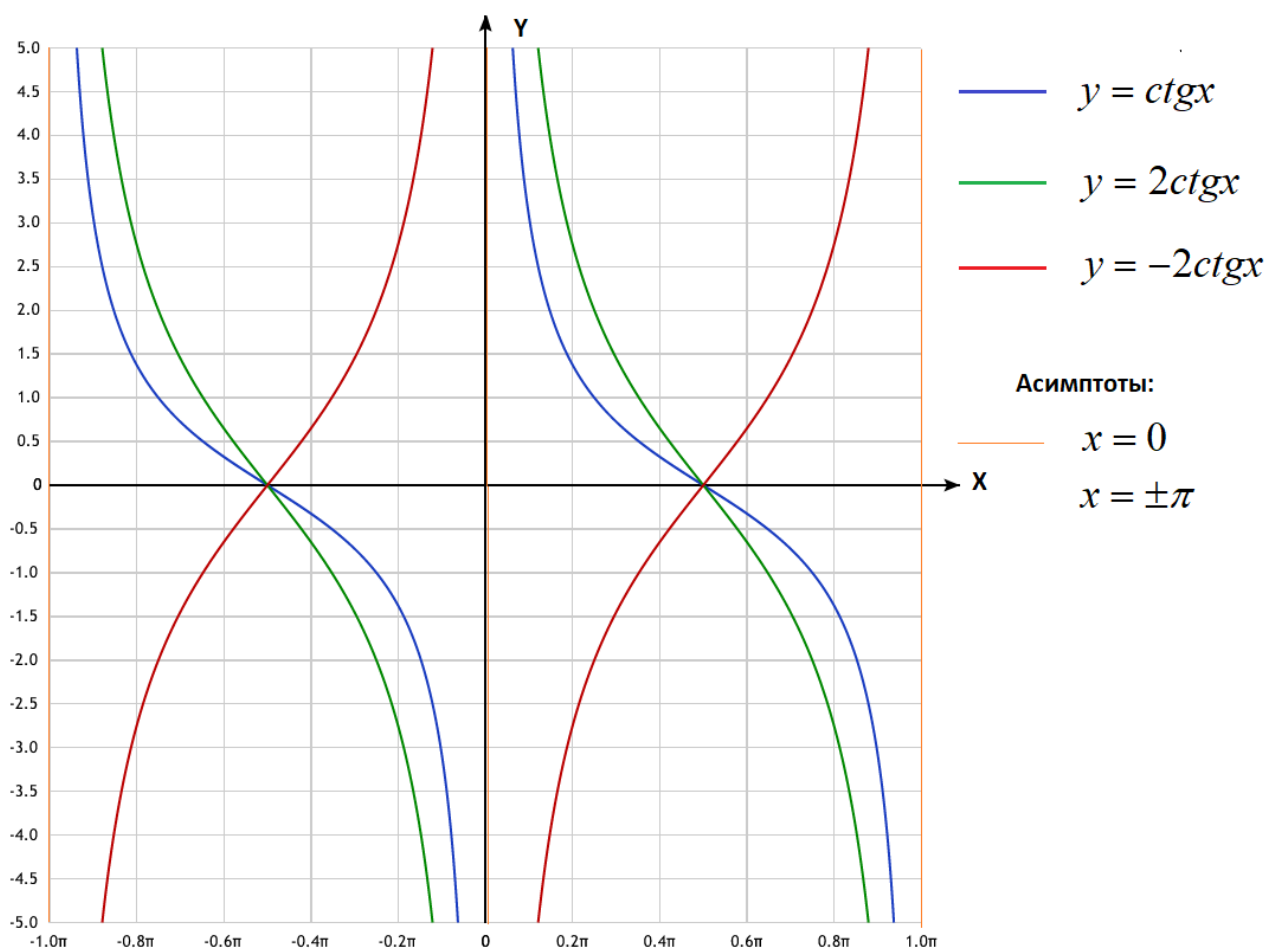


Рис. 8. Эскизы графиков функций  $y = ctgx$ ,  $y = 2ctgx$ ,  $y = -2ctgx$

2.  $y = -2ctg5x$ . Производим сжатие эскиза графика функции  $y = -2ctgx$  в пять раз относительно оси абсцисс:  $T = \frac{\pi}{5}$ ,  $D(y) = \left(\frac{\pi}{5}k, \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}k\right)$ ,  $k \in Z$ . Эскизы графиков вышеуказанных функций изображены на рис. 8.

3. Отражаем симметрично оси  $Oy$  график функции  $y = -2ctg5x$  при  $x > 0$  и получаем график функции  $y = -2ctg|5x|$ .

Итоговый эскиз графика заданной функции изображён на рис. 9.

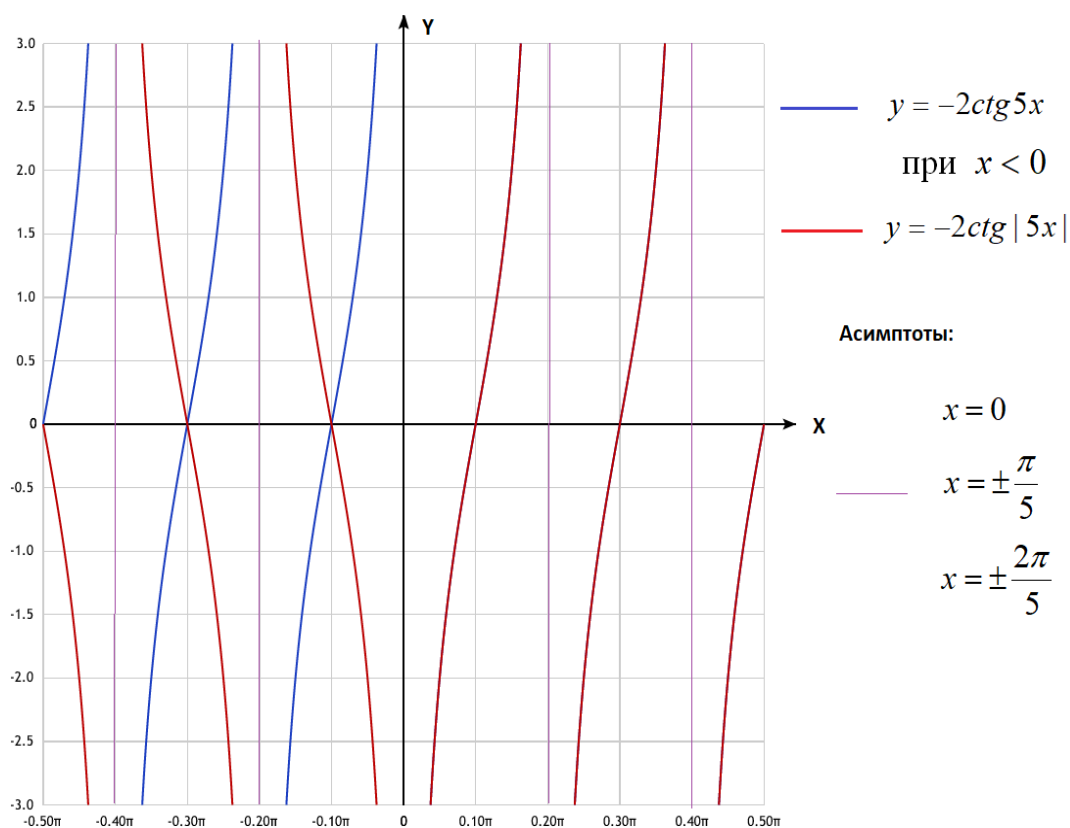


Рис. 9. Эскизы графиков функций  $y = -2ctg 5x$ ,  $y = -2ctg |5x|$

### Заключение

Преимуществом графического задания функции является его наглядность, недостатком - его неточность. Однако, если к известным элементарным функциям аккуратно применить те или иные преобразования, то характер поведения функции становится вполне понятным и наглядным.

Отметим, что данная работа будет полезна студентам первого курса МГТУ им. Н.Э. Баумана практически всех специальностей при выполнении первого контрольного домашнего задания по дисциплине Математический анализ.

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Г. И. Просветов Графики и функции. Задачи и решения. Издательство: Альфа-Пресс, 2010 г., 64 стр.
2. И.М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль: Функции и графики. Основные приемы, МЦНМО, 2015 г., 120 стр.
3. Ильичев А.Т., Кузнецов В.В., Фаликова И.Д. Графики элементарных функций. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004
4. Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие. – Изд. 3-е, стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с
5. М.Я. Выгодский Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ Астрель, 2019. - 509 с.
6. С. В. Буфеев Функции и графики: Учебное пособие / 2-е изд., Издательство Ленанд, 2017, 120 стр.
7. Башмаков М.И. Математика. М.: Академия, 2014. - 256 с.
8. Кузнецов Б.Т. Математика. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: 2004. – 719 с.
9. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2009, – 192 с. ISBN 978-5-89237-108-7.
10. Казанджан Э.П. Графики. Сборник задач с примерами решений по исследованию функций и построению графиков. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1982. - 616 с.

12. Гриншпон И. Э, Гриншпон Я. С. Элементарные функции и их графики, учебное пособие, Томск, Издательство томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2017, стр. 91
13. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков тригонометрических функций с помощью линейных преобразований // Modern European Researches. - Salzburg, 2021. -Т. 1. № 3. - Р. 5-17. - URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47097457>
14. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внешнего модуля // Modern European Researches. - Salzburg, 2022. - Т. 1. №3. - Р. 17-25. - URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49433654>

---

**Faniya Kh. Akhmetova,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*  
[dobrich2@mail.ru](mailto:dobrich2@mail.ru)

**Anastasiya M. Golovina,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*  
[nastya\\_gm@mail.ru](mailto:nastya_gm@mail.ru)

**Methods for plotting trigonometric functions containing the sign of an internal module**

**Abstract.** The article discusses practical techniques for plotting graphs of various levels of complexity. Using the example of trigonometric functions containing the sign of the internal module, the behavior of graphs in the domain of their definition is studied. The purpose of the work is to show how it is possible to construct a graph of a complex function as quickly and simply as possible using basic linear transformations, module properties and properties of even, odd functions. The content of the article will be useful for junior students, as well as teachers.

**Keywords:** trigonometric functions, graphs of functions, linear transformations, module.

## НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ»

### Аннотация

Одной из тем при изучении дисциплины «Методы оптимизации» является «Метод золотого сечения». Эта дисциплина входит в базовую часть образовательных программ обучения по нескольким специальностям в МГТУ им. Н.Э. Баумана. В статье рассматривается постановка задачи нахождения точки минимума функции на отрезке с заданной точностью, алгоритм решения этой задачи методом золотого сечения, приведен пример решения задачи с использованием рассмотренного алгоритма. Цель работы: проиллюстрировать особенности метода золотого сечения для решения задачи нахождения точки минимума функции на отрезке, использования которого позволяет значительно сократить объем вычислений при нахождении точки минимума функции на отрезке, особенно при высокой заданной точности определения этой точки. Успешное освоение этой темы будет способствовать выработке у студентов практических навыков применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности. Результатом исследования является материал, который может служить основой для подготовки практических и лабораторных занятий и представлять интерес для студентов и преподавателей.

### Ключевые слова

униmodalная функция, деление отрезка, правило золотого сечения, оптимизация

### АВТОРЫ

**Бахтиярова Ольга Николаевна,**

кандидат технических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана», г. Москва

olga-bakh06@mail.ru

**Птицына Инга Вячеславовна,**

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н.Э. Баумана», г. Москва

inpt@mail.ru

**Подзорова Марина Ивановна,**

кандидат педагогических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет

им. Н.Э. Баумана», г. Москва

marinatichomirova@hotmail.com

### Введение

В античной литературе деление отрезка в крайнем и среднем отношении впервые встречается в «Началах» Евклида (около 300 лет до н.э.).



В соответствии с этим принципом был построен древнегреческий Парфенон, расположенный на афинском Акрополе. Отношение высоты к ширине фасада храма приближается к числу  $0,618$ . Те же соотношения прослеживаются в древнеримских арках и акведуках, их замечают в сводах Сикстинской капеллы.

Владели знаниями о правиле золотого сечения (которое тогда еще так не называлось) и древние египтяне. Об этом свидетельствует пирамида Хеопса, возраст которой оценивается примерно в 4500 лет. Соотношение высоты пирамиды Хеопса к основанию равняется  $14/22$ , что очень близко к каноническому соотношению [1].

Изученное в работах математиков и философов Древней Греции правило золотого сечения снова стало властвовать над умами творцов в период Возрождения [2].

В это время теорию золотого сечения выразил монах Лука Пачоли в книге «Божественная пропорция» 1509 года, иллюстрации к которой создал Леонардо да Винчи. Пачоли видел в золотом сечении божественное триединство: малый отрезок олицетворял Сына, большой - Отца, а целое - Святой Дух.

Кто и когда именно впервые ввел термин «золотое сечение» точно неизвестно. Несмотря на то, что некоторые авторы связывают появление этого термина с Леонардо да Винчи в XV веке или относят появление этого термина к XVI веку, самое раннее употребление этого термина находится у Мартина Ома в 1835 году в примечании ко второму изданию его книги «Чистая элементарная математика», в котором Ом написал, что это сечение часто называют золотым сечением.

В математике метод золотого сечения применяется для решения задачи одномерной оптимизации.

Оптимизация - это процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных.

По содержанию задачи оптимизации весьма разнообразны. Они могут быть связаны с проектированием технических устройств и технологических процессов, с распределением ограниченных ресурсов и планированием работы предприятий.

В процессе решения задачи оптимизации необходимо найти оптимальные значения параметров, определяющих данную задачу. Выбор оптимального решения проводится с помощью целевой функции.

Если целевая функция зависит от одного параметра, то задача оптимизации является одномерной. Целью одномерной оптимизации является определение минимума (или максимума) функции одной переменной, заданной на интервале изменения аргумента [3].

Для решения этой задачи могут быть использованы метод оптимального пассивного поиска, методы последовательного поиска: дихотомии, деления отрезка пополам, золотого сечения, квадратичной интерполяции. Некоторые из этих методов изучаются в рамках дисциплины «Методы оптимизации» на старших курсах МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Актуальность решения задачи нахождения точки минимума функции на заданном отрезке методом золотого сечения обусловлена тем, что на каждой итерации на отрезке необходимо определять только одну точку, что значительно сокращает объем вычислений, особенно при высокой заданной точности нахождения точки минимума функции.

В результате изучения дисциплины студенты должны знать основные методы минимизации функций одной переменной и многих переменных, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, уметь применять эти методы для решения инженерных задач профессиональной деятельности, а также владеть навыками разработки алгоритмов и составления программ, реализующих основные методы одномерной и многомерной минимизации.

Изучение дисциплины «Методы оптимизации» предполагает предварительное освоение таких дисциплин учебного плана, как аналитическая геометрия; математический анализ; линейная алгебра и функции нескольких переменных, и является

предшествующей для дисциплин образовательной программы, связанных с теорией оптимального управления.

## Методология и результаты исследования

### Постановка задачи

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a_0, b_0]$  и является на этом отрезке унимодальной, т. е. имеет только один локальный минимум  $x^*$ . Необходимо найти точку  $x^*$  с точностью  $\varepsilon$ .

### Решение задачи

Итерационный процесс нахождения точки минимума  $x^*$  функции  $f(x)$  методом золотого сечения включает в себя следующие шаги [4].

#### Шаг 1.

На отрезке  $[a_0, b_0]$  выбирают две внутренние точки  $\tilde{a}_0$  и  $\tilde{b}_0$ , вычисляют значения функции  $f(x)$  на концах отрезка  $[a_0, b_0]$  и в его внутренних точках  $\tilde{a}_0$  и  $\tilde{b}_0$ , т.е.  $f(a_0)$ ,  $f(\tilde{a}_0)$ ,  $f(\tilde{b}_0)$ ,  $f(b_0)$ , а затем среди полученных значений выбирают наименьшее.

Пусть, например, наименьшее значение функция  $f(x)$  достигает в точке  $\tilde{a}_0$ , т.е.  $\min\{f(a_0), f(\tilde{a}_0), f(\tilde{b}_0), f(b_0)\} = f(\tilde{a}_0)$ . Тогда, очевидно, точка минимума  $x^*$  функции  $f(x)$  находится на одном из отрезков, прилегающих к точке  $\tilde{a}_0$ . Поэтому отрезок  $[\tilde{b}_0, b_0]$  можно исключить и далее рассматривать отрезок  $[a_0, \tilde{b}_0]$ .

#### Шаг 2.

На отрезке  $[a_1, b_1] = [a_0, \tilde{b}_0]$  выбирают две внутренние точки  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{b}_1$  и повторяют действия шага 1. При этом в качестве точки  $\tilde{b}_1$  выбирают точку  $\tilde{a}_0$ .

Поскольку на предыдущем шаге итерационного процесса уже найдены значения функции  $f(x)$  на концах отрезка  $[a_1, b_1] = [a_0, \tilde{b}_0]$  и в одной его внутренней точке  $\tilde{b}_1 = \tilde{a}_0$ , то находят значение функции  $f(x)$  только во внутренней точке  $\tilde{a}_1$ , а затем производят необходимые сравнения значений функции  $f(a_1)$ ,  $f(\tilde{a}_1)$ ,  $f(\tilde{b}_1)$ ,  $f(b_1)$ .

Выбор на данном шаге только одной внутренней точки и вычисление значения функции в ней уменьшает объем вычислений на одном шаге итерационного процесса в 4 раза.

Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока длина рассматриваемого отрезка  $[a_n, b_n]$  не станет меньше или равной заданной точности  $\varepsilon$ . Тогда в качестве точки минимума  $x^*$  выбирают точку  $a_n$ ,  $\tilde{a}_n$ ,  $\tilde{b}_n$  или  $b_n$ , в которой функция  $f(x)$  имеет наименьшее значение, т. е.

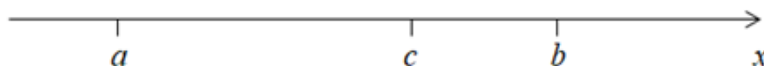
$$x^* = \arg \min \{f(a_n), f(\tilde{a}_n), f(\tilde{b}_n), f(b_n)\}.$$

Рассмотрим вопрос выбора внутренних точек  $\tilde{a}_i$  и  $\tilde{b}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

На каждом шаге итерационного процесса отрезок  $[a_i, b_i]$  делят с помощью внутренних точек  $\tilde{a}_i$  и  $\tilde{b}_i$  на три части. При этом точки  $\tilde{a}_i$  и  $\tilde{b}_i$  выбирают так, чтобы каждая из них осуществляла «золотое сечение» отрезка  $[a_i, b_i]$ .

*Определение.* Точка  $c$  осуществляет «золотое сечение» отрезка  $[a, b]$ , если выполняется следующее соотношение [5]

$$\frac{b-c}{b-a} = \frac{c-a}{b-c} = \lambda. \quad (1)$$



Определим коэффициент  $\lambda$ .

Пусть длина отрезка  $[a, b]$  равна 1, т. е.  $b - a = 1$ .

Обозначим длину отрезка  $[c, b]$  через  $x$ , т. е.  $x = b - c$ .

Тогда длина отрезка  $[a, c]$  будет равна  $1 - x$ , т. е.  $c - a = 1 - x$ .

Согласно соотношению (1), имеем  $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} = \lambda$ , откуда  $x = \lambda$ .

Решим уравнение  $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$ .

$$x^2 = 1 - x,$$

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 + 4 = 5,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a},$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку длина отрезка  $[c, b]$  не может быть отрицательной, то

$$x = x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

А поскольку  $\lambda = x$ , то  $\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$ .

Таким образом, внутренние точки  $\tilde{a}_i$  и  $\tilde{b}_i$  отрезка  $[a_i, b_i]$  выбирают так, чтобы они удовлетворяли соотношению (1), т. е.

$$\frac{b_i - \tilde{a}_i}{b_i - a_i} = \frac{\tilde{a}_i - a_i}{b_i - \tilde{a}_i} = \frac{\tilde{b}_i - a_i}{b_i - a_i} = \frac{b_i - \tilde{b}_i}{\tilde{b}_i - a_i} = \lambda,$$

а также соотношению  $\tilde{a}_i - a_i = b_i - \tilde{b}_i$ .

После выполнения  $i$ -го шага итерационного процесса длина отрезка  $[a_{i-1}, b_{i-1}]$  уменьшается в  $\frac{1}{\lambda}$  раз и, следовательно, после  $n$  шагов его длина становится равной  $\lambda^n \cdot (b_0 - a_0)$ .

Если  $n \rightarrow \infty$ , то длина  $n$ -го отрезка стремится к 0 как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\lambda$ .

Таким образом, метод золотого сечения всегда сходится, причем линейно.

*Примечания.*

1. Метод золотого сечения применим и к функциям, не дифференцируемым на отрезке  $[a_0, b_0]$ .

2. Если на отрезке  $[a_0, b_0]$  функция  $f(x)$  имеет несколько локальных минимумов, то итерационный процесс сходится к одному из них, причем необязательно к глобальному.

*Алгоритм нахождения точки минимума  $x^*$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[a_0, b_0]$  с точностью  $\varepsilon$  методом золотого сечения*

*Этап 1.*

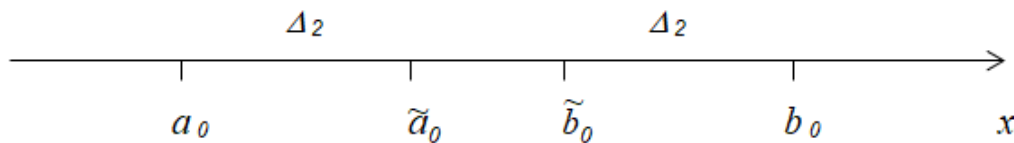
1. Вычисляем длину отрезка  $[a_0, b_0]$ :  $\Delta_0 = b_0 - a_0$ .

2. Вычисляем величину  $\Delta_1 = \lambda \cdot \Delta_0$ ,  $\lambda \approx 0.618$ .

3. Вычисляем величину  $\Delta_2 = \Delta_1 - \Delta_0$ .

4. Определяем внутренние точки  $\tilde{a}_0$  и  $\tilde{b}_0$ :

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \Delta_2; \quad \tilde{b}_0 = b_0 - \Delta_2.$$



5. Вычисляем значения функции  $f(x)$  в точках  $a_0, \tilde{a}_0, \tilde{b}_0$  и  $b_0$ :  $f(a_0), f(\tilde{a}_0), f(\tilde{b}_0), f(b_0)$ .

6. Находим наименьшее из полученных в пункте 5 значений функции  $f(x)$ , т. е.

$$M = \min \{ f(a_0), f(\tilde{a}_0), f(\tilde{b}_0), f(b_0) \}.$$

7. Переходим к *этапу 3*, полагая  $k = 0$  (где  $k$  - номер итерации).

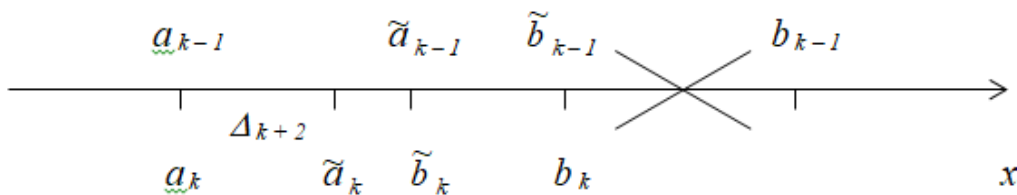
*Этап 2.*

1. Вычисляем величину  $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$ .

2. Если  $M = f(a_{k-1})$  или  $M = f(\tilde{a}_{k-1})$ , то

1) исключаем отрезок  $[\tilde{b}_{k-1}, b_{k-1}]$ ;

2) полагаем  $[a_k, b_k] = [a_{k-1}, \tilde{b}_{k-1}]$ ,  $\tilde{b}_k = \tilde{a}_{k-1}$ ;

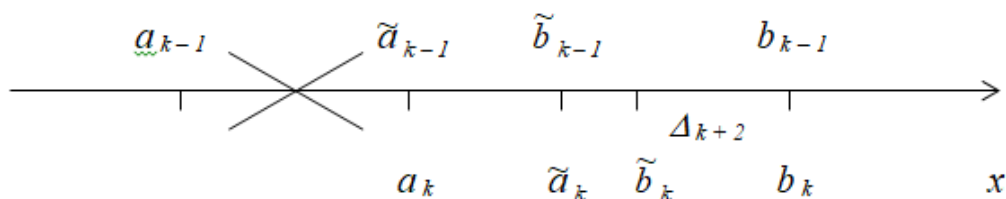


3) определяем внутреннюю точку  $\tilde{a}_k$ :  $\tilde{a}_k = a_k + \Delta_{k+2}$ ;

4) вычисляем значение функции  $f(x)$  в точке  $\tilde{a}_k$ , т.е.  $f(\tilde{a}_k)$ .

Если  $M = f(b_{k-1})$  или  $M = f(\tilde{b}_{k-1})$ , то

- 1) исключаем отрезок  $[a_{k-1}, \tilde{a}_{k-1}]$ ;
- 2) полагаем  $[a_k, b_k] = [\tilde{a}_{k-1}, b_{k-1}]$ ,  $\tilde{a}_k = \tilde{b}_{k-1}$ ;



3) определяем внутреннюю точку  $\tilde{b}_k : \tilde{b}_k = b_k - \Delta_{k+2}$ ;

4) вычисляем значение функции  $f(x)$  в точке  $\tilde{b}_k$ , т. е.  $f(\tilde{b}_k)$ .

3. Находим наименьшее из значений функции  $f(x)$  в точках  $a_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, b_k$ , т.е.

$$M = \min \{f(a_k), f(\tilde{a}_k), f(\tilde{b}_k), f(b_k)\}.$$

4. Переходим к *этапу 3*.

*Этап 3.*

Если  $\Delta_k > \varepsilon$ , то полагаем  $k = k + 1$  и переходим к *этапу 2*.

Если  $\Delta_k \leq \varepsilon$ , то итерационный процесс заканчиваем. При этом в качестве точки минимума  $x^*$  выбираем точку  $a_k, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$  или  $b_k$ , в которой функция  $f(x)$  имеет наименьшее значение, т. е.

$$x^* = \arg \min \{f(a_k), f(\tilde{a}_k), f(\tilde{b}_k), f(b_k)\}.$$

*Пример.*

Найти точку минимума  $x^*$  функции  $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 4$  на отрезке  $[a_0, b_0] = [0.6, 1.2]$  с точностью  $\varepsilon = 0.25$ .

*Решение.*

*Этап 1.*

1. Вычисляем длину отрезка  $[a_0, b_0]$ :  $\Delta_0 = b_0 - a_0 = 1.2 - 0.6 = 0.6$ .

2. Вычисляем величину  $\Delta_1 = \lambda \cdot \Delta_0 = 0.618 \cdot 0.6 = 0.3708$ .

3. Вычисляем величину  $\Delta_2 = \Delta_1 - \Delta_0 = 0.6 - 0.3708 = 0.2292$ .

4. Определяем внутренние точки  $\tilde{a}_0$  и  $\tilde{b}_0$ :

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \Delta_2 = 0.6 + 0.2292 = 0.8292;$$

$$\tilde{b}_0 = b_0 - \Delta_2 = 1.2 - 0.2292 = 0.9708.$$

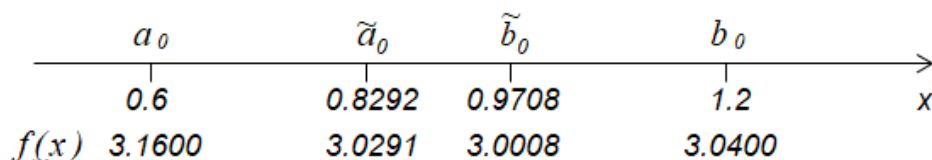
5. Вычисляем значения функции  $f(x)$  в точках  $a_0, \tilde{a}_0, \tilde{b}_0$  и  $b_0$ :

$$f(a_0) = f(0.6) = 3.1600,$$

$$f(\tilde{a}_0) = f(0.8292) = 3.0291,$$

$$f(\tilde{b}_0) = f(0.9708) = 3.0008,$$

$$f(b_0) = f(1.2) = 3.0400.$$



6. Находим наименьшее из значений функции  $f(x)$  в точках  $a_0$ ,  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{b}_0$  и  $b_0$ :

$$M = \min \{ f(a_0), f(\tilde{a}_0), f(\tilde{b}_0), f(b_0) \} =$$

$$= \min \{ 3.1600, 3.0291, 3.0008, 3.0400 \} = f(\tilde{b}_0) = f(0.9708) = 3.0008.$$

7. Полагаем  $k = 0$  (где  $k$  - номер итерации) и переходим к *этапу 3*.

*Этап 3.*

Поскольку  $\Delta_0 = 0.6 > \varepsilon = 0.25$ , то полагаем  $k = 1$  и переходим к *этапу 2*.

*Итерация 1 (k = 1).*

*Этап 2.*

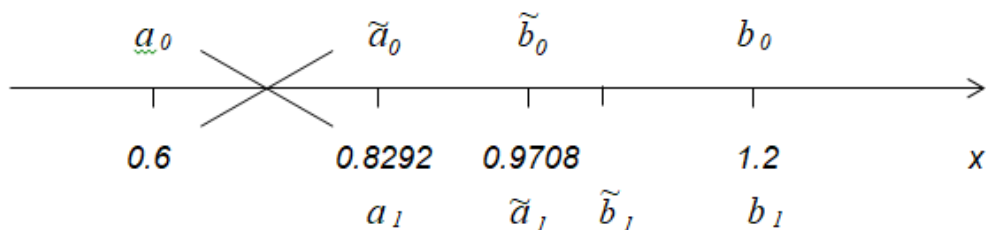
1. Вычисляем величину  $\Delta_3 = \Delta_1 - \Delta_2 = 0.3708 - 0.2292 = 0.1416$ .

2. Поскольку  $M = f(\tilde{b}_0) = f(0.9708)$ , то

1) исключаем отрезок  $[a_0, \tilde{a}_0] = [0.6, 0.8292]$ ;

2) полагаем  $[a_1, b_1] = [\tilde{a}_0, b_0] = [0.8292, 1.2]$ ,

$$\tilde{a}_1 = \tilde{b}_0 = 0.9708;$$

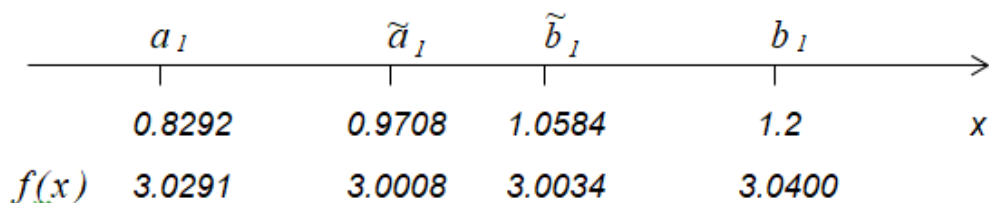


3) определяем внутреннюю точку  $\tilde{b}_1$ :

$$\tilde{b}_1 = b_1 - \Delta_3 = 1.2 - 0.1416 = 1.0584;$$

4) вычисляем значение функции  $f(x)$  в точке  $\tilde{b}_1$ :

$$f(\tilde{b}_1) = f(1.0584) = 3.0034.$$



3. Находим наименьшее из значений функции  $f(x)$  в точках  $a_1$ ,  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{b}_1$  и  $b_1$ :

$$M = \min \{ f(a_1), f(\tilde{a}_1), f(\tilde{b}_1), f(b_1) \} =$$

$$= \min \{ 3.0291, 3.0008, 3.0034, 3.0400 \} = f(\tilde{a}_1) = f(0.9708) = 3.0008.$$

4. Переходим к *этапу 3*.

*Этап 3.*

Поскольку  $\Delta_1 = 0.3708 > \varepsilon = 0.25$ , то полагаем  $k = 2$  и переходим к *этапу 2*.

*Итерация 2 (k = 2).*

*Этап 2.*

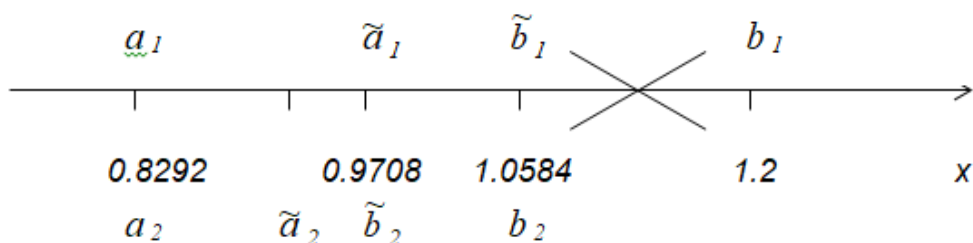
1. Вычисляем величину  $\Delta_4 = \Delta_2 - \Delta_3 = 0.2292 - 0.1416 = 0.0876$ .

2. Поскольку  $M = f(\tilde{a}_1) = f(0.9708)$ , то

1) исключаем отрезок  $[\tilde{b}_1, b_1] = [1.0584, 1.2]$ ;

2) полагаем  $[a_2, b_2] = [\tilde{a}_1, b_1] = [0.8292, 1.0584]$ ,

$$\tilde{b}_2 = \tilde{a}_1 = 0.9708;$$

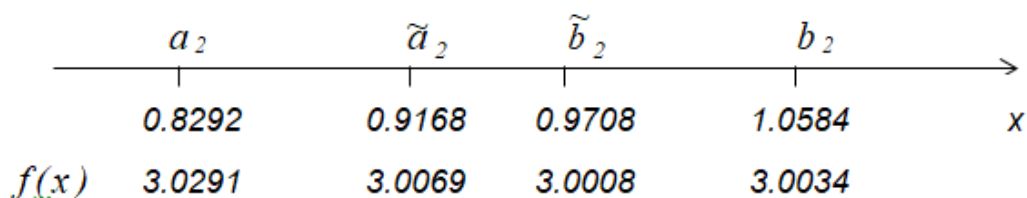


3) определяем внутреннюю точку  $\tilde{a}_2$ :

$$\tilde{a}_2 = a_2 + \Delta_4 = 0.8292 + 0.0876 = 0.9168;$$

4) вычисляем значение функции  $f(x)$  в точке  $\tilde{a}_2$ :

$$f(\tilde{a}_2) = f(0.9168) = 3.0069.$$



3. Находим наименьшее из значений функции  $f(x)$  в точках  $a_2, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2$  и  $b_2$ :

$$M = \min \{ f(a_2), f(\tilde{a}_2), f(\tilde{b}_2), f(b_2) \} =$$

$$= \min \{ 3.0291, 3.0069, 3.0008, 3.0034 \} = f(\tilde{b}_2) = f(0.9708) = 3.0008.$$

4. Переходим к *этапу 3*.

*Этап 3.*

Если  $\Delta_2 = 0.2292 < \varepsilon = 0.25$ , то итерационный процесс заканчиваем.

Поскольку наименьшее значение функция  $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 4$  имеет в точке  $\tilde{b}_2 = 0.9708$ , то точкой минимума  $x^*$  данной функции на отрезке  $[0.6, 1.2]$  с точностью  $\varepsilon = 0.25$  является точка  $\tilde{b}_2 = 0.9708$ .

Таким образом, оптимальным решением задачи нахождения точки минимума функции  $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 4$  на отрезке  $[0.6, 1.2]$  с точностью  $\varepsilon = 0.25$  является точка



$x^* = 0.9708$ . При этом минимальное значение функции, достигаемое в этой точке, равно  $3.0008$ , т. е.  $f_{\min}(x) = f(0.9708) = 3.0008$ .

### Заключение

В работе рассмотрен метод золотого сечения решения задачи нахождения точки минимума функции на отрезке с заданной точностью, приведен алгоритм и пример его использования для решения поставленной задачи.

Материал, представленный в работе, может быть использован преподавателями при проведении практических и лабораторных занятий по теме «Метод золотого сечения», а также студентами для самостоятельной работы.

Приведенный в работе алгоритм решения задачи нахождения точки минимума функции на отрезке методом золотого сечения может помочь студентам получить навыки в разработке программного обеспечения для численного моделирования, а также способствовать выработке у них практических навыков применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности. Это существенно повышает заинтересованность студентов в освоении дисциплины и улучшает эффективность их обучения.

---

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Аракелян Г. Б. Математика и история золотого сечения. - М.: Логос, 2014, - 404 с.
  2. Васютинский Н. А. Золотая пропорция. - М.: Молодая гвардия, 1990. - 238 с.
  3. Аттетков А. В. Методы оптимизации: учебник для вузов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 440 с.
  4. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Лань, 2011 г. - 352 с.
  5. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учебное пособие. - М.: Физматлит, 2004. - 264 с.
- 

**Olga N. Bakhtiyarova,**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*  
[olga-bakh06@mail.ru](mailto:olga-bakh06@mail.ru)

**Inga V. Ptitsyna,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*  
[inpt@mail.ru](mailto:inpt@mail.ru)

**Marina I. Podzorova,**

*Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*  
[marinatichomirova@hotmail.com](mailto:marinatichomirova@hotmail.com)

**Some methodological aspects of the presentation of the topic "The Golden Ratio method"**

**Abstract.** One of the topics in the study of the discipline "Optimization Methods" is the "Golden Section Method". This discipline is included in the basic part of the educational training programs in several specialties at the Bauman Moscow State Technical University. The article discusses the formulation of the problem of finding the minimum point of a function on a segment with a given accuracy, the algorithm for solving this problem by the golden section method, an example of solving the problem using the considered algorithm is given. The purpose of the work: to illustrate the peculiarities of the golden section method for solving the problem of finding the minimum point of a function on a segment, the use of which allows to significantly reduce the amount of calculations when finding the minimum point of a function on a segment, especially with a high specified accuracy of determining this point. Successful mastering of this topic will contribute to the development of students' practical skills in applying optimization methods to solve theoretical and applied problems of professional activity. The result of the research is a material that can serve as a basis for the preparation of practical and laboratory classes and be of interest to students and teachers.

**Keywords:** unimodal function, segment division, golden ratio rule, optimization.

## МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА МОДУЛЬ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИЛЫ<sup>1</sup>

### Аннотация

Рассматривается движение инерционного объекта при управляемом скоростном маневре в плоскости. С помощью ограниченной по модулю силы тяги требуется перевести объект на заданную прямолинейную траекторию с максимизацией скорости в конце процесса. Актуальность обусловлена частым применением исследуемого закона дробно-линейного тангенса при управлении направлением тяги в задачах оптимизации режимов полёта и маневров в вертикальной плоскости, а также тем, что результаты могут быть применены для построения управления колесными системами, например мобильными роботами, при их движении в горизонтальной плоскости в условиях сухого трения. Целью является обобщение аналогичных исследований на случай ненулевой начальной скорости. В результате установлена связь между константами интегрирования в законе оптимального управления, найдено допустимое время движения, зависящее от начальных условий. При этом исследована взаимосвязь с двумя другими известными задачами оптимального управления, ранее поставленными и решенными для систем меньшей размерности. Содержание статьи будет полезно студентам, а также преподавателям магистратуры.

### Ключевые слова

оптимальное управление, принцип максимума, реактивная тяга, сухое трение, колесные системы

### АВТОРЫ

**Бектыбаева Мадина Тимуровна,**

инженер лаборатории механики систем,

ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук»;

студент, Инженерная академия ФГАОУ ВО «Российский университет  
дружбы народов имени Патриса Лумумбы», г. Москва  
madi8991@mail.ru

**Решмин Сергей Александрович,**

главный научный сотрудник лаборатории механики систем,

ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук»;

профессор

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана»;  
профессор, Инженерная академия ФГАОУ ВО «Российский университет  
дружбы народов имени Патриса Лумумбы», г. Москва  
reshmin@ipmnet.ru

### Введение

В данной работе в качестве объекта управления рассматривается материальная точка постоянной массы в плоскости при выведении её на прямолинейную траекторию

<sup>1</sup> Исследование выполнено в ИПМех РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00128).

(рис. 1). В общем случае начальные скорости не равны нулю. Задача состоит в управлении направлением тяги таким образом, чтобы за заданное конечное время перевести объект на указанную выбранную прямую и по возможности максимизировать продольную скорость. Поэтому при решении целесообразно использовать принцип максимума [1]. Ранее задачи оптимального управления с переменной реактивной тягой рассматривались в [2]. Оптимальное решение аналогичной задачи в случае нулевой начальной скорости приведено в [3, с. 78; 4, с. 115]. Далее в случае нулевой начальной скорости проведена аналогия с решением задачи о максимизации угла поворота вала электродвигателя [5, с. 166]. При ненулевой начальной скорости в предельном случае минимально допустимого времени установлена взаимосвязь с задачей быстрогодействия для объекта с одной степенью свободы [6, с. 236]. Путём решения указанной двойственной задачи выведено условие разрешимости для исходной задачи. Показано, что полученные результаты также применимы для систем с трением при движении в горизонтальной плоскости, тогда сила тяги должна быть ограничена максимальной величиной силы трения в соответствии с законом Амонтона-Кулона. Для численного решения задачи использовался программный код, написанный на языке Python с подключёнными математическими и научными библиотеками.

Материал статьи имеет прямое отношение к специальному годовому курсу по теории оптимального управления, который читался несколько лет на кафедре ФН-12 магистрам второго года обучения, также он используется для полугодового курса, читаемого в департаменте механики и процессов управления Инженерной академии РУДН. Курс включает в себя разные задачи оптимального управления механическими системами с ограниченной тягой: манёвр в вертикальной плоскости, максимизация угла поворота вала электродвигателя, задача быстрогодействия для инерционного объекта с одной степенью свободы. Первые две задачи рассматриваются на фиксированном интервале времени, в третьем время не фиксировано - оно минимизируется. В первой задаче размерность равна четырём (две степени свободы), во второй и третьей - двум (одна степень свободы). Несмотря на разноплановость задач, они оказались связаны между собой.

Отметим задачи управления полётом с учётом центростремительного ускорения, возникающего из-за действия силы тяжести; в них требуется минимизировать расход топлива - они решены в [7, 8, 9].

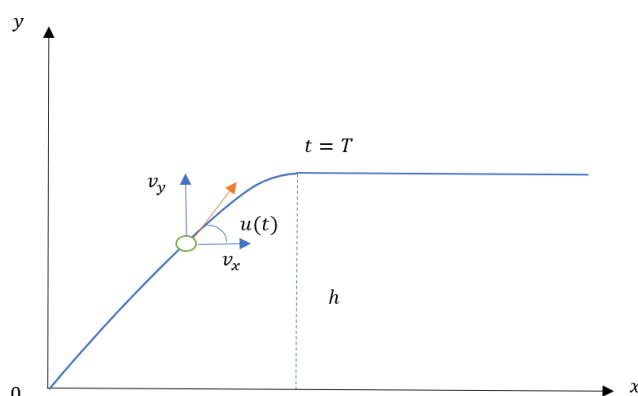


Рис. 1. Схема движения.

## Методология и результаты исследования

### Постановка задачи

Пусть рассматривается материальная точка под действием силы тяги. Движение описывается уравнениями (1) с граничными условиями (2):

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u(t), \quad \dot{v}_y = a \sin u(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad v_y(0) = v_{y0}, \quad (2)$$

$$y(T) = h, \quad v_y(T) = 0,$$

$$J = v_x(T) \rightarrow \max, \quad (3)$$

где  $x, y$  - координаты,  $v_x, v_y$  - соответствующие проекции скорости,  $a$  - постоянное ускорение системы,  $u(t)$  - направление тяги (искомая кусочно-непрерывная функция времени),  $v_{x0}$  - начальная горизонтальная проекция скорости,  $v_{y0}$  - начальная вертикальная проекция скорости,  $h$  - требуемая высота подъёма,  $v_x(T)$  - значение функционала в конечный момент времени  $T$ . Тяга велика, поэтому влиянием силы тяжести на динамику пренебрегли. Функционал, который надо максимизировать, указан в (3).

#### Методика решения задачи оптимального управления

Для решения надо переформулировать задачу таким образом, чтобы к ней можно было применить теорему принципа максимума для автономных систем с подвижными концами. Для этого вводятся две вспомогательные переменные:

$$\dot{x}_0 = -a \cos u, \quad x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_5 = 1, \quad x_5(0) = 0.$$

После подстановки переменных в (3) получим интегральный функционал типа Лагранжа:

$$J = x_0(\tau) = -a \int_0^\tau \cos u dt \rightarrow \min.$$

Требую выполнения дополнительного ограничения  $x_5(\tau) = T$ , считаем верхний предел интегрирования нефиксированным.

Введём обозначения:

$$h_1(y) = y - h, \quad h_1(v_y) = v_y, \quad h_3(x_5) = x_5 - T.$$

Тогда ограничения на правом конце траектории примут вид:

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0, \quad (t = \tau).$$

Далее вводятся сопряжённые переменные  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ , соответствующие всем фазовым переменным  $x_0, x_1, y, v_x, v_y, x_5$ . Функция Гамильтона примет следующий вид:

$$H = p_0(-a \cos u) + p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 a \cos u + p_4 a \sin u + p_5.$$

Полагая ради определённости  $p_0 = -1$ , находим максимум гамильтониана по  $u$ :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -(p_3 + 1)a \sin u + p_4 a \cos u = 0.$$

Отсюда можно найти закон управления

$$u = \arctg \frac{p_4}{p_3 + 1}, \quad (4)$$

именуемый законом дробно-линейного тангенса (bilinear tangent law).

Запишем сопряжённую систему:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial v_x} = -p_1, \quad \dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial v_y} = -p_2,$$

$$\dot{p}_5 = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = 0.$$

Условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x} = 0, & p_2(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial y} = \mu_1, \\ p_3(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial v_x} = 0, & p_4(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial v_y} = \mu_2, \\ p_5(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_5} = \mu_3. \end{aligned}$$

Интегрируя при начальных условиях, получим:

$$p_1(t) = 0, \quad p_2(t) = \mu_1, \quad p_3(t) = 0, \quad p_4(t) = -\mu_1(t-T) + \mu_2.$$

Тогда закон управления (4) принимает вид:

$$u = \arctg(-Ct + \operatorname{tg} u_0). \quad (5)$$

Преобразованный вид закона называется законом линейного тангенса [10].

#### Интегрирование системы

Интегрирование системы (1) при управлении (5) даёт следующие выражения для координат и скоростей:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} + \frac{a}{C} \ln \frac{(\sin u_0 + 1) \cos u}{(\sin u + 1) \cos u_0}, \\ v_y = v_{y0} + \frac{a}{C} (\sec u_0 - \sec u), \\ y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a}{2C^2} \left[ (\operatorname{tg} u_0 - \operatorname{tg} u) \sec u_0 - (\sec u_0 - \sec u) \operatorname{tg} u - \ln \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u} \right], \\ x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a}{2C^2} (\sec u_0 - \sec u - \operatorname{tg} u) \ln \frac{\operatorname{tg} u_0 + \sec u_0}{\operatorname{tg} u + \sec u}. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме этого, в ходе решения соотношений принципа максимума установлена связь между константами интегрирования в законе оптимального управления:

$$C = \frac{2a(aT \sin u_0 + v_{y0})}{\cos u_0 (a^2 T^2 - v_{y0}^2)}, \quad (u(0) = u_0). \quad (7)$$

Неизвестная постоянная  $u_0$  находилась из численного решения уравнения  $y(T) = h$ .

На рисунках 2, 3 предоставлены графики для  $y(t), v_x(t)$  при общем времени движения  $T = 25$  с и минимальном времени  $T_{\min} = 20$  с.

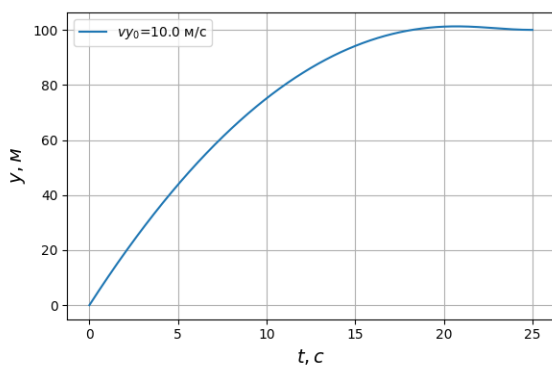


Рис. 2. График зависимости координаты  $y$  от времени  $t$  ( $a = 0.5 \text{ м/с}^2$ ,  $h = 100 \text{ м}$ ).

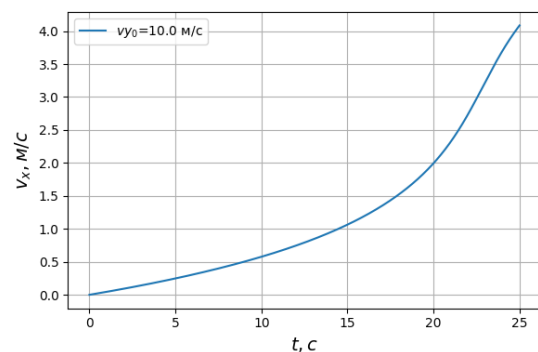


Рис. 3. График зависимости скорости  $v_x$  от времени  $t$  ( $a = 0.5 \text{ м/с}^2$ ,  $h = 100 \text{ м}$ ).

*Задача о повороте вала электродвигателя*

Задача максимизации продольной скорости схожа с известной задачей о повороте вала электродвигателя на максимальный угол:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 \equiv u, \quad |u| \leq b, \quad (8)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad (9)$$

$$x_2(T) = 0, \quad x_1(T) \rightarrow \max.$$

Здесь  $x_1$  - угол поворота вала двигателя,  $u$  - приведённый вращательный момент,  $T$  - заданное время окончания поворота. Требуется выбрать управление так, чтобы скорость вращения была равна нулю, а угол поворота был максимальным.

Воспользовавшись результатами из книги, касающимися структуры оптимального управления, найдём условие разрешимости задачи. Зафиксируем максимальный угол поворота в виде константы  $\varphi_{\max}$ . После чего решим систему (8) с граничными условиями (9) на двух участках времени с учётом того, что момент переключения

$$\tau = \frac{T}{2}:$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= bt + C_2, \quad C_2 = 0, \\ x_1(t) &= \frac{bt^2}{2} + C_1, \quad C_1 = 0, \end{aligned} \quad 0 \leq t < \frac{T}{2}, \quad (u = b).$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -bt + C_3, \quad C_3 = bT, \\ x_1(t) &= -\frac{bt^2}{2} + bTt + C_4, \end{aligned} \quad \frac{T}{2} \leq t < T, \quad (u = -b).$$

Последняя константа интегрирования определяется путём сшивки двух решений при

$$t = \frac{T}{2}:$$

$$\frac{bT^2}{8} = -\frac{bT^2}{8} + \frac{bT^2}{2} + C_4, \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\frac{bT^2}{4}.$$

Отсюда легко найти условие разрешимости, воспользовавшись граничными условиями:

$$x_1(T) \geq \varphi_{\max}, \quad \Rightarrow \quad -\frac{bT^2}{2} + bT^2 - \frac{bT^2}{4} \geq \varphi_{\max}, \quad \Rightarrow \quad T \geq T_{\min} = 2\sqrt{\frac{\varphi_{\max}}{b}}. \quad (10)$$

Переписывая условие (10) в терминах задачи управления тягой из предыдущего раздела, получим условие её разрешимости в случае нулевой начальной скорости:

$$T \geq T_{\min} = 2\sqrt{\frac{h}{a}}, \quad (v_{y0} = 0).$$

*Условие разрешимости в общем случае*

Рассмотрим предельный случай, когда  $T = T_{\min}$ , тогда проекция оптимальной тяги на ось  $x$  равна нулю. Выражение для проекции тяги на ось  $y$  строится так же, как и известное оптимальное решение в двухточечной задаче быстрогодействия при управлении инерционным объектом, движущимся вдоль одной прямой, и приведении его в заданную точку с нулевой скоростью:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v_y, \quad \dot{v}_y = u_y, \quad |u_y(t)| \leq a, \quad T \rightarrow \min, \\ y(0) &= y_0 = 0, \quad v_{y0}(0) = v_{y0}, \quad y(T) = h, \quad v_{y0}(T) = 0. \end{aligned}$$

Причем в указанной двойственной задаче ограниченное по модулю оптимальное управление релейно, принимает свои предельные значения и имеет не более одного

переключения. Для того, чтобы использовать это решение в нашей задаче с фиксированным временем окончания процесса при  $T = T_{\min}$ , нужно построить кривую переключений

$$\psi(y, v_y) = y - h + v_y \cdot \frac{|v_y|}{2a}$$

так, чтобы её центральная точка совпала с точкой  $(h, 0)$ . Тогда выражение для функции  $T_{\min}$  определяется так же, как и выражение для функции Беллмана в соответствующей двойственной задаче быстродействия [11]:

$$T_{\min} = \begin{cases} \frac{v_{y0}}{a} + \frac{2\sqrt{a(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}}}{a} & \text{при } \psi(y_0, v_{y0}) \geq 0, \\ -\frac{v_{y0}}{a} + \frac{2\sqrt{-a(y_0 - h) + \frac{v_{y0}^2}{2}}}{a} & \text{при } \psi(y_0, v_{y0}) < 0. \end{cases}$$

### Системы с трением

Результаты решения задачи выше можно применить к движению управляемого объекта в горизонтальной плоскости. Тогда сила тяги  $F$  ограничена максимальной величиной силы трения в соответствии с законом Амонтона-Кулона:

$$|F| \leq fF_N, \quad F_N = mg, \quad (11)$$

где  $f$  - коэффициент сухого трения,  $F_N$  - сила нормальной реакции,  $m$  - масса объекта,  $g$  - ускорение свободного падения. Из (11) следует ограничение на модуль возможного ускорения:

$$\left| \frac{F}{m} \right| \leq a, \quad a = fg. \quad (12)$$

Далее предполагаем, что движение происходит с проскальзыванием или на грани проскальзывания:

$$\left| \frac{F}{m} \right| = a.$$

При этом уравнения движения в горизонтальной плоскости в прямоугольной системе координат  $xu$  имеют вид (1), где  $u$  - угол, отсчитываемый от оси абсцисс, на который ограничений не накладываем и считаем кусочно-непрерывной функцией. Граничные условия и максимизируемый функционал могут быть заданы аналогично (2), (3).

### Заключение

Исследовано движение инерционного объекта при оптимальном скоростном маневре в вертикальной плоскости. В уравнениях проварьированы основные параметры (скорость  $v_{y0}$ , время движения  $T \geq T_{\min}$ ), исследовано допустимое время движения  $T_{\min}$ , зависящее от начальных условий, проинтегрирована система дифференциальных уравнений с учётом ненулевых начальных скоростей, найдено значение максимизируемой скорости  $v_x(T)$ . Также показано, что при нулевой начальной скорости  $v_{y0}$  решение задачи в предельном случае аналогично решению задачи о повороте вала электродвигателя на максимальный угол. В таком случае условие разрешимости имеет более простой вид.

Изложенный подход применим и к системе с трением, тогда объект движется в горизонтальной плоскости и описывается схожими уравнениями с соответствующими



граничными условиями. Методика будет полезна для студентов и преподавателей магистратуры.

#### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
2. Исаев В.К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет // Автомат. и телемех., 1961, Т. 22, Вып. 8, с. 986–1001.
3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
4. Лемак С.С. и др. Механика управляемых систем. Сборник задач. М.: Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2012. 121 с.
5. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
6. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971. 396 с.
7. Purani A., Patra S., Jose M. Modified Linear Tangent Guidance, 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.25694.87366.
8. Brusca R. Bilinear tangent yaw guidance // Guidance and Control Conference, 1979. p. 1730.
9. Federici L. et al. Integrated optimization of ascent trajectory and SRM design of multistage launch vehicles // arXiv preprint arXiv:1910.03268, 2019.
10. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. 407 с.
11. Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. 270 с.

**Madina T. Bektybaeva,**

*Engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS; Student, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia*

[madi8991@mail.ru](mailto:madi8991@mail.ru)

**Sergey A. Reshmin,**

*Principal Researcher, Institute for Problems in Mechanics named after A.Yu. Ishlinsky RAS; Professor, Bauman Moscow State Technical University; Professor, Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia*

[reshmin@ipmnet.ru](mailto:reshmin@ipmnet.ru)

**Methods for solving problems of optimal control of mechanical systems with a restriction on the modulus of the control force**

**Abstract.** The motion of an inertial object in a controlled high-speed maneuver in a plane is considered. With the help of a traction force limited in absolute value, it is required to transfer the object to a given rectilinear trajectory with maximization of the speed at the end of the process. The relevance is due to the frequent use of the studied bilinear tangent law when controlling the direction of thrust in the problems of optimizing flight modes and maneuvers in the vertical plane, as well as the fact that the results can be applied to build control of wheel systems, for example, mobile robots, when they move in a horizontal plane under dry friction conditions. The goal is to generalize similar studies to the case of a nonzero initial velocity. As a result, a connection was established between the integration constants in the optimal control law, and the admissible time of motion, depending on the initial conditions, was found. At the same time, the relationship with two other well-known optimal control problems, previously posed and solved for systems of lower dimension, was studied. The content of the article will be useful to students, as well as teachers of the magistracy.

**Keywords:** optimal control, maximum principle, jet thrust, dry friction, wheel systems.



## О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛУКОЛЕЦ

### Аннотация

Актуальность рассматриваемой методической задачи обусловлена тем, что в учебных планах студентов-программистов существенное место занимает теория полуколец и полумодулей, имеющая важные приложения в теории графов, автоматов и языков. В статье доказывается разрешимость систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах в рамках теории полумодулей. Вводится понятие непрерывного полумодуля над замкнутым полукольцом и доказывается разрешимость линейных уравнений и систем линейных уравнений в таких полумодулях. В качестве одного из примеров непрерывного полумодуля рассматривается полумодуль над полукольцом непрерывных эндоморфизмов некоторого коммутативного и идемпотентного моноида.

### Ключевые слова

полукольцо, замкнутое полукольцо, полумодуль, системы линейных уравнений

### АВТОР

**Белоусов Алексей Иванович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
al\_belous@bk.ru

### Введение

Теория полуколец - один из важнейших разделов общей алгебры, играющий ключевую роль в приложениях к теории графов, автоматов и языков, что имеет принципиальное значение для подготовки квалифицированных специалистов в области программных технологий.

Связанная с теорией полуколец теория полумодулей пока не отражена в учебной литературе столь же подробно, как теория полуколец, которой посвящена, в частности, глава в учебнике [1], а также дополняющая ее статья [2]. Помимо базового курса дискретной математики, где и излагаются элементы теории полуколец, важно ознакомить обучающихся (студентов, магистров и аспирантов) соответствующего профиля с более сложными и современными методами теории полуколец и полумодулей, которым посвящена очень обширная литература. Данная статья ориентирована прежде всего на таких обучающихся, проходящих курсы дискретной математики сверх базового.

Нет никакой возможности в рамках данной статьи дать сколько-нибудь подробный обзор результатов, полученных за последние годы в теории полуколец и полумодулей. Отметим только некоторые моменты, имеющие отношения к теме статьи.

Прежде всего отметим два обстоятельных обзора [3] и [4]. Среди работ, посвященных алгебраической теории полумодулей, укажем на статьи [5], [6] и [7].

Собственно, по узкой теме статьи следует указать на работу [8]. Но что касается самого понятия непрерывного полумодуля, как оно вводится в данной статье, а также проблематики разрешимости линейных уравнений в таких полумодулях, то в многочисленных источниках обсуждения этих вопросов найти не удалось.

Предлагаемая статья имеет следующую структуру.

В первом разделе дается определение непрерывного полумодуля и подробно анализируется важный частный случай такой структуры: полумодуль аддитивного моноида произвольного замкнутого идемпотентного полукольца над полукольцом квадратных матриц, элементы которых берутся в этом полукольце.

Во втором разделе рассматривается общий случай непрерывного полумодуля над произвольным полукольцом операторов и доказывается разрешимость линейных уравнений и систем линейных уравнений в таких полумодулях. Этот подход альтернативен к известному из литературы доказательству разрешимости линейных систем путем перехода к матричным уравнениям и позволяет взглянуть на проблему с более общих позиций. В частности, в рамках этого подхода можно анализировать системы с блочными матрицами операторов.

В третьем, заключительном, разделе рассматривается важный пример непрерывного полумодуля: полумодуль над полукольцом непрерывных эндоморфизмов некоторого коммутативного и идемпотентного моноида. Эта структура обобщает конструкции замкнутого полукольца как полумодуля над собой и полумодуля над полукольцом матриц.

### Методология и результаты исследования

Рассматриваемая в статье методика основана на известных из перечисленных источников концепциях изложения теории полуколец и полумодулей, как она представлена в современной научной и методической литературе с учетом особенностей аудитории, в которой читается курс.

Далее рассматриваются основные рубрики, по которым раскладывается теоретический материал.

#### *Полумодуль, непрерывный полумодуль*

Пусть  $\mathbf{M} = (M, +, 0)$  - коммутативный моноид, а  $\mathbf{S} = (S, \oplus, \cdot, \theta, 1)$  - полукольцо.

Тогда моноид  $\mathbf{M} = (M, +, 0)$  называется левым полумодулем над полукольцом  $\mathbf{S} = (S, \oplus, \cdot, \theta, 1)$ , если определено отображение  $\omega : S \times M \rightarrow M$  так, что выполняются следующие тождества:

- 1)  $\omega(\alpha \oplus \beta, a) = \omega(\alpha, a) + \omega(\beta, a)$
- 2)  $\omega(\alpha, a + b) = \omega(\alpha, a) + \omega(\alpha, b)$
- 3)  $\omega(\alpha \cdot \beta, a) = \omega(\alpha, \omega(\beta, a))$
- 4)  $\omega(1, a) = a$
- 5)  $\omega(\theta, a) = 0 = \omega(\alpha, 0)$

Будет удобно вместо  $\omega(\alpha, a)$  писать  $\alpha \circ a$  и называть это отображение левым умножением элемента моноида  $a$  на элемент полукольца  $\alpha$ . Тогда записанные выше тождества переписутся так:

- 1)  $(\alpha \oplus \beta) \circ a = \alpha \circ a + \beta \circ a$
- 2)  $\alpha \circ (a + b) = \alpha \circ a + \alpha \circ b$
- 3)  $(\alpha \cdot \beta) \circ a = \alpha \circ (\beta \circ a)$
- 4)  $1 \circ a = a$
- 5)  $\theta \circ a = 0 = \alpha \circ 0$

Также для упрощения записи операции сложения в моноиде и в полукольце, равно, как и нули этих структур, будем обозначать одинаково:  $+$  и  $0$ .

Аналогично может быть определен правый полумодуль над полукольцом с операцией правого умножения элемента моноида на элемент полукольца.

Полукольцо в определении полумодуля называют полукольцом операторов.

## Примеры

1) Любое полукольцо можно рассматривать как полумодуль над собой (и левый, и правый), беря в качестве моноида его аддитивный моноид.

2) Для произвольного полукольца  $S = (S, +, \cdot, 0, 1)$  рассмотрим моноид векторов из  $S^n$  с покомпонентным определением операции сложения, а в качестве полукольца операторов берем полукольцо квадратных матриц  $n$ -го порядка над исходным полукольцом. Рассматривая векторы из  $S^n$  как векторы-столбцы и понимая операцию умножения на оператор как умножение вектора на матрицу слева, получим, как нетрудно проверить, используя свойства матричных операций, левый полумодуль над матричным полукольцом. Правый полумодуль получим, если будем рассматривать векторы как строки, умножая их на матрицы справа.

Впредь, уже не оговаривая этого, будем считать операцию сложения и в моноиде  $M$ , и в полукольце  $S$  идемпотентной. Также в основном далее будем рассматривать левые полумодули.

Тогда в обеих структурах определяется отношение порядка следующим образом:

$$a \leq b \iff a + b = b.$$

(Левый) полумодуль  $M$  над полукольцом  $S$  называется *непрерывным*, если выполняются следующие условия:

1) в моноиде  $M$  любая последовательность имеет точную верхнюю грань по определенному выше отношению порядка (такой моноид, идемпотентный по условию, будем называть непрерывным);

2) полукольцо  $S$  замкнуто;

3) операция левого умножения элемента моноида  $M$  на элемент («оператор») полукольца  $S$  непрерывна, то есть

$$\alpha \circ \sup x_n = \sup(\alpha \circ x_n)$$

для любых  $\alpha \in S$  и последовательности  $x_n$  в  $M$ ;

4) для любой последовательности операторов (элементов полукольца)  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$  и любого элемента моноида  $b \in M$  имеет место равенство

$$\sup \alpha_n \circ b = \sup(\alpha_n \circ b)$$

Можно заметить, что (3) - это обобщение тождества дистрибутивности (2) в определении полумодуля на случай бесконечной суммы (то есть точной верхней грани последовательности). А условие (4) есть такое же обобщение тождества (1) в определении полумодуля.

Очевидно, что замкнутое полукольцо, рассмотренное как полумодуль (как левый, так и правый) над собой, непрерывно.

Рассмотрим тогда вопрос о непрерывности полумодуля векторов замкнутого полукольца над полукольцом квадратных матриц над исходным замкнутым полукольцом.

Как доказано в [9], матричное полукольцо над замкнутым полукольцом замкнуто, так что 2-е условие в определении непрерывного полумодуля выполняется.

Свойства обычной и бесконечной суммы (точной верхней грани) для замкнутого полукольца нетрудно распространить на векторы, понимая и порядок, и сложение покомпонентно.

Именно, точная верхняя грань последовательности векторов из  $S^n$  определяется следующим образом:

$$\sup \xi_m \iff \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m = \left( \sum_{m=0}^{\infty} x_1^{(m)}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_n^{(m)} \right)^T,$$

где  $\xi_m = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})^T \in S^n$  -  $m$ -й член последовательности векторов. Далее условимся записывать, если это не вредит точности, бесконечную сумму без указания пределов суммирования, полагая по умолчанию нижний предел равным нулю (и при необходимости указывая его, если он отличен от нуля).

**Замечание.** В терминах бесконечной суммы пп. (3) и (4) в определении непрерывного полумодуля запишутся так:

$$3а) \alpha \circ \sum x_n = \sum (\alpha \circ x_n),$$

$$3б) (\sum \alpha_n) \circ b = \sum (\alpha_n \circ b).$$

Для бесконечной суммы векторов легко обобщаются известные свойства бесконечной суммы замкнутого полукольца [10]:

$$1) \sum \xi_m + \sum \eta_m = \sum (\xi_m + \eta_m) \text{ для любых последовательностей } \xi_m \text{ и } \eta_m,$$

2)  $\sigma + \sum \xi_m = \sum (\sigma + \xi_m)$  для любого вектора  $\sigma$  и последовательности векторов  $\xi_m$  из  $S^n$ ,

3)  $\sum \xi_m = \sum \sigma_m$  для любой последовательности  $\xi_m$  и последовательности  $\sigma_m = \sum_{k=0}^m \xi_k$  ее частичных сумм.

В силу свойства (2) операция сложения векторов непрерывна.

Свойство (1) в более общем виде можно записать так:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l \xi_m^{(k)} = \sum_{k=1}^l \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m^{(k)} \text{ (супремум суммы последовательностей равен сумме их супремумов).}$$

Таким образом, выполнено условие (1) в определении непрерывного полумодуля. Заметим, что свойства бесконечной суммы, доказанные для замкнутого полукольца, выполняются и для моноида непрерывного полумодуля.

Остается доказать непрерывность умножения матрицы на вектор, а также «операторную» бесконечную дистрибутивность (4).

Для произвольной матрицы  $A$  над полукольцом  $S$  и произвольной последовательности векторов  $\xi_m$  из  $S^n$  имеем, полагая  $\bar{\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ :

$$\begin{aligned} A \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m &= A \bar{\xi} = \left( \sum_{k=1}^n a_{1k} \bar{x}_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk} \bar{x}_k \right)^T = \left( \sum_{k=1}^n a_{1k} \sum_{m=0}^{\infty} x_k^{(m)}, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk} \sum_{m=0}^{\infty} x_k^{(m)} \right)^T = \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{1k} x_k^{(m)}, \dots, \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{nk} x_k^{(m)} \right)^T = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k^{(m)}, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k^{(m)} \right)^T = \sum_{m=0}^{\infty} A \xi_m, \end{aligned}$$

что и требовалось. Мы использовали непрерывность умножения и сложения в замкнутом полукольце  $S$ .

Проверим теперь свойство (4) в определении непрерывного полумодуля.

Рассмотрим последовательность матриц  $\{A_m\}_{m \geq 0} = \{(a_{ij}^m)_{n \times n}\}_{m \geq 0}$ . Обозначим че-

рез  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  точную верхнюю грань этой последовательности, то есть  $A = \sum_{m=0}^{\infty} A_m$ ,

причем

$$a_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{ij}^{(m)} \text{ (для всех } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{)}.$$

Тогда, если  $\beta = (b_1, \dots, b_n)^T \in M^n$  и  $\gamma = A\beta$ , то

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{ik}^{(m)} \right) b_k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{\infty} a_{ik}^{(m)} b_k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(m)} b_k.$$

Отсюда следует, что  $A\beta = \left( \sum_{m=0}^{\infty} A_m \right) \beta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \beta$ , то есть условие (4) в определении непрерывного полумодуля выполнено.

Итак, левый полумодуль на множестве векторов аддитивного моноида замкнутого полукольца над полукольцом квадратных матриц над этим полукольцом непрерывен.

### *Решение линейных уравнений в левом непрерывном полумодуле*

Вернемся к общему случаю и рассмотрим в левом непрерывном полумодуле над замкнутым полукольцом линейное уравнение:

$$x = \alpha \circ x + b. \quad (1)$$

Напомним, что операции сложения в моноиде и в полукольце идемпотентны.

Поскольку в непрерывном полумодуле моноид является индуктивно упорядоченным множеством (см. [11] и [12]), а в силу доказанного выше и в силу определения непрерывного полумодуля правая часть уравнения (1) непрерывна, то наименьшее решение уравнения (1) существует и может быть найдено по известной формуле наименьшей неподвижной точки непрерывного отображения  $f$

$$x = \sup_{m \geq 0} f^{(m)}(\mathbf{0}),$$

где  $\mathbf{0}$  - наименьший элемент индуктивно упорядоченного множества. В данном случае это будет нуль моноида  $\mathbf{M}$ . Через  $f^{(m)}(x)$  обозначено  $m$ -кратное применение функции  $f$  к элементу  $x$ , причем  $f^{(0)}(x) = x$  (по определению).

В данном случае имеем последовательность (опуская нулевой член - нуль моноида):

$$f(0) = 0 \circ x + b = b,$$

$$f^{(2)}(0) = f(b) = \alpha \circ b + b = \alpha \circ b + 1 \circ b = (\alpha + 1) \circ b = (1 + \alpha) \circ b,$$

$$f^{(3)}(0) = f((1 + \alpha) \circ b) = \alpha \circ ((1 + \alpha) \circ b) + 1 \circ b = \alpha(1 + \alpha) \circ b + 1 \circ b = \\ = (1 + \alpha + \alpha^2) \circ b,$$

...

$$f^{(n)}(0) = (1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}) \circ b, n \geq 1$$

Последнее равенство легко доказать по индукции. Разумеется, необходимо использовать п. (3) в определении полумодуля.

Тогда наименьшее решение уравнения (1) запишется в виде:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} ((1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}) \circ b) = \sum_{n=0}^{\infty} ((1 + \alpha + \dots + \alpha^n) \circ b).$$

В силу операторной непрерывности (п. (4) в определении непрерывного полумодуля) и использованием свойства частичных сумм в замкнутых полукольцах получим:

$$x = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \right) \circ b = \alpha^* \circ b \quad (2)$$

Формула (2) обобщает известную формулу наименьшего решения праволинейного уравнения

$$x = ax + b$$

в произвольном замкнутом полукольце.

В случае полумодуля над полукольцом матриц формула (2) принимает вид:

$$\xi = A^* \beta$$

Это наименьшее решение уравнения

$$\xi = A\xi + \beta$$

относительно неизвестного вектора  $\xi$ .

Это и доказывает разрешимость системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

в произвольном замкнутом полукольце (если считать, что  $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ ).

Это доказательство альтернативно изложено в [13] доказательству через переход к матричным уравнениям. Оно сложнее, но и позволяет взглянуть на проблему с более общих позиций, позволяя доказать разрешимость линейных уравнений для произвольного замкнутого полукольца операторов.

Это обобщение распространяется и на системы линейных уравнений. А именно, переходя к полукольцу матриц над полукольцом операторов (замкнутому в силу замкнутости полукольца операторов), получим следующее векторно-матричное уравнение относительно неизвестного вектора  $\xi$ :

$$\xi = A \circ \xi + \beta,$$

где «действие» матрицы операторов  $A$  на вектор  $\xi$  естественно определить следующим образом:

$$A \circ \xi = \left( \sum_{k=1}^n a_{1k} \circ x_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk} \circ x_k \right)^T,$$

$$\text{где } \xi = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Тем самым мы переходим в полумодуль векторов  $M^n$  над полукольцом матриц операторов над полукольцом операторов  $\mathbf{S}$ . Непрерывность этого полумодуля легко доказать по аналогии с предыдущим.

Для примера рассмотрим систему 2-го порядка, в которой исходное полукольцо операторов есть полукольцо квадратных матриц некоторого (произвольного) порядка  $n$  над каким-то замкнутым полукольцом (см. выше пример 2):

$$\begin{cases} \xi_1 = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \beta_1 \\ \xi_2 = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + \beta_2 \end{cases}$$

Операторная матрица здесь - блочная матрица

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему методом последовательного исключения неизвестных, получим:

$$\xi_1 = A_{11}^*(A_{12}\xi_2 + \beta_1).$$

Подставляя это выражение вместо  $\xi_1$  во второе уравнение, после приведения подобных членов получим:

$$\xi_2 = (A_{21}A_{11}^*A_{12} + A_{22})\xi_2 + A_{11}^*\beta_1 + \beta_2,$$

откуда

$$\xi_2 = (A_{21}A_{11}^*A_{12} + A_{22})^*(A_{11}^*\beta_1 + \beta_2).$$

Подставляя полученное выражение в выражение для  $\xi_1$ , получим решение системы (эти выкладки мы опускаем).

В процессе вычислений необходимо вычислять итерации нескольких матриц (над замкнутым полукольцом). Как показано в [14], итерация произвольной матрицы  $A$  является решением матричного уравнения

$$X = AX + E$$

с единичной матрицей в качестве свободного члена. Матрица  $A^*$  вычисляется по столбцам посредством решения  $n$  систем линейных уравнений в «базовом» замкнутом полукольце (т.е. полукольце, из которого берутся элементы матриц). Как видно, решение подобных «метасистем» представляет немалые вычислительные затраты.

### Замечания

1) Корректность метода последовательного исключения неизвестных доказана в статье [15] для систем линейных уравнений в произвольном замкнутом полукольце. Это доказательство можно обобщить и на произвольные непрерывные полумодули. Но здесь требуется более подробное обсуждение вне рамок данной статьи.

2) Следует заметить также, что линейное уравнение вида (1) разрешимо для полумодуля, в котором не выполняется пункт (4) в определении непрерывного полумодуля. Можно назвать такой полумодуль *полунепрерывным*. Тогда решение будет иметь вид

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n \circ b),$$

причем элемент  $b$  нельзя вынести за бесконечную сумму.

### *Полумодуль над полукольцом непрерывных эндоморфизмов непрерывного моноида*

В заключение построим пример непрерывного полумодуля, который обобщает конструкции замкнутого полукольца как полумодуля над собой и полумодуля над полукольцом матриц.

Пусть  $\mathbf{M} = (M, +, 0)$  - непрерывный моноид. Определим множество  $End(M)$  всех непрерывных эндоморфизмов этого моноида, то есть всех непрерывных отображений  $f : M \rightarrow M$  таких, что для любых  $x, y \in M$  выполняется  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , и  $f(0) = 0$ .



Определяя сложение эндоморфизмов по формуле  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , умножение как композицию, покажем, что вместе с тождественным ( $\mathbf{I}$ ) и нулевым ( $\Theta$ ) автоморфизмами множество  $End(M)$  является полукольцом (идемпотентным). Сначала проверим сохранение свойства непрерывности (то, что сумма и композиция эндоморфизмов будут снова эндоморфизмами, очевидно).

Для произвольной последовательности  $x_n$  элементов моноида имеем:

$$(f + g)(\sum x_n) = f(\sum x_n) + g(\sum x_n) = \sum f(x_n) + \sum g(x_n) = \sum (f(x_n) + g(x_n)) = \sum (f + g)(x_n)$$

(использовано свойство (1) бесконечной суммы!).

Далее:

$$(f \circ g)(\sum x_n) = g(f(\sum x_n)) = g(\sum f(x_n)) = \sum g(f(x_n)) = \sum (f \circ g)(x_n).$$

Итак, сумма и композиция (произведение) непрерывных отображений непрерывны.

Выполнение аксиом полукольца очевидно в силу известных свойств операций сложения и композиции любых эндоморфизмов.

Итак, имеем полукольцо

$$\mathfrak{M} = (End(M), +, \circ, \Theta, \mathbf{I})$$

непрерывных эндоморфизмов непрерывного моноида  $\mathbf{M} = (M, +, 0)$ .

Структура полумодуля возникает благодаря тождествам:

- 1)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- 2)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- 3)  $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
- 4)  $\mathbf{I}(x) = x$
- 5)  $\Theta(x) = 0 = f(0)$  (для любого  $f \in End(M)$ )

**Замечание.** Этот полумодуль, строго говоря, следует считать правым ввиду п. (4). Но можно и переопределить запись композиции отображений, полагая  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . Тогда получим левый полумодуль.

Попробуем теперь «замкнуть» полукольцо  $\mathfrak{M}$ , определив для последовательности  $\{f_n\}$  непрерывных эндоморфизмов «предельный» эндоморфизм  $\sum f_n$ , полагая для любого  $x \in M$

$$(\sum f_n)(x) = \sum f_n(x),$$

что корректно ввиду непрерывности моноида  $\mathbf{M} = (M, +, 0)$ .

Необходимо тогда доказать непрерывность эндоморфизма  $\sum f_n$ .

Для произвольной последовательности  $\{x_m\}_{m \geq 0}$  элементов моноида  $M$  имеем:

$$(\sum_n f_n)(\sum_m x_m) = \sum_n f_n(\sum_m x_m) = \sum_n \sum_m f_n(x_m).$$

Под знаком двойной бесконечной суммы возникает «бесконечная матрица» с элементами  $f_n(x_m) \in M$ .

Но если дана произвольная бесконечная матрица  $\{a_{mn}\}_{m, n \in \mathbb{N}}$  элементов непрерывного моноида, то множество ее элементов представимо в виде счетного объединения как ее строк, так и столбцов. Тогда, в силу известного свойства бесконечных



сумм в замкнутых полукольцах (и их аддитивных моноидах, непрерывных по определению; см. [16], теорема 3.4) в любой двойной сумме  $\sum_m \sum_n a_{mn}$  можно изменить порядок суммирования, то есть

$$\sum_m \sum_n a_{mn} = \sum_n \sum_m a_{mn}.$$

Тогда

$$\left(\sum_n f_n\right)\left(\sum_m x_m\right) = \sum_n \sum_m f_n(x_m) = \sum_m \sum_n f_n(x_m) = \sum_m \left(\sum_n f_n\right)(x_m),$$

что и доказывает непрерывность предельного эндоморфизма  $\sum f_n$ .

Чтобы завершить доказательство замкнутости полукольца  $\mathfrak{M}$ , осталось проверить бесконечную дистрибутивность композиции непрерывных эндоморфизмов относительно их сложения, то есть доказать тождества

$$g \circ \sum f_n = \sum g \circ f_n$$

и

$$\left(\sum f_n\right) \circ g = \sum f_n \circ g.$$

Для первого имеем:

$$\left(g \circ \sum f_n\right)(x) = \left(\sum f_n\right)(g(x)) = \sum f_n(g(x)) = \sum (g \circ f_n)(x).$$

Второе тождество доказывается аналогично.

Свойства непрерывности полумодуля (3) и (4) следуют из непрерывности эндоморфизмов и определения точной верхней грани последовательности эндоморфизмов.

Итак, построен непрерывный полумодуль (левый или правый, в зависимости от записи композиции отображений) над полукольцом непрерывных автоморфизмов непрерывного моноида. Эта конструкция обобщает и конструкцию замкнутого полукольца как непрерывного полумодуля над собой, и конструкцию непрерывного полумодуля над полукольцом матриц.

### Заключение

Основной результат статьи - доказательство разрешимости систем линейных уравнений в замкнутых идемпотентных полукольцах на основе теории полумодулей и на основе введенного в статье понятия непрерывного полумодуля. Этот подход в плане методики сравнивается с другим подходом, основанным на переходе к матричным уравнениям. Несмотря на повышенную сложность предлагаемого в статье подхода, он обладает значительно большей общностью. Предлагаемая в статье последовательность изложения теории ориентирована на курсы повышенной трудности для тех, кто освоил базовый курс дискретной математики.

В плане развития полученных результатов было бы целесообразно рассмотреть разрешимость систем линейных уравнений в полунепрерывных полумодулях, а также дать подробное обоснование метода последовательного исключения неизвестных для решения систем линейных уравнений в общем случае полумодуля над произвольным полукольцом операторов.

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика // Учеб. для вузов. – 7-е изд. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. – 703 с.
2. Белоусов А.И. О некоторых свойствах полуколец // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2018. - №3. – С. 35-50.

3. Вечтомов Е.М., Чермных В.В. Основные направления развития теории полуколец // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика, механика, информатика. – 2021.- Вып. 4(41).- С. 4-40.
4. Ильин С.Н. О гомологической классификации полуколец // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2018. – Т. 158. – С. 3-22.
5. Bai R., Yang Y. Structure and Representation of Semimodules over Inclines // Annals of Pure and Applied Logic. – 2020.- №10. – P. 102-144.
6. Di Nola A., Lenzi G., Nam T.G. Ultramatricial Algebras over Commutative Chain Semirings and Application to MV-algebras //Forum Mathematicum. – 2020. - №2. – P. 287-305
7. Nazari R.R., Ghalandarzadeh S. On Fully Idempotent Semimodules // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. – 2019. - №1. – С. 39-51.
8. Jamshidvand S., Ghalanarzadeh S., Amiraslani A., Olia F. On the Maximal Solution of a Linear System over Tropical Semirings // Mathematical Sciences. – 2020. - №2. – P. 147-157.
9. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Указ. соч.
10. Белоусов А.И. Указ. соч.
11. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Указ. соч.
12. Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах изложения разделов теории множеств в курсе дискретной математики // Modern European Researches. – 2021. - №3 (Т.1). – С. 30-37.
13. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Указ. соч.
14. Там же
15. Белоусов А.И. Указ. соч. (2018)
16. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Указ. соч.

---

**Alexey I. Belousov,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[al\\_belous@bk.ru](mailto:al_belous@bk.ru)

**On some methodological issues of semirings theory treatment**

**Abstract.** The relevance of the considered methodological problem is due to the fact that the theory of semirings and semimodules, which has important applications in the theory of graphs, automata and languages, occupies a significant place in the curricula of student programmers.

The paper proves the solvability of systems of linear equations in closed semirings in the framework of the theory of semimodules. The concept of a continuous semimodule over a closed semiring is introduced and the solvability of linear equations and systems of linear equations in such semimodules is proved. As one of the examples of a continuous semimodule, we consider a semimodule over the semiring of continuous endomorphisms of some commutative and idempotent monoid.

**Keywords:** semiring, closed semiring, semimodule, systems of linear equations.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВТОРОГО РОДА»

### Аннотация

Знание поверхностных интегралов и умение их вычислять является одной из важных компетенций студентов инженерных специальностей вузов. Целью данной работы является рассмотрение методики изучения вычисления поверхностных интегралов второго рода. Для этого в работе рассмотрены различные методы вычисления поверхностных интегралов второго рода: через сведение к поверхностным интегралам первого рода, через проецирование поверхности на координатные плоскости, по формуле для случая явно заданной поверхности и по формуле Гаусса-Остроградского. Приводятся примеры вычисления одного и того же интеграла разными методами. Описывается возможность использования формулы Гаусса-Остроградского в случае незамкнутой поверхности. Работа будет полезна преподавателям и студентам вузов в процессе изучения данного раздела математики.

### Ключевые слова

поверхностный интеграл, поток векторного поля, формула Гаусса-Остроградского

### АВТОРЫ

**Бирюков Олег Николаевич,**

кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
onbiryukov@bmstu.ru

**Келдыш Елизавета Петровна,**

старший преподаватель  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
liza.keldysh@bmstu.ru

**Хасанов Наиль Алфатович,**

кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
nail\_khasanov@mail.ru

### Введение

Поверхностные интегралы представляют собой один из довольно сложных разделов математического анализа и теории поля. Знание поверхностных интегралов и умение их вычислять является одной из важных компетенций студентов инженерных специальностей вузов.

Определение и свойства поверхностных интегралов второго рода рассматриваются во множестве учебников и учебных пособий, например, в [1], [2], [3], [4], [5]. Однако, в учебниках, как правило, мало внимания уделяется непосредственно вычис-

лению поверхностных интегралов. Соответственно для преподавателя возникает методическая задача грамотно выстроить семинарское занятие на тему вычисления поверхностных интегралов, рассмотрев и сравнив различные способы их вычисления.

В данной работе подробно рассматриваются различные методы вычисления поверхностных интегралов второго рода. Кратко формулируется определение поверхностного интеграла второго рода и записываются все необходимые для его вычисления формулы. Приводятся примеры вычисления одного и того же интеграла разными методами, что будет полезно как преподавателям, так и студентам вузов в процессе изучения данного раздела математики.

### Методология и результаты исследования

Пусть в трёхмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана кусочно-гладкая двусторонняя ограниченная поверхность  $\Phi$  с кусочно-гладкой границей, и на поверхности  $\Phi$  определены три функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$ . Разобьём поверхность  $\Phi$  кусочно-гладкими кривыми на части  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  и в каждой части  $\Phi_i$ , где  $i = \overline{1, n}$ , выберем точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ . Зафиксируем одну из двух сторон поверхности  $\Phi$  или, что эквивалентно, зададим непрерывную функцию единичного вектора нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $\Phi$ , и обозначим через  $\vec{n}_i(\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$  значение функции единичного вектора нормали в точке  $M_i$ .

**Поверхностным интегралом второго рода** от функций  $P$ ,  $Q$  и  $R$  по поверхности  $\Phi$  в направлении вектора  $\vec{n}$  (или эквивалентно, по фиксированной стороне поверхности  $\Phi$ ) называется предел интегральных сумм вида

$$\sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i, z_i) \cos \alpha_i + Q(x_i, y_i, z_i) \cos \beta_i + R(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i) S(\Phi_i),$$

где  $S(\Phi_i)$  - площадь частичной поверхности  $\Phi_i$ , при стремлении диаметра разбиения поверхности  $\Phi$  (максимального среди диаметров частичных поверхностей  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ) к нулю при условии, что этот предел не зависит от выбора разбиений поверхности  $\Phi$  и выбора точек  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  на частичных поверхностях.

Обозначается:

$$\iint_{\Phi} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS.$$

Пусть в пространстве задано векторное поле  $\vec{v}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , координатными функциями которого являются функции  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Тогда рассматриваемый поверхностный интеграл также называется **поток** векторного поля  $\vec{v}$  через поверхность  $\Phi$  в направлении вектора  $\vec{n}$  (или эквивалентно, через заданную сторону поверхности  $\Phi$ ) и может быть записан с использованием скалярного произведения векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{n}$ :

$$\iint_{\Phi} \vec{v} \vec{n} dS. \quad (1)$$

Таким образом, поверхностный интеграл второго рода можно по формуле (1) вычислять как поверхностный интеграл первого рода.

Второй метод вычисления поверхностных интегралов второго рода заключается в рассмотрении проекций поверхности  $\Phi$  на координатные плоскости. Выражение  $|\cos \gamma| dS$  можно рассматривать как проекцию элемента площади  $dS$  на координатную плоскость  $Oxy$  и тем самым заменить в поверхностном интеграле  $\cos \gamma dS$  на элемент площади на плоскости  $Oxy$ , который записывается как  $dx dy$ . При этом если рассматривать полученный интеграл как двойной по области  $D$  изменения переменных  $x$  и  $y$ , то необходимо ещё учитывать знак направляющего косинуса  $\cos \gamma$ :

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D R(x, y, z) dx dy.$$

Аналогично,  $\cos \alpha dS$  заменяется на  $dy dz$  и  $\cos \beta dS$  - на  $dx dz$ :

$$\iint_{\Phi} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

Эта формула позволяет вычислять поверхностный интеграл второго рода как сумму трёх двойных интегралов.

Пусть поверхность  $\Phi$  задана явно как график функции  $z = f(x, y)$ , где  $(x, y) \in D$ . Тогда непрерывной функцией единичного вектора нормали, направленного под острым углом к оси  $Oz$ , будет

$$\vec{n} = \frac{-f'_x \vec{i} - f'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},$$

а дифференциал площади поверхности имеет вид

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

В этом случае переменные  $x$  и  $y$  можно считать криволинейными координатами на поверхности  $\Phi$ , и поверхностный интеграл по верхней стороне поверхности (полагая, что ось  $Oz$  направлена «вверх») можно переписать как двойной интеграл по области  $D$  на плоскости  $Oxy$ :

$$\iint_D \left( -P(x, y, f(x, y)) \cdot f'_x(x, y) - Q(x, y, f(x, y)) \cdot f'_y(x, y) + R(x, y, f(x, y)) \right) dx dy. \quad (2)$$

Если поверхность  $\Phi$  является границей некоторой объёмно односвязной области  $G$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  и функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  непрерывно дифференцируемы, то справедлива **формула Гаусса-Остроградского**:

$$\oiint_{\Phi} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_G (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz,$$

где поверхностный интеграл берётся в направлении вектора внешней нормали к области  $G$ . Выражение  $P'_x + Q'_y + R'_z$  называется **дивергенцией** векторного поля  $\vec{v}(P, Q, R)$  и обозначается  $\operatorname{div} \vec{v}$ .

**Пример.** Рассмотрим поверхностный интеграл

$$\oiint_{\Phi} x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

где  $\Phi$  - внешняя поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , т.е. вычислим поток векторного поля  $\vec{v}(x, y, z)$ , выходящий наружу из области, ограниченной сферой.

Как известно [2], если поверхность  $\Phi$  задана неявно уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , то непрерывной функцией единичного вектора нормали, направленного в часть пространства с положительными значениями функции  $F$ , будет

$$\vec{n} = \frac{F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}. \quad (3)$$

В нашем примере  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ , поэтому

$$\vec{n} = \frac{2x \vec{i} + 2y \vec{j} + 2z \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right),$$

Здесь использовано равенство  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Данный вектор  $\vec{n}$ , очевидно, направлен наружу области, ограниченной сферой, как и требуется. Отсюда по формуле (1) получаем, что искомый поверхностный интеграл равен

$$\oiint_{\Phi} x dy dz + y dx dz + z dx dy = \iint_{\Phi} \vec{v} \vec{n} dS = \iint_{\Phi} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} dS = a \iint_{\Phi} dS = 4\pi a^3.$$

Здесь  $\iint_{\Phi} dS$  равен площади сферы, т.е.  $4\pi a^2$ .

Найдём теперь этот же интеграл через проекции поверхности  $\Phi$  на координатные плоскости. Представим интеграл в виде суммы трёх интегралов

$$\oiint_{\Phi} x dy dz + \oiint_{\Phi} y dx dz + \oiint_{\Phi} z dx dy$$

и найдём последнее слагаемое. Для этого спроецируем сферу на плоскость  $Oxy$ .

Следует отдельно рассмотреть две полусферы  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  и  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , каждая из которых спроецируется в круг  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . При этом вектор внешней нормали  $\vec{n}$  к полусфере  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  образует острый угол с осью  $Oz$ , а вектор внешней нормали  $\vec{n}$  к полусфере  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  образует тупой угол с осью  $Oz$ . Поэтому при переходе от поверхностного интеграла к двойному в первом случае будет знак «плюс», а во втором случае - знак «минус».

$$\begin{aligned} \oiint_{\Phi} z dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy = \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Для вычисления этого двойного интеграла перейдём к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

$$2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

В полной аналогии находим поверхностные интегралы  $\oiint_{\Phi} x dy dz$  и  $\oiint_{\Phi} y dx dz$ , и в силу очевидной симметрии они также будут равны  $\frac{4}{3} \pi a^3$ . Так что окончательно

$$\oiint_{\Phi} x dy dz + \oiint_{\Phi} y dx dz + \oiint_{\Phi} z dx dy = 4\pi a^3.$$

Найдём теперь этот же интеграл ещё одним способом - с помощью формулы (2) и явное представление поверхности. Для явного задания сферы вновь потребуется разбить её на две полусферы  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  и  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . В первом случае имеем

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad f'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отсюда по формуле (2) получаем:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left( \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy = \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr = 2\pi a^3.$$

Аналогично, для другой полусферы:

$$f(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad f'_x = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Но теперь при переходе к двойному интегралу по формуле (2) нужно поставить знак «минус», поскольку интеграл находится по «нижней» стороне полусферы:

$$\begin{aligned}
& - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left( \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \frac{-y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} - \sqrt{a^2-x^2-y^2} \right) dx dy = \\
& = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2-r^2}} r dr = 2\pi a^3.
\end{aligned}$$

Складывая значения поверхностного интеграла по обоим полусферам, вновь получим  $4\pi a^3$ .

Наконец, есть ещё и четвёртый метод вычисления этого же поверхностного интеграла - по формуле Гаусса-Остроградского. Найдём дивергенцию векторного поля  $\vec{v}(x, y, z)$ :

$$\operatorname{div} \vec{v} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 3.$$

Тогда

$$\oiint_{\Phi} x dy dz + y dx dz + z dx dy = \iiint_G 3 dx dy dz = 3 \iiint_G dx dy dz = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3.$$

Здесь  $\iiint_G dx dy dz$  равен объёму шара, ограниченного сферой, т.е.  $\frac{4}{3} \pi a^3$ .  $\square$

Формулу Гаусса-Остроградского можно использовать и в случае незамкнутой поверхности. Для этого надо поверхность  $\Phi$ , по которой берётся поверхностный интеграл, дополнить до замкнутой поверхности. Проиллюстрируем это на следующем примере.

**Пример.** Найдём поверхностный интеграл

$$\iint_{\Phi} xz dy dz + yz dx dz + z^2 dx dy,$$

где  $\Phi$  - внешняя часть цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 1$ , вырезаемая плоскостями  $z = 0$  и  $z = 2$ . В данном случае поверхность незамкнутая, но её можно дополнить двумя кругами  $\Phi_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$  и  $\Phi_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}$ , и воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\iint_{\Phi \cup \Phi_0 \cup \Phi_1} xz dy dz + yz dx dz + z^2 dx dy = \iiint_G \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz.$$

Отсюда для искомого поверхностного интеграла получаем:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Phi} xz dy dz + yz dx dz + z^2 dx dy = \iiint_G \operatorname{div} \vec{v} dx dy dz - \\
& - \iint_{\Phi_0} xz dy dz + yz dx dz + z^2 dx dy - \iint_{\Phi_1} xz dy dz + yz dx dz + z^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Заметим, что здесь поток через  $\Phi_1$  берётся в направлении, совпадающем с направлением оси  $Oz$ , а поток через  $\Phi_0$  - в направлении, противоположном оси  $Oz$ .

Найдём дивергенцию

$$\operatorname{div} \vec{v} = (xz)'_x + (yz)'_y + (z^2)'_z = z + z + 2z = 4z$$

и тройной интеграл по области  $G$ , ограниченной поверхностями  $\Phi$ ,  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ :

$$\iiint_G 4z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^2 4z dz = 8\pi.$$

Круг  $\Phi_0$  расположен в координатной плоскости  $Oxy$ , поэтому в поверхностном интеграле по поверхности  $\Phi_0$  остаётся только третье слагаемое, которое к тому же равно нулю (так как  $z = 0$  во всех точках поверхности  $\Phi_0$ ):

$$\iint_{\Phi_0} xz dy dz + yz dx dz + z^2 dx dy = \iint_{\Phi_0} 0^2 dx dy = 0.$$

Круг  $\Phi_1$  расположен в плоскости  $z = 2$ , параллельной координатной плоскости  $Oxy$ , поэтому в поверхностном интеграле по поверхности  $\Phi_1$  также остаётся только третье слагаемое:



$$\iint_{\Phi_1} xz \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy = \iint_{\Phi_1} 2^2 \, dx \, dy = 4 \iint_{\Phi_1} dx \, dy = 4\pi.$$

Здесь интеграл  $\iint_{\Phi_1} dx \, dy$  равен площади круга  $\Phi_1$ , т.е.  $\pi$ .

Таким образом, окончательно получаем:

$$\iint_{\Phi} xz \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy = 8\pi - 0 - 4\pi = 4\pi.$$

Найдём этот же поверхностный интеграл по формуле (1) как поток векторного поля  $\vec{v}(xz, yz, z^2)$  через внешнюю часть цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 1$ , вырезаемую плоскостями  $z = 0$  и  $z = 2$ . Тогда единичным вектором нормали к поверхности по формуле (3) будет

$$\vec{n} = \frac{2x \vec{i} + 2y \vec{j} + 0 \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = (x, y, 0).$$

Здесь использовано равенство  $x^2 + y^2 = 1$ . По формуле (1) получаем

$$\iint_{\Phi} xz \, dy \, dz + yz \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy = \iint_{\Phi} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Phi} (xz \cdot x + yz \cdot y + z^2 \cdot 0) \, dS = \iint_{\Phi} z \, dS.$$

Параметризуем поверхность  $\Phi$  с помощью цилиндрических координат  $\varphi$  и  $z$  следующим образом:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{где } \varphi \in [0; 2\pi] \text{ и } z \in [0; 2],$$

и найдём дифференциал площади поверхности:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{\begin{vmatrix} y'_\varphi & z'_\varphi \\ y'_z & z'_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_z & z'_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi \\ x'_z & y'_z \end{vmatrix}^2} \, d\varphi \, dz = \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2} \, d\varphi \, dz = d\varphi \, dz. \end{aligned}$$

Тогда поверхностный интеграл сводится к двойному по координатам  $\varphi$  и  $z$  следующим образом:

$$\iint_{\Phi} z \, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 z \, dz = 4\pi. \quad \square$$

Формулу (2) вычисления поверхностного интеграла в случае явно заданной поверхности можно переписать для поверхности, являющейся графиком функции  $x = f(y, z)$ , где  $(y, z) \in D$ ,

$$\iint_D (P(f(y, z), y, z) - Q(f(y, z), y, z) \cdot f'_y(y, z) - R(f(y, z), y, z) \cdot f'_z(y, z)) \, dy \, dz. \quad (4)$$

Здесь поверхностный интеграл берётся по «верхней» стороне поверхности, полагая, что ось  $Ox$  направлена «вверх».

Аналогично, для «верхней» стороны поверхности, являющейся графиком функции  $y = f(x, z)$ , где  $(x, z) \in D$ , полагая, что ось  $Oy$  направлена «вверх»:

$$\iint_D (-P(x, f(x, z), z) \cdot f'_x(x, z) + Q(x, f(x, z), z) - R(x, f(x, z), z) \cdot f'_z(x, z)) \, dx \, dz. \quad (5)$$

Пример. Вычислим поверхностный интеграл

$$\iint_{\Phi} (x + y) \, dy \, dz + y \, dx \, dz + xyz \, dx \, dy,$$

где  $\Phi$  - треугольник  $ABC$ , расположенный в плоскости  $x + y = 1$ , с вершинами в точках  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  и  $C(0, 1, 1)$ , и поверхностный интеграл берётся в направлении вектора  $\vec{n}(1, 1, 0)$ . Поверхность  $\Phi$  может быть явно задана как график функции  $x = 1 - y$ , так что будем вычислять интеграл по формуле (4). Имеем:



$$f(y, z) = 1 - y, \quad f'_y = -1, \quad f'_z = 0.$$

Вектор  $\vec{n}(1, 1, 0)$  образует острый угол с осью  $Ox$ , так что при переходе к двойному интегралу по формуле (4) перед интегралом нужно оставить знак «плюс»:

$$\iint_n ((x + y) - y \cdot (-1)) dy dz = \iint_D (y + 1) dy dz.$$

Здесь использовано равенство  $x + y = 1$ .

Для вычисления двойного интеграла спроецируем треугольник  $ABC$  на координатную плоскость  $Oyz$ . Получим треугольник  $OBC$ , где точка  $O(0, 0, 0)$  - начало координат. Поэтому двойной интеграл запишется в виде повторного следующим образом:

$$\int_0^1 dy \int_0^y (y + 1) dz = \int_0^1 (y^2 + y) dy = \frac{5}{6}.$$

Рассматриваемый поверхностный интеграл можно вычислить иначе, задав поверхность  $\Phi$  как график функции  $y = 1 - x$  и используя формулу (5). Тогда:

$$f(x, z) = 1 - x, \quad f'_x = -1, \quad f'_z = 0.$$

Вектор  $\vec{n}(1, 1, 0)$  образует острый угол с осью  $Oy$ , так что при переходе к двойному интегралу по формуле (4) перед интегралом нужно оставить знак «плюс»:

$$\iint_n (-(x + y)(-1) + y) dy dz = \iint_D (2 - x) dy dz.$$

Здесь использовано равенство  $y = 1 - x$ .

Для вычисления двойного интеграла спроецируем треугольник  $ABC$  на координатную плоскость  $Oxz$ . Получим треугольник  $AOM$ , где точка  $M(0, 0, 1)$ . Поэтому двойной интеграл запишется в виде повторного следующим образом:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2 - x) dz = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx = \frac{5}{6}. \quad \square$$

### Заключение

В данной статье рассмотрены разные способы нахождения поверхностных интегралов второго рода. Для каждого интеграла приведено по несколько вариантов его вычисления, что позволяет сравнить разные методы и формулы и для каждого конкретного интеграла выбрать наиболее простой путь решения. Рассмотренные в работе примеры помогут преподавателю провести семинарское занятие по этой теме. При этом важно в процессе проведения занятия не только приводить правильные решения, но и указывать на типичные ошибки такие, как неверное использование формулы Гаусса-Остроградского в случае незамкнутой поверхности или забывание про знак «минус» при переходе от поверхностного интеграла к двойному при проецировании поверхности на координатную плоскость или при использовании формулы для явно заданной поверхности.

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 608 с.
2. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. III / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 728 с.
4. Зорич В.А. Математический анализ: Учебник. Ч. II. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 640 с.  
Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 424 с.

**Oleg N. Biryukov,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

onbiryukov@bmstu.ru

**Elizaveta P. Keldysh,**

*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

liza.keldysh@bmstu.ru

**Nail A. Khasanov,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

nail\_khasanov@mail.ru

**Methodological aspects of studying the topic of calculating surface integrals of the second kind**

**Abstract.** Knowledge of surface integrals and the ability to calculate them is one of the important competencies of engineering students at universities. The purpose of this work is to consider the methodology for studying the calculation of surface integrals of the second kind. For this, various methods for calculating surface integrals of the second kind are considered: through reduction to surface integrals of the first kind, through the projection of the surface onto coordinate planes, by the formula for the case of an explicitly given surface, and by the Gauss-Ostrogradsky formula. Examples of calculation of the same integral by different methods are given. The possibility of using the Gauss-Ostrogradsky formula in the case of an open surface is described. The work will be useful to teachers and university students in the process of studying this section of mathematics.

**Keywords:** surface integral, vector field flow, Gauss-Ostrogradsky formula.

## МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МЕТОДА ОСТРОГРАДСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

### Аннотация

Цель настоящей работы – помочь в формировании у студентов навыков интегрирования рациональных дробей, а также их применения к решению задач. Преимущество метода Остроградского, рассматриваемого в работе, состоит в том, что в случае кратных корней знаменателя он позволяет выделить рациональную часть интеграла от правильной дроби алгебраическим путём, избегая громоздких вычислений. Материалы статьи могут быть полезны для самостоятельной работы студентов, а также преподавателям при подготовке к проведению практических занятий.

### Ключевые слова

рациональная функция, правильная дробь, метод Остроградского

### АВТОРЫ

**Велищанский Михаил Александрович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
velmiha@yandex.ru

**Кандаурова Ирина Евгеньевна,**  
старший преподаватель  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
iriskan07@gmail.com

**Марченко Владимир Викторович,**  
старший преподаватель  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
wmarchenko@rambler.ru

### Введение

Одной из задач курса математического анализа является изучение классов функций, интегралы от которых *берутся в конечном виде*, т.е. могут быть выражены через элементарные функции с помощью конечного количества арифметических операций и композиций (взятие функций от функций). Одним из таких классов является класс рациональных функций. Более того, известно, что любой такой интеграл выражается через рациональные функции, логарифм и арктангенс. Однако конкретные вычисления, ведущие к верному результату, могут быть различными. Вполне естественно, среди допустимых способов интегрирования наибольший интерес представляют наименее громоздкие.

Одной из важнейших теорем курса алгебры в данном случае является утверждение о том, что каждая правильная дробь может быть представлена в виде суммы конечного количества простых дробей, т.е. дробей следующих четырех типов:

$$1. \frac{A}{(x-a)}, \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k}, \quad 3. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)}, \quad 4. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где  $A, M, N, a, p, q$  - вещественные числа,  $k$  и  $m$  - целые числа, большие 1.

Предполагается, что трехчлен  $x^2+px+q$  не имеет вещественных корней, т.е.  $p^2-4q < 0$ .

Первообразные дробей 1-го и 3-го типов суть трансцендентные функции вида  $A \ln(a_1x+a_2) + B \operatorname{arctg}(b_1x+b_2) + C$ . Первообразная элементарной дроби 2-го типа является рациональной дробью; первообразная элементарной дроби 4-го типа может быть представлена в виде суммы правильной рациональной дроби и, возможно, трансцендентной функции, вида  $B \operatorname{arctg}(b_1x+b_2) + C$  являющейся первообразной от дроби 3-го типа (подробности см. в [1]).

В случае неправильной дроби следует предварительно выделить целую часть.

Таким образом, с принципиальной точки зрения интегрирование любой рациональной функции в конечном виде - разрешимая задача. Однако в тех случаях, когда знаменатель дроби имеет кратные корни (действительные или мнимые), с технической точки зрения задача может представлять трудности, связанные с громоздкостью вычислений. Существует метод выделения рациональной части, позволяющий в указанных случаях существенно упростить выкладки, - метод Остроградского. Его описание и примеры применения будут приведены ниже.

### Методология и результаты исследования

#### Вывод формулы

Итак, первообразная любой рациональной дроби представима, вообще говоря, в виде суммы рациональной дроби (алгебраическая часть) и трансцендентной функции, являющейся первообразной от суммы дробей вида  $\frac{1}{x-a}$  и  $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ ,  $p^2-4q < 0$ .

Таким образом, если  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная рациональная дробь, и

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_n)^{k_n} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_lx+q_l)^{m_l} -$$

разложение ее знаменателя на произведение линейных и квадратичных сомножителей, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left( \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-a_k} + \sum_{j=1}^l \frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j} \right) dx.$$

Отсюда, произведя под знаком интеграла сложение дробей, имеем

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (1)$$

где  $Q_2(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)(x^2+p_1x+q_1) \dots (x^2+p_lx+q_l)$ .

Из формул

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad (n \neq 1),$$

и

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2(n+1)a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} + \frac{2n+1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad n=1, 2, \dots,$$

следует, что многочлен  $Q_1(x)$  имеет вид

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{k_1-1} \dots (x - a_n)^{k_n-1} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-1} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{m_l-1},$$

и, следовательно,  $Q_1(x)$  является наибольшим общим делителем (НОД) многочлена  $Q(x)$  и его производной  $Q'(x)$ .

Полученная формула (1) называется формулой Остроградского.

### Нахождение коэффициентов

Второе слагаемое правой части формулы (1) называется *трансцендентной частью* интеграла  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , так как всякая первообразная дроби  $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$  с точностью до константы есть линейная комбинация логарифмов и арктангенсов от рациональных функций, и, следовательно является трансцендентной функцией. Первое слагаемое называется *алгебраической частью*, оно может быть найдено чисто алгебраическим путем, если известны многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$  (а, значит и  $Q'(x)$ ), то есть без интегрирования каких-либо функций. Действительно, так как многочлен  $Q_1(x)$  является НОД( $Q(x), Q'(x)$ ), то он всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида, тем самым, для отыскания многочлена  $Q_1(x)$  не требуется значений корней многочлена  $Q(x)$ . Однако, если известны корни многочлена  $Q(x)$ , а следовательно, и его разложения на простые множители вида  $(x - a_i)^{k_i}$ ,  $(x^2 + p_lx + q_l)^{m_j}$ , то многочлен  $Q_1(x)$  сразу можно выписать в виде разложения на линейные и квадратичные множители. Многочлен  $Q_2(x)$  находим как частное от деления  $Q(x)$  на  $Q_1(x)$ .

Осталось найти многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$ . Для их отыскания применим *метод неопределенных коэффициентов*. Обозначим степень многочлена  $Q_1(x)$  через  $n_1$ , а степень многочлена  $Q_2(x)$  - через  $n_2$ . Тогда, из равенства

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x) \quad (2)$$

получим  $n = n_1 + n_2$ . В силу того, что дроби  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  и  $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$  - правильные, степени многочленов  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  соответственно не выше, чем  $n_1 - 1$  и  $n_2 - 1$ . Следовательно, у этих многочленов число отличных от нуля коэффициентов не превышает  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно, а значит, число неизвестных коэффициентов равно  $n_1 + n_2$ . Дифференцируя первообразные, входящие в обе части формулы (1), получаем соотношение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right) + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Заметим, что

$$\frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} = \frac{P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)R(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}, \quad (3)$$

где  $R(x) = \frac{Q_1'Q_2(x)}{Q_1(x)}$ .

**Утверждение.**  $R(x)$  является многочленом.

**Доказательство.** Действительно, если  $z$  - корень многочлена  $Q_1(x)$  кратности  $k$ , то, следовательно,  $z$  - корень кратности  $k-1$  для производной  $Q_1'(x)$  и простым корнем многочлена  $Q_2(x)$ , поэтому в этом случае  $z$  является и корнем кратности  $k$  для многочлена  $Q_1(x)Q_2(x)$ . Из курса алгебры известно, что любой многочлен степени  $n$  можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$P_n(x) = a_n(x-z_1)^{k_1}(x-z_2)^{k_2} \dots (x-z_r)^{k_n},$$

где  $z_1, \dots, z_r$  - различные корни многочлена (вообще говоря, комплексные);  $k_i, i = \overline{1, n}$  - их кратности. Следовательно, многочлен  $Q_1(x)Q_2(x)$  нацело делится на многочлен  $Q_1(x)$ . Таким образом, доказано, что  $R(x)$  также является многочленом.

Итак, из (2) и (3) имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)R(x)}{Q(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

откуда

$$P(x) = P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)R(x) + P_2(x)Q_1(x). \quad (4)$$

Многочлен  $P(x)$  имеет степень не выше  $n-1$  (так как  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная

дробь). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $k, k = \overline{0, n-1}$ , переменного  $x$  в обеих частях равенства (4), получим  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно  $n$  неизвестных. Выше мы обсудили, что многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  всегда (в частности, при любом фиксированном многочлене  $Q(x)$  и при любом многочлене  $P(x)$  степени, не превышающей  $n-1$ ) существуют. Поэтому полученная система линейных алгебраических уравнений имеет решение при любой правой части. Отсюда следует, что определитель этой системы не равен нулю, а, следовательно, про рассматриваемую систему можно сказать, что она не только имеет решение, но что оно единственно.

Таким образом, не только получен метод для определения неизвестных коэффициентов в формуле (1), но и доказана единственность этого представления.

Формула (1) сводит, вообще говоря, задачу интегрирования любой правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, у которой знаменатель  $Q(x)$  имеет только простые корни. С помощью этой формулы при интегрировании правильной рациональной дроби можно найти алгебраическую часть

интеграла  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  указанным выше способом, а затем проинтегрировать более простую рациональную дробь  $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ .

Далее рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение рассмотренного метода.

**Пример 1.** Вычислим интеграл

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} dx.$$

Согласно формуле (1)

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} dx = \frac{Kx^3 + Lx^2 + Mx + N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2 + lx + m}{(1-x)(1+x^2)} dx,$$

поэтому,

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left( \frac{Kx^3 + Lx^2 + Mx + N}{(1-x)^2(1+x^2)} \right)' + \frac{kx^2 + lx + m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Произведя дифференцирование, избавляясь от знаменателей и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему

$$\begin{cases} k = 0, \\ K - 2k + l = 0, \\ K + 2L + 2k - 2l + m = 1, \\ -K + 3M - 2k + 2l - 2m = 2, \\ 3K - M + 4N + k - 2l + 2m = -2, \\ 2L + M - 2N + l - 2m = 1, \\ M + 2N + m = 0. \end{cases}$$

Решая её, находим

$$K = \frac{1}{2}, L = -\frac{1}{2}, M = \frac{3}{2}, N = -1, k = 0, l = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислим интеграл

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

Согласно формуле (1):

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} dx,$$

и, как следствие, имеем:

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \left( \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} \right)' + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

Тогда выполняя операцию дифференцирования и приводя правую часть последнего равенства к общему знаменателю, получаем следующее тождество для определения неизвестных коэффициентов

$$x^2 = A(x^2 + 2x + 2) - (Ax + B)(2x + 2) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2).$$

Из данного тождества получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C = 0, \\ -A + 2C + D = 1, \\ -2B + 2C + 2D = 0, \\ 2A - 2B + 2D = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще один вариант вычисления данного интеграла, основанный на разложении правильной рациональной дроби в сумму простых дробей:

$$\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{(M_1x + N_1)(x^2 + 2x + 2) + M_2x + N_2}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Отсюда

$$(M_1x + N_1)(x^2 + 2x + 2) + M_2x + N_2 = x^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим:

$$\begin{cases} M_1 = 0, \\ 2M_1 + N_1 = 1, \\ 2M_1 + 2N_1 + M_2 = 0, \\ 2N_1 + N_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$M_1 = 0, \quad N_1 = 1, \quad M_2 = -2, \quad N_2 = -2.$$

В результате исходный интеграл представляется в виде суммы двух интегралов

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \left( \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \right) dx.$$

На первый взгляд интеграл не стал проще, однако он уже может быть достаточно легко вычислен:



$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \left( \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{-2x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \right) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx - \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1) - \ln(x^2 + 2x + 2) + C.$$

В данном примере оба метода оказались примерно одинаковы по «трудозатратам». Тем не менее, в общем случае метод Остроградского является более предпочтительным в случае кратных корней знаменателя, что и демонстрирует следующий пример.

### Пример 3.

Вычислим интеграл

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 1)^2}.$$

Применяя метод Остроградского, получим

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + 1} + D \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex + F}{x^2 - x + 1} dx.$$

Дифференцируя обе части неравенства и приводя к общему знаменателю, получаем тождество для определения неизвестных коэффициентов

$$1 = -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) + (Ex + F)(x^4 + x^3 + x + 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях этого тождества, получаем систему

$$\begin{cases} D + E = 0, \\ -A - D + E + F = 0, \\ -2B + D + F = 0, \\ -3C + D + E = 0, \\ 2A - D + E + F = 0, \\ B + D + F = 1, \end{cases}$$

решая которую, получаем

$$A = C = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad D = -E = \frac{2}{9}, \quad F = \frac{4}{9}.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x}{3(x^3 + 1)} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{9} \int \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= \frac{x}{3(x^3 + 1)} + \frac{2}{9} \ln|x+1| - \frac{2}{9} \left( \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \right) =$$

$$= \frac{x}{3(x^3 + 1)} + \frac{1}{9} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} \right| + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \quad x \neq -1.$$

Рассмотрим теперь решение данного примера при помощи разложения правильной рациональной дроби в сумму простых дробей. Имеем

$$\frac{x}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю получаем следующее равенство для определения неизвестных коэффициентов

$$x = A + B + D + F + (-A - 2B + C + D + E + 2F)x + (A + 3B + C + 2E + F)x^2 + (A - 2B + D + E)x^3 + (-A + B + C + D)x^4 + (A + C)x^5.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях этого тождества, получаем систему

$$\begin{cases} A + B + D + F = 0, \\ -A - 2B + C + D + E + 2F = 1, \\ A + 3B + C + 2E + F = 0, \\ A - 2B + D + E = 0, \\ -A + B + C + D = 0, \\ A + C = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем

$$A = B = D = -\frac{1}{9}, C = \frac{1}{9}, E = 0, F = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, исходный интеграл представляется в виде суммы следующих четырех интегралов

$$\int \frac{xdx}{(x^3+1)^2} = -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{9} \int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

Первые три интеграла вычисляются достаточно просто, аналогично случаю с использованием метода Остроградского. Однако вычисление последнего интеграла носит итеративный характер и по трудоемкости сопоставим со всеми предыдущими вычислениями. В рассмотренном случае метод Остроградского позволяет вычислить интеграл более просто, нежели использование метода разложения на простые дроби.

### Заключение

В работе разобран метод Остроградского выделения рациональной части интеграла от правильной дроби. При обучении студентов интегрированию особенно важно выбирать наименее громоздкие способы решения. Описанный метод - в случае кратных корней знаменателя - позволяет быстрее, по сравнению с «классическим» методом, решать поставленную задачу, переводя всю тяжесть решения на чисто алгебраический язык. В конце приведены примеры использования метода.

В заключение дадим краткую историческую справку.

Указанный метод был впервые описан русским математиком М. В. Остроградским в его работе на французском языке [2] (русский перевод см. в [3]) и в русскоязычной литературе по праву носит имя своего изобретателя. Однако, несколькими десятилетиями позже, в 1872 году, тот же метод был описан в четырёхстраничной заметке [4] французского математика Ш. Эрмита. И в англоязычной литературе его, как правило, называют методом Эрмита или Остроградского - Эрмита, хотя первенство русского математика и не оспаривается. Для примера см. [5, 6, 7].

---

**ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ**

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. M. Ostrogradsky. De l'intégration des fractions rationnelles. Bull. classe phys.-math. Acad. Impériale des Sciences Saint-Pétersbourg, 4:145–167, 286–300, 1845.
3. М. В. Остроградский. Об интегрировании рациональных дробей. Избранные труды. Издательство АН СССР. – М., 1958.
4. Ch. Hermite. Sur l'intégration des fractions rationnelles. Ann. Sci. École Norm. Sup.(2), 1:215–218, 1872.
5. A. A. Adams. Definite Integration of Parametric Rational Functions: Applying a DITLU. <https://zenodo.org/record/810877#.ZDmZlnZBzMU>.
6. A. Bostan, F. Chyzak, P. Lairez, B. Salvy. Generalized Hermite Reduction, Creative Telescoping and Definite Integration of D-Finite Functions. DOI: 10.1145/3208976.3208992.
7. K. O. Geddes, S. R. Czapor, G. Labahn. Algorithms for Computer Algebra. Kluwer, 1992.

---

**Mikhail A. Velishchanskiy,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*  
[velmiha@yandex.ru](mailto:velmiha@yandex.ru)

**Irina E. Kandaurova,**

*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*  
[iriskan07@gmail.com](mailto:iriskan07@gmail.com)

**Vladimir V. Marchenko,**

*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*  
[vmarchenko@rambler.ru](mailto:vmarchenko@rambler.ru)

**Methodological aspects of the Ostrogradsky method for integration of rational functions**

**Abstract.** The purpose of the present paper is to help develop students' skills of integrating rational fractions, as well as their application for problem solving. The advantage of the Ostrogradsky method considered in the paper is that, in case of repeated roots of the denominator, it allows to separate the rational part of an integral of a proper fraction algebraically, avoiding cumbersome calculations. The materials of the paper can be useful for students' self-work as well as for teachers during the preparation for classes.

**Keywords:** rational function, proper fraction, Ostrogradsky method.

## РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ

### Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена необходимостью развития и совершенствования у студентов навыка применения изученных математических методов к решению прикладных технических задач, что является очень важным в деле подготовки будущего специалиста. Так, в процессе научно-производственной практики студенты и аспиранты работали над проблемой повышения грузоподъемности стеллажей хранения изделий ракетной техники. Изучение теоретических источников, проведение опытно-экспериментальной работы позволили говорить об эффективности метода конечных элементов в решении указанной задачи. Кроме того, современные требования к формированию и развитию профессиональной и математической культуры будущего инженера также выступают одной из составляющих актуальности указанной проблемы. Содержание статьи будет интересно преподавателям, аспирантам, студентам, старшеклассникам.

### Ключевые слова

преподавание математики в высшей школе, метод конечных элементов, стеллажи для ракетной техники

### АВТОРЫ

**Вергазова Ольга Бухтияровна,**  
кандидат философских наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
vergazova@bmstu.ru

**Королев Евгений Алексеевич,**  
аспирант  
ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный  
государственный технический университет», г. Москва  
evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

**Силин Иван Дмитриевич,**  
аспирант  
ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный  
государственный технический университет», г. Москва  
Vsilin9@gmail.com

### Введение

Качественное освоение любой учебной дисциплины напрямую зависит от осознания студентом важности изучаемого теоретического материала в его будущей профессиональной деятельности. В ходе научно-производственной практики перед студентами была поставлена задача повышения грузоподъемности стеллажей, применяемых в ракетной и оборонной отраслях. Повышение грузоподъемности не должно было повлиять на надежность стеллажа. Необходимо было усовершенствовать конструкцию

так, чтобы изделия ракетной техники были надежно закреплены с целью избежать их повреждения при хранении, обслуживании и транспортировке.

Рассмотрев все условия задачи, студенты пришли к выводу, что необходимо провести прочностный расчет в случае, когда разные элементы стеллажа изготовлены из различных материалов. В результате изучения теоретических источников был выбран метод конечных элементов (МКЭ).

### Методология и результаты исследования

Метод конечных элементов (МКЭ) имеет глубокие теоретические обоснования и применяется для решения весьма широкого круга современных научных проблем. Например, с его помощью изучают:

- стационарные задачи распространения тепла, диффузии, распределения электрического поля, другие задачи теории поля;
- задачи гидромеханики (течение жидкости в пористой среде);
- задачи механики и прочности, возникающие при проектировании самолётов, ракет и различных пространственных оболочек.

Идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину (давление, температура, перемещение и т. д.) можно аппроксимировать дискретной моделью, построенной на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Такие кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области. В общем случае эта величина заранее неизвестна. Однако для построения дискретной модели удобно считать ее известной в каждой внутренней точке области.

Основная концепция метода конечных элементов при построении дискретной модели непрерывной величины состоит в следующем.

1. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек, которые называются узловыми (или просто узлами).

2. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.

3. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами (или конечными элементами). Такие элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

4. Непрерывная величина аппроксимируется (заменяется) на каждом элементе полиномом (или какой-либо другой функцией), который определяется с помощью узловых значений этой величины. Для каждого элемента определяется свой многочлен, который подбирается таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента. Такой полином называют ещё функцией элемента.

Среди ключевых преимуществ МКЭ можно выделить следующие.

1) Свойства материалов смежных конечных элементов могут не совпадать, что позволяет применять МКЭ к сложным телам, состоящим из нескольких материалов.

2) Криволинейная область легко описывается с помощью прямолинейных элементов и может быть описана достаточно точно при использовании криволинейных элементов. Т. е. методом можно пользоваться не только для областей с «удобной» для расчета формой. Размеры элементов могут быть переменными, что позволяет «сгущать» сетку в местах с большими градиентами непрерывной величины или, наоборот, делать сетку более «редкой» в той части области, где непрерывная величина остается (почти) постоянной. (Рис. 1)

3) Можно рассматривать задачи с различными граничными условиями (непрерывные, разрывные, а также смешанные граничные условия).

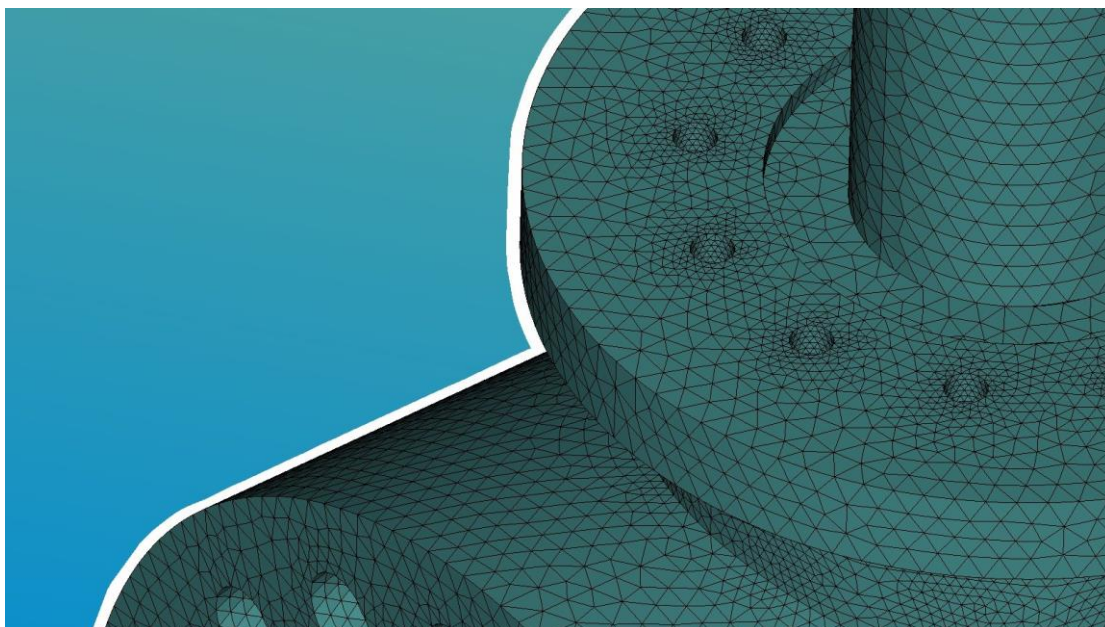


Рис. 1. Разбиение области на конечные элементы.

Эти преимущества позволяют создавать программы для решения широкого круга частных задач при условии их описания одними и тем же дифференциальными уравнениями.

Как и у любого другого метода, у метода конечных элементов есть и свои недостатки, среди которых выделим следующие.

1) Необходимость составления вычислительных программ и применение вычислительной техники, так как вычисления, которые приходится проводить при использовании МКЭ, слишком громоздки для ручного счета, даже в случае решения очень простых задач.

2) Для решения сложных задач требуются ЭВМ, обладающие большой памятью и быстродействием. [2, 3]

В процессе решения задачи проектирования стеллажа хранения прочностной расчет стеллажа без внешней рамы был произведен аналитически по отработанным методикам. Согласно МКЭ, каждый участок стеллажа был разбит на отдельные области, для которых и вычислялись все характеристики. Результаты исследования можно продемонстрированы на рисунках 2, 3. (Рис. 2, 3). На рисунках красным цветом выделены те участки стеллажа, которые испытывают наибольшую нагрузку. Синим цветом окрашены участки со средней надежностью, а зеленым - наиболее надежные участки. Для таких конструкций наиболее тяжелым является случай несимметричного нагружения, так как в стойках возникает изгиб, образующий критическое напряженно-деформированное состояние. [4]

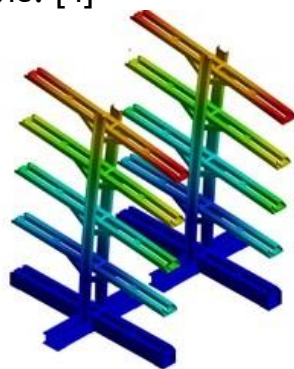
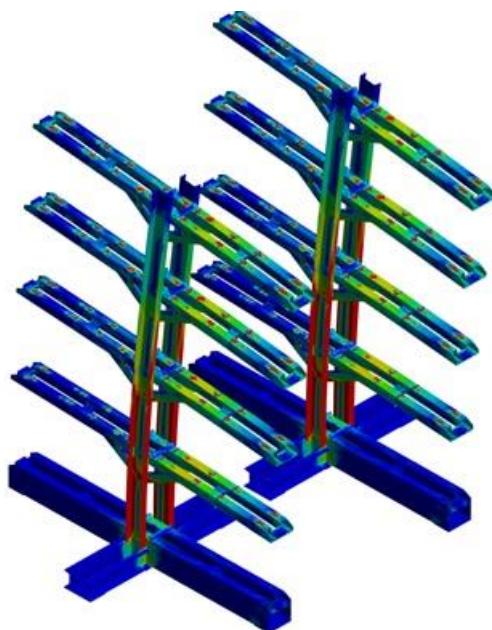


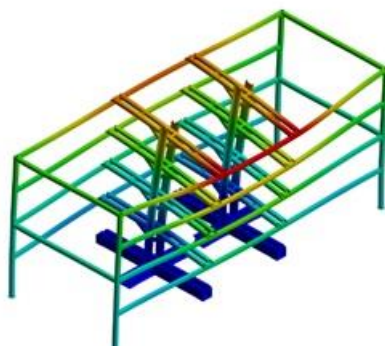
Рис. 2. Деформация стеллажа при несимметричном нагружении без внешней рамы.



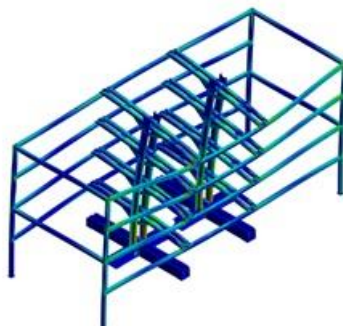


*Рис. 3. Напряжения, возникающие в стеллаже при несимметричном нагружении без внешней рамы.*

Анализ результатов расчета показал, что прочность и жесткость стеллажа не удовлетворяют предъявляемым требованиям и должны быть улучшены, особенно на участках, окрашенных красным цветом. Для этого была предусмотрена внешняя рама, перераспределяющая нагрузки и позволяющая добиться хороших показателей надежности разрабатываемой конструкции. (Рис. 4, 5).



*Рис. 4. Деформация стеллажа при несимметричном нагружении с внешней рамой.*



*Рис. 5. Напряжения, возникающие в стеллаже при несимметричном нагружении с внешней рамой.*

Далее были проведены расчеты характеристик для различных областей стеллажа, снабженного внешней рамой. [5, 6]

Для решения задач теории упругости, как правило, применяют два метода: решение дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями или минимизация интегральной величины, связанной с работой напряжений и внешней нагрузки.

Если задача решается в перемещениях и на границе заданы их значения, то минимизируется потенциальная энергия (метод перемещений). Если же задача решается в напряжениях с заданными на границах усилиями, то минимизируется дополнительная работа системы (метод сил).

Студенты для решения рассматриваемой задачи решали задачу минимизации потенциальной энергии системы.

Из всех перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, стационарное (экстремальное) значение потенциальной энергии сообщают те перемещения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия.

Полная потенциальная энергия системы  $W$ :

$W = U + \Pi$ , где  $U$  - потенциальная энергия деформации тела,  $\Pi$  - потенциал внешних сил.

Работа внешних сил:

$$A_p = -\Pi.$$

После разбиения области на элементы полная потенциальная энергия системы:

$W = \sum_{e=1}^E (U^{(e)} - A_p^{(e)}) = \sum_{e=1}^E w^{(e)}$ , где  $w^{(e)}$  - потенциальная энергия отдельного конечного элемента разбиения,  $E$  - число конечных элементов.

Используем один линейный одномерный элемент длиной  $L$ . Тогда:

$u^{(1)} = N_1^{(1)} q_1 + N_2^{(1)} q_2$ ,  $q_1, q_2$  - осевое перемещение в граничных точках,  $u^{(1)}$  - перемещение первой точки,  $N$  - функция формы.

При граничном условии:  $q_1 = 0$ .

Тогда:

$$u^{(1)} = N_2^{(1)} q_2 = \frac{x}{L} q_2, \quad x - \text{координата точки по оси } x.$$

И полная потенциальная энергия выражается в объеме  $V$ :

$W = \int_V \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV - P q_2$ ,  $W = A \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 dx - P q_2$ , где  $\varepsilon_{xx}$  - относительное удлинение (деформация),  $P$  - сила.

Поскольку  $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{q_2}{L}$ , то

$$W = A \int_0^L \left(\frac{q_2}{L}\right)^2 dx - P q_2 = \frac{AE}{2L} q_2^2 - P q_2.$$

И, минимизируя по  $q_2$ , получим:

$$\frac{dW}{dq_2} = \frac{AE}{L} q_2 - P = 0.$$

Тогда  $q_2 = \frac{PL}{AE}$ , где  $E$  - модуль упругости, что совпадает с теоретическим решением.

Полученные результаты исследования напряженно-деформированного состояния представлены в таблице 1. (Таблица 1).

Таблица 1

**Результаты исследования напряженно-деформированного состояния**

Расчетный случай	Минимальный коэффициент запаса	Минимальный допустимый коэффициент запаса	Максимальное перемещение, мм	Допустимое перемещение мм
Несимметричное нагружение без внешней рамы	0,73	1,5	114	50
Несимметричное нагружение с внешней рамой	1,57	1,5	46	50



Из данных, представленных в таблице видно, что минимальный коэффициент запаса и максимальное перемещение значительно повысились в случае применения внешней рамы. Над улучшением других характеристик еще предстоит работать.

### Заключение

На примере решенной студентами старших курсов задачи становится возможным продемонстрировать студентам младших курсов важность освоения специальных математических дисциплин, в частности, численных методов. Можно, не прибегая к громоздким вычислениям, наглядно показать работу метода конечных элементов, который позволил отчасти решить важную практическую задачу. Решение реальных производственных задач - основа формирования и развития профессиональных качеств будущего инженера.

---

#### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Галлагер Р. М. Метод конечных элементов. Основы. Мир. 1984. 428 с.
2. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. URSS. 2021. 130 с.
3. Стренг Г. М. Теория метода конечных элементов. Мир. 1977. 349 с.
4. Расчет пластин методом конечных элементов. Учеб. пособие для вузов. Белкин А. Е., Гаврюшин С. С. М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2008. 230 с.
5. Методы численного анализа математических моделей. Галанин М. П., Савенков Е. Б. М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2010. 590 с.
6. Денисов М.А. Компьютерное проектирование. ANSYS: Учебное пособие. Екатеринбург. Уральский университет. 2014. 77 с.

---

**Olga B. Vergazova,**

*Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[vergazova@bmstu.ru](mailto:vergazova@bmstu.ru)

**Evgeny A. Korolev,**

*Postgraduate student, Moscow Automobile and Road State Technical University, Moscow*

[evgeniy-alex.korolev@yandex.ru](mailto:evgeniy-alex.korolev@yandex.ru)

**Ivan D. Silin,**

*Postgraduate student, Moscow Automobile and Road State Technical University, Moscow*

[Vsilin9@gmail.com](mailto:Vsilin9@gmail.com)

**Development of students' mathematical culture by the example of solving an applied problem**

**Annotation.** The relevance of the problem under study is due to the need for students to develop and improve the skill of applying the studied mathematical methods to solving applied technical problems, which is very important in the preparation of a future specialist. So, in the process of scientific and industrial practice, students and postgraduates worked on the problem of increasing the load capacity of storage racks for rocket technology products. The study of theoretical sources, conducting experimental work made it possible to talk about the effectiveness of the finite element method in solving this problem. Modern requirements for the formation and development of the professional and mathematical culture of the future engineer are also one of the components of the relevance of this problem. The content of the article will be interesting to teachers, graduate students, students, high school students.

**Keywords:** teaching mathematics in high school, the finite element method, racks for rocket technology.

## МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ И ГИРА ЧЕТВЕРТЫХ ПОРЯДКОВ

### Аннотация

Успешное освоение дисциплины «Численные методы» лежит в основе умения студентов работать с различными алгоритмами численных методов решения прикладных задач. В тоже время, данная дисциплина часто вызывает сложности в его освоении студентами. Важной и сложной частью дисциплины «Численные методы» является решение систем дифференциальных уравнений, особенно, решение жестких систем. Цель работы заключается в том, чтобы показать применение численных методов решения таких систем и оценка качества работы методов. В работе предлагается методика выбора метода решения жестких систем дифференциальных уравнений. Рассматриваются два метода численного решения жестких систем дифференциальных уравнений: метод Гира и метод Рунге-Кутты четвертого порядка. На основе полученных численных решений проводится оценка качества работы методов. Содержание статьи может быть полезно для преподавателей и студентов физико-математических, инженерных и IT-специальностей.

### Ключевые слова

численные методы, жесткая система, метод Рунге-Кутты, метод Гира, осциллятор Ван-дер-Поля

### АВТОРЫ

**Виноградова Марина Станиславовна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
m-s-vinogradova@yandex.ru

**Ткачева Ольга Сергеевна,**  
младший научный сотрудник,  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва  
tkolga17@gmail.com

### Введение

Начиная со второй половины XX века математическое моделирование является одним из основных инструментов исследования и изучения сложных объектов и систем, так как позволяет заменить реальный объект моделью.

При математическом описании процессов и явлений, происходящих в различных областях техники, биологии и медицины, в большинстве случаев, используются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Точное аналитическое решение трудно или вообще невозможно получить для достаточно широкого класса таких задач. В таких случаях появляется необходимость в использовании *численных методов* решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть методов позволяющих получить приближенное решение задачи.

При математическом моделировании реальных систем часто встречаются жесткие системы дифференциальных уравнений, для решения которых что стандартные явные методы (типа Рунге-Кутты, Адамса и т.д) интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений не являются пригодными или плохо применимыми для их решения. Покажем это на примере сравнения решений полученных методами Рунге-Кутты и Гира четвертого порядка точности.

Напомним, что система дифференциальных уравнений называется жесткой вдоль решения, если выполняются следующие два условия:

- 1) собственные числа  $\lambda_k$  матрицы Якоби  $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{y=\varphi(x)}$  имеют отрицательные действительные части,  $Re \lambda_k < 0, i = 1, 2, \dots, n$ ;
- 2) число жесткости  $S = \frac{\max(|Re \lambda_k|)}{\min(|Re \lambda_m|)}$  велико [1,2].

Оценка качества работы методов Рунге-Кутты и Гира четвертого порядка точности для решения для численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений проведена на примере системы дифференциальных уравнений, моделирующей сократительную активность сердца (сигнал ЭКГ) как решение системы трех взаимосвязанных осцилляторов Ван-дер-Поля [3,4].

### Методология и результаты исследования

В данной работе для моделирования сократительной активности сердца используется модель трех связанных генераторов с временной задержкой [5], представляющая собой систему трех модифицированных уравнений Ван-дер-Поля. Предпосылкой для создания такой модели явились свойства проводимости, автоматии и ритмичности.

Определим введенные выше термины. Проводимость – это способность клеток миокарда и проводящей системы сердца распространять импульс возбуждения на окружающие их клетки. Автоматия – это способность генерировать свое собственное возбуждение и сокращение. Ритмичность – это величина, характеризующая интервалы между следующими друг за другом сердечными сокращениями.

Рассмотрим подробнее свойство проводимости сердечной системы. Проводимость, автоматия и ритмичность миокарда регулируются электрохимическими процессами, происходящими на плазматической мембране, которая отделяет клетку от окружающей среды, обеспечивает транспорт ионов  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Ca_2^+$ , поддерживает осмотическое равновесие.

Цитоплазма клеток и межклеточная жидкость в миокарде обладают небольшим электрическим сопротивлением и, в следствии этого, являются хорошим электропроводником. Частота сердечных сокращений задается пейсмекерными клетками (истинными водителями ритма). Водитель сердечного ритма (пейсмейкер) – это возбудимые клетки, расположенные в стенке правого предсердия сердца (синоатриального узла), в которых генерируются импульсы. Поэтому импульс от водителя ритма легко воздействует на мембраны рядом расположенных клеток и вызывает возникновение в них потенциала действия, что в конечном итоге приводит к возбуждению и сокращению всех волокон миокарда соответствующей камеры сердца. Исходя из этого, ритмичностью можно назвать регулярность пейсмейкерной активности. Нарушения сердечного ритма делятся на две группы: нарушения возбуждения и нарушения проводимости.

Теперь рассмотрим автоматию. Есть три основных узла автоматии:

- Узел автоматии первого порядка – сино-атриальный узел (СА). Клетки СА-узла, который расположен у места впадения верхней полой вены. Узел состоит из небольшого числа сердечных мышечных волокон, иннервированных окончаниями нейронов из вегетативной нервной системы (миогенный пейсмейкер).

- Узел второго порядка - атрио-вентрикулярный узел (АВ). АВ-узел.
- Узел третьего порядка. Клетки вентрикулярной проводящей системы (волокна Пуркинье).

Сино-атриальный узел (САУ) является истинным водителем ритма (1-го порядка). Он обеспечивает частоту сердечных сокращений в норме. Атрио-вентрикулярный узел (АВУ) является скрытым (латентным) водителем ритма (2-го порядка). Водители ритма низшего порядка обеспечивают частоту сердечных сокращений при полной поперечной блокаде сердца (в этом случае частота сокращений желудочков слишком низкая, больным вживляют искусственный водитель ритма – электрокардиостимулятор) [6].

Для исследования сократительной активности сердца используется электрокардиографический сигнал (ЭКГ). При автоматическом распознавании длительных записей ЭКГ для выявления участков нормальной работы сердца и различных нарушений сердечного возбуждения и/или проводимости в некоторых случаях удобно использовать модельные сигналы, характерные для тех или иных нарушений в работе сердца.

### 1. Математическая модель

В данной работе для моделирования сократительной активности сердца используется модель трех связанных генераторов, представляющая собой систему трех модифицированных уравнений Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1 (x_1 + d_1)(x_1 + e_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t) + \\ + k_{12}(x_1 - x_3) + k_{13}(x_1 - x_5) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3 (x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t) + \\ + k_{21}(x_3 - x_1) + k_{23}(x_3 - x_5) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -a_3 x_6 (x_5 - w_{30})(x_5 - w_{31}) - x_5 (x_5 + d_3)(x_5 + e_3) + \rho_3 \sin(\omega_3 t) + \\ + k_{32}(x_5 - x_3) + k_{31}(x_5 - x_1) \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $x_1, x_3, x_5$  – трансмембранные потенциалы в клетках синоатриального узла (SA), атриовентрикулярного узла (AV) и вентрикулярной проводящей системы (HP), состоящей из пучка Гиса и волокон Пуркинье, соответственно. Таким образом, первый осциллятор ассоциируется с SA-узлом (узлом автоматии первого порядка), второй – с AV-узлом (узлом автоматии второго порядка), третий – с системой HP (узлом автоматии третьего порядка), рис. 1. Коэффициенты  $a_i$  отвечают за величину рефрактерного периода в соответствующем осцилляторе, а  $e_i$  – за величину диастолического периода (рис. 2); коэффициенты  $d_i$  и  $w_{ij}$  определяют демпфирование; коэффициенты  $k_{ij}$  характеризуют время распространения волны от одного осциллятора к другому; коэффициенты  $\omega_i$  и  $\rho_i$  определяют частоты возбуждения и амплитуды импульсов в соответствующих осцилляторах.

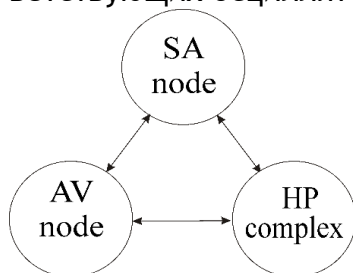


Рис. 1. Схема передачи сигнала.

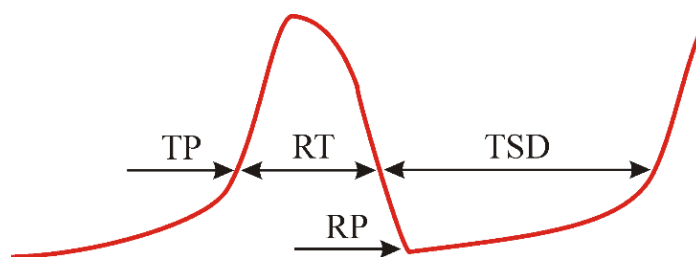


Рис. 2. Распространение сигнала в клетках сердца [7]

Модель должна описывать проведение импульса из одного узла автоматии сердца в другой, поэтому необходимо учитывать время распространения импульса по узлам автоматии. Для описания этого введем в модель запаздывание или временную задержку. Модель примет следующий вид]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + d_1)(x_1 + e_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t) + \\ + k_{12}(x_1 - x_3^{\tau_{12}}) + k_{13}(x_1 - x_5^{\tau_{13}}) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t) + \\ + k_{21}(x_3 - x_1^{\tau_{21}}) + k_{23}(x_3 - x_5^{\tau_{23}}) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -a_3 x_6 (x_5 - w_{30})(x_5 - w_{31}) - x_5(x_5 + d_3)(x_5 + e_3) + \rho_3 \sin(\omega_3 t) + \\ + k_{32}(x_5 - x_3^{\tau_{32}}) + k_{31}(x_5 - x_1^{\tau_{31}}) \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь  $x_i^{\tau} = x_i(t - \tau)$ ,  $t$  – текущий момент времени,  $\tau_{ij}$  – время проведения импульса из  $j$ -го узла автоматии сердца в  $i$ -ый.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора:  $x_i(t - \tau_{ij}) = x_i - \tau_{ij}\dot{x}_i + \frac{\tau_{ij}^2}{2}\ddot{x}_i$ . В итоге получим

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + d_1)(x_1 + e_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t) + \\ + k_{12} \left( x_1 - x_3 + \tau_{12}\dot{x}_3 - \frac{\tau_{12}^2}{2}\ddot{x}_3 \right) + k_{13} \left( x_1 - x_5 + \tau_{13}\dot{x}_5 - \frac{\tau_{13}^2}{2}\ddot{x}_5 \right) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t) + \\ + k_{21} \left( x_3 - x_1 + \tau_{21}\dot{x}_1 - \frac{\tau_{21}^2}{2}\ddot{x}_1 \right) + k_{23} \left( x_3 - x_5 + \tau_{23}\dot{x}_5 - \frac{\tau_{23}^2}{2}\ddot{x}_5 \right) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -a_3 x_6 (x_5 - w_{30})(x_5 - w_{31}) - x_5(x_5 + d_3)(x_5 + e_3) + \rho_3 \sin(\omega_3 t) + \\ + k_{32} \left( x_5 - x_3 + \tau_{32}\dot{x}_3 - \frac{\tau_{32}^2}{2}\ddot{x}_3 \right) + k_{31} \left( x_5 - x_1 + \tau_{31}\dot{x}_1 - \frac{\tau_{31}^2}{2}\ddot{x}_1 \right) \end{cases} \quad (1.3)$$

Учитывая, что  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_5 = x_6$  имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + d_1)(x_1 + e_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t) + \\ + k_{12} \left( x_1 - x_3 + \tau_{12}\dot{x}_3 - \frac{\tau_{12}^2}{2}\dot{x}_4 \right) + k_{13} \left( x_1 - x_5 + \tau_{13}\dot{x}_5 - \frac{\tau_{13}^2}{2}\dot{x}_6 \right) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t) + \\ + k_{21} \left( x_3 - x_1 + \tau_{21}\dot{x}_1 - \frac{\tau_{21}^2}{2}\dot{x}_2 \right) + k_{23} \left( x_3 - x_5 + \tau_{23}\dot{x}_5 - \frac{\tau_{23}^2}{2}\dot{x}_6 \right) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -a_3 x_6 (x_5 - w_{30})(x_5 - w_{31}) - x_5(x_5 + d_3)(x_5 + e_3) + \rho_3 \sin(\omega_3 t) + \\ + k_{32} \left( x_5 - x_3 + \tau_{32}\dot{x}_3 - \frac{\tau_{32}^2}{2}\dot{x}_4 \right) + k_{31} \left( x_5 - x_1 + \tau_{31}\dot{x}_1 - \frac{\tau_{31}^2}{2}\dot{x}_2 \right) \end{cases} \quad (1.4)$$

В данной работе будет рассмотрен только так называемый физиологический случай без реципрокных нарушений проводимости (волн re-entry). В этом случае импульс может проводиться только из SA в AV и, затем, из AV в HP. Таким образом, в физиологическом случае коэффициенты  $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{31}, k_{12}, k_{13}, k_{23}, k_{31}$  в системе (1.4) обнуляются ( $\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0, k_{12} = k_{13} = k_{23} = k_{31} = 0$ ) и система (1.4) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + d_1)(x_1 + e_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t) + \\ + k_{21} \left( x_3 - x_1 + \tau_{21} \dot{x}_1 - \frac{\tau_{21}^2}{2} \dot{x}_2 \right) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -a_3 x_6 (x_5 - w_{30})(x_5 - w_{31}) - x_5(x_5 + d_3)(x_5 + e_3) + \rho_3 \sin(\omega_3 t) + \\ + k_{32} \left( x_5 - x_3 + \tau_{32} \dot{x}_3 - \frac{\tau_{32}^2}{2} \dot{x}_4 \right) \end{cases} \quad (1.5)$$

Решив полученное СЛАУ относительно  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6$ , перепишем систему (1.5) в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + e_1)(x_1 + d_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - x_3(x_3 + d_2)(x_3 + e_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t) + \\ + \frac{k_{21} \tau_{21}^2}{2} (-a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - x_1(x_1 + e_1)(x_1 + d_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t)) \\ + k_{21} x_2 \tau_{21} + k_{21} (x_3 - x_1) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -a_3 x_6 (x_5 - w_{30})(x_5 - w_{31}) - x_5(x_5 + e_3)(x_5 + d_3) + \rho_3 \sin(\omega_3 t) + k_{32} (x_5 - x_3) + \\ + \frac{k_{32} \tau_{32}^2}{2} (-a_2 x_4 (x_3 - w_{20})(x_3 - w_{21}) - (x_3(x_3 + e_2)(x_3 + d_2) + \rho_2 \sin(\omega_2 t)) + \\ + k_{32} \tau_{32} x_4 + \frac{k_{21} k_{32} \tau_{32}^2}{2} (x_3 - x_1) + \frac{(k_{21} k_{32} \tau_{21}^2 \tau_{32}^2)}{4} (-a_1 x_2 (x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) - \\ - x_1(x_1 + e_1)(x_1 + d_1) + \rho_1 \sin(\omega_1 t)) + \frac{(k_{21} k_{32} \tau_{21} \tau_{32}^2)}{2} x_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

## 2. Методы решения

Для решения этой системы воспользуемся явным методом Рунге-Кутты и неявным методом Гира четвертых порядков. Кратко рассмотрим эти методы и их устойчивость.

Назовем решение устойчивым, если оно ограничено для любого  $x > 0$ ,

асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , неустойчивым в противном случае.

Рассмотрим в качестве стандартного модельного (тестового) примера линейное дифференциальное уравнение  $y' = \mu y, y(0) = 1$ , где  $\mu$  – в общем случае комплексная константа и определим для него понятие устойчивости.

Метод называется *устойчивым* (ограниченно устойчивым), если существует такое число  $h_{kr} > 0$ , что при использовании метода для решения задачи Коши для тестового примера, где  $Re \mu < 0$ , с шагом  $0 < h < h_{kr}$  при  $i \rightarrow \infty$  глобальная ошибка

ограничена. Величина  $h_{кр}$  называется критическим шагом. Если  $h > h_{кр}$ , глобальная ошибка может неограниченно возрасти [8].

Глобальной ошибкой называется разность между вычисленным решением разностной задачи в отсутствие ошибок округления и точным решением  $e_n(h) = \hat{y}_n - y(x_n)$ .

Для того чтобы численный метод решения задачи Коши был устойчивым, достаточно, чтобы все корни соответствующего характеристического уравнения по модулю не превосходили единицы.

Под *область устойчивости* численного метода понимают множество всех точек комплексной плоскости, для которых данный метод устойчив.

Метод называется  *$\alpha$ -устойчивым*, если при его применении с любым фиксированным положительным шагом  $h$  все численные решения задачи с комплексной константой  $\mu$  ( $Re \mu < 0$ ) стремятся к нулю при  $i \rightarrow \infty$ .

Метод называется *нуль-устойчивым*, если решение задачи Коши однородного уравнения  $\hat{y}'_n = 0$  удовлетворяет неравенству:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n^* - y_n| \leq \bar{K}(T) \max_{0 \leq t \leq k-1} |\varepsilon_t|, \varepsilon_t = y_t - y_t^*$$

где  $\bar{K}(t)$  не зависит от шага  $h$ ,  $[t_0, T]$  – отрезок, на котором ищется решение [9].

## 2.1. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка является явным четырех-этапным методом, основанным на идее разложения функции в ряд Тейлора. Для следующей задачи Коши

$$\bar{y}' = f(\tau), \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0, \quad (2.1)$$

где  $\bar{y}, f \in R^n$ ,  $t, \tau \in R^1$

Расчетные формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= \bar{y}_n + \frac{\tau}{6} (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) \\ p_1 &= f(t_n, \bar{y}_n) \\ p_2 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \bar{y}_n + \frac{\tau}{2} p_1\right) \\ p_3 &= f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \bar{y}_n + \frac{\tau}{2} p_2\right) \\ p_4 &= f(t_n + \tau, \bar{y}_n + \tau p_3) \end{aligned}$$

где  $\tau$  – величина шага сетки по  $t$ ,  $n$  – номер узла на сетке по  $t$ .

Этот метод имеет четвертый порядок точности. Ошибка на одном шаге имеет порядок  $O(h^5)$ , а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок  $O(h^4)$ .

Рассмотрим устойчивость методов Рунге-Кутты 4-го порядка на стандартном модельном примере:

$$y' = \lambda y, y(t_0) = y_0,$$

Воспользуемся следующей теоремой [10]:

Теорема. Если явный метод РК имеет порядок  $p$ , то его функция устойчивости приобретает вид:

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \dots + \frac{\mu^p}{p!} + O(h^{p+1}),$$

где  $\mu = h$ , при  $p = s, (s \leq 4)$  членом  $O(h^{p+1})$  можно пренебречь:

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \dots + \frac{\mu^p}{p!}.$$

Тогда для метода Рунге-Кутты 4-го порядка имеем:

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^4}{4!} \quad (2.2)$$



А область устойчивости задается неравенством:

$$\left| 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^4}{4!} \right| \leq 1 \quad (2.3)$$

Область устойчивости показана на рис. 3. Заметим, что метод Рунге-Кутты является *нуль-устойчивым*.

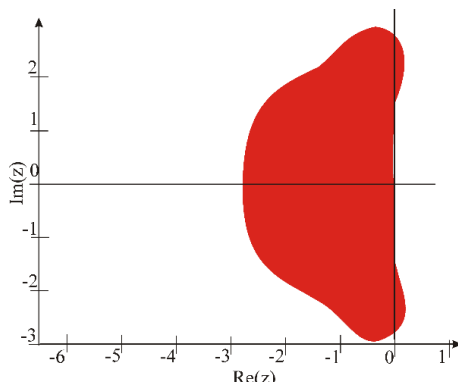


Рис. 3. Область устойчивости метода Рунге-Кутты 4 порядка.

## 2.2. Метод Гира 4-го порядка

Методами Гира называется семейство линейных  $x_m$ -шаговых методов.

Напомним, что  $x_m$ -шаговыми методами называют расчетную схему вида:

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \dots + b_m f_{n-m}, \quad n \geq m,$$

где  $m, a_i, b_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ) – числовые параметры метода,  $y_{n-i} = y(t_{n-i})$ ,  $f_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i})$ .

В расчетной схеме заранее определяется  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ .

Общая расчетная формула имеет вид:

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m}}{\tau} = f_n, \quad n \geq m.$$

Метод является неявным, так как  $y_n$  приходится находить из нелинейного уравнения:

$$a_0 y_n - \tau f(t_n, y_n) = \sum_{i=1}^m a_i y_{n-i}.$$

Метод Гира четвертого порядка – неявный *альфа-устойчивый метод*, часто применяемый для решения жестких систем задач.

Расчетная формула для задачи Коши имеет вид:

$$f(\bar{y}_n) = \frac{3\bar{y}_{n-4} - 16\bar{y}_{n-3} + 36\bar{y}_{n-2} - 48\bar{y}_{n-1} + 25\bar{y}_n}{12\tau}, \quad (2.4)$$

где  $\tau$  – величина шага сетки по  $t$ ,  $n$  – номер узла на сетке по  $x$ ,  $n = 4, 5, \dots$ ,  $y_{n-i}$  – решение задачи Коши на  $n - i$  шаге.

Метод Гира предполагает знание значений с предыдущих четырех решений, то есть для реализации первого шага решения задачи по методу Гира необходимо получить первые четыре значения используя какой-либо другой метод. Для нахождения этих значений воспользуемся методом Рунге-Кутты четвертого порядка, описанного выше.

Нелинейная система для нахождения  $\bar{y}_n$  для метода Гира четвертого порядка имеет вид:

$$\bar{y}_n = \frac{(3(4hf(t_n, \bar{y}_n) - \bar{y}_{n-4}) + 16\bar{y}_{n-3} - 36\bar{y}_{n-2} + 48\bar{y}_{n-1})}{25}, \quad (2.5)$$

Для нахождения решения системы (2.5) используем метод Ньютона с матрицей Якоби, полученной аналитически. Для этого необходимо найти начальное приближение, достаточно близкое к искомому решению. Рассмотрим один из вариантов получения приближения для использования метода Гира.



В окрестности узлов  $t_0 \dots t_3$  искомое решение  $y(t)$  приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона четвертой степени:

$$y(t) = \bar{y}_0 + \bar{y}_{01}(t - t_0) + \bar{y}_{012}(t - t_0)(t - t_1) + \bar{y}_{0123}(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) + \bar{y}_{01234}(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3), \quad (2.6)$$

где  $\bar{y}_{01} \dots \bar{y}_{01234}$  разделенные разности первого-четвертого порядка.

Выразим  $y'(t)$ , дифференцируя выражение (2.6):

$$y'(t) = \bar{y}_{01} + \bar{y}_{012}(2t - t_0 - t_1) + \bar{y}_{0123}[(t - t_0)(t - t_1) + (t - t_0)(t - t_2) + (t - t_1)(t - t_2)] + \bar{y}_{01234}[(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) + (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) + (t - t_0)(t - t_1)(t - t_3) + (t - t_0)(t - t_2)(t - t_3)], \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{01} &= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\tau} \\ \bar{y}_{012} &= \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \bar{y}_0}{\tau} \\ \bar{y}_{0123} &= \frac{\bar{y}_3 - 3\bar{y}_2 + 3\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\tau} \\ \bar{y}_{01234} &= \frac{\bar{y}_4 - 4\bar{y}_3 + 6\bar{y}_2 + 4\bar{y}_1 + \bar{y}_0}{\tau} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Полагая в выражении для производной (2.7)  $t = t_3$ , запишем

$$y'(t_3) = \frac{(-\bar{y}_0 + 6\bar{y}_1 - 18\bar{y}_2 + 10\bar{y}_3 + 3\bar{y}_4)}{12\tau}. \quad (2.9)$$

Приравняем правые части (2.9) и (2.1):

$$\bar{y}_4 = 4\tau f(t_3, \bar{y}_3) + \frac{\bar{y}_0 - 10\bar{y}_3}{3} + 6\bar{y}_2 - 2\bar{y}_1.$$

В общем случае запишем:

$$\bar{y}_n = 4\tau f(t_{n-1}, \bar{y}_{n-1}) + \frac{\bar{y}_0 - 10\bar{y}_{n-1}}{3} + 6\bar{y}_{n-2} - 2\bar{y}_{n-3}.$$

Матрица Якоби для метода Гира четвертого порядка имеет вид:

$$J_{Gir} = I - \frac{12}{25} \tau J,$$

где  $J$  – матрица Якоби нашей системы.

Метод Ньютона, используемый в работе, имеет следующий вид:

$$J_{Gir}(\bar{y}_n^s) \cdot (\bar{y}_n^{s+1} - \bar{y}_n^s) = -f(\bar{y}_n^s), \quad (2.10)$$

где  $s$  – индекс внутренних итераций по методу Ньютона. При

$$s = 0 \quad \bar{y}_n^s = \bar{y}_n$$

Сначала решалась система линейных уравнений методом Гаусса относительно  $(\bar{y}_n^{s+1} - \bar{y}_n^s)$ , откуда находилось следующее приближение, и так, продолжалось, пока невязка не станет меньше заданной точности:  $10^{-6}$ .

Область устойчивости метода Гира показана на рис. 4.

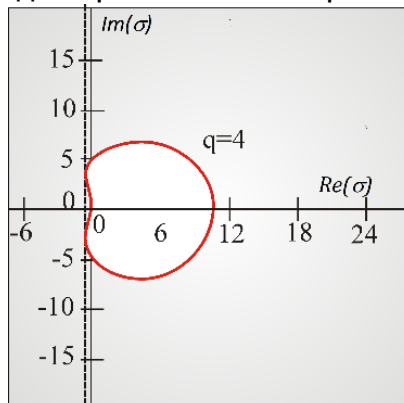


Рис. 4. Область устойчивости метода Гира 4 порядка

Прежде, чем численно моделировать систему, описывающую сократительную активность сердца, проверим полученную модель на примере с известным решением.

### 2.3. Результаты проверки методов на примере с известным решением

Проверим программную реализацию вышеописанных методов на модельной задаче о маятнике:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $k = 20$  Н/м,  $m = 0.3$  кг. Точное решение системы (2.11) имеет вид:

$$x = \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.12)$$

Точность метода для (2.11) при разных шагах представлена в таблице 1, где  $R(\tau) = \|u - y\|$  – погрешность решения, где  $u$  – это точное решение, а  $y$  – решение, полученное на сетке с шагом  $\tau$ . Из таблицы видно, что погрешность убывает, так как и предсказывает теория для методов 4-го порядка  $\frac{R^\tau}{R^{\tau/2}} \geq 4$ . основании этого можно сделать вывод, что методы работают правильно.

Таблица 1.

Соотношение погрешностей

Метод	$\tau$	$\tau/2$	$\tau/4$	$R^\tau/R^{\tau/2}$	$R^{\tau/2}/R^{\tau/4}$	$R^\tau/R^{\tau/4}$
Рунге-Кутты 4-го порядка	0.02	0.001	0.005	16.4237	17.2598	283.47
Гира 4-го порядка	0.02	0.01	0.005	16.1038	33.1078	539.136

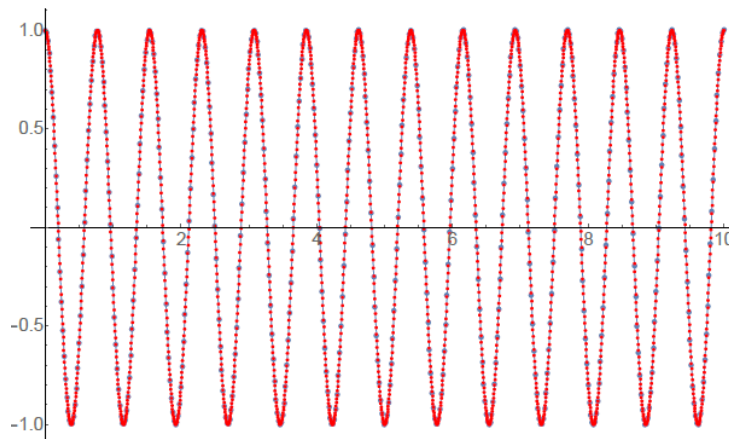


Рис. 5. Результат метода Гира при разных шагах и точное решение

### 3. Результаты численного моделирования систему, описывающую сократительную активность сердца

Матрица Якоби для системы (1.6) имеет следующий вид.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где

$$J_{21} = a_1 w_{10} x_2 - 2d_1 x_1 - 2e_1 x_1 - 3x_1^2 - d_1 e_1 + a_1 w_{11} x_2 - 2a_1 x_1 x_2,$$

$$\begin{aligned}
J_{22} &= -a_1(x_1 - w_{10})(x_1 - w_{11}) \\
J_{41} &= -k_{21} - \frac{1}{2}k_{21}\tau_{21}^2(x_1(d_1 + x_1) + x_1(e_1 + x_1) + (d_1 + x_1)(e_1 + x_1)) + \\
&\quad + \frac{1}{2}k_{21}\tau_{21}^2(a_1x_2(w_{10} - x_1) + a_1x_2(w_{11} - x_1)), \\
J_{42} &= k_{21}\tau_{21} - \frac{1}{2}a_1k_{21}\tau_{21}^2(w_{10} - x_1)(w_{11} - x_1), \\
J_{43} &= k_{21} - d_2e_2 - 2d_2x_3 - 2e_2x_3 - 3x_3^2 + a_2w_{20}x_4 + a_2w_{21}x_4 - 2a_2x_3x_4, \\
J_{44} &= -a_2(w_{20} - x_3)(w_{21} - x_3), \\
J_{61} &= -\frac{1}{2}(k_{21}k_{32}\tau_{32}^2) - \frac{1}{4}k_{21}k_{32}\tau_{21}^2\tau_{32}^2(x_1(d_1 + x_1) + x_1(e_1 + x_1) + (d_1 + x_1)(e_1 + x_1)) + \\
&\quad + \frac{1}{4}k_{21}k_{32}\tau_{21}^2\tau_{32}^2(a_1x_2(w_{10} - x_1) + a_1x_2(w_{11} - x_1)), \\
J_{62} &= \frac{1}{2}k_{21}k_{32}\tau_{21}\tau_{32}^2 - \frac{1}{4}(a_1k_{21}k_{32}\tau_{21}^2\tau_{32}^2(w_{10} - x_1)(w_{11} - x_1)), \\
J_{63} &= \frac{1}{2}(k_{21}k_{32}\tau_{32}^2) - k_{32} - \frac{1}{2}(k_{32}\tau_{32}^2(x_3(d_2 + x_3) + x_3(e_2 + x_3)) + \\
&\quad + \frac{1}{2}(k_{32}\tau_{32}^2(d_2 + x_3)(e_2 + x_3) - a_2x_4(w_{20} - x_3) - a_2x_4(w_{21} - x_3))), \\
J_{64} &= k_{32}\tau_{32} - \frac{1}{2}a_2k_{32}\tau_{32}^2(w_{20} - x_3)(w_{21} - x_3), \\
J_{65} &= k_{32} - d_3e_3 - 2d_3x_5 - 2e_3x_5 - 3x_5^2 + a_3w_{30}x_6 + a_3w_{31}x_6 - 2a_3x_5x_6, \\
J_{66} &= -a_3(w_{30} - x_5)(w_{31} - x_5).
\end{aligned}$$

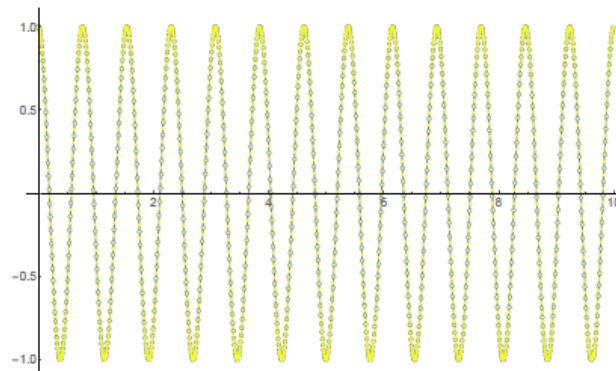


Рис. 6. Результат метода Рунге-Кутты при разных шагах и точное решение

Аналитическое вычисление собственных чисел матрицы не представляется возможным. При следующих параметрах:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 7; a_2 = 3; a_3 = 4; \\
d_1 &= 3; d_2 = 3; d_3 = 3; \\
e_1 &= 5; e_2 = 7; e_3 = 5; \\
w_1 &= 2\pi\frac{70}{60}; w_2 = 2\pi\frac{70}{60}; w_3 = 2\pi\frac{70}{60}; \\
\rho_1 &= 20; \rho_2 = 5; \rho_3 = 5; \\
w_{10} &= 1.1; w_{11} = -1.1; w_{20} = 0.1; w_{21} = -0.1; w_{30} = 0.2; w_{31} = -1.9; \\
k_{12} &= 0; k_{13} = 0; k_{21} = 5; k_{23} = 0; k_{31} = 0; k_{32} = 0.1; \\
t_{12} &= 0; t_{13} = 0; t_{21} = 0.8; t_{23} = 0.1; t_{31} = 0; t_{32} = 0.1; \\
T &= 0:0.05:30;
\end{aligned} \tag{3.2}$$

и следующих начальных значениях:

$$x_1 = 1.000, x_2 = 10^{-3}, x_3 = -1.00, x_4 = 3.0, x_5 = 10^{-2}, x_6 = -1.088. \tag{3.3}$$

Собственные числа матрицы Якоби (3.1):

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.4200 + 5.3695i; \\ 0.4200 - 5.3695i; \\ -1.4850 + 3.8464i; \\ -1.4850 - 3.8464i; \\ 0.5386 + 0.7295i; \\ 0.5386 - 0.7295i. \end{pmatrix}, \text{ где } i = \sqrt{-1}$$

Не все действительные части  $Re \lambda < 0$ , то есть, согласно определению жесткости [4], система в данный момент времени не является жесткой.

Приведенные выше параметры соответствуют физиологическому случаю. Проинтегрируем нашу систему на отрезке  $[0, 30]$  вышеописанными методами Гира и Кунге-Кутты с шагом  $\tau = 0.03$  с.

Можно видеть, что метод Рунге-Кутты 4-го порядка расходится на системе (1.6) с параметрами (3.2), в отличие от метода Гира (рис. 7, 8).

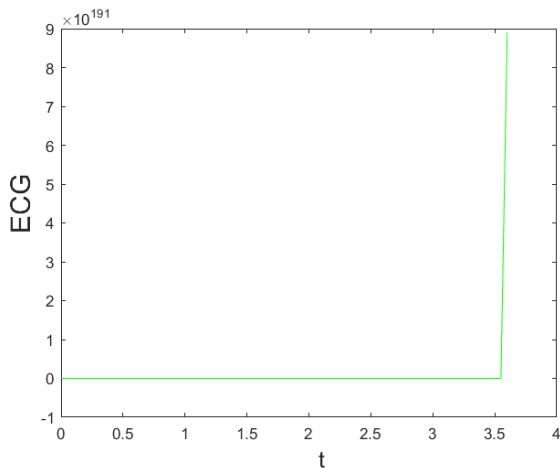


Рис. 7. ЭКГ. Физиологический случай. Метод Рунге-Кутты

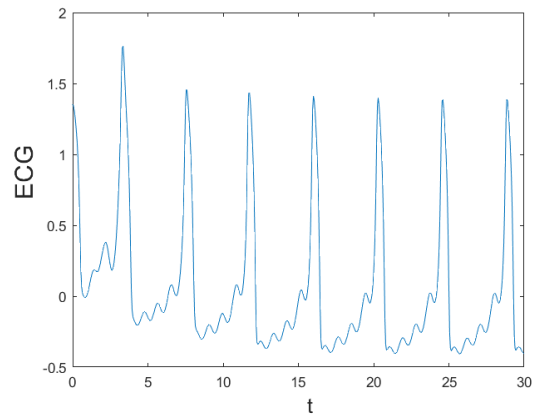


Рис. 8. ЭКГ. Физиологический случай. Метод Гира

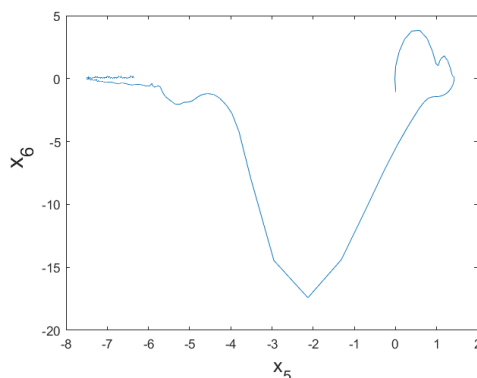
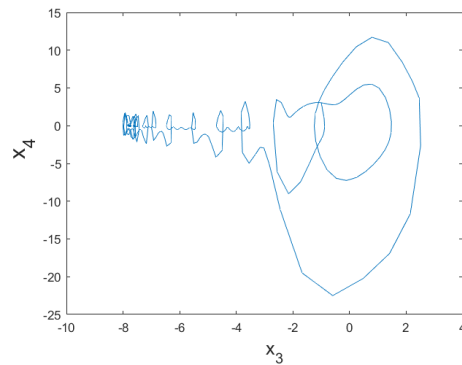
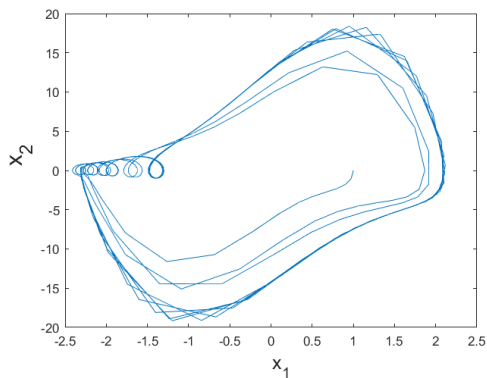


Рис. 9. Фазовые траектории. Физиологический случай. Метод Гира

Исходя из решения, полученного методом Гира, вычислим собственные числа в момент времени  $t = 5.01$ .

$$\lambda = \begin{pmatrix} -122.0203; \\ -44.9255; \\ -26.0270; \\ -0.6483; \\ -0.4195; \\ -0.1921. \end{pmatrix},$$

Все действительные части  $Re \lambda < 0$ , следовательно первое условие определения выполнено [11]. Число жесткости:  $S = \frac{115.39400}{0.346025} = 333.48457 \geq 1$ . Таким образом, получаем, что применение явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка является некорректным для этой задачи.

Для поиска числа жесткости было использовано решение, полученное методом Гира. Однако такая оценка жесткости не является точной, так как получена на грубой сетке. Чтобы уточнить решение, уменьшим шаг и посмотрим кубическую норму разности  $z^0 = |y - \tilde{y}|$ , кубическую норму разности  $z^1 = |\hat{y} - \tilde{y}|$ , кубическую норму разности  $z^2 = |\tilde{y} - \tilde{y}|$  на моментах времени:  $t = 5, t = 10, t = 15, t = 20, t = 25$ , где  $y$  – решение полученное, на сетки с шагом  $\tau$ ,  $\tilde{y}$  – с шагом  $\tau/3$ ,  $\hat{y}$  – с шагом  $\tau/6$ ,  $\tilde{y}$  – с шагом  $\tau/12$ . Результат запишем в таблицу 2. Возьмем максимальное значение и выберем шаг для дальнейшего моделирования.

Таблица 2.

#### Выбор шага

$\tau$	$\tau/3$	$\tau/6$	$\tau/12$	$ y - \tilde{y} $	$ \hat{y} - \tilde{y} $	$ \tilde{y} - \tilde{y} $
0.0300	0.0100	0.005	0.025	1.0130	0.00341	0.0001

Можно видеть, что, согласно таблице 2, наименьшая разница между решениями была получена при шагах  $t = 0.005$  и  $t = 0.0025$ . Тогда за точное решение будем брать решение, полученное на сетке с шагом  $t = 0.005$ .

Заметим, что максимальное число итераций по методу Ньютона при шаге  $\tau = 0.03$  равно двум, при шаге  $\tau = 0.01$  и меньше число итераций равно единице.

#### Заключение

Дисциплина «Численные методы» на является основой для изучения таких дисциплин, как «Параллельное программирование», «Математическое моделирование», «Качественное исследование дифференциальных уравнений», и других дисциплин подготовки студентов. Для изучения дисциплины требуется как хорошая математическая подготовка, так и владение современными компьютерными технологиями. дисциплин

На примере системы ОДУ, описывающей сократительную активность сердца, были рассмотрены численные методы Гира и Рунге-Кутты 4-ых порядков для решения жестких систем дифференциальных уравнений. Для метода Гира было выведено начальное приближение и оценена жесткость системы при различных параметрах. Также была показана несостоятельность метода Рунге-Кутты для системы (1.2) при определенном наборе коэффициентов.

Для иллюстрации практического применения модели было проведено с помощью метода Гира численное моделирование сигнала ЭКГ.

## ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Галанин М.П., Ходжаева С.Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 98. 29 с.
2. Галанин М.Е., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М: МГТУ им. Баумана. 2010.- 591 с
3. Van der Pol B., van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart.// The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1928. Vol. 6, № 38. 3. 763-775.
4. Ткачева О.С., Канатников А.Н., Виноградова М.С. Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля // Математика и математическое моделирование. 20205.. № 1. С. 16-32.
5. Gois S.R., Savi M.A. An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model.// Chaos, Solitons & Fractals. 2009. Vol. 41, № 5. P. 2553-2565.
6. Горькавая А.Ю., Алексеева Е.О., Дей А.А., Климкина Т.Н..Анатомия и физиология системы кровообращения : учебное пособие : В 2 ч.Ч. 1. Анатомия и физиология сердца // - Владивосток : Издательство Дальневосточного федерального университета, 2021. - 83 с.
7. Grudzinski K, Zebrowski JJ. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. Physica A
8. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Численные методы для инженеров. М: Высшая Школа. 1994. - 544 с. 2004;336:153-62.
9. Самарский А. А, Гулин А. В. Численные методы Москва «Наука» 1989 г.
10. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
11. Ткачева О.С., Канатников А.Н., Виноградова М.С. Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля.. Указ. соч.

**Marina S. Vinogradova,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[m-s-vinogradova@yandex.ru](mailto:m-s-vinogradova@yandex.ru)

**Olga S. Tkacheva,**

*Junior researcher, Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov Academy of Sciences, approved by the Presidium of the Russian Academy of Sciences, Moscow*

[tkolga17@gmail.com](mailto:tkolga17@gmail.com)

**Methods for teaching numerical methods for solving stiff systems of differential equations on the example of a comparative analysis of the Runge-Kutta and Geer methods of the fourth orders**

**Abstract.** Successful mastering of the discipline "Numerical Methods" underlies the ability of students to work with various algorithms of numerical methods for solving applied problems. At the same time, this discipline often causes difficulties in its development by students. An important and complex part of the discipline "Numerical Methods" is the solution of systems of differential equations, especially the solution of stiff systems. The purpose of the work is to show the application of numerical methods for solving such systems and to evaluate the quality of the methods. The paper proposes a method for choosing a method for solving rigid systems of differential equations. Two methods for the numerical solution of stiff systems of differential equations are considered: the Gear method and the fourth-order Runge-Kutta method. Based on the obtained numerical solutions, the quality of the methods is evaluated. The content of the article may be useful for teachers and students of physics, mathematics, engineering and IT specialties.

**Keywords:** numerical methods, stiff system, Runge-Kutta method, Geer method, Van der Pol oscillator.

## ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

### Аннотация

В курсе математической статистики важное место занимает понятие точечной оценки. Это понятие возникает при рассмотрении задачи оценивания неизвестных параметров: дана случайная величина, общий вид (тип, класс) закона распределения которой известен. Закон распределения при этом зависит от одного или нескольких неизвестных скалярных параметров, требуется оценить значения этих параметров. Один из подходов к решению этой задачи заключается в построении точечных оценок. В статье рассматривается методика изложения темы «Метод моментов построения точечных оценок»: приводится описание метода, краткие сведения о его обосновании, разбираются примеры его использования для различных законов распределения.

### Ключевые слова

оценивание параметров, точечная оценка, метод моментов, начальные моменты, центральные моменты

### АВТОРЫ

**Власов Павел Александрович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
pvlx@mail.ru

**Андреева Татьяна Владимировна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
t-v-andreeva@mail.ru

**Семенов Юрий Станиславович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
независимый исследователь, г. Москва  
yuri\_semenoff@mail.ru

### Введение

Как известно [1], одной из основных задач математической статистики является получение научно обоснованных выводов о свойствах массовых процессов или явлений по результатам экспериментов или наблюдений. Более узко одну из основных задач математической статистики можно сформулировать следующим образом: имеется случайная величина  $X$ , закон распределения которой неизвестен; требуется по результатам наблюдений сделать выводы о ее законе распределения. Эта задача обычно рассматривается в двух вариантах.

В первом из них закон распределения случайной величины  $X$  неизвестен «вообще»; требуется сформулировать и проверить гипотезу о виде (типе, классе) этого закона и, возможно, значениях его параметров.



Во втором случае общий вид (тип, класс) закона распределения случайной величины  $X$  предполагается известным. Требуется оценить значения неизвестных параметров, от которых этот закон зависит.

По общей логике решение второй из рассмотренных задач должно предшествовать решению первой. Дело в том, что проверка, например, гипотезы

**{Случайная величина  $X$  имеет нормальный закон распределения}**

фактически сводится к проверке гипотезы

**{Случайная величина  $X$  имеет**

**нормальный закон распределения с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ },**

что предполагает использование в качестве параметров  $m$  и  $\sigma^2$  значений, более или менее близких к их теоретическим («истинным») значениям. Таким образом, задача оценивания неизвестных параметров имеет ключевое значение для решения многих других задач математической статистики.

В статье рассматривается один из возможных подходов к решению этой задачи, заключающийся в построении точечных оценок.

Пусть  $X$  – случайная величина, закон распределения которой зависит от параметра  $\theta$ ,  $\vec{X}$  (соответственно  $\vec{x}$ ) – случайная выборка (соответственно выборка) из генеральной совокупности  $X$ . Точечной оценкой параметра  $\theta$  называют [2-4] такую статистику  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение  $\hat{\theta}(\vec{x})$  которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ .

В математической статистике разработано большое число методов построения точечных оценок [5], однако на практике наиболее часто используются метод максимального правдоподобия, графический метод, метод наименьших квадратов и, разумеется, метод моментов, методическим аспектам которого и посвящена эта работа.

### Методология и результаты исследования

Дисциплина «Математическая статистика» входит в программы многих направлений обучения бакалавров. Для некоторых направлений и специальностей в программу курса входит тема «метод моментов».

Метод моментов построения точечных оценок основан на принадлежащей английскому статистика К. Пирсону идее сопоставления теоретических моментов закона распределения их выборочным аналогам. Собственно метод моментов был предложен русским математиком П.Л. Чебышевым в 1887 году при доказательстве центральной предельной теоремы [6].

Пусть  $X$  – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  неизвестных параметров. Предположим, что для  $X$  существуют  $r$  первых начальных моментов [7], которые, очевидно, в общем случае зависят от неизвестных параметров:

$$MX^1 = m_1(\theta_1, \dots, \theta_r),$$

...

$$MX^r = m_r(\theta_1, \dots, \theta_r).$$

Метод моментов основан на том, что выборочные начальные моменты



$$\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = \overline{1; r},$$

являются состоятельными оценками своих теоретических аналогов [8]. По этой причине в рассматриваемом методе принимают равенства

$$MX^k = \hat{m}_k(\vec{X}), \quad k = \overline{1; r},$$

что приводит к системе уравнений (в общем случае нелинейных) относительно неизвестных параметров:

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}_1(\vec{X}), \\ \dots \\ m_r(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}). \end{cases} \quad (1)$$

Решение

$$\theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}),$$

...

$$\theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X})$$

этой системы дает искомые точечные оценки. Изложение метода моментов завершено.

Заметим, что иногда некоторые уравнения системы (1) записывают относительно центральных, а не начальных моментов. В этом случае соответствующее уравнение будет иметь вид:

$$\mu_k(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\mu}_k(\vec{X}),$$

где

$$\mu_k(\theta_1, \dots, \theta_r) = M(X - MX)^k, \quad \hat{\mu}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

– соответственно теоретический и выборочный  $k$ -ые центральные моменты [9]. Выбор между начальным и центральным моментом делают исходя из того, что система (1) должна решаться как можно проще.

Поскольку выборочные моменты  $\hat{m}_k(\vec{X})$  и  $\hat{\mu}_k(\vec{X})$  являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов, можно показать [10], что при условии непрерывной зависимости решения системы (1) от правых частей уравнений оценка, полученная методом моментов, является состоятельной и имеет асимптотически нормальное распределение.

Поскольку при  $k \geq 2$  выборочные моменты  $\hat{m}_k(\vec{X})$  и  $\hat{\mu}_k(\vec{X})$  являются смещенными оценками своих теоретических аналогов [11], то и полученные с использованием метода моментов точечные оценки неизвестных параметров также могут быть смещенными.

## Примеры использования метода моментов

**Пример 1.** Пусть случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с неизвестными параметрами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , то есть  $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$ . Построим с использованием метода моментов точечные оценки этих параметров.

Во-первых, заметим, что в рассматриваемом случае закон распределения генеральной совокупности зависит от  $r = 2$  неизвестных параметров, поэтому система (1) будет содержать два уравнения. Первое из них удобно записать относительно начального момента первого порядка, второе – относительно центрального момента второго порядка.

Поскольку [12] выборочный начальный момент первого порядка имеет вид

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad (2)$$

а выборочный центральный момент второго порядка имеет вид

$$\hat{\mu}_2(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2(\vec{X}), \quad (3)$$

то с учетом известных [13] результатов

$$m_1(\theta_1, \theta_2) = MX = \theta_1,$$

$$\mu_2(\theta_1, \theta_2) = M[(X - MX)^2] = DX = \theta_2.$$

Тогда для рассматриваемой в данном примере параметрической модели система (1) примет вид

$$\begin{cases} \theta_1 = \bar{X}, \\ \theta_2 = \hat{\sigma}^2(\vec{X}). \end{cases} \quad (4)$$

Полученная система уравнений (4) распалась на два независимых уравнения и фактически не требует решения. Поэтому сразу можно записать ответ задачи:

$$\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \bar{X}, \quad \hat{\theta}_2(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}).$$

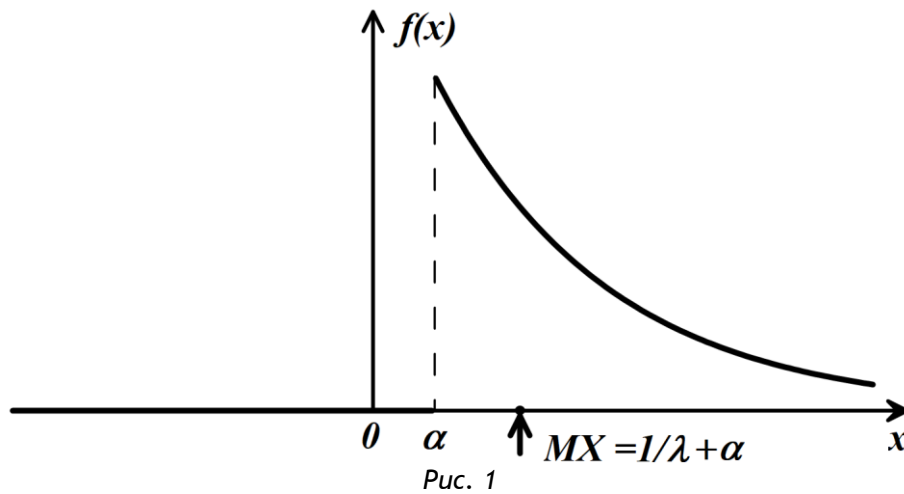
**Пример 2.** Пусть случайная величина  $X$  имеет «смещенное» экспоненциальное распределение с неизвестными параметрами  $\lambda$  и  $\alpha$ , то есть  $X \sim \text{Exp}(\lambda, \alpha)$ . Это означает, что функция плотности распределения вероятностей случайной величины  $X$  имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Построим точечные оценки параметров  $\lambda$  и  $\alpha$  с использованием метода моментов.

Как и в предыдущем примере, рассматриваемая в текущем примере параметрическая модель содержит  $r = 2$  неизвестных параметра и, следовательно, система уравнений метода моментов должна содержать два уравнения. Как и выше, первое из них запишем относительно начального момента первого порядка, второе – относительно центрального момента второго порядка.

На рис. 1 изображен график функции  $f$  плотности случайной величины  $X$ .



Используя механическую интерпретацию математического ожидания как центра тяжести «вероятностной массы» и известное [14] значение математического ожидания «несмещенной» экспоненциальной случайной величины (то есть случайной величины, имеющей распределение  $\text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(\lambda, 0)$ ), находим первый начальный момент случайной величины  $X$ :

$$m_1(\lambda, \alpha) = MX = \frac{1}{\lambda} + \alpha. \quad (5)$$

Механическая интерпретация второго центрального момента как момента инерции «вероятностной массы» относительно математического ожидания позволяет заключить, что при смещении закона распределения дисперсия не меняется, поэтому дисперсия случайной величины  $X$  из текущего примера равна дисперсии «несмещенной» экспоненциальной случайной величины [15]:

$$\mu_2(\lambda, \alpha) = DX = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (6)$$

Полученные выражения (5), (6) для теоретических моментов вкупе с выражениями для их выборочных аналогов, определенными равенствами (2), (3), позволяют в рассматриваемом примере записать систему (1) в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} + \alpha = \bar{X}, \\ \frac{1}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\bar{X}). \end{cases}$$

Очевидное решение

$$\hat{\lambda}(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\bar{X})}}, \quad \hat{\alpha}(\bar{X}) = \bar{X} - \sqrt{\hat{\sigma}^2(\bar{X})}$$

этой системы дает искомые точечные оценки.

**Пример 3.** Пусть случайная величина  $X$  имеет равномерное на отрезке  $[a, b]$  распределение с неизвестными параметрами  $a$  и  $b$ , то есть  $X \sim R[a, b]$ . Построим с использованием метода моментов точечные оценки этих параметров.

Рассматриваемая в данном примере параметрическая модель также имеет  $r = 2$  неизвестных параметра. Как и в разобранных выше примерах, сначала с использованием известных [16] результатов для равномерного распределения записываем выражения для первого начального и второго центрального теоретических моментов:

$$m_1(a, b) = MX = \frac{a + b}{2},$$

$$\mu_2(a, b) = DX = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Далее с учетом выражений (2), (3) для выборочных аналогов этих моментов заключаем, что в настоящем примере система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{a + b}{2} = \bar{X}, \\ \frac{(b - a)^2}{12} = \hat{\sigma}^2(\bar{X}). \end{cases}$$

Полученная система уравнений очевидно эквивалентна системе

$$\begin{cases} a + b = 2\bar{X}, \\ (b - a)^2 = 12\hat{\sigma}^2(\bar{X}), \end{cases}$$

решение которой приведено ниже:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 2\bar{X} - b, \\ (2b - 2\bar{X})^2 = 12\hat{\sigma}^2(\bar{X}), \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 2\bar{X} - b, \\ (b - \bar{X})^2 = 3\hat{\sigma}^2(\bar{X}), \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 2\bar{X} - b, \\ b - \bar{X} = \pm\sqrt{3\hat{\sigma}^2(\bar{X})}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \bar{X} \mp \sqrt{3\hat{\sigma}^2(\bar{X})}, \\ b = \bar{X} \pm \sqrt{3\hat{\sigma}^2(\bar{X})}. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку  $a < b$  по содержательному смыслу параметров, то, выбирая соответствующее решение из двух найденных, получаем искомые точечные оценки:

$$\hat{a}(\bar{X}) = \bar{X} - \sqrt{3\hat{\sigma}^2(\bar{X})}, \quad \hat{b}(\bar{X}) = \bar{X} + \sqrt{3\hat{\sigma}^2(\bar{X})}.$$

### Заключение

В работе рассмотрены методические аспекты изложения темы «Метод моментов построения точечных оценок» в курсе математической статистики, который читается для студентов (бакалавров) инженерных специальностей.

Проведено общее изложение метода, даны необходимые сведения о его применимости и обосновании корректности. В качестве примеров использования метода рассмотрены задачи построения точечных оценок для неизвестных параметров некоторых типовых распределений (нормального, экспоненциального, равномерного). В каждом случае отмечены особенности реализации метода, имеющие методическое значение.

## ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
2. Там же.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — 12-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2023.
5. [https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_theory)
6. Там же.
7. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
8. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Указ. соч.
9. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
10. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Указ. соч.
11. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
12. Там же.
13. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
14. Там же.
15. Там же.
16. Там же.

**Pavel A. Vlasov,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[pvlx@mail.ru](mailto:pvlx@mail.ru)

**Tatiana V. Andreeva,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[t-v-andreeva@mail.ru](mailto:t-v-andreeva@mail.ru)

**Yuri S. Semenov,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, independent researcher, Moscow, Russia*

[yuri\\_semenoff@mail.ru](mailto:yuri_semenoff@mail.ru)

**Presentation of the method of moments for constructing point estimates in the course “Mathematical statistics”**

**Abstract.** The concept of point estimate takes an important place in the course of mathematical statistics. This concept appears when the problem of determining unknown parameters considered. The task is to estimate several parameters on which the law of distribution of a random variable depends. In this case, the general form (type or class) of the distribution law of this random variable is assumed to be known. One of approaches to solve this problem consists in constructing point estimates. The article presents a discussion on the methodology of presenting the topic “Method of moments for constructing point estimates”: a description of the method, a brief information about its justification, and examples of its use for various distribution laws are analyzed.

**Keywords:** parameter estimation, point estimate, method of moments, raw moments, central moments.

## АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МЕТОДАМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

### Аннотация

Статья посвящена актуальной проблеме: как донести до студента-нематематика основы вычислительных методов, применяемых для решения инженерных задач. Целью работы является на элементарном уровне, доступном для студентов нематематических специальностей, изложить теорию численного вычисления интегралов для функции действительного аргумента. В статье рассмотрены различные варианты метода. Приведены основные свойства и теоремы. Показаны способы оценки погрешности вычисления интеграла: теоретический и приближенный. Содержание статьи может служить учебно-методическим пособием студентам, изучающим методы вычислений.

### Ключевые слова

приближенное вычисления интеграла, формула численного интегрирования, остаточный член формулы, формула Рунге

### АВТОРЫ

**Грибов Александр Федорович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
alexandr-gribov@list.ru

**Жидков Евгений Николаевич,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
enzhidkov@yandex.ru

**Краснов Игорь Константинович,**  
кандидат технических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
igorkrsnv@yandex.ru

### Введение

При решении многих инженерно-технических задач возникает задача вычисления интеграла. Несмотря на наличие многих подробных таблиц интегралов они не могут охватить все многообразие возникающих на практике подынтегральных функций. Часто такие функции не имеют аналитического выражения.

Поэтому возникает проблема приближенного вычисления подобных интегралов. К ее решению обращались многие выдающиеся математики. Большое количество методов основываются на теории интерполяции [1]. В качестве вариантов рассматриваются составные формулы, квадратурные формулы Гаусса и другие. Для оценки результата вычисления часто применяются методы Рунге.

Эти методы излагаются для студентов третьего курса университета МГТУ имени Н.Э. Баумана. Приводятся задачи, помогающие освоению материала курса.

## Методология и результаты исследования

### Постановка задачи

Пусть требуется найти значение интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Обычно практически интересные интегралы не берутся. Иногда интересующая нас функция получена в результате эксперимента и известна лишь в конечном числе точек. Поэтому, возникает проблема приближенного вычисления интеграла (1).

Постановка задачи численного интегрирования [2]. Пусть известны значения функции  $f(x)$  в узлах  $x_i, f(x_i)$ . Требуется по этим данным найти приближенное значение интеграла (1).

Построим по этим данным многочлен Лагранжа. Заменяем приближенно интеграл (1).

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_n(x) dx + \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} dx = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{y_j}{\omega_n'(x_j)} \int_a^b \frac{y_j}{\omega_n'(x_j)} dx + \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} dx = \\ &= \sum_{j=0}^n \beta_j y_j + \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Правая часть формулы (2) состоит из двух частей

$$I = \sum_{j=0}^n \beta_j y_j \quad (3)$$

и

$$R_n = \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} dx. \quad (4)$$

Определение 1. Формула (3) называется **формулой численного интегрирования**. Формула (4) - **остаточным членом** этой формулы.

Рассмотрим различные варианты.

$n = 0$ . Применим на отрезке  $[a, b]$  формулу, взяв вначале точку  $x_0 = a$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b y_0 dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx = \\ &= y_0(b-a) + f'(\eta) \int_a^b (x-a) dx = \\ &= y_0(b-a) + f'(\eta) \frac{(b-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Определение 2. Формула

$$I = y_0(b-a) \quad (5)$$

носит название **формулы левых прямоугольников**.

Аналогично, взяв в качестве точки  $x_0 = b$ , получим

$$\int_a^b f(x) dx = y_1(b-a) - f'(\eta) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Определение 3. Формула

$$I = y_1(b-a) \quad (6)$$

носит название **формулы правых прямоугольников**.

Проинтегрируем формулу, взяв в качестве точки  $x_0 = \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b y_0 dx + \int_a^b y_0' \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b f'(\xi) \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2} dx = \\ &= y_0(b-a) + f'(\eta) \frac{(b-a)^3}{24}. \end{aligned} \quad (7)$$

Определение 4. Полученная формула (7) носит название **формулы средних прямоугольников**.

$n = 1$ . Интегрирование (2.2) приводит к формуле

$$a = x_0, b = x_1$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \frac{y_0 + y_1}{2} + f'(\eta) \frac{(b-a)^3}{6} \quad (8)$$

Определение 5. Формула (8) носит название **формулы трапеций**.

$n = 2$ . Проинтегрируем формулу, взяв в качестве точек интерполяции  $x_0 = a$ ,

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) dx = \\ &= \int_a^b \left\{ [y_0(x-x_1)(x-x_2) - y_1(x-x_0)(x-x_2) + y_2(x-x_0)(x-x_1)] \frac{1}{2h^2} + \right. \\ &\quad \left. + y_1 \frac{y_2 - y_0 - 2hy_1'}{2h^3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right\} dx + \\ &\quad + \int_a^b f^{(4)}(\xi) \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}{4!} dx = \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) - f^{(4)}(\eta) \frac{h^4}{90} \end{aligned} \quad (9)$$

Определение 6. Формула (9) носит название **формулы парабол или Симпсона**.

Обычно полученные формулы применяют не на всем отрезке сразу, а, предварительно разделив его на  $n$  равных отрезков. В результате получим следующие, **обобщенные формулы**:



$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad h = \frac{b-a}{n}. \quad (5')$$

$$I = \sum_{i=1}^n y_i \quad (6')$$

$$I = h \sum_{i=0}^n y_{i+1/2}, \quad \text{где } y_{i+1/2} = f\left(x_0 + i \frac{h}{2}\right). \quad (7')$$

$$I = \frac{h}{2} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \quad (8')$$

$$I = \frac{h}{3} \left( y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=1}^{2n} y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right) \quad (9')$$

Полученные формулы обычно сравнивают при  $h \rightarrow 0$ . Из формул прямоугольников самой точной является формула средних прямоугольников (6'), так как порядок ее остаточного члена второй относительно  $h$ .

Формула трапеций (7') тоже имеет второй порядок, но она сложнее формулы прямоугольников.

Самой популярной из этих формул является формула Симпсона (8'), используемая в большинстве стандартных программ.

Отметим еще одно интересное свойство формул численного интегрирования. В формулу для остаточного члена обязательно входит производная подынтегральной функции. Если она равна 0, то для такой функции приближенное значение интеграла совпадает с точным значением интеграла.

Таким образом, формулы (5'), (6') точны для постоянных. Формулы (7'), (8') точны для многочлена первой степени, Формула (9') точна для многочлена третьей степени.

### Примеры вычисления интегралов

Рассмотрим технологию применения этих формул на примере формулы средних прямоугольников.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$  с точностью  $\varepsilon = 0,001$ . Точное его значение равно 1.

Остаточный член формулы (8') имеет вид  $f'(\eta) \frac{h^2(b-a)}{24}$ . Точного значения  $f'(\eta)$  мы не знаем, поэтому, заменяем это значение на наихудшее, взяв  $M_2 = \max_{\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f'(\eta)| = \max_{\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\sin \eta| = 1$ .

Тогда погрешность формулы численного интегрирования

$$|R| = \left| f'(\eta) \frac{h^2(b-a)}{24} \right| \leq M_2 \frac{h^2(b-a)}{24}.$$

В нашем случае,  $|R| \leq 1 \frac{h^2 \pi/2}{24} = \frac{h^2 \pi}{48} < 0.001$ . Решая это неравенство относительно  $h$ , получим  $h < \sqrt{0.048/\pi} = 0.12362$ .

Надо, чтобы шаг  $h$  укладывался в отрезке интегрирования целое число раз, поэтому поделим число  $\pi$  на  $2h$ .  $\pi/2h = 3.141/0.24724 = 6.65$ .

В качестве количества отрезков можно взять 7. Следовательно, шаг интегрирования равен  $h = \pi/14 = 0.224399$ .

В качестве начальной точки берем  $0 + h/2 = 0,1122$ .

Полученный результат - 1,002098.

Для практически важных функций такую оценку провести трудно. Поэтому на практике прибегают к **правилу Рунге**.

Мы видели, что все формулы для остаточного члена имеют вид  $R = Kh^p$ , где  $K$  - некоторая постоянная, значение которой нам неизвестно.

$$I = I_h + R = I_h + Kh^p. \quad (10)$$

Вычислим интересующий нас интеграл с помощью одной и той же формулы с шагами  $h$  и  $h/2$ . Обозначим полученные значения  $I_h$  и  $I_{h/2}$ . Точное значение интеграла обозначим  $I$ . Тогда будут справедливы две формулы:

$$\begin{aligned} I &= I_h + Kh^p, \\ I &= I_{h/2} + K(h/2)^p. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычтем из первой формулы вторую

$$0 = I_h - I_{h/2} + K[h^p - (h/2)^p] = I_h - I_{h/2} + K(2^p - 1)(h/2)^p,$$

откуда

$$K = -(I_h - I_{h/2}) / (2^p - 1)(h/2)^p.$$

Подставим полученный результат в (10).

$$I = I_{h/2} - \frac{I_h - I_{h/2}}{(2^p - 1)(h/2)^p} (h/2)^p = I_{h/2} - \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1}. \quad (12)$$

Следовательно, погрешность можно оценить по формуле (12):

$$R = -\frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1} \quad (13)$$

Отсюда вытекает практическое правило вычисления интегралов.

1. В качестве оценки шага берем  $h \approx \sqrt[p]{\varepsilon}$ . Уменьшаем эту величину так, чтобы шаг укладывался целое число раз в отрезке интегрирования.

2. Вычисляем  $I_h$  и  $I_{h/2}$ .

3. Вычисляем оценку (13). Если она удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1} \right| < \varepsilon,$$

то в качестве результата берем  $I_{h/2}$ , если нет, то уменьшаем шаг вдвое и повторяем процесс, начиная с пункта 2.

*Если решение не получается при десятикратном уменьшении шага, то процесс нужно прервать и внимательно исследовать интеграл. Возможно, потребуется специальный метод вычисления.*

*Использование формулы (13) уточняет решение (поправка Ромберга).*

Пример 2. Оценим вычисление интеграла из примера 1 по формуле Рунге.

При вычислении с шагом  $h = \pi/14 = 0.224399$  получен результат  $I_h = 1.0020998$ .

При вычислении с шагом  $h/2 = \pi/28 = 0.112199$  получен результат  $I_{h/2} = 1.0052139$ .

Оценим погрешность.

$$R = -\frac{I_h - I_{h/2}}{2^2 - 1} = -\frac{1.002098 - 1.0052139}{3} = -0.00052554.$$

Таким образом, интересующая нас точность достигнута и уточненное значение будет

$$I^* = 1.0052139 - 0.00052554 = 0.99999586$$

### Заключение

В работе изложена теория приближенного вычисления определенного интеграла и его модификации - формула левых и правых прямоугольников, формула трапеций и другие. Приведены основные свойства и теоремы. Показано применения методов численного интегрирования к вычислению интегралов. Может служить учебно-методическим пособием студентам, изучающим методы вычислений.

---

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. 632 с.
  2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.-СПб. 2000. 624 с.
- 

**Alexander F. Gribov,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[alexandr-gribov@list.ru](mailto:alexandr-gribov@list.ru)

**Evgeny N. Zhidkov,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[enzhidkov@yandex.ru](mailto:enzhidkov@yandex.ru)

**Igor K. Krasnov,**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[igorkrsnv@yandex.ru](mailto:igorkrsnv@yandex.ru)

### Aspects of teaching methods of calculating integrals to engineering students

**Abstract.** The article is devoted to the actual problem: how to convey to a non-mathematical student the basics of computational methods used to solve engineering problems. The aim of the work is to present the theory of numerical calculation of integrals for a function of a real argument at an elementary level accessible to students of non-mathematical specialties. The article discusses various variants of the method. The main properties and theorems are given. The methods of estimating the error of calculating the integral are shown: theoretical and approximate. The content of the article can serve as a teaching aid for students studying computational methods.

**Keywords:** approximate calculation of the integral, numerical integration formula, residual term of the formula, Runge formula.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К ПРИМЕНЕНИЮ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

### Аннотация

Статья посвящена актуальной проблеме: как донести до студента-нематематика основы вычислительных методов, применяемых для решения инженерных задач. Целью работы является на элементарном уровне, доступном для студентов нематематических специальностей, изложить теорию сплайнов для приближения функции действительного аргумента. В статье рассмотрены различные варианты метода. Приведены основные свойства и теоремы, а также способы оценки погрешности приближения. Содержание статьи может служить учебно-методическим пособием студентам, изучающим методы вычислений.

### Ключевые слова

сплайн-приближение, базисный сплайн, оценка погрешности

### АВТОРЫ

**Жидков Евгений Николаевич,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
enzhidkov@yandex.ru

**Краснов Игорь Константинович,**  
кандидат технических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
igorkrsnv@yandex.ru

**Грибов Александр Федорович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
alexandr-gribov@list.ru

### Введение

При решении многих инженерно-технических задач возникает задача многократного вычисления значения функции. Наиболее популярный способ вычисления функции - замена интересующей нас функции многочленом или функциональным рядом, степенным или рядом Фурье.

Большим недостатком подобных методов является то, что повышение порядка ряда не приводит к повышению точности вычисления, а во многих случаях ухудшает результат. Поэтому, возникает проблема построения функции невысокого порядка, равномерно приближающую функцию [1].

Обычно подобные задачи решаются достаточно сложным способом. В качестве достаточно простого решения такой задачи предлагается сплайн-интерполяция интересующей нас функции.

Суть предлагаемого метода заключается в том, что отрезок интерполяции делится на несколько, не обязательно равных отрезков. Граничные точки отрезков называются узлами интерполяции. На каждом из таких отрезков функция заменяется многочленом невысокой степени. В узлах интерполяции выполняются условия непрерывности сплайна и некоторого количества его производных. Этот способ обеспечивает достаточно высокую степень приближения функции. Существуют несколько вариантов построения сплайна. Рассмотрим метод Эрмитовых сплайнов.

Эти методы излагаются для студентов третьего курса университета МГТУ имени Н.Э. Баумана. Приводятся задачи, помогающие освоению материала курса.

### Методология и результаты исследования

#### Сплайн первого порядка

Предположим, что на отрезке  $[a, b]$  задана сетка  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Не будем предполагать ее равномерности и обозначим  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

Пусть задана таблица значений функции  $f(x_i) = y_i$ . Соединим прямой точки  $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ . В результате получаем функцию, которая на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  задается уравнением прямой

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i).$$

Преобразуем его к виду

$$y = y_i c + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} = y_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \frac{x - x_i}{h_i} y_{i+1}. \quad (1)$$

Очевидно, что функция по исходным данным строится однозначно.

**Определение 1.** Функция вида (1) называется сплайном первого порядка.

Будем в дальнейшем обозначать сплайн через  $s(x)$ , а его значения в точках  $x_i$  через  $s_i$ . Вычислим производную сплайна.

$$s'(x) = \frac{s_{i+1} - s_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (2)$$

Производная является кусочно-постоянной функцией и терпит разрыв в точках  $x_i$ .

**Определение 2.** Функцию (1) будем называть сплайном первого порядка дефекта 1.

В дальнейшем нам потребуется специальный вид сплайна, который определяется следующими условиями:

$$s(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

Для того чтобы подчеркнуть положение вершины сплайна, будем обозначать его  $s^k(x)$ .

Легко видеть, что такой сплайн имеет вид

$$s^0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x > x_1. \end{cases}$$

$$s^k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < x_{k-1} \text{ или } x > x_{k+1} \\ \frac{x_k - x}{h_{k-1}}, & \text{если } x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n-1 \\ \frac{x - x_{k+1}}{h_k}, & \text{если } x \in [x_k, x_{k+1}] \end{cases} \quad (3)$$

$$s^n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{h_{n-1}}, & \text{если } x \in [x_n, x_{k+1}]. \end{cases}$$

**Определение 3.** Сплайн вида (3) называется базисным сплайном.

**Теорема.** Любая кусочно - линейная функция может быть однозначно представлена в виде

$$y = \sum_{k=0}^n y_k s^k(x) \quad (4)$$

Очевидно, что на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  функция (4) линейна. Вычислим значение функции  $y(x)$  в узле  $x_i$ .

$$y(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k s^k(x_i) = y_i.$$

Так как две линейных функции в узлах принимают одинаковые значения, то они совпадают.

*Сплайн третьего порядка.*

**Определение 4.** Назовем кубическим сплайном дефекта 1 на отрезке  $[a, b]$  функцию, имеющую две непрерывных производных на отрезке  $[a, b]$  и на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  задаваемую многочленом не выше, чем третьей степени.

Кубический сплайн на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  задается выражением (5)

$$s(x) = s_i \left[ 3 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 \right] + s_{i+1} \left[ 3 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 - 2 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^3 \right] + s'_i h_i \left[ \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 \right] - s'_{i+1} h_i \left[ \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 - \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^3 \right]. \quad (5)$$

Здесь  $s_i$  - значение сплайна в узле  $x_i$ , а  $s'_i$  - значение его производной в том же узле. Вычислим первую и вторую производные сплайна.

$$s'(x) = -\frac{6s_i}{h_i} \left[ \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) - \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 \right] + \frac{6s_{i+1}}{h_i} \left[ \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right) - \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 \right] - s'_i \left[ 2 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) - 3 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 \right] - s'_{i+1} \left[ 2 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right) - 3 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

$$s''(x) = \frac{6s_i}{h_i^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) \right] + \frac{6s_{i+1}}{h_i^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right) \right] + \frac{s'_i}{h_i} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) \right] - \frac{s'_{i+1}}{h_i} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right) \right]. \quad (7)$$

Для получения интерполяционного сплайна потребуем, чтобы его значения в узлах интерполяции совпадали со значением интерполируемой функции.

$$s_i = y_i, i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Проверим непрерывность сплайна и его производной в узле  $x_i$ . Для этого выпишем уравнение для сплайна на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ . Оно имеет вид

$$s(x) = s_{i-1} \left[ 3 \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^3 \right] + s_i \left[ 3 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 - 2 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^3 \right] + s'_{i-1} h_{i-1} \left[ \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^2 - \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^3 \right] - s'_i h_{i-1} \left[ \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 - \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^3 \right]. \quad (9)$$

Вычислим пределы (6) и (7) при  $x \rightarrow x_i$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{i+0}} s(x) &= \lim_{x \rightarrow x_{i+0}} \left\{ s_i \left[ 3 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 \right] + s_{i+1} \left[ 3 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 - 2 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^3 \right] + \right. \\ &\quad \left. + s'_i h_i \left[ \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 \right] - s'_{i+1} h_i \left[ \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^2 - \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right)^3 \right] \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_{i+0}} \left\{ s_i \left[ 3 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 \right] + s'_i h_i \left[ \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^2 - \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right)^3 \right] \right\} = s_i. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{i-0}} s(x) &= \lim_{x \rightarrow x_{i-0}} \left\{ s_{i-1} \left[ 3 \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^3 \right] + s_i \left[ 3 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 - 2 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^3 \right] + \right. \\ &\quad \left. + s'_{i-1} h_{i-1} \left[ \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^2 - \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right)^3 \right] - s'_i h_{i-1} \left[ \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 - \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^3 \right] \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_{i-0}} \left\{ s_i \left[ 3 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 - 2 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^3 \right] - s'_i h_{i-1} \left[ \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^2 - \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right)^3 \right] \right\} = s_i. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке  $x_i$  функция непрерывна. Внутри интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$  и  $(x_i, x_{i+1})$   $s(x)$  является многочленом третьей степени, значит, сплайн непрерывен на всем отрезке  $[a, b]$ .

Аналогично проверяется условие непрерывности первой производной.

Выведем условие непрерывности второй производной. Для этого вычислим предел  $\lim_{x \rightarrow x_i} s''(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{i+0}} s''(x) &= \lim_{x \rightarrow x_{i+0}} \left\{ \frac{6s_i}{h_i^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6s_{i+1}}{h_i^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right) \right] + \frac{s'_i}{h_i} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) \right] - \frac{s'_{i+1}}{h_i} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x - x_i}{h_i} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{6s_i}{h_i^2} (1 - 2) + \frac{6s_{i+1}}{h_i^2} + \frac{s'_i}{h_i} (2 - 6) - \frac{2s'_{i+1}}{h_i} = -\frac{6s_i}{h_i^2} + \frac{6s_{i+1}}{h_i^2} - 4 \frac{s'_i}{h_i} - \frac{2s'_{i+1}}{h_i}. \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_{i-0}} s''(x) &= \lim_{x \rightarrow x_{i-0}} \left\{ \frac{6s_{i-1}}{h_{i-1}^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right) \right] + \frac{6s_i}{h_{i-1}^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s'_{i-1}}{h_{i-1}} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x_i - x}{h_{i-1}} \right) \right] - \frac{s'_i}{h_{i-1}} \left[ 2 - 6 \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{6s_{i-1}}{h_{i-1}^2} - \frac{6s_i}{h_{i-1}^2} + 4 \frac{s'_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{2s'_i}{h_{i-1}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Приравнявая (10) и (11), получим условие непрерывности второй производной сплайна



$$-\frac{6s_i}{h_i^2} + \frac{6s_{i+1}}{h_i^2} - 4\frac{s'_i}{h_i} - \frac{2s'_{i+1}}{h_i} = \frac{6s_{i-1}}{h_{i-1}^2} - \frac{6s_i}{h_{i-1}^2} + 4\frac{s'_i}{h_{i-1}} + \frac{2s'_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (12)$$

Преобразуем условие (12), перенеся производные в левую часть равенства, а значения функции - в правую.

$$\frac{2s'_{i-1}}{h_{i-1}} + 4s'_i \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + \frac{2s'_{i+1}}{h_i} = -\frac{6s_{i-1}}{h_{i-1}^2} + \frac{6s_i}{h_{i-1}^2} - \frac{6s_i}{h_i^2} + \frac{6s_{i+1}}{h_i^2} \quad (13)$$

Преобразуем (13), сократив равенство на 2 и преобразовав правую часть.

$$\frac{s'_{i-1}}{h_{i-1}} + 2s'_i \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + \frac{s'_{i+1}}{h_i} = 3 \left[ \frac{s_{i+1} - s_i}{h_i^2} + \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}^2} \right] \quad (14)$$

Поделим уравнение (14) на

$$\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} = \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1}h_i}.$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i} \frac{s'_{i-1}}{h_{i-1}} + 2s'_i \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i} + \frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i} \frac{s'_{i+1}}{h_i} = \\ = 3 \left[ \frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i} \frac{s_{i+1} - s_i}{h_i^2} + \frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i} \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} s'_{i-1} + 2s'_i + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} s'_{i+1} = \\ = 3 \left[ \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} \frac{s_{i+1} - s_i}{h_i} + \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$ . Тогда  $\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} = 1 - \alpha_i$ .

С его помощью условие (15) можно записать в виде

$$(1 - \alpha_i)s'_{i-1} + 2s'_i + \alpha_i s'_{i+1} = 3 \left[ (1 - \alpha_i) \frac{s_{i+1} - s_i}{h_i} + \alpha_i \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}} \right] \quad (16)$$

Условия (16) должны выполняться в узлах  $\{x_i\}, i = 1, \dots, n - 1$ . Таким образом, для определения  $2n + 2$  параметров сплайна  $\{s_i, s'_i\}, i = 0, \dots, n$  у нас получается  $2n$  уравнений.

Недостающие условия можно получить исходя из следующих рассуждений. Во-первых, они могут вытекать из конкретной постановки задачи. Во-вторых, можно задавать дополнительные условия на производные в концевых точках.

Для этого воспользуемся следующим: пусть имеется функция  $g(x) \in C^2[a, b]$ , которая удовлетворяет условиям интерполяции (4):  $g(x_i) = y_i$ .

Вычислим квадрат второй производной функции  $g(x)$ :

$$[g'']^2 = [g'' - s'' + s'']^2 = [g'' - s'']^2 + 2[g'' - s'']s'' + [s'']^2.$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку  $[a, b]$ .

$$\int_a^b [g''']^2 dx = \int_a^b [g'' - s'']^2 dx + 2 \int_a^b [g'' - s'']s'' dx + \int_a^b [s'']^2 dx.$$

Так как третья производная сплайна является постоянной, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} s''' \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g' - s'] dx &= s''' \sum_{i=0}^{n-1} [g - s] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= s''' \sum_{i=0}^{n-1} [g(x_{i+1}) - s(x_{i+1})] - s''' \sum_{i=0}^{n-1} [g(x_i) - s(x_i)] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''']^2 dx &= \int_a^b [g'' - s'']^2 dx + 2\{[g'(x_n) - s'(x_n)]s''(x_n) - \\ &\quad - [g'(x_0) - s'(x_0)]s''(x_0)\} + \int_a^b [s'']^2 dx \end{aligned}$$

Отбрасывая положительное первое слагаемое, получим неравенство

$$\int_a^b [g''']^2 dx \geq 2\{[g'(x_n) - s'(x_n)]s''(x_n) - [g'(x_0) - s'(x_0)]s''(x_0)\} + \int_a^b [s'']^2 dx \quad (17)$$

Потребуем равенства нулю содержимого фигурной скобки. Для этого достаточно выполнения условий

$$g'(x_0) = s'(x_0) \text{ или } s''(x_0) = 0. \quad (18)$$

$$g'(x_n) = s'(x_n) \text{ или } s''(x_n) = 0. \quad (19)$$

При этом неравенство примет вид

$$\int_a^b [g''']^2 dx \geq \int_a^b [s'']^2 dx \quad (20)$$

Интеграл  $\int_a^b [g''']^2 dx$  характеризует в среднем кривизну кривой, поэтому, мы получаем в некотором роде оптимальную аппроксимацию.

Вследствие этого мы будем требовать выполнения условий (18) и (19). В случае условий на вторую производную получим следующую систему для определения параметров  $s'_i$  сплайна

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= -\frac{6s_0}{h_0^2} + \frac{6s_1}{h_1^2} - 4\frac{s'_0}{h_0} - \frac{2s'_1}{h_1} = 0 \\ (1 - \alpha_i)s'_{i-1} + 2s'_i + \alpha_i s'_{i+1} &= 3[(1 - \alpha_i)\frac{s_{i+1} - s_i}{h_i} + \alpha_i \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}}], i = 1, \dots, n-1, \quad (21) \\ s''(x_n) &= \frac{6s_{n-1}}{h_{n-1}^2} - \frac{6s_n}{h_n^2} + 4\frac{s'_n}{h_{n-1}} + \frac{2s'_{n-1}}{h_{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

Система (21) легко решается методом прогонки.

Главное преимущество сплайн-интерполяции по сравнению с интерполяцией многочленами описывается следующей теоремой:

Теорема 4. Если функция  $f(x) \in C^3[a, b]$  и  $f(x_i) = y_i$ , то для сплайна  $s(x)$ , удовлетворяющего условию  $s(x_i) = y_i$ , справедливо неравенство

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| = O(h^{3-k}), k = 0, 1, 2, 3. \quad (22)$$

Здесь  $h = \max h_i$ .

По аналогии с (3) можно ввести понятие базисных сплайнов. Они могут вводиться следующими способами.

Способ 1. Введем шесть дополнительных узлов  $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$ .

Определение 13. Базисными сплайнами будем называть систему сплайнов  $s^k, k = -1, 0, \dots, n+1$ , удовлетворяющих условиям

$$s^k \equiv 0 \text{ при } x \leq x_{k-2} \text{ и } x \geq x_{k+2}; s^k(x_k) = 1.$$

Напишем уравнения сплайна на равномерной сетке. Вначале запишем вспомогательный сплайн  $s^{(0)}(x)$ , отличный от нуля на отрезке  $[-h, h]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [-2h, 2h], \\ 0.25\left(\frac{x+2h}{h}\right)^3, x \in [-2h, 2h], \\ 0.25\left[3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3\right] + 3\left(\frac{x+h}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x+h}{h}\right)^3 + \\ + 0.75\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3\right], x \in [-h, 0], \\ 3\left(\frac{h-x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{h-x}{h}\right)^3 + 0.25\left[3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3\right] + \\ + 0.75\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \left(\frac{x}{h}\right)^3\right], x \in [0, h], \\ 0.25\left(\frac{2h-x}{h}\right)^3, x \in [h, 2h]. \end{cases}$$

Тогда базисный сплайн  $s^k(x)$  можно записать в виде  $s^k(x) = s^{(0)}(x - x_k)$ .

Любой сплайн третьего порядка можно записать в виде

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k s^k(x).$$

Существуют и другие способы задания базисных сплайнов.

Дадим общее определение сплайна. Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана система точек  $\{x_i\}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Определение 14. Сплайном степени  $m$  дефекта  $k$  будем называть функцию, задаваемую на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  многочленом степени не выше  $m$ , непрерывную на отрезке  $[a, b]$  вместе с производными до порядка  $m-k$ .

## Заключение

В работе изложены элементы теории сплайн-интерполяции. Приведены основные свойства и теоремы. Показаны применения методов сплайн-интерполяции, построения базисных сплайнов. Может служить учебно-методическим пособием студентам, изучающим теорию приближения функций.

---

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.-СПб. 2000. 624 с.

---

***Evgeny N. Zhidkov,***

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[enzhidkov@yandex.ru](mailto:enzhidkov@yandex.ru)

***Igor K. Krasnov,***

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[igorkrsnv@yandex.ru](mailto:igorkrsnv@yandex.ru)

***Alexander F. Gribov,***

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[alexandr-gribov@list.ru](mailto:alexandr-gribov@list.ru)

#### **Practical guide to the use of spline interpolation in the educational process**

**Abstract.** The article is devoted to the actual problem: how to convey to a non-mathematical student the basics of computational methods used to solve engineering problems. The aim of the work is to present the theory of splines for the approximation of the function of a valid argument at an elementary level accessible to students of non-mathematical specialties. The article discusses various variants of the method. The main properties and theorems are given. Methods for estimating the approximation error are given. The content of the article can serve as a teaching aid for students studying computational methods.

**Keywords:** spline approximation, basic spline. Error estimation.

## МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА»

### Аннотация

При проведении практических занятий, выдаче текущих и контрольных заданий по теме «Интеграл Лебега» у преподавателей возникает проблема получения достаточного количества задач с ответами по этой теме. Следует отметить, что задачи по этой теме отсутствуют во многих известных сборниках заданий. В данной работе рассматривается некоторый методический приём, который позволяет упростить составление задач с ответами по теме «Интеграл Лебега». В работе приведена методика получения формул для составления, достаточного количества задач и рассмотрены конкретные примеры. После соответствующего изменения предлагаемый метод может быть использован на практических занятиях, а также для составления задач на вычисление математического ожидания дискретных случайных величин.

### Ключевые слова

длина кривой, производная переменной длины дуги,  
выражение длины дуги интегралом

### АВТОРЫ

**Иванков Павел Леонидович,**  
доктор физико-математических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
ivankovpl@mail.ru

**Обухов Виктор Павлович,**  
старший преподаватель  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
v.obuhov@outlook.com

### Введение

При проведении семинаров, контрольных работ, выдаче текущих домашних заданий по теме «Интеграл Лебега» у преподавателей может возникать проблема составления большого количества простых задач с ответами по данной теме. Следует отметить, что задачи по этой теме отсутствуют в известных сборниках заданий; смотри, например, [1 – 3].

В данной работе будет изложен некоторый приём, позволяющий, упростить составление такого рода задач. Кроме того, после соответствующего изменения предлагаемый метод может быть использован преподавателями для составления задач при проведении занятий и контрольных работ по теме «Вычисление математического ожидания дискретных случайных величин».

### Методология и результаты исследования

Функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *простой*, если она принимает не более, чем счётное множество значений. При этом предполагается, что функция  $f$  измерима, что

в данном случае эквивалентно измеримости каждого из множеств  $f^{-1}(y_n)$ , где  $y_1, y_2 \dots$  всевозможные (различные) значения этой функции. Мереу Лебега множества  $A$  будем обозначать через  $\mu(A)$ . Интеграл Лебега от простой функции определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_n y_n \mu(f^{-1}(y_n)),$$

где сумма распространена на все значения функции  $f$ .

В случае бесконечности множества таких значений соответствующий числовой ряд должен сходиться абсолютно (в противном случае интеграл не существует).

Используя понятие интеграла Лебега от простой функции, нетрудно определить и интеграл Лебега от функции общего вида.

**Определение.** Измеримая функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  называется *интегрируемой на отрезке*  $[a, b]$ , если существует последовательность  $\{f_n\}$  простых интегрируемых на отрезке  $[a, b]$  функций, которая равномерно на этом отрезке сходится к функции  $f$ .

Мы не будем использовать это определение; отметим лишь, что интеграл Лебега от интегрируемой функции на отрезке  $[a, b]$  определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Можно показать, что это определение корректно в том смысле, что последний предел существует и не зависит от выбора последовательности  $\{f_n\}$ .

Рассмотрим ещё следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$  причём любые два отрезка, входящие в это объединение пересекаются самое большее по своим граничным точкам. Предположим также, что функция  $f$  принимает лишь одно значение  $c_k$  на каждом отрезке  $[a_k, b_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_k c_k (b_k - a_k),$$

причём в случае бесконечности числа отрезков  $[a_k, b_k]$ , этот ряд должен сходиться абсолютно (при этом последнее условие необходимо и достаточно для существования рассматриваемого интеграла).

Нам эта лемма не потребуется, так как мы, как правило, при составлении вариантов задания будем использовать монотонные функции (см. ниже функции под знаком целой части); в случае же использования функций общего вида лемма может оказаться полезной именно потому, что в ней не предполагается, что числа  $c_1, c_2, \dots$  попарно различны.

Мы будем рассматривать дискретные (т. е. принимающие не более чем счётное множество значений) функции, определённые на всей вещественной прямой. В основном мы будем использовать целую часть  $[x]$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . По определению  $x \leq [x] < x + 1$ . Приведём примеры:

$$[\pi] = 3; [\sqrt{2}] = 1; [-\sqrt{2}] = -2; [-\pi] = -4.$$

График функции  $y = [x]$  представлен на рис. 1.

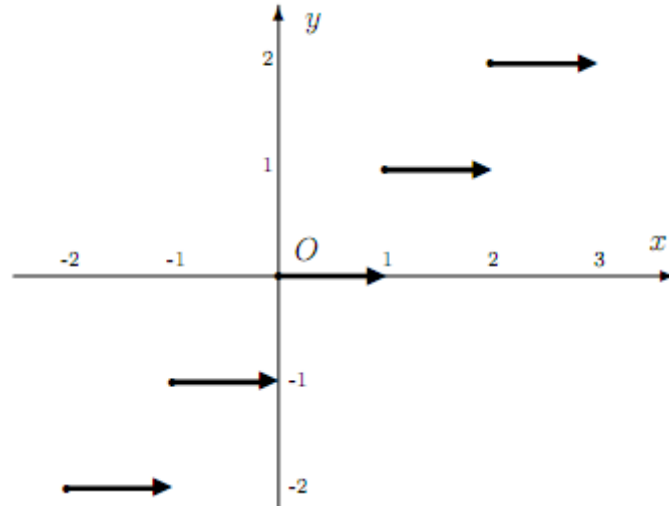


Рис. 1

Упомянем также сигнум  $x$ , т.е. функцию

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

и функцию Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Графики этих функций представлены соответственно на рис. 2 и рис. 3.

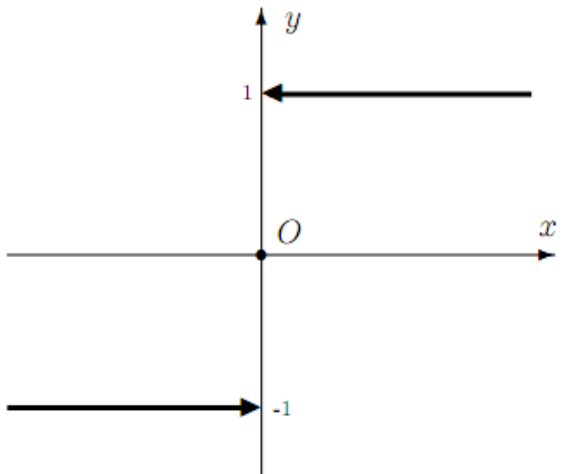


Рис. 2

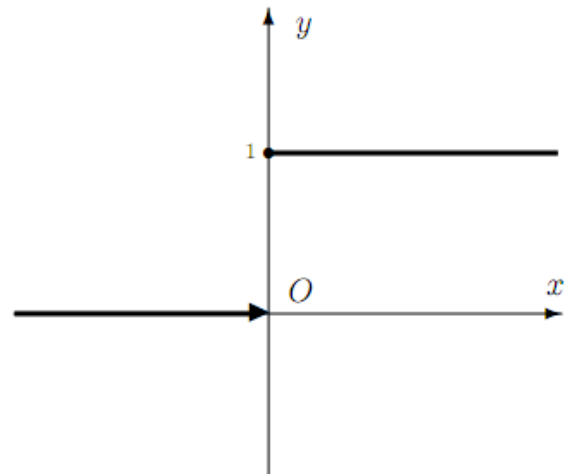


Рис. 3

Рассмотрим сначала ограничение функции  $y = \sin \frac{\pi}{x}$  на отрезок  $[0, 1]$  и составим функцию  $f(x) = \text{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right)$ . Очевидно, что мы получим простую функцию, принимающую лишь три значения, причём

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(1)) &= \mu \left\{ x: x \in [0, 1], \sin \frac{\pi}{x} > 0 \right\} = \\ &= \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)}, \\ \mu(f^{-1}(0)) &= \mu \left\{ x: x \in [0, 1], \sin \frac{\pi}{x} = 0 \right\} = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(-1)) &= \mu \left\{ x: x \in [0, 1], \sin \frac{\pi}{x} < 0 \right\} = \\ &= \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению интеграла от простой функции

$$\int_0^1 \text{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k-1)} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(4k^2-1)}.$$

Если использовать функцию Хевисайда, то мы получим такое равенство:

$$\int_0^1 \eta \left( \sin \frac{\pi}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)}.$$

Результатам вычислений не хватает завершённости: интегралы заменены суммами бесконечных рядов, и чему же равны интегралы «на самом деле», остаётся неизвестным. Поэтому при составлении вариантов контрольных работ (или типовых расчётов) следует заранее определиться с числовыми рядами, суммы которых считаются известными. Можно, например, ограничиться разложениями в ряды основных элементарных функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

которые справедливы при всех  $x$ , а также разложениями

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1,$$

и

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Вполне допустимо расширение этого списка равенствами, известными из теории рядов Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Использование более сложных рядов вряд ли целесообразно.

Заметим, однако, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\zeta)}$$

(смотри, например, [4] задача 30.10)

$$\frac{1}{\zeta} \left( \frac{\Gamma'(\zeta+1)}{\Gamma(\zeta+1)} - \Gamma'(1) \right)$$

позволяет выразить через значения  $\Gamma$ -функции Эйлера рассмотренные выше интегралы

$$\int_0^1 \text{sign} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right) dx$$

и

$$\int_0^1 \eta \left( \sin \frac{\pi}{x} \right) dx.$$

Например,

$$\int_0^1 \eta\left(\sin \frac{\pi}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \sum_k^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \Gamma'(1) \right).$$

Последнее выражение можно упростить, если воспользоваться равенствами

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и

$$\Gamma'(1) = -\gamma,$$

где

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

является постоянной Эйлера; смотри, например, [5] гл. 14 § 5.

Использование перечисленных выше рядов, суммы которых известны, позволяет составить практически неограниченное число вариантов задач на вычисление интеграла Лебега от простых функций. При этом наиболее удобной для составления таких вариантов оказывается функция  $y = [x]$ .

Рассмотрим, например, интеграл

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\left[ \log_{\frac{1}{2}} x \right]}.$$

Пусть  $m$  – натуральное число. Решая неравенство  $m \leq \log_{\frac{1}{2}} x < m + 1$ , получаем, что  $\left[ \log_{\frac{1}{2}} x \right] = m$  тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2^m} \geq x > \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Поэтому

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m 2^m} = -\frac{1}{2} \ln(1-x) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

Здесь сразу получился ряд, сумма которого считается известной.

В других случаях приходится усложнять подынтегральную функцию. Рассмотрим такой интеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{[\sec x]^2 \left( \arccos \frac{1}{[\sec x]+1} - \arccos \frac{1}{[\sec x]} \right)}.$$

Решая неравенство  $m \leq \sec x < m + 1$  при натуральном  $m$  получаем, что

$$\arccos \frac{1}{m} \leq x < \arccos \frac{1}{m+1},$$

и

$$\mu\left(x : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], [\sec x] = m\right) = \arccos \frac{1}{m+1} - \arccos \frac{1}{m}.$$

Поэтому

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left( \arccos \frac{1}{m+1} - \arccos \frac{1}{m} \right)}.$$

$$\cdot \left( \arccos \frac{1}{m+1} - \arccos \frac{1}{m} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Приведём ещё несколько задач на вычисление интегралов от простых функций, построенных по приведённому выше образцу:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{[\text{ctg } x]} \cdot 3^{[\text{ctg } x]}}{(2 [\text{ctg } x])! (\text{arcctg } [\text{ctg } x] - \text{arcctg } ([\text{ctg } x] + 1))} dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4^{\lceil \log_{\frac{1}{4}} x \rceil}}{[\log_{\frac{1}{4}} x]^2} dx, \int_0^1 \frac{\left(\left[\frac{1}{x}\right] + 1\right)}{2^{\lceil \frac{1}{x} \rceil}} dx \text{ и т. д..}$$

Вычисление всех этих интегралов легко сводится к суммированию перечисленных выше рядов.

Некоторым из студентов, решавших задачи рассмотренного типа «не нравилось», что предложенные интегралы существуют также и как (несобственные) интегралы Римана. Это можно легко исправить: надо изменить значения подынтегральной функции в точках какого-либо множества меры ноль так, чтобы эта функция приобрела слишком много точек разрыва и по этой причине утратила свойство интегрируемости по Риману.

### Заключение

Предложен метод составления большого количества вариантов задач на интегрирование простых функций для проведения семинаров, контрольных работ, выполнения домашних заданий и для текущего контроля по теме «Интеграл Лебега».

Возможности предложенного метода составления вариантов задач на интегрирование простых функций можно расширить, ознакомив студентов с другими не слишком сложными известными суммами числовых рядов.

Можно также составлять задачи на вычисление интегралов вида

$$\int_0^1 f(K(x)) dx,$$

где  $K(x)$  – канторова лестница; смотри, например, [6] гл. 14, § 5.

Функция  $K(x)$  не является простой, но если изменить значения этой функции, считая, что она равна нулю в точках канторова множества, то мы получим простую функцию, которая эквивалентна  $K(x)$ . Варьируя функцию  $f$  в последнем интеграле можно получить некоторое количество задач, пригодных для контрольной работы. Но составить много вариантов в этом случае вряд ли удастся из-за сложности вычислений, требуемых для решения таких задач.

После соответствующего изменения предлагаемый метод может быть также использован преподавателями для получения достаточного количества задач для проведения занятий и текущего контроля по теме «Вычисление математического ожидания дискретных случайных величин».

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. А. А. Кузнецов Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты. СПб: Издательство «Лань», 2005. 240с.
2. В.Ф. Чудесенко Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчёты. Москва: Высшая школа, 1983. 112с.

3. Сборник типовых расчётов по высшей математике. / Под ред. В.Б. Миносцева. Москва: Высшая школа, 2001. 510с.
4. Сборник задач по теории аналитических функций. /Под ред. М.А Евграфова.Москва: «Наука», 1972. 415с.
5. Г.М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления.том II. Москва: «Наука», 1966. 800с.
6. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: «Наука», 1981. 544с.

---

**Pavel L. Ivankov,**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[ivankovpl@mail.ru](mailto:ivankovpl@mail.ru)

**Victor P. Obuhov,**

*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[v.obuhov@outlook.com](mailto:v.obuhov@outlook.com)

**Method of preparing some types of problems for the tests on the theme “Lebesgue Integral“**

**Abstract.** While carrying out practical lessons and giving out everyday and control assignments on the theme “Lebesgue integral” the teachers are faced with the necessity to produce sufficient quantity of problems with answers on this subject it should be noted that the problems on this theme are absent in most popular collections of assignments. In this paper consider some methodical technique which makes it possible to simplify working out the problems with answers on the theme “Lebesgue integral”. The paper contains methodical technique for working out the formulae for sufficient quantity of problems and concrete examples are considered. After appropriate alteration the proposed method can be applied at practical lessons and also for compiling problems on calculation of mathematical expectations of discrete distributions.

**Keywords:** Lebesgue integral, sum of power series, simple function, Cantor function.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ»****Аннотация**

В статье рассмотрены приемы решения типовых задач по аналитической геометрии на примере изучения темы «Плоскость в пространстве». Целью работы является формирование у студентов навыков владения методами векторной алгебры, а также умения применять их к решению задач по аналитической геометрии. В работе изложен необходимый теоретический материал и приведены задачи с анализом решения на формирование у студентов навыков применения изученных методов. Материалы статьи могут быть полезными для самостоятельной работы студентов, а также преподавателям при подготовке к проведению практических занятий.

**Ключевые слова**

вектор, плоскость, нормальный вектор плоскости, коллинеарные векторы, компланарные векторы

**АВТОРЫ**

**Кандаурова Ирина Евгеньевна,**  
старший преподаватель

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
iriskan07@gmail.com

**Чигирёва Ольга Юрьевна,**

кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
mkfn12@yandex.ru

**Введение**

Аналитическая геометрия - раздел геометрии, в котором геометрические объекты и их свойства изучаются аналитическими методами. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, который впервые применил Рене Декарт (1596-1650). Основные понятия геометрии - точка, прямая и плоскость относятся к начальным понятиям, которые можно только описать, но не дать определения. Методом введения перечисленных понятий является аксиоматический метод, изложенный Давидом Гильбертом (1862-1943) в книге «Основания геометрии», которая была опубликована в 1899 году. В книге приведены аксиомы трехмерного евклидова пространства, установлена их непротиворечивость, независимость основных аксиом и их полнота. Существует другая аксиоматика трехмерного евклидова пространства, предложенная Германом Вейлем (1885-1955) в книге «Пространство, время, материя», вышедшей в свет в 1918 году. Аксиомы Вейля трехмерного евклидова пространства включают в себя четыре группы аксиом: линейного пространства, размерности трехмерного векторного пространства, скалярного произведения и аксиомы Вейля (аксиома откладывания вектора и аксиома треугольника). Аксиоматика Г. Вейля отличается от аксиоматики Д. Гильберта, но ей эквивалентна, и основана на применении *векторной алгебры* [1].

Аналитическая геометрия является основой для других разделов геометрии, например, дифференциальной, и применяется во многих естественных науках.

### Методология и результаты исследования

Аналитическая геометрия представляет собой один из основных курсов, изучаемых студентами не только математических, но и инженерных специальностей.

В результате освоения темы «Плоскость в пространстве» студент должен *знать*

- виды уравнения плоскости;
- критерии, позволяющие исследовать взаимное расположение плоскостей;
- формулу для нахождения угла между плоскостями;
- формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости;

*уметь* решать типовые задачи:

- находить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой;
- исследовать взаимное расположение плоскостей;
- находить угол между плоскостями;
- вычислять расстояние от точки до плоскости;
- вычислять расстояние между параллельными плоскостями;
- исследовать взаимное расположение заданных точек относительно некоторой плоскости;

*владеть* методами решения задач аналитической геометрии.

### Актуализация знаний по теме «Векторы»

Для повторения ранее изученной темы можно предложить студентам ответить на следующие вопросы.

1. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов.
2. Запишите формулу для вычисления скалярного произведения двух векторов, заданных в ортонормированном базисе.
3. Запишите формулу для вычисления косинуса угла между векторами, заданными в ортонормированном базисе.
4. Сформулируйте критерий ортогональности двух векторов.
5. Сформулируйте определение векторного произведения двух векторов.
6. Запишите формулу для вычисления векторного произведения двух векторов в правом ортонормированном базисе.
7. Сформулируйте критерий коллинеарности двух векторов.
8. Сформулируйте определение смешанного произведения трех векторов.
9. Запишите формулу для вычисления смешанного произведения трех векторов в правом ортонормированном базисе.
10. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов.

### Основные теоретические сведения

Здесь и далее изложение теоретического материала основано на учебниках по аналитической геометрии [2,3].

Справедливы следующие утверждения.

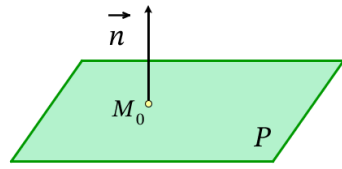
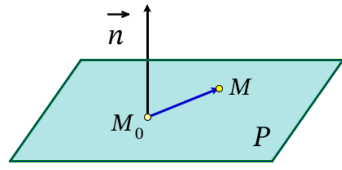
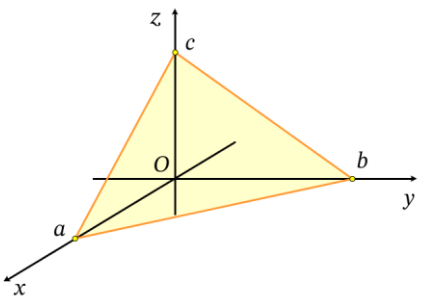
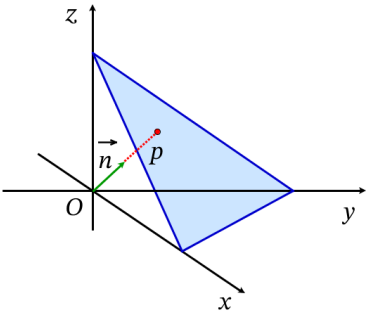
1. Если в пространстве задана произвольная плоскость  $P$  и фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$ , то плоскость  $P$  определяется в этой системе уравнением 1-й степени.

2. Если в пространстве фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$ , то всякое уравнение 1-й степени с тремя переменными  $x, y$  и  $z$  определяет относительно этой системы плоскость.

Далее приведем виды уравнения плоскости (см. табл. 1), используемые при решении задач аналитической геометрии.

Таблица 1.

### Виды уравнения плоскости

Вид уравнения	Геометрическая иллюстрация
<p>1. Общее уравнение плоскости</p> $P: Ax + By + Cz + D = 0,$ <p>где <math>\vec{n} = \{A, B, C\}</math> – нормальный вектор плоскости, точка <math>M_0(x_0, y_0, z_0)</math> принадлежит плоскости <math>P</math>, коэффициент <math>D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)</math>.</p>	
<p>2. Векторное уравнение плоскости</p> $P: \overrightarrow{M_0M} \vec{n} = 0,$ <p>проходящей через точку пространства <math>M_0(x_0, y_0, z_0)</math>, перпендикулярно ненулевому вектору <math>\vec{n}</math>.</p>	
<p>3. Уравнение плоскости «в отрезках»</p> $P: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$ <p>где <math>abc \neq 0</math>, <math>a, b</math> и <math>c</math> – абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с координатными осями <math>Ox, Oy</math> и <math>Oz</math>.</p>	
<p>4. Нормированное уравнение плоскости</p> $P: x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$ <p>где <math>\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}</math> – единичный нормальный вектор плоскости, <math>p &gt; 0</math> – расстояние от начала координат до плоскости.</p>	

### Отклонение точки от плоскости

Пусть  $d$  – расстояние от произвольной точки  $M(x, y, z)$  до плоскости  $P$ .



Отклонением  $\delta_M$  точки  $M$  от плоскости  $P$  называют число  $+d$ , если точка  $M$  и начало координат  $O$  лежат по разные стороны от плоскости  $P$ , и число  $-d$ , если точки  $M$  и  $O$  лежат по одну сторону от плоскости  $P$ .

Справедливо следующее утверждение: левая часть нормированного уравнения плоскости равна отклонению точки  $M(x, y, z)$  от плоскости  $P$ :

$$\delta_M = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p.$$

#### Преобразование общего уравнения плоскости к нормированному

Для того чтобы общее уравнение плоскости привести к нормированному виду следует умножить его на нормирующий множитель  $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ , знак которого противоположен знаку  $D$ .

#### Методы решения типовых задач

Далее будут рассмотрены методы решения типовых задач по теме «Плоскость в пространстве» и приведены решения задач, предложенные для самостоятельной работы в сборнике [4].

*Задача о нахождении уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой*

Найдем уравнение плоскости  $P$ , проходящей через три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ , не лежащие на одной прямой (см. рис. 1).

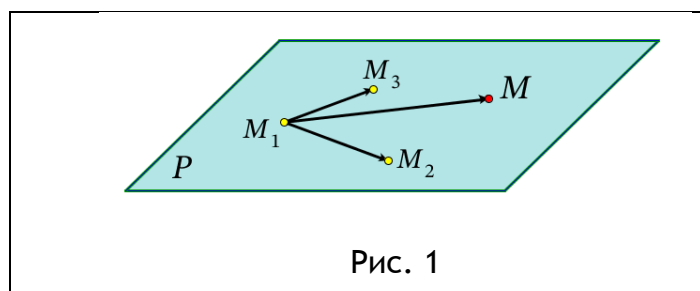


Рис. 1

Точка  $M(x, y, z)$  принадлежит плоскости  $P$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M}$  компланарны. Для этого необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю:  $\overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} \overrightarrow{M_1M} = 0$ , или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и выполняя преобразования, приходим к общему уравнению плоскости.

Рассмотрим следующий пример.

**Задача 1.** Найдите уравнение плоскости  $P$ , проходящей через три заданные точки пространства  $M_1(1,1,1)$ ,  $M_2(2,5,-1)$  и  $M_3(0,3,1)$ .

**Решение.** Плоскость  $P$  – множество таких точек  $M$ , для которых векторы  $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1; 4; -2\}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3} = \{-1; 2; 0\}$  и  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1; y - 1; z - 1\}$  компланарны. Запишем критерий компланарности этих векторов в координатной форме

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по 3-й строке

$$4(x-1) + 2(y-1) + 6(z-1) = 0$$

и преобразуем полученное уравнение

$$2x + y + 3z - 6 = 0.$$

*Ответ:* общее уравнение искомой плоскости  $P$  имеет вид  $2x + y + 3z - 6 = 0$ .

### Задача об исследовании взаимного расположения плоскостей

Пусть плоскости  $P_1$  и  $P_2$  заданы общими уравнениями

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Запишем критерии, позволяющие установить взаимное расположение двух плоскостей в пространстве, и приведем примеры их применения (см. табл. 2).

Таблица 2.

### Взаимное расположение плоскостей

Критерий	Пример
<p>1. Плоскости параллельны: <math>\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2</math></p> <p>1) не совпадают: <math>\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}</math>.</p> <p>2) совпадают: <math>\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}</math>.</p>	<p>1) Плоскости параллельны (не совпадают):  <math>P_1: x - y + 2z - 1 = 0,</math>  <math>P_2: -2x + 2y - 4z + 5 = 0;</math>  <math>\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{5}.</math></p> <p>2) Плоскости совпадают:  <math>P_1: x - y + 2z - 1 = 0,</math>  <math>P_2: -2x + 2y - 4z + 2 = 0;</math>  <math>\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}.</math></p>
<p>2. Плоскости перпендикулярны: <math>\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2</math></p> $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$	<p>Плоскости перпендикулярны:  <math>P_1: x - y + z - 1 = 0,</math>  <math>P_2: -2x - 3y - z + 2 = 0;</math>  <math>1(-2) + (-1)(-3) + 1(-1) = 0.</math></p>
<p>3. Плоскости пересекаются: <math>\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2</math></p> <p>не выполнено условие <math>\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}</math>.</p>	<p>Плоскости пересекаются:  <math>P_1: x - y + 2z - 1 = 0,</math>  <math>P_2: -2x + 3y - 4z + 5 = 0;</math>  <math>\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{3}.</math></p>

### Задача о вычислении угла между плоскостями

Пусть плоскости  $P_1$  и  $P_2$  заданы общими уравнениями

$$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда угол между плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами  $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$  и  $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ :

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

*Замечание.* Если  $\cos \varphi > 0$ , то угол между нормальными векторами острый, а значит угол между плоскостями равен  $\varphi$ . Если  $\cos \varphi < 0$ , то угол между нормальными векторами тупой, следовательно острый угол между плоскостями будет равен  $\pi - \varphi$ .

Таким образом, *острый угол между плоскостями* может быть вычислен по формуле

$$\psi = \arccos \left( \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right).$$

Приведем пример на применение данной формулы.

**Задача 2.** Найдите угол между плоскостями, заданными общими уравнениями

$$P_1: x - y + 2z - 1 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: -2x + 3y - z + 5 = 0.$$

*Решение.* Нормальные векторы данных плоскостей имеют координаты

$$\vec{n}_1 = \{1; -1; 2\} \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = \{-2; 3; -1\}.$$

Вычислим скалярное произведение и длины этих векторов

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1(-2) + (-1)3 + 2(-1) = -7;$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Обратим внимание, что в рассматриваемом примере  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) < 0$ . Это означает, что угол между нормальными векторами тупой. Для того чтобы найти *острый угол между плоскостями* в формуле для вычисления искомого угла запишем модуль скалярного произведения

$$\psi = \arccos \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \arccos \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \arccos \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

*Ответ:* острый угол между плоскостями равен  $\psi = \arccos \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$ .

### Задача о вычислении расстояния от точки до плоскости

Пусть плоскость  $P$  задана общим уравнением

$$P: Ax + By + Cz + D = 0,$$

и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  не принадлежит плоскости  $P$ .

Тогда расстояние от точки  $M_0$  до плоскости  $P$  может быть вычислено по формуле

$$\rho(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Проиллюстрируем применение данной формулы на примере.

**Задача 3.** Найдите расстояние от точки  $M_0(1, -1, 1)$  до плоскости  $P$ , заданной общим уравнением  $x - 2y + z + 5 = 0$ .

*Решение.* Найдём длину нормального вектора  $\vec{n} = \{1; -2; 1\}$  плоскости  $P$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

и вычислим расстояние от точки  $M_0$  до этой плоскости

$$\rho(M_0, P) = \frac{|1 \cdot 1 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: расстояние от точки  $M_0$  до плоскости  $P$  равно  $\rho(M_0, P) = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ .

**Задача о вычислении расстояния между двумя параллельными плоскостями**

Пусть две параллельные плоскости  $P_1$  и  $P_2$  заданы общими уравнениями. Тогда в силу коллинеарности их нормальных векторов, уравнения этих плоскостей могут быть приведены к виду

$$P_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Расстояние между данными плоскостями будет равно расстоянию от любой точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , принадлежащей плоскости  $P_1$ , до плоскости  $P_2$  и может быть вычислено по формуле

$$\rho(M_1, P_2) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как  $M_1 \in P_1$ , то  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_1$ . В результате формула для вычисления расстояния между параллельными плоскостями примет вид

$$\rho(P_1, P_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Далее рассмотрим пример.

**Задача 4.** Найдите расстояние между параллельными плоскостями, заданными общими уравнениями

$$P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: -2x + 6y - 4z + 3 = 0.$$

**Решение.** Разделим уравнение, определяющее плоскость  $P_2$ , на число  $-2 \neq 0$ . В результате получим

$$P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: x - 3y + 2z - \frac{3}{2} = 0.$$

Далее воспользуемся полученной формулой для вычисления расстояния между параллельными плоскостями

$$\rho(P_1, P_2) = \frac{\left| -\frac{3}{2} - (-5) \right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{7}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: расстояния между параллельными плоскостями  $P_1$  и  $P_2$  равно  $\rho(P_1, P_2) = \frac{\sqrt{14}}{4}$ .

**Замечание.** Следует отметить, что данную задачу можно было решить иначе. Определим координаты какой-либо точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , принадлежащей плоскости  $P_1$ . Полагая  $x_1 = y_1 = 0$ , находим  $z_1$  из уравнения плоскости  $P_1$ :  $z_1 = \frac{5}{2}$ . Затем применим формулу для вычисления расстояния от точки  $M_1\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$  до плоскости  $P_2$ :

$$\rho(M_1, P_2) = \frac{\left| (-2) \cdot 0 + 6 \cdot 0 + (-4) \cdot \frac{5}{2} + 3 \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{7}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

**Задача о взаимном расположении точек относительно заданной плоскости**

Пусть плоскость  $P$  задана нормированным уравнением

$$P: x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

и известны координаты точек  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , не принадлежащих этой плоскости. Определить, по одну или по разные стороны относительно плоскости  $P$  расположены точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Сформулируем *критерий* для определения взаимного расположения точек относительно заданной плоскости: для того чтобы точки  $M_1$  и  $M_2$  были расположены по разные стороны относительно плоскости  $P$ , необходимо и достаточно, чтобы отклонения этих точек  $\delta_{M_1}$  и  $\delta_{M_2}$  от плоскости имели разные знаки.

Проиллюстрируем применение данного критерия на примере.

**Задача 5.** Выясните расположение точек  $M_1(1,1,0)$ ,  $M_2(1,0,1)$  и  $M_3(2,1,0)$  относительно плоскости  $P$ , заданной общим уравнением  $3x + 6y + 2z - 6 = 0$ .

**Решение.** Приведем общее уравнение плоскости к нормированному виду, умножив его на нормирующий множитель  $\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{1}{7}$ , взятый со знаком «+», противоположным знаку  $D$  (здесь  $D = -6 < 0$ ).

В результате получим нормированное уравнение плоскости

$$P: \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{6}{7} = 0.$$

Вычислим отклонения заданных точек от плоскости  $P$ :

$$\delta_{M_1} = \frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{6}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 0 - \frac{6}{7} = \frac{3}{7} > 0; \quad \delta_{M_2} = \frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{6}{7} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot 1 - \frac{6}{7} = -\frac{1}{7} < 0;$$

$$\delta_{M_3} = \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{6}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 0 - \frac{6}{7} = \frac{6}{7} > 0.$$

Применим критерий: так как отклонения  $\delta_{M_1}$  и  $\delta_{M_2}$  точек  $M_1$  и  $M_2$  от плоскости  $P$  имеют разные знаки, то точки  $M_1$  и  $M_2$  расположены по разные стороны относительно этой плоскости; так как отклонения  $\delta_{M_1}$  и  $\delta_{M_3}$  одного знака, то точки  $M_1$  и  $M_3$  расположены по одну сторону относительно плоскости  $P$ .

**Ответ:** точки  $M_1$  и  $M_3$  расположены по одну сторону относительно плоскости  $P$ , а точка  $M_2$  – по другую.

Задачи на формирование навыков применения изученных методов

**Задача о нахождении уравнения плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно двум непараллельным плоскостям**

**Задача 6.** Найдите общее уравнение плоскости  $P$ , проходящей через точку  $M_0(1,1,1)$  и перпендикулярной плоскостям

$$P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: 2x - y - z + 3 = 0.$$

**Решение.** Нормальный вектор  $\vec{n}$  искомой плоскости  $P$  должен удовлетворять условию:  $\vec{n} \perp \vec{n}_1$  и  $\vec{n} \perp \vec{n}_2$  (см. рис. 2). Следовательно, нормальный вектор коллинеарен векторному произведению векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , то есть  $\vec{n} \parallel (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$ .

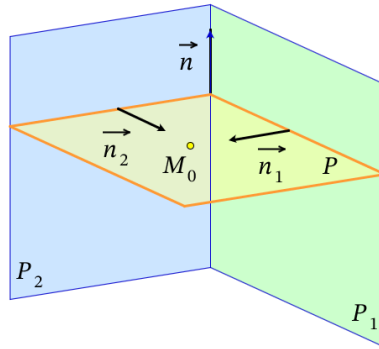


Рис. 2

Вычислим векторное произведение векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ :

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k},$$

тогда в качестве нормального вектора плоскости  $P$  можно взять вектор  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Запишем векторное уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1,1,1)$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n}$ :  $\overrightarrow{M_0M} \vec{n} = 0$ , или, в координатной форме

$$(x - 1) \cdot 1 + (y - 1) \cdot 1 + (z - 1) \cdot 1 = 0.$$

После преобразований получим общее уравнение искомой плоскости  $P$ :

$$x + y + z - 3 = 0.$$

*Задача о взаимном расположении точек относительно двух пересекающихся плоскостей*

Задача 7. Пусть плоскости  $P_1$  и  $P_2$  заданы нормированными уравнениями

$$P_1: x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 = 0,$$

$$P_2: x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2 = 0$$

и известны координаты точек, не принадлежащих данным плоскостям. Исследовать взаимное расположение указанных точек относительно плоскостей  $P_1$  и  $P_2$ .

*Решение.* Возможны следующие случаи (см. рис. 3):

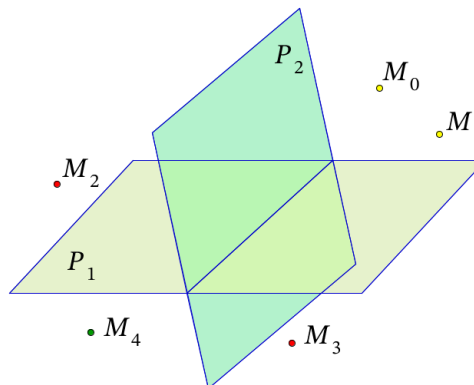


Рис. 3

1) точки  $M_0$  и  $M_1$  лежат в *одном* углу, образованном плоскостями  $P_1$  и  $P_2$  (точки расположены по одну сторону относительно плоскости  $P_1$  и по одну сторону относительно плоскости  $P_2$ );

2) точки  $M_0$  и  $M_2$  лежат в *смежных* углах (точки расположены по одну сторону относительно плоскости  $P_1$  и по разные стороны относительно плоскости  $P_2$ );

3) точки  $M_0$  и  $M_3$  лежат в *смежных* углах (точки расположены по разные стороны относительно плоскости  $P_1$  и по одну сторону относительно плоскости  $P_2$ );

4) точки  $M_0$  и  $M_4$  лежат в *вертикальных* углах (точки расположены по разные стороны относительно плоскости  $P_1$  и по разные стороны относительно плоскости  $P_2$ ).

Вычислим отклонения этих точек от каждой из плоскостей и воспользуемся *критерием* для определения взаимного расположения точек относительно заданной плоскости. В результате получим следующие критерии:

1) точки  $M_0$  и  $M_1$  лежат в *одном* углу тогда и только тогда, когда

$$\delta_{M_0}^{(1)} \delta_{M_1}^{(1)} > 0 \quad \text{и} \quad \delta_{M_0}^{(2)} \delta_{M_1}^{(2)} > 0;$$

2) точки  $M_0$  и  $M_2$  лежат в *смежных* углах тогда и только тогда, когда

$$\delta_{M_0}^{(1)} \delta_{M_2}^{(1)} > 0 \quad \text{и} \quad \delta_{M_0}^{(2)} \delta_{M_2}^{(2)} < 0;$$

3) точки  $M_0$  и  $M_3$  лежат в *смежных* углах тогда и только тогда, когда

$$\delta_{M_0}^{(1)} \delta_{M_3}^{(1)} < 0 \quad \text{и} \quad \delta_{M_0}^{(2)} \delta_{M_3}^{(2)} > 0;$$

4) точки  $M_0$  и  $M_4$  лежат в *вертикальных* углах тогда и только тогда, когда

$$\delta_{M_0}^{(1)} \delta_{M_4}^{(1)} < 0 \quad \text{и} \quad \delta_{M_0}^{(2)} \delta_{M_4}^{(2)} < 0.$$

#### Задача на применение векторного метода в стереометрии

**Задача 8.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого равно 2. Напишите уравнение плоскости  $P$ , проходящей через середины его ребер  $AB$ ,  $AA_1$  и  $A_1 D_1$ .

Найдите угол между плоскостью  $P$  и плоскостью нижней грани куба  $ABCD$ .

Вычислите расстояние от вершины  $B_1$  до плоскости  $P$ .

**Решение.** Пусть точки  $M_1, M_2$  и  $M_3$  – середины ребер  $AB$ ,  $AA_1$  и  $A_1 D_1$ . Построим сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки (см. рис. 4). Далее введем декартову прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ . Координаты точек  $M_1, M_2$  и  $M_3$  в этой системе координат будут равны  $M_1(1,0,0)$ ,  $M_2(0,0,1)$  и  $M_3(0,1,2)$ .

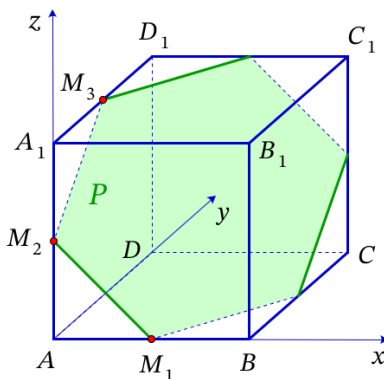


Рис. 4

Плоскость  $P$  – множество таких точек  $M$ , для которых векторы  $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1; 0; 1\}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3} = \{-1; 1; 2\}$  и  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1; y; z\}$  компланарны. Далее запишем критерий компланарности этих векторов в координатной форме

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по 3-й строке:  $-(x-1) + y - z = 0$  и преобразуем полученное уравнение  $x - y + z - 1 = 0$ .

В результате получили общее уравнение искомой плоскости  $P$ :  $x - y + z - 1 = 0$ .

Найдем угол между плоскостью  $P$  и плоскостью нижней грани куба  $ABCD$  (плоскость  $z = 0$ ). Нормальные векторы данных плоскостей имеют координаты

$$\vec{n}_1 = \{1; -1; 1\} \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = \{0; 0; 1\}.$$

Вычислим скалярное произведение и длины этих векторов

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1; \quad |\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad |\vec{n}_2| = 1.$$

Найдем острый угол между плоскостями

$$\psi = \arccos \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Вычислим расстояние от вершины  $B_1(2,0,2)$  до плоскости  $P$ :

$$\rho(B_1, P) = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

**Ответ:**  $P: x - y + z - 1 = 0$ ;  $\psi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\rho(B_1, P) = \sqrt{3}$ .

Приведем примеры задач для самостоятельной работы студентов.

**Задача 9.** Напишите уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ , заданными общими уравнениями

$$P_1: x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad P_2: 3x - 2y - z + 3 = 0.$$

**Задача 10.** Основанием пирамиды  $SABCD$  является квадрат  $ABCD$  с заданной стороной  $a$ . Через точку  $A$  и середину бокового ребра  $SC$  (точка  $E$ ) проведена плоскость  $P$  параллельно диагонали  $BD$  основания. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под заданным углом  $\theta$ . Напишите уравнение плоскости сечения и найдите расстояние от вершины  $S$  до этой плоскости.

### Заключение

Данная работа основана на личном опыте авторов преподавания дисциплины «Аналитическая геометрия». В статье кратко изложены теоретические сведения по теме «Плоскость в пространстве». Рассмотрены методы решения типовых задач по данной теме, проиллюстрированные подробно разобранными примерами. Для формирования навыков применения изученных методов специально подобраны задачи, которые также приводятся с анализом решения. С целью контроля освоения изученной темы приведены задачи для самостоятельной работы студентов. Такой подход к



изложению материала позволит сформировать у студентов правильное представление о методах решения задач по аналитической геометрии и приобрести необходимые навыки и компетенции.

---

#### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Атанасян С.Л., Покровский В.Г., Ушаков А.В. Геометрия 2: Учеб. пособие для вузов. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2020. 544 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов, 8-е изд. стер. М.: Физматлит, 2019. 224 с.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов, 3-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 388 с.
4. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 6-е изд., стер. Перепечатка с 3-го изд. 1993г. М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. 480 с.

---

**Irina E. Kandaurova,**

*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[iriskan07@gmail.com](mailto:iriskan07@gmail.com)

**Olga Yu. Chigiryova**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[mkfn12@yandex.ru](mailto:mkfn12@yandex.ru)

**Methodological aspects of the topic presentation "Plane in space".**

**Abstract.** The article discusses techniques for solving typical problems in analytical geometry by the example of studying the topic "Plane in space". The aim of the work is to develop students' skills in the methods of vector algebra, as well as the ability to apply them to solving problems in analytical geometry. The paper presents the necessary theoretical material and presents problems with the analysis of the solution for the formation of students' skills in the application of the studied methods. The materials of the article can be useful for independent work of students, as well as teachers in preparation for practical classes.

**Keywords:** vector, plane, normal plane vector, collinear vectors, coplanar vectors.

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ» В КУРСЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

### Аннотация

Актуальность темы обусловлена возросшими трудностями освоения математической программы технических и педагогических университетов студентами младших курсов, особенно абстрактных понятий. Тема «Линейные операторы» входит практически во все курсы линейной алгебры для студентов математических и технических специальностей, ее успешное освоение необходимо для изучения ряда других математических дисциплин. Цель работы - показать, как можно использовать уже изученный ранее материал из курса аналитической геометрии при изложении темы «Линейные операторы», формирование наглядных представлений о сложных теоретических понятиях линейной алгебры, развитие математической интуиции при решении задач и интерпретации полученных результатов. Особое внимание в статье уделено занимательным задачам, которые наглядно иллюстрируют основные понятия. Методом исследования является поиск межпредметных связей и методических возможностей использования математических курсов, уже изученных студентами младших курсов. Результатом исследования стал материал, который может служить основой для подготовки занятий и представлять интерес для студентов и преподавателей.

### Ключевые слова

методика преподавания математики в высшей школе, линейные операторы, линейное пространство, базис, матрица линейного оператора, аффинные преобразования, занимательные задачи

### АВТОРЫ

**Ласковая Татьяна Алексеевна,**  
старший преподаватель  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический  
университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
[talaskovy@mail.ru](mailto:talaskovy@mail.ru)

**Птицына Инга Вячеславовна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», г. Москва  
[inpt@mail.ru](mailto:inpt@mail.ru)

### Введение

Линейные операторы - один из основных разделов курса линейной алгебры. Как и весь курс, он является достаточно абстрактным и вследствие этого сложным для освоения студентами первых курсов физико-математических и технических специальностей университетов. Статья посвящена методике преподавания этой темы на примере решения и создания занимательных задач для лучшего усвоения понятий линейного оператора и линейного пространства.

Наиболее прочные математические знания студенты младших курсов имеют о действительных числах, элементарных функциях и простейших фигурах планиметрии. На эти знания необходимо опираться при проведении занятий. Поскольку к

началу изучения линейной алгебры уже пройден курс аналитической геометрии, то его использование в качестве примеров послужит как лучшему пониманию уже пройденного материала, так и демонстрации межпредметных связей.

Интерес к движущимся на экране изображениям также может быть эффективно использован при самостоятельной работе студентов.

### Методология и результаты исследования

Методология исследования заключается в разработке практических заданий для эффективного освоения основных понятий курса линейной алгебры, таких как линейное пространство и линейный оператор.

В этой статье мы рассмотрим только линейные пространства над полем действительных чисел  $\mathbb{R}$ , так как именно такие пространства изучаются в большинстве ВУЗов.

Множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  как один из самых знакомых объектов для обучающихся следует привести в качестве одного из первых примеров линейного пространства. При этом элементы из  $\mathbb{R}$  будут умножаться на элементы опять же из  $\mathbb{R}$ . Линейные пространства будем традиционно обозначать буквой  $L$ .

*Пример линейного пространства:*

Пусть  $L = \mathbb{R}$ . Тогда

$$1) \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{R}$$

Очевидно, что все восемь аксиом линейного пространства здесь выполняются [1, с. 15].

Следовательно,  $\mathbb{R}$  - линейное пространство.

**Определение.** Отображение  $\hat{A}: L \rightarrow L$  называют линейным оператором, если выполнены следующие условия:

$$1) \hat{A}(x + y) = \hat{A}(x) + \hat{A}(y), \quad \forall x, y \in L.$$

(1)

$$2) \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}(x), \quad \forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим несколько преобразований пространства  $\mathbb{R}$  действительных чисел, и покажем, какие из них являются, а какие не являются линейными операторами.

Обозначим:  $L = \mathbb{R}$ ,  $\hat{A}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  - преобразование  $\mathbb{R}$ .

**Пример1.** Рассмотрим оператор сдвига числовой прямой на некоторое фиксированное ненулевое число:  $\hat{A}(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$ , где  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

Тогда имеем для  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  и  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$1) \hat{A}(x) = x + a, \hat{A}(y) = y + a, \hat{A}(x + y) = (x + y) + a.$$

Следовательно,  $\hat{A}(x + y) \neq \hat{A}(x) + \hat{A}(y)$ , поскольку  $x + y + a \neq x + y + 2a$ .

$$2) \hat{A}(\lambda x) = \lambda x + a, \lambda \hat{A}(x) = \lambda(x + a) = \lambda x + \lambda a.$$

Следовательно,  $\hat{A}(\lambda x) \neq \lambda \hat{A}(x)$ , поскольку  $\lambda x + a \neq \lambda x + \lambda a$ .

Итак, несмотря на то, что сдвиг числовой прямой является взаимно-однозначным отображением пространства  $\mathbb{R}$  на себя, он не является линейным оператором, поскольку не выполняются обе аксиомы (1).

**Пример 2.** Рассмотрим оператор растяжения (сжатия) числовой прямой:

$\hat{A}(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ , где  $k \in \mathbb{R}$  - любое фиксированное число.

Тогда

$$1) \hat{A}(x) = kx, \hat{A}(y) = ky, \hat{A}(x+y) = k(x+y) = kx + ky = \hat{A}(x) + \hat{A}(y).$$

$$2) \hat{A}(\lambda x) = k(\lambda x) = k\lambda x, \lambda \hat{A}(x) = \lambda(kx) = \lambda kx = k\lambda x \Rightarrow \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}(x).$$

Итак, оператор растяжения (сжатия) является линейным оператором, поскольку выполнены обе аксиомы (1) линейного оператора, а также является взаимно-однозначным отображением  $\mathbb{R}$  на себя при  $k \neq 0$ , и не является взаимно-однозначным при  $k = 0$  (вся числовая прямая отображается в число 0).

**Пример 3.** Рассмотрим оператор возведения в квадрат  $\hat{A}(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ :

Тогда

$$1) \hat{A}(x) = x^2, \hat{A}(y) = y^2, \hat{A}(x+y) = (x+y)^2 \Rightarrow \hat{A}(x+y) \neq \hat{A}(x) + \hat{A}(y),$$

поскольку  $x^2 + y^2 \neq (x+y)^2$ .

$$2) \hat{A}(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2, \lambda \hat{A}(x) = \lambda x^2 \Rightarrow \hat{A}(\lambda x) \neq \lambda \hat{A}(x), \text{ поскольку } \lambda^2 x^2 \neq \lambda x^2.$$

Следовательно, оператор возведения в квадрат не является линейным оператором, поскольку при  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq 1$  не выполняются обе аксиомы (1), а при  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  не выполняется одна. Кроме того, заметим, что возведение в четную степень не является и взаимно-однозначным отображением на себя.

На занятии можно предложить студентам доказать самостоятельно, что оператор извлечения корня нечетной степени  $\hat{A}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$  также не являются линейными оператором. Кроме того, можно обратить их внимание на то, что преобразование извлечения корня четной степени  $\hat{A}(x) = \sqrt[2k]{x}$  определено не на всем пространстве  $\mathbb{R}$ , а только на его подмножестве  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ , которое не является линейным пространством.

Следующая серия примеров касается преобразований двумерного арифметического пространства  $\mathbb{R}^2$  со стандартными операциями сложения и умножения на действительное число. Оно также является линейным. Для многих студентов арифметическое пространство  $\mathbb{R}^2$  - в той или иной степени туманная абстракция, прояснить которую можно следующим образом.

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат  $Oxy$ , где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  - орты осей  $Ox$  и  $Oy$ . Пусть линейное пространство  $L = \mathbb{R}^2$  - это множество радиус-векторов точек плоскости. Рассмотрим различные преобразования этого линейного пространства и проиллюстрируем это графически.

Для начала нарисуем на плоскости какую-нибудь фигуру, например «домик» ABCDE.

Рассмотрим различные линейные преобразования плоскости (линейные операторы)  $\hat{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Будем находить образы нашей фигуры при различных преобразованиях. Для начала найдем образы точек  $A, B, C, D, E, F, O$ . Для этого преобразование  $\hat{A}$  будем применять к радиус-векторам этих точек:  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}, \overline{OO}$ . Результатом будут радиус-векторы точек  $A', B', C', D', E', F', O'$

В исходной системе координат наши точки были соединены отрезками. Образы точек также будут соединены отрезками (это можно доказать дополнительно).

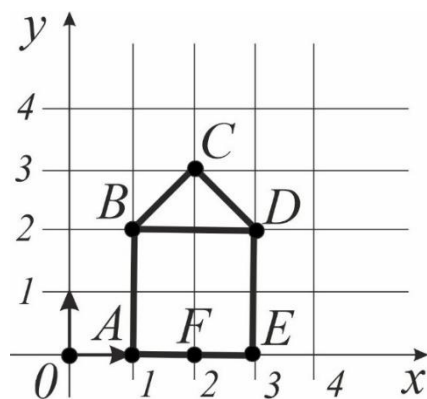


Рис. 1

**Пример 4.** Пусть  $\hat{A}(\vec{i}) = 3\vec{i}$ ,  $\hat{A}(\vec{j}) = 2\vec{j}$ .

Найдем образы точек:

$$\overline{OO'} = \hat{A}(\overline{OO}) = \hat{A}(0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}) = 0 \cdot \hat{A}(\vec{i}) + 0 \cdot \hat{A}(\vec{j}) = \vec{0},$$

$$\overline{OA'} = \hat{A}(\overline{OA}) = \hat{A}(\vec{i}) = 3\vec{i},$$

$$\overline{OB'} = \hat{A}(\overline{OB}) = \hat{A}(\vec{i} + 2\vec{j}) = 3 + 2 \cdot 2\vec{j} = 3\vec{i} + 4\vec{j},$$

$$\overline{OC'} = \hat{A}(\overline{OC}) = \hat{A}(2\vec{i} + 3\vec{j}) = 2 \cdot 3\vec{i} + 3 \cdot 2\vec{j} = 6\vec{i} + 6\vec{j},$$

$$\overline{OD'} = \hat{A}(\overline{OD}) = \hat{A}(3\vec{i} + 2\vec{j}) = 3 \cdot 3\vec{i} + 2 \cdot 2\vec{j} = 9\vec{i} + 4\vec{j},$$

$$\overline{OE'} = \hat{A}(\overline{OE}) = \hat{A}(3\vec{i}) = 3 \cdot 3\vec{i} = 9\vec{i},$$

$$\overline{OF'} = \hat{A}(\overline{OF}) = \hat{A}(2\vec{i}) = 2 \cdot 3\vec{i} = 6\vec{i}.$$

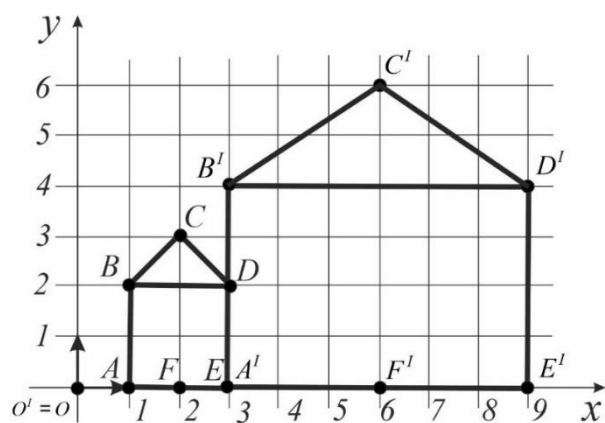


Рис. 2

Образ исходной фигуры изображен на рисунке 2.

В этой задаче необходимо обратить внимание студентов на то, что данный линейный оператор изменил длины отрезков и величины углов. Это удобно продемонстрировать, поскольку в задаче рассматриваются действия линейного оператора на плоскости, и в этом случае легко можно произвести измерения длин отрезков и величин углов, поскольку базис  $(\vec{i}, \vec{j})$  - ортонормированный. В данном примере фигуры до и после преобразования не являются подобными, и, тем более, равными.

Также важно отметить, что точка  $F$  и ее образ  $F'$  являются серединами отрезков  $AE$  и  $A'E'$  соответственно, то есть сохранилось соотношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (это общее свойство и его можно доказать дополнительно).

Полезно обратить внимание студентов на то, что координаты векторов  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OB'}$ ,  $\overline{OC'}$ ,  $\overline{OD'}$ ,  $\overline{OE'}$ ,  $\overline{OF'}$ ,  $\overline{OO'}$  можно найти другим способом, а именно, с помощью матрицы линейного оператора.

В этом случае нужно составить матрицу линейного оператора в базисе  $(\bar{i}, \bar{j})$  и использовать формулы, связывающие координаты векторов и их образов:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  - координаты вектора и его образа,

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  - матрица линейного оператора в базисе  $(\bar{i}, \bar{j})$ .

В примере 5 эта матрица имеет вид:  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

С методической точки зрения и в качестве дополнительной проверки решения, полезно дать студентам задание - найти координаты уже полученных векторов, используя матрицу линейного оператора. Им необходимо убедиться, что результаты совпадают.

Следующий пример решим уже с помощью матрицы линейного оператора.

**Пример 5.** Пусть  $\hat{A}(\bar{i}) = 3\bar{i}$ ,  $\hat{A}(\bar{j}) = \bar{i} + 2\bar{j}$ .

Тогда матрица линейного оператора  $\hat{A}$  в базисе  $(\bar{i}, \bar{j})$  будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем с помощью этой матрицы координаты образов  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OB'}$ ,  $\overline{OC'}$ ,  $\overline{OD'}$ ,  $\overline{OE'}$ ,  $\overline{OF'}$ ,  $\overline{OO'}$  радиус-векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OE}$ ,  $\overline{OF}$ ,  $\overline{OO}$ :

$$\overline{OO'} = \hat{A}(\overline{OO}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{OA'} = \hat{A}(\overline{OA}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OB'} = \hat{A}(\overline{OB}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{OC'} = \hat{A}(\overline{OC}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OD'} = \hat{A}(\overline{OD}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{OE'} = \hat{A}(\overline{OE}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OF'} = \hat{A}(\overline{OF}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Образ исходной фигуры («домика») изображен на рисунке 3.

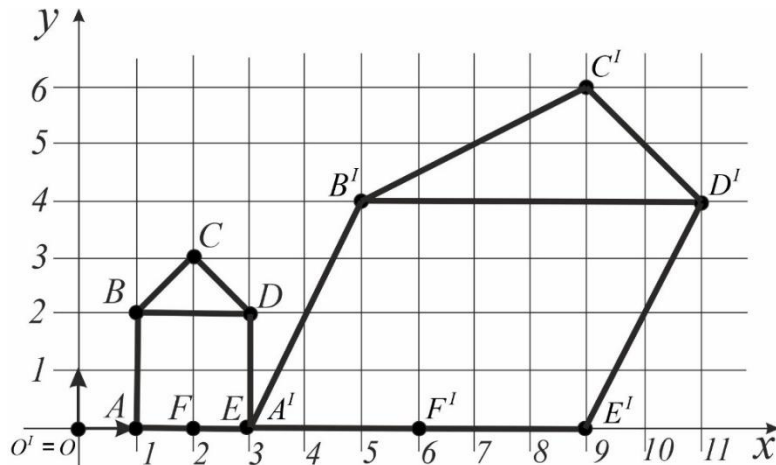


Рис. 3

В общем случае, можно предложить студентам рассмотреть целую серию аналогичных примеров с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 3 & u \\ 0 & v \end{pmatrix}$ , где параметры  $u, v \in \mathbb{R}$  и их можно менять с определенным постоянным шагом. Чем меньше шаг, тем больше серия рисунков будет выглядеть как рисованный мультфильм. При  $v \rightarrow 0$  «домик» будет все больше «прижиматься» к оси  $Ox$ , и при  $v=0$  «упадет» совсем. При  $v < 0$  «домик» появится под осью  $Ox$ .

В более общем случае зададим матрицу линейного оператора в виде:

$$A = \begin{pmatrix} t & u \\ s & v \end{pmatrix}, \text{ где } t, s, u, v \in \mathbb{R}.$$

Тогда можно с помощью подбора законов изменения параметров добиться того, чтобы серия образов одних и тех же точек лежала на конкретных кривых, например на дугах окружностей.

Объект, изменяющийся под действием линейного оператора, студенты могут придумать самостоятельно. Приведем подобный пример.

**Пример 6.** Пусть  $\hat{A}(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\hat{A}(\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j}$

Тогда матрица линейного оператора  $\hat{A}$  в базисе  $(\vec{i}, \vec{j})$  будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем с помощью этой матрицы координаты образов  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OB'}$ ,  $\overline{OC'}$ ,  $\overline{OD'}$ ,  $\overline{OE'}$ ,  $\overline{OF'}$ ,  $\overline{OO'}$  радиус-векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OE}$ ,  $\overline{OF}$ ,  $\overline{OO}$ :

$$\overline{OO'} = \hat{A}(\overline{OO}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{OA'} = \hat{A}(\overline{OA}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OB'} = \hat{A}(\overline{OB}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{OC'} = \hat{A}(\overline{OC}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OD'} = \hat{A}(\overline{OD}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overline{OE'} = \hat{A}(\overline{OE}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\overline{OF'} = \hat{A}(\overline{OF}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Образ исходной фигуры («домика») изображен на рисунке 4.

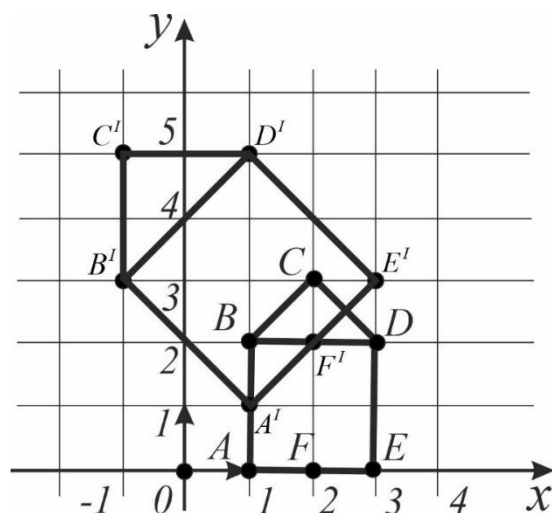


Рис. 4

Можно предложить студентам самостоятельно построить примеры для линейных операторов, задаваемых матрицей  $A = \begin{pmatrix} R \cos \varphi & -R \sin \varphi \\ R \sin \varphi & R \cos \varphi \end{pmatrix}$  при различных значениях  $R$  и  $\varphi$ .

Данными примерами мы готовим обучающихся к изучению аффинных пространств и аффинных преобразований, в зависимости от программы ВУЗа [2, с. 89].

В частности, преобразования плоскости могут задаваться формулами:

$$\begin{cases} x' = ax + cy + x_0 \\ y' = bx + dy + y_0 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0, \text{ где}$$

$(x, y)$  и  $(x', y')$  - координаты точек и их образов относительно некоторой аффинной системы координат (например, можно взять  $O\bar{i}, \bar{j}$ , если в аффинном пространстве введено скалярное произведение);

$(a, b)$  и  $(c, d)$  - координаты образов  $\bar{i}', \bar{j}'$  базисных векторов  $\bar{i}, \bar{j}$  относительно базиса  $(\bar{i}, \bar{j})$ ;

$(x_0, y_0)$  - координаты образа  $O'$  точки  $O$  относительно системы координат  $O\bar{i}, \bar{j}$ .

Основными свойствами аффинных преобразований являются сохранение коллинеарности точек и сохранение отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой. Эти и другие свойства рассмотрены в классических учебниках [3, с. 142].

Если же  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$ , то преобразование не считается аффинным, оно может переводить точки, не лежащие на одной прямой в точки, лежащие на одной прямой. Тем не менее, это преобразование плоскости тоже весьма интересно. Соответствующий линейный оператор в этом случае задается формулами:  $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0.$



## Заключение

Подходящие занимательные задачи и примеры с графической иллюстрацией можно привести и предложить составить практически по всем темам о линейных операторах. Авторы статьи считают, что это поможет студентам более глубоко и неформально изучить данный раздел линейной алгебры, наглядно увидеть приложения аналитической геометрии и использовать полученные знания и умения в решении практических задач как по линейной алгебре, так и по аффинной геометрии, а также при решении некоторых задач информатики.

---

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра, М.:335с. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 335 с.
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : [Для физ.-мат. спец. вузов]. - Москва: Наука, 1979. - 511 с.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч.1. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М.: Просвещение, 1986. – 336 с.

---

**Tatiana A. Laskovaya,**

*Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

talaskovy@mail.ru

**Inga V. Ptitsyna,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

inpt@mail.ru

**Some questions of the methodology for studying the topic "Linear operators" in the course of linear algebra Abstract.** The relevance of the topic is due to the increased difficulties in mastering the mathematical program of technical universities by undergraduate students, especially abstract concepts. The topic "Linear operators" is included in almost all linear algebra courses for students of mathematical and technical specialties, its successful development is necessary for studying a number of other mathematical disciplines. The purpose of the work is to show how you can use the previously studied material from the course of analytic geometry when presenting the topic "Linear operators", the formation of visual representations of the complex theoretical concepts of linear algebra, the development of mathematical intuition in solving problems and interpreting the results obtained. Particular attention is paid to entertaining tasks that clearly illustrate the basic concepts. The research method is the search for interdisciplinary connections and methodological possibilities of using mathematical courses already studied by junior students. The result of the study was a material that can serve as a basis for the preparation of classes and be of interest to students and teachers.

**Keywords:** methods of teaching mathematics in higher education, linear operators, linear space, basis, matrix of a linear operator, affine transformations, entertaining problems.

## МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА СЕМИНАРЕ ПО ТЕМЕ «ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

### Аннотация

В статье представлена методика решения задач по темам: нахождение частных производных первого и второго порядка функций нескольких переменных; даны основные определения, показаны способы и алгоритмы решения задач, приведены примеры и представлен иллюстративный материал.

### Ключевые слова

функции нескольких переменных,  
частные производные функций нескольких переменных

### АВТОР

**Нараленкова Ирина Игоревна,**  
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический  
университет им. Н. Э. Баумана»,  
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова», г. Москва  
i.i.naralenkova@gmail.com

### Введение

Курс «Функции нескольких переменных» является продолжением темы «Дифференциальное исчисление (функции одной переменной)» и является основанием для дальнейшего изучения математического анализа, в частности таких тем, как «Кратные интегралы», «Численные методы» и др. Частные производные функций нескольких переменных используется при изучении основ механики и электротехники, электроники, уравнений математической физики.

**Актуальность** исследования определена необходимостью разработки методических материалов, предназначенных для освоения студентами такого основополагающего понятия, как частная производная функция нескольких переменных, так как данное понятие используется в таких дисциплинах, как дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория поля, механика, экономики.

**Цель** состоит в разработке методических материалов, помогающих обучающимся разобраться в таком важном понятии теории функций нескольких переменных, как частные производные, освоить алгоритмы решения основных задач.

### Методология и результаты исследования

#### Частные производные ФНП

Рассмотрим функцию  $u = f(x, y)$ . Пусть  $D_f$  – область определения функции. Возьмем точку  $(x_0, y_0)$  – внутреннюю точку этой области. Дадим  $x_0$  столь малое приращение  $\Delta x$ , чтобы точка  $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D_f$ .

$$u + \Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$  – частное приращение функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$ .

Рассмотрим точку  $(x_0, y_0 + \Delta y) \in D_f$

$\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  - частное приращение функции  $f(x, y)$  по переменной  $y$ .

**Определение.** Частной производной функции  $f(x, y)$  по  $x$  в точке  $(x_0, y_0)$  называется предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Как видим, в этом определении не все координаты равноправны, так как  $y_0$  фиксировано, а  $x$  меняется, стремясь к  $x_0$ .

Частную производную обозначают одним из символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, u'_x, f'_x(x_0, y_0)$$

Аналогично, считая  $x$  постоянной, а  $y$  переменной можно рассмотреть предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Этот предел называется частной производной функции  $f(x, y)$  по  $y$  в точке  $(x_0, y_0)$  и обозначается символами аналогичными предыдущим:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, u'_y, f'_y(x_0, y_0)$$

**Определение.** Матрица Якоби - матрица частных производных первого порядка

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Частные производные функции двух переменных также являются функциями двух переменных. Частные производные вычисляются также, как обыкновенные, только надо учесть, что одна из двух переменных не изменяется.

**Пример 1.** Вычислить все частные производные первого порядка функций

а)  $u = \frac{x^2}{y^3} - 2x + 3y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x|_{y=const} = \frac{1}{y^3} \cdot 2x - 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y|_{x=const} = -\frac{3}{y^4} \cdot x^2 + 6y$$

б)  $u = x^y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

в) Пусть  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$ , где  $f(u)$  - произвольная функция (имеющая производную). Показать, что для  $z$  всегда выполняется соотношение

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

Какова бы ни была функция  $f$ .

По правилу дифференцирования сложной функции (означая штрихом производную по  $u$ ) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y \cdot f'(x^2 - y^2) \cdot 2x = 2xy \cdot f'(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f(x^2 - y^2) - 2y^2 \cdot f'(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot f'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y} \cdot f(x^2 - y^2) - 2y \cdot f'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2}$$

Что и требовалось доказать.

**Пример 2.** Вычислить  $f'_x(2,3)$  и  $f'_y(2,3)$ , если  $f(x, y) = x^2 + y^3$

$$f'_x(2,3) = 2x|_{(2,3)} = 4 \quad f'_y(2,3) = 3y|_{(2,3)} = 27$$

Рассмотрим функцию  $n$  переменных.

$$u = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

Точка  $(x_1, \dots, x_n)$  - внутренняя точка области определения функции  $(D_f)$ .

$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$  - частное приращение функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  по переменной  $x_k, k = 1, \dots, n$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

- частная производная функции  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  по переменной  $x_k, k = 1, \dots, n$ .

Обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}, u'_{x_k}, f'_{x_k}(x_1, \dots, x_n)$$

Матрица Якоби :

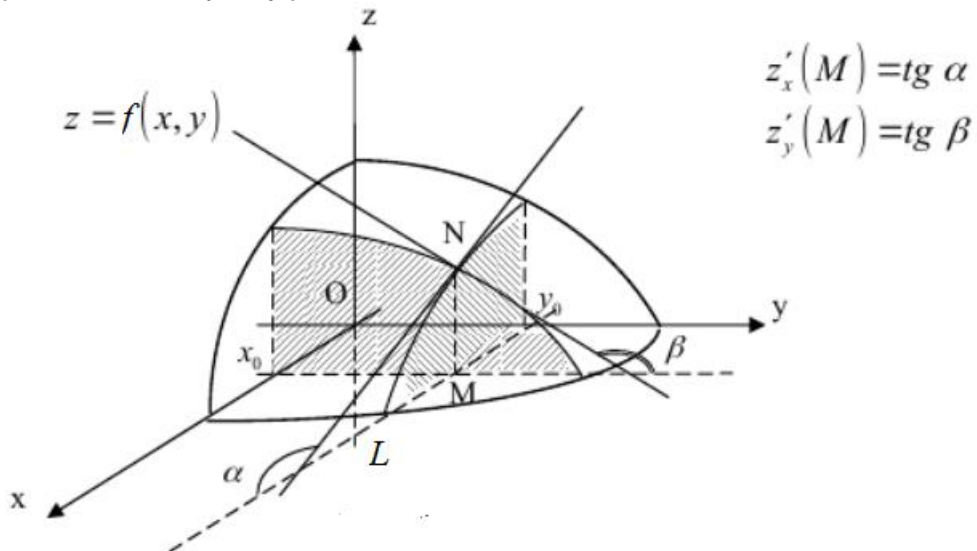
$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

**Геометрическая интерпретация для случая функции двух переменных**

Пусть  $f(x, y)$  - функция, непрерывная в некоторой области  $D$  и имеющая там частные производные по  $x$  и по  $y$ . Уравнение  $z = f(x, y)$  в трехмерном пространстве задает поверхность  $S$ .

Выясним геометрический смысл  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в точке  $M(x_0, y_0) \in D$ . Этой точке на поверхности  $z = f(x, y)$  соответствует точка  $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

При нахождении частной производной  $\frac{\partial z}{\partial x}$  в точке  $M(x_0, y_0)$  мы полагаем, что  $z$  является только функцией аргумента  $x$ , так как аргумент  $y$  сохраняет постоянное значение  $y = y_0$ , то есть  $z = f(x, y_0) = z(x)$ .



Функция  $z(x)$  геометрически изображается кривой  $L$ , по которой поверхность  $S$  пересекается плоскостью  $y = y_0$ . В силу геометрического смысла производной функции одной переменной  $z'(x_0) = tg\alpha$ , где  $\alpha$ , где - угол, образованный касательной к линии  $L$  в точке  $N$  с положительным направлением оси  $Ox$ . Т. о.  $z'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$ . Аналогично  $z'_y(x_0, y_0)$  - угловым коэффициентом касательной, проведенной в точке  $N$  к кривой, полученной сечением поверхности  $z = f(x, y)$  плоскостью  $x = x_0$ ,  $z'_y(x_0, y_0) = tg\beta$

### Частные производные высших порядков

Если функция  $u = f(x, y)$  имеет в некоторой области  $D$  частную производную по одной из переменных, то названная производная сама являясь функцией от  $x$  и  $y$  может в свою очередь в области  $D$  иметь частные производные по той же или по другой переменной. *Частными производными второго порядка* функции  $u = f(x, y)$  называются частные производные от её частных производных первого порядка.

Обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

**Теорема.** Пусть функция  $u = f(x, y)$  определена в открытой окрестности  $U(x_0, y_0)$ , в этой окрестности существуют первые частные производные  $f'_x$  и  $f'_y$ , а также вторые смешанные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$ , эти  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$ , как функции  $x$  и  $y$ , непрерывны в самой точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда в этой точке

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

**Определение.** Матрица Гессе - матрица вторых частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

**Определение.** *Частными производными второго порядка* функции

$u = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$  называются частные производные от её частных производных первого порядка.

Обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, n$$

**Пример 3.** Вычислить все частные производные второго порядка функции  $u = x^5 y^3 z^2$ .

$$u'_x = 5x^4 y^3 z^2 \quad u''_{xy} = 15x^4 y^2 z^2 \quad u''_{xx} = 20x^3 y^3 z^2 \quad u''_{xz} = 10x^4 y^3 z$$

$$u'_y = 3x^5 y^2 z^2 \quad u''_{yy} = 6x^5 y z^2 \quad u''_{yz} = 6x^5 y^2 z$$

$$u'_z = 2x^5 y^3 z \quad u''_{zz} = 2x^5 y^3$$

Матрица Якоби :

$$(5x^4 y^3 z^2 \quad 3x^5 y^2 z^2 \quad 2x^5 y^3 z \quad )$$

Матрица Гессе :

$$\begin{pmatrix} 20x^3 y^3 z^2 & 15x^4 y^2 z^2 & 10x^4 y^3 z \\ 15x^4 y^2 z^2 & 6x^5 y z^2 & 6x^5 y^2 z \\ 10x^4 y^3 z & 6x^5 y^2 z & 2x^5 y^3 \end{pmatrix}$$

**Пример 4.** Доказать, что выражение

$$z = x \cdot \varphi \left( \frac{y}{x} \right) + \psi \left( \frac{y}{x} \right),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  означают произвольные функции (имеющие первую и вторую производные), удовлетворяет уравнению

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{y}{x} \cdot \varphi' \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{y}{x^2} \cdot \psi' \left( \frac{y}{x} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{x} \cdot \psi' \left( \frac{y}{x} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{x^3} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{y}{x^2} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{x} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right); \\ x^2 \cdot \left( \frac{y^2}{x^3} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right) \right) &+ 2xy \\ &\cdot \left( -\frac{y}{x^2} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right) \right) + y^2 \cdot \left( \frac{1}{x} \cdot \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \psi''\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**Определение.** Частная производная  $n$  порядка есть первая производная от производной  $(n - 1)$ -го порядка.

**Пример 5.** Вычислить  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$  и  $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ , если  $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 e^x + 2xy^3 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^2 e^x + 2y^3 & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= 2ye^x + 6y^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^x + 3x^2 y^2 & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 2ye^x + 6xy^2 & \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} &= 2ye^x + 6y^2 \end{aligned}$$

**Пример 6.** Вычислить  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$ , если  $u = z^2 e^{x+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}$$

### Заключение

В данной статье рассмотрены основные типы задач семинара по теме «Частные производные функции нескольких переменных». Студенты испытывают трудности при нахождении частных производных, что связано со сложностью освоения этого нового понятия, которое лежит в основе изучаемых в дальнейшем дисциплин. Этим обусловлена необходимость разработки данного материала. Следующим шагом в разработке данной методики будет определение производной сложной и неявной ФНП и методы решения задач по этой теме.

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Канатников А. Н., Крищенко А. П., В. Н. Четвериков В. Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. для вузов / – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 456 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: ОГИЗ, 1949. – 692 с.
3. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. А.В.Ефимова и б.П. Демидовича. 2-е изд. М.: Наука. 1986. 428 с.

**Irina I. Naralenkova,**

Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Moscow State University named after M.V. Lomonosov Moscow, Russia

[i.i.naralenkova@gmail.com](mailto:i.i.naralenkova@gmail.com)

**Methodology for introducing concepts of partial derivative of functions of several variables at the seminar on partial derivative of functions of several variables**

**Abstract.** The article presents methods of solving mathematical tasks on the following themes: finding first and second-order partial derivatives of functions of several variables. The author introduces the main definitions and suggests ways and algorithms of solving the mathematical tasks. The article also contains some examples and illustration material.

**Keywords:** functions of several variables, partial derivative

## ПРОВЕДЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО ЗАНЯТИЯ «ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ»

### Аннотация

В работе представлен материал для проведения лекционных занятий по курсам «Математическая статистика» или «Машинное обучение». Линейная регрессия является центральным инструментом статистика, который позволяет по выборке восстановить зависимость между данными. Однако, несмотря на то что линейная регрессия исчерпывающе изложена в литературе по математической статистике, ощущается некоторый дефицит практически ориентированных методических пособий по данной тематике. Статья освещает темы: простая линейная регрессия, многомерная регрессия и метод наименьших квадратов (МНК), регрессия в спрямляющем пространстве и полиномиальная регрессия, свойства оценок метода наименьших квадратов, а также оценка остаточной дисперсии. Постановка задачи регрессии и формулировки теорем выполняются исключительно в рамках предположений, накладываемых на моменты первого и второго порядка фигурирующих в них случайных величин. Для наглядности изложения, теоретические выкладки иллюстрируются примерами на языке Python с применением библиотек NumPy и Scikit-Learn.

### Ключевые слова

линейная регрессия, метод наименьших квадратов, Python, NumPy, Scikit-Learn

### АВТОРЫ

**Панкратов Владимир Александрович,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
v.a.pankratov@bmstu.ru

**Тверская Елена Сергеевна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
e\_tverskaya@bmstu.ru

### Введение

Развитие и внедрение цифровых технологий превратили математическую статистику и машинное обучение в наиболее востребованные математические дисциплины. Разумеется, практическое применение названных дисциплин, в обязательном порядке подразумевает использование электронных вычислительных средств для реализации их методов.

В данном материале рассматривается лекционное занятие, которое может быть включено, как в курс математической статистики, так и в курс машинного обучения, поскольку линейная регрессия относится к базовым алгоритмам обеих дисциплин. К сожалению, большинство методических материалов по математической статистике [1-3] не затрагивают вопросы реализации ее методов на современных высокоуровневых языках программирования. С другой стороны, в материалах по машинному обучению [4-5] основное внимание, обычно, уделяют реализациям алгоритмов, при



этом, зачастую, без строгого их обоснования. По этим причинам возникает определенный дефицит методических материалов, сочетающих в себе строгое математическое описание алгоритмов и ориентированность на их дальнейшее применение при разработке программного обеспечения. Целью данной статьи является желание сократить дефицит подобных методических материалов.

В начале предложенной лекции студенты изучают простую линейной регрессию, которая знакомит их с постановкой задачи и мотивацией. Далее учащиеся проходят многомерную линейную регрессию и МНК. Строгие математические рассуждения иллюстрируются примером на построение плоскости регрессии, при помощи средств языка программирования Python. После чего рассматривается регрессия в спрямляющем пространстве и полиномиальная регрессия. На основе примера построения полиномиальной регрессии по данным синтетической выборки, студентам наглядно демонстрируется эффект переобучения модели. Завершается лекция доказательством статистических свойств оценок МНК.

## Методология и результаты исследования

### 1. Простая линейная регрессия

Имеем некоторую неслучайную переменную  $x$ , значения которой меняются от опыта к опыту при проведении эксперимента. Для каждого значения  $x_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) наблюдается некоторый эффект  $\eta_k$ .

Также известно, что измерения получаются с ошибкой и связь между значениями неслучайной переменной  $x_k$  (фактор), случайными измерениями  $\eta_k$  (целевая переменная) и случайной ошибкой  $\varepsilon_k$  имеет вид  $\eta_k = ax_k + b + \varepsilon_k$  ( $k = \overline{1, m}; a, b \in \mathbb{R}$ ).

Требуется найти значения  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  наилучшим, в некотором смысле, образом согласующие наблюдаемые значения  $y_k$  случайной величины  $\eta_k$  со значениями переменной  $x_k$ .

Рассмотрим сумму квадратов наблюдаемых ошибок  $e_k$  случайной величины  $\varepsilon_k$ :

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^m e_k^2 = \sum_{k=1}^m (y_k - ax_k - b)^2.$$

Значения  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ , удовлетворяющие равенству

$$S(\hat{a}, \hat{b}) = \min_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} S(a, b) = \min_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{k=1}^m (y_k - ax_k - b)^2,$$

называют оценкой МНК. Тогда  $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$  - предсказанное значение  $y$  для данного  $x$ .

$$\text{grad } S(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial a} \\ \frac{\partial S}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^m 2(y_k - ax_k - b)(-x_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^m 2(y_k - ax_k - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

Минимум функционала  $S(a, b)$  достигается при

$$\hat{a} = \frac{m \sum_{k=1}^m x_k y_k - (\sum_{k=1}^m x_k)(\sum_{k=1}^m y_k)}{m \sum_{k=1}^m x_k^2 - (\sum_{k=1}^m x_k)^2}, \quad \hat{b} = \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^m y_k - \hat{a} \sum_{k=1}^m x_k \right).$$

Выполнение достаточных условий экстремума будет обосновано при изучении МНК. Нетрудно получить эквивалентную формулу



$$\hat{a} = \frac{\sum_{k=1}^m (x_k - \bar{X})(y_k - \bar{Y})}{\sum_{k=1}^m (x_k - \bar{X})^2}, \quad \hat{b} = \bar{Y} - \hat{a}\bar{X},$$

где  $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k$ .

Тогда предсказанное значение  $\hat{y} = \hat{a}(x - \bar{X}) + \bar{Y}$ .

### 1.1. Пример

Рассмотрим данные, распределенные около прямой  $y = 2x - 5$ . И выполним скрипт, генерирующий набор, состоящий из 50 измерений.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns; sns.set()
import numpy as np

m=50

rng = np.random.RandomState(81)
x = 10 * rng.rand(m)
y = 2 * x - 5 + rng.randn(m)
plt.figure()
ax = plt.axes()
ax.set_title('Данные измерений')
plt.scatter(x, y)
```

В результате выполнения будут сформированы синтетические данные, для аппроксимации, и мы увидим рисунок.



Следующий скрипт вычисляет коэффициенты регрессии.

```

C=np.cov(x,y)

a=C[0,1]/C[0,0]
b=np.mean(y)-a*np.mean(x)

xfit = np.linspace(0, 10, 10)
yfit = a*xfit + b

print(f"Model coef:      a={a}")
print(f"Model intercept: b={b}")

plt.figure()
plt.scatter(x, y, color='green')
plt.plot(xfit, yfit)

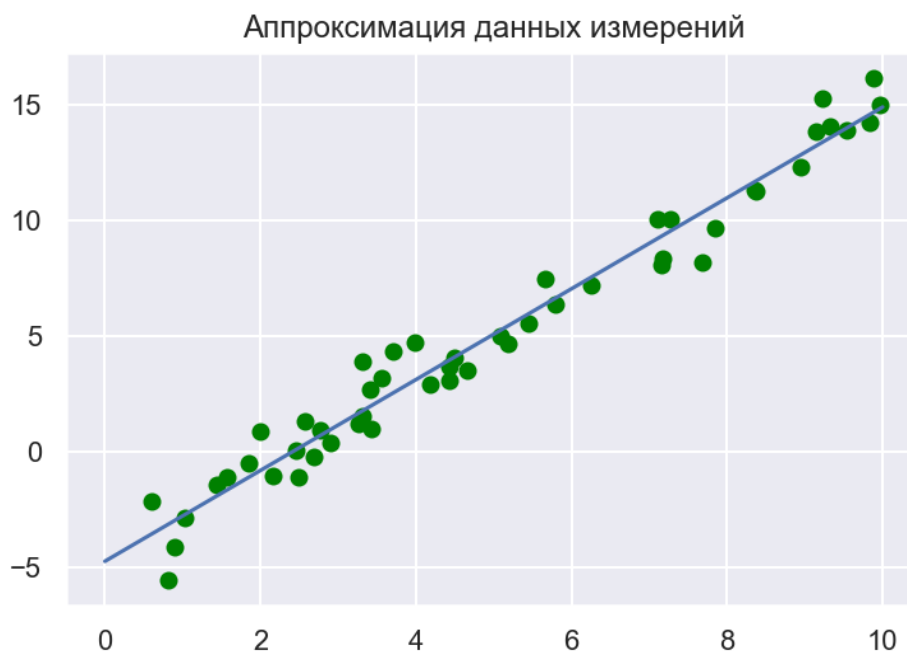
```

В результате вычислений будет выведен следующий результат.

```

Model coef:      a=1.9681862451970724
Model intercept: b=-4.7583874782991815

```



В библиотеке Scikit-Learn языка Python линейная регрессия реализована в классе LinearRegression.

У всех моделей из Scikit-Learn есть методы fit и predict. Первый принимает на вход обучающую выборку и вектор целевых переменных и обучает модель, второй, будучи вызванным после обучения модели, выполняет предсказание целевой переменной по значениям факторов.

Теперь, реализуем простую линейную регрессию на основе методов Scikit-Learn.

```

from sklearn.linear_model import LinearRegression
model = LinearRegression(fit_intercept=True)

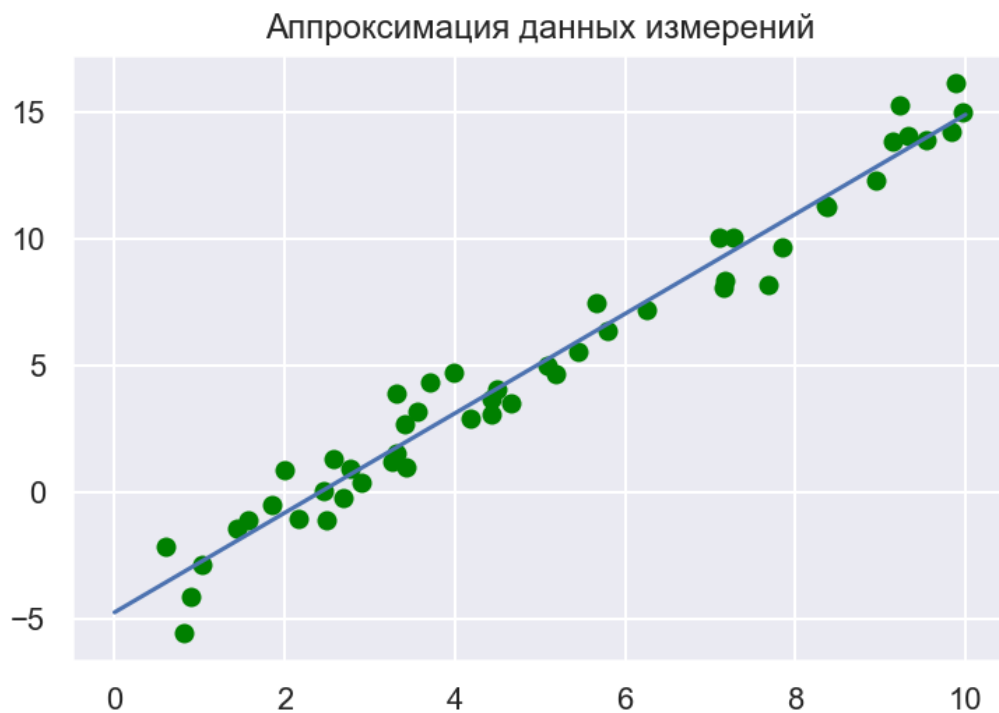
model.fit(x[:, np.newaxis], y)

xfit = np.linspace(0, 10, 10)
yfit = model.predict(xfit[:, np.newaxis])

plt.figure()
ax = plt.axes()
ax.set_title('Аппроксимация данных измерений')
plt.scatter(x, y, color='green')
plt.plot(xfit, yfit)

```

Результатом выполнения скрипта будет следующий график.



Подбираемые параметры модели (в библиотеке Scikit-Learn всегда содержат в конце знак подчеркивания) включают угловой коэффициент  $a$  и точку пересечения с осью ординат  $b$ . В данном случае соответствующие параметры - `coef_` и `intercept_`:

```

print(f"Model coef:      a={model.coef_[0]}")
print(f"Model intercept: b={model.intercept_}")

```

выведенные, после выполнения скрипта, значения будут иметь вид

```

Model coef:      a=1.9681862451970729
Model intercept: b=-4.758387478299183

```

Результаты, полученные обоими способами, очень близки к исходной зависимости, как и должно быть.

## 2. Многомерная линейная регрессия

Постановка задачи линейной регрессии имеет следующий вид. Дано соотношение:  $\eta_k = x_{1k}w_1 + \dots + x_{nk}w_n + \varepsilon_k = \vec{x}_k^T \vec{w} + \varepsilon_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), или  $\vec{\eta} = X^T \vec{w} + \vec{\varepsilon}$  в векторной записи, где

1.  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$  - случайный вектор, состоящий из  $m \in \mathbb{N}$  (вектор значений целевой переменной);
2.  $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$  - матрица из  $m$  столбцов  $\vec{x}_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), где  $\vec{x}_k$  - последовательность неслучайных векторных переменных (факторов);
3.  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^T$  - вектор, состоящий из  $m$  случайных ошибок  $\varepsilon_k$  ( $k = \overline{1, m}$ );  $M\varepsilon_k = 0$ ;  $D\varepsilon_k = \sigma^2 > 0$ ;  $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{i+1, m}$ ) (случайные ошибки некоррелированы);
4.  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$  - вектор неизвестных неслучайных параметров (весов).

Если выполняются условия 1 – 4, то говорят, что имеет место модель *линейной регрессии*;  $w_1, \dots, w_n$  - *коэффициенты регрессии*;  $\sigma^2$  - *остаточная дисперсия*.

### 2.1. Пример

В простой регрессии:

1.  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T$  - наблюдения;
2.  $x_k = (x_k \ 1)^T$  - факторы;
3.  $\vec{w} = (a \ b)^T$  - неизвестные параметры.

$$\eta_k = \vec{x}_k^T \cdot \vec{w} + \varepsilon_k = (x_k \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_k = ax_k + b + \varepsilon_k \quad (k = \overline{1, m})$$

### 2.2. Свойства

1.  $M\eta_k = M\{\vec{x}_k^T \cdot \vec{w}\} + M\varepsilon_k = \vec{x}_k^T \cdot \vec{w}$  ( $k = \overline{1, m}$ ).
2.  $D\eta_k = M[(\eta_k - M\eta_k)^2] = M[(\vec{x}_k^T \cdot \vec{w} + \varepsilon_k - \vec{x}_k^T \cdot \vec{w})^2] = M\varepsilon_k^2 = D\varepsilon_k = \sigma^2 \Rightarrow$  матрица ковариаций примет вид  $D\vec{\eta} = D\vec{\varepsilon} = M[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}^T] = \sigma^2 \cdot E_m$ .

### 2.3. Замечание

В более общем случае возможны корреляции между ошибками, а, следовательно, и наблюдениями, то есть  $D\vec{\varepsilon} = M[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}^T] = \sigma^2 \cdot G$ .

Если ввести замену переменных  $\vec{\zeta} = G^{-1/2} \vec{\eta}$ , тогда

1. Математическое ожидание  $\vec{\zeta}$ :  $M\vec{\zeta} = M[G^{-1/2} \vec{\eta}] = G^{-1/2} M\vec{\eta} = G^{-1/2} X^T \vec{w}$ ,  $XG^{-1/2}$  - новая матрица факторов;

2. Матрица ковариаций  $\vec{\zeta}$ :

$$D\vec{\zeta} = M[(\vec{\zeta} - M\vec{\zeta})(\vec{\zeta} - M\vec{\zeta})^T] = M[G^{-1/2}(\vec{\eta} - M\vec{\eta})(\vec{\eta} - M\vec{\eta})^T G^{-1/2}] = G^{-1/2}(D\eta)G^{-1/2} \\ = G^{-1/2}(\sigma^2 \cdot G)G^{-1/2} = \sigma^2 \cdot E_m.$$

В итоге, заменой переменных  $\vec{\zeta} = G^{-1/2} \vec{\eta}$ , задача с коррелированными ошибками была сведена к задаче с некоррелированными ошибками, а значит модель 1 – 4 достаточно общая и заслуживает подробного рассмотрения.

### 3. Метод наименьших квадратов

МНК был впервые применен К. Гауссом (1809 г.) и получил теоретико-вероятностное обоснование А. Марковым (1900 г.) [1,2]. МНК применяется для нахождения весов  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$  в задаче линейной регрессии.

Рассмотрим квадратичную форму

$$S(\vec{w}) = \vec{e}^T \vec{e} = (\vec{y} - X^T \vec{w})^T (\vec{y} - X^T \vec{w}),$$

которую называют функционалом МНК [1] и  $\hat{\vec{w}} = \arg \max_{\vec{w}} S(\vec{w})$ .

Необходимые условия экстремума:

$$\text{grad } S(\vec{w}) = 0, \quad S(\vec{w}) = \vec{y}^T \vec{y} - \vec{y}^T X^T \vec{w} - \vec{w}^T X \vec{y} + \vec{w}^T X X^T \vec{w}.$$

Величина  $(\vec{y}^T X^T \vec{w})^T = \vec{w}^T X \vec{y}$  - скалярная  $\Rightarrow \vec{y}^T X^T \vec{w} = (\vec{y}^T X^T \vec{w})^T = \vec{w}^T X \vec{y}$ . Тогда  $S(\vec{w}) = \vec{y}^T \vec{y} - 2\vec{y}^T X^T \vec{w} + \vec{w}^T X X^T \vec{w} \Rightarrow \text{grad } S(\vec{w}) = -2X \vec{y} + 2X X^T \vec{w} = 0 \Leftrightarrow$  уравнению  $X X^T \vec{w} = X \vec{y}$ , называемого системой нормальных уравнений МНК [3].

Теорема 3.1. Пусть  $\hat{\vec{w}}$  - произвольное решение системы нормальных уравнений, тогда  $\min_{\vec{w}} S(\vec{w}) = S(\hat{\vec{w}})$  и этот минимум одинаков для всех решений системы нормальных уравнений.

Причем, если  $\det(X X^T) \neq 0$ , то оценка МНК единственная и определяется равенством  $\hat{\vec{w}} = (X X^T)^{-1} X \vec{y}$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} S(\vec{w}) &= (\vec{y} - X^T \vec{w})^T (\vec{y} - X^T \vec{w}) = ((\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}}) + X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w}))^T ((\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}}) + X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w})) = \\ &= ((\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}}) + X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w}))^T ((\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}}) + X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w})) = \\ &= (\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}})^T (\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}}) + 2(\hat{\vec{w}} - \vec{w})^T X (\vec{y} - X^T \hat{\vec{w}}) + (\hat{\vec{w}} - \vec{w})^T X X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w}) = \\ &= S(\hat{\vec{w}}) + 2(\hat{\vec{w}} - \vec{w})^T (X \vec{y} - X X^T \hat{\vec{w}}) + (\hat{\vec{w}} - \vec{w})^T X X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w}) = \\ &= S(\hat{\vec{w}}) + (\hat{\vec{w}} - \vec{w})^T X X^T (\hat{\vec{w}} - \vec{w}). \end{aligned}$$

Поскольку  $X X^T$  неотрицательно определена  $\Rightarrow S(\vec{w}) \geq S(\hat{\vec{w}}) \Rightarrow$  минимум  $S(\vec{w})$  достигается в  $\hat{\vec{w}}$  и одинаков для всех решений системы нормальных уравнений  $\Rightarrow$  любое решение этой системы является оценкой МНК. Для невырожденной  $X X^T$  система нормальных уравнений имеет единственное решение  $\hat{\vec{w}} = (X X^T)^{-1} X \vec{y}$ .

Определение 3.1. Для невырожденной  $X X^T$ , оценкой МНК будем называть функцию:  $\hat{\vec{w}}(y) = (X X^T)^{-1} X \vec{y}$  [1,2] от выборки  $\vec{y}$ . Соответствующая ей статистика имеет вид:  $\hat{\vec{w}}(\vec{\eta}) = (X X^T)^{-1} X \vec{\eta}$ .

Упражнение 3.1. Пусть в модели линейной регрессии выполняется дополнительное условие о нормальности вектора ошибок  $\vec{\epsilon}$ . Требуется получить оценку для вектора весов  $\vec{w}$  при помощи метода максимального правдоподобия.

#### 3.1. Пример

Рассмотрим пример регрессии по двум факторам  $\eta_k = w_0 + w_1 x_{1k} + w_2 x_{2k} + \epsilon_k$ . Геометрически это подобно подбору плоскости для точек в трех измерениях.

```
np.random.seed(32)
X = np.random.uniform(0, 10, size=(50,2))

y = 0.5 + np.dot(X, [-2.0, 1.5]) + np.random.normal(scale=1.0,
size=X.shape[0])
```

Возможности класса `LinearRegression` позволяют работать с многомерными линейными моделями.

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
model = LinearRegression(fit_intercept=True)
model.fit(X, y)
print(model.intercept_)
print(model.coef_)
```

В результате выполнения скрипта будут выведены значения.

```
0.579096028829668
[-1.91567403  1.41453722]
```

Теперь, для наглядности, построим плоскость регрессии и, звездочками, выведем на рисунке измерения.

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

t = np.linspace(0, 10, 50)
x_fit_1, x_fit_2 = np.meshgrid(t, t)

x_fit = np.column_stack((x_fit_1.ravel(), x_fit_2.ravel()))

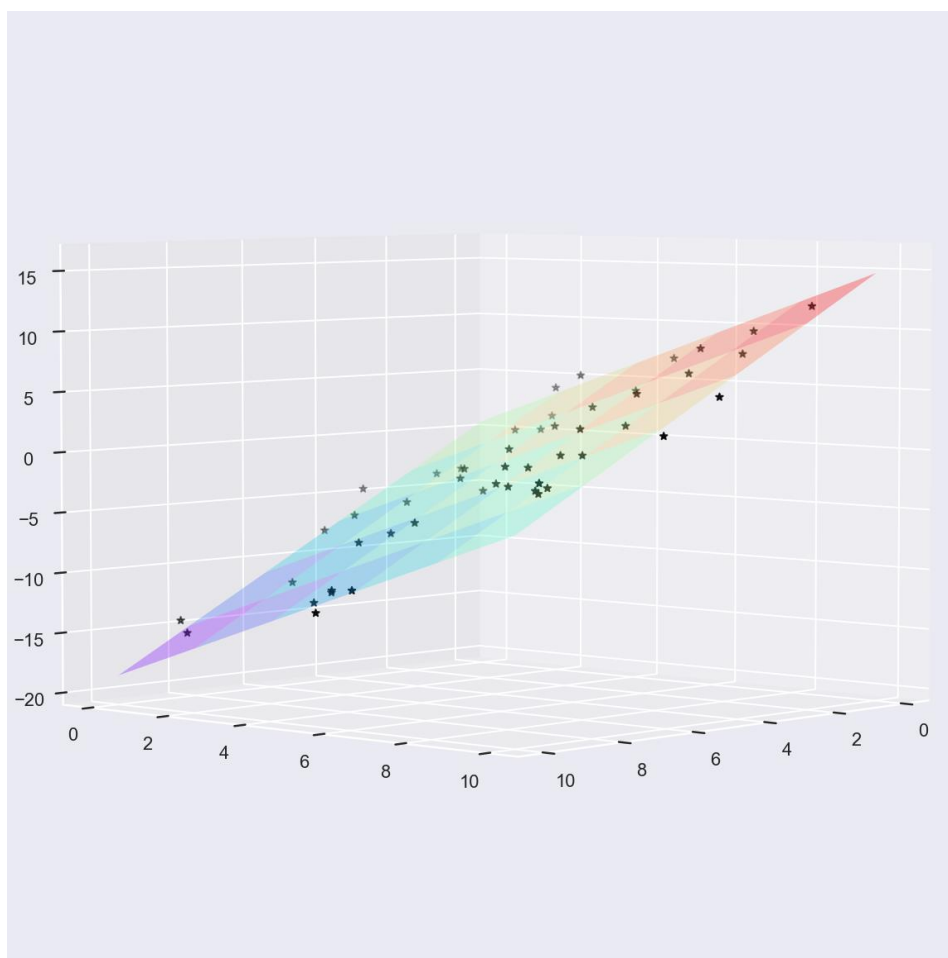
y_fit = model.predict(x_fit)

fig = plt.figure(figsize=(4,4))
ax = Axes3D(fig, auto_add_to_figure=False)
ax.plot_surface(
    x_fit_1, x_fit_2, y_fit.reshape(x_fit_1.shape),
    linewidth=0, rstride=10, cstride=10, alpha=0.3, cmap='rainbow')
ax.scatter(X[:,0], X[:,1], y, color='black', marker='*')
fig.add_axes(ax)

ax.elev = 15
ax.azim = 45

plt.show()
```

В результате выполнения скрипта будет получен рисунок.



Линейная регрессия может использоваться для аппроксимации данных прямыми, плоскостями и гиперплоскостями. Складывается впечатление, что этот подход ограничивается лишь строго линейными отношениями между факторами и целевой переменной, но, если проявить изобретательность, открываются широкие возможности применения регрессии к аппроксимации нелинейной связи.

#### 4. Регрессия в спрямляющем пространстве

Основным приемом, позволяющем применить линейную регрессию к нелинейным зависимостям между переменными, является функциональное преобразование данных. Идея состоит в том, чтобы взять многомерную линейную функцию

$$y = w_1 z_1 + \dots + w_N z_N$$

и подставить в нее  $z_j = \varphi_j(\vec{x})$  ( $j = \overline{1, N}$ ), где  $\varphi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - некоторая функция, выполняющая преобразование факторов  $\vec{x}$ , тогда  $y = w_1 \varphi_1(\vec{x}) + \dots + w_N \varphi_N(\vec{x})$ .

В итоге получается модель в  $N$ -мерном пространстве, которое называют *спрямляющим*.

Соответствующую задачу регрессии теперь можно переформулировать следующим образом:

$$\eta_k = \varphi_1(\vec{x}_k) w_1 + \dots + \varphi_N(\vec{x}_k) w_N + \varepsilon_k \quad (k = \overline{1, m}) \Leftrightarrow \vec{\eta} = \Phi(X) \vec{w} + \vec{\varepsilon}.$$

В частности, для одномерных факторов  $x$ , если  $\varphi_k(x) = x^{k-1}$ , получаем *полиномиальную регрессию  $N - 1$  степени*:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_{N-1} x^{N-1}.$$

Обратим внимание, что модель по-прежнему остается линейной, линейность относится к тому, что коэффициенты  $w_k$  никогда не умножаются и не делятся друг на

друга. Фактически мы взяли наши одномерные значения  $x$  и выполнили их проекцию на пространство большей размерности, так что с помощью линейной аппроксимации мы можем теперь отражать более сложные зависимости между  $x$  и  $y$ .

### 5. Полиномиальные базисные функции

Данное полиномиальное преобразование настолько популярно, что было реализовано в библиотеке Scikit-Learn в виде преобразователя PolynomialFeatures. После такого преобразования можно воспользоваться линейной моделью для подбора намного более сложных зависимостей между величинами  $x$  и  $y$ . Например, рассмотрим зашумленную синусоиду и выполним следующий скрипт.

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression

np.random.seed(36)
x = np.linspace(0, 1, 100)
y = np.cos(1.5 * np.pi * x)

x_train = np.random.uniform(0, 1, size=10)
y_train = np.cos(1.5 * np.pi * x_train)
          + np.random.normal(scale=0.1, size=x_train.shape)

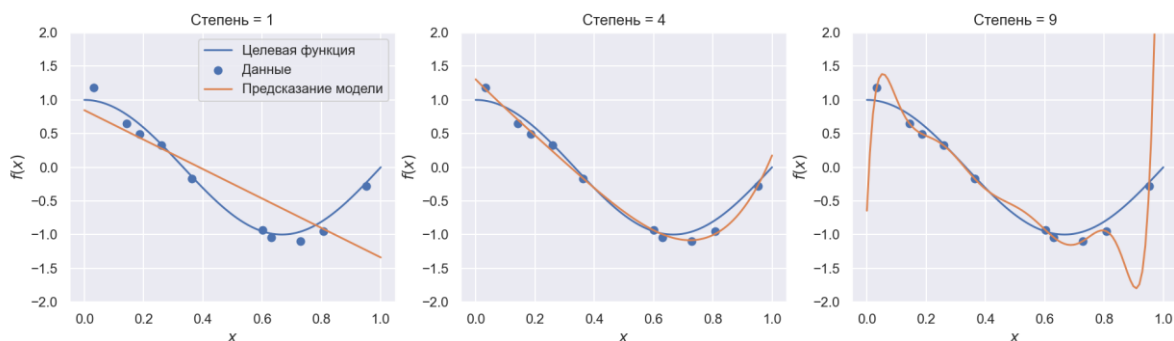
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
fig, axs = plt.subplots(figsize=(16, 4), ncols=3)
for i, degree in enumerate([1, 4, 9]):
    X_train = PolynomialFeatures(degree, include_bias=True).
                fit_transform(x_train[:, np.newaxis])
    X = PolynomialFeatures(degree, include_bias=True).
                fit_transform(x[:, np.newaxis])
    w = np.dot(np.linalg.inv(
                np.matmul(X_train.T, X_train)),
                np.dot(X_train.T, y_train))
    y_pred = np.dot(X, w)

    axs[i].plot(x, y, label="Целевая функция")
    axs[i].scatter(x_train, y_train, label="Данные")
    axs[i].plot(x, y_pred, label="Предсказание модели")
    if i == 0: axs[i].legend()
    axs[i].set_title("Степень = %d" % degree)
    axs[i].set_xlabel("$x$")
    axs[i].set_ylabel("$f(x)$")
    axs[i].set_ylim(-2, 2)

print(f"Степень = {degree}")
print(f"Коэффициенты = {w}")
```

После выполнения скрипта будет выведен результат.





Степень = 1

Коэффициенты = [ 0.84726355 -2.18725545 ]

Степень = 4

Коэффициенты = [ 1.30556546 -4.4809226 2.74750958 -7.17210868 7.77492881 ]

Степень = 9

Коэффициенты = [-6.45159766e-01 1.02353999e+02 -1.84957381e+03

1.53838094e+04

-7.14543518e+04 1.98561382e+05 -3.37119034e+05 3.42237557e+05

-1.90577452e+05 4.47262317e+04]

С помощью линейной модели, используя полиномиальную регрессию 4-й степени, мы получили прекрасную аппроксимацию этих нелинейных данных. Применение базисных функций делает линейную модель намного гибче.

Приведенный пример, с полиномиальной регрессией 9-й степени, демонстрирует эффект переобучения.

Определение 5.1. Переобучение в машинном обучении и статистике - явление, когда построенная модель относительно хорошо приближает целевую переменную на выборке, но относительно плохо работает на данных, не встречавшихся в выборке.

В нашем случае, выбор слишком высокой степени полиномиальной регрессии приводит к интерполяции в узлах, отвечающих выборке, но к неудовлетворительному приближению в других точках.

## 6. Свойства оценок МНК

Далее будем рассматривать статистику, отвечающую оценке МНК  $\widehat{\vec{w}}(\vec{\eta}) = (XX^T)^{-1}X\vec{\eta}$ . В выражениях, для краткости, будем опускать аргумент статистики.

Теорема 6.1. Пусть  $XX^T$  - невырожденная, тогда статистика оценки МНК  $\widehat{\vec{w}}(\vec{\eta})$ :

1. несмещенная;
2. эффективная в классе линейных несмещенных оценок  $\vec{w}$ ;
3. матрица ковариаций оценки МНК:  $D(\widehat{\vec{w}}) = \sigma^2(XX^T)^{-1}$ .

Доказательство.

1. Несмещенность

$$M\widehat{\vec{w}} = M[(XX^T)^{-1}X\vec{\eta}] = M[(XX^T)^{-1}X(X^T\vec{w} + \vec{\varepsilon})] = (XX^T)^{-1}XX^T\vec{w} + (XX^T)^{-1}XX^TM\vec{\varepsilon} = \vec{w}.$$

2. Эффективная оценка в классе линейных несмещенных оценок означает следующее. Пусть  $\vec{\zeta} = L\vec{\eta}$  - произвольная линейная несмещенная оценка  $\vec{w}$ . То есть  $M\vec{\zeta} = LM\vec{\eta} = LM[X^T\vec{w} + \vec{\varepsilon}] = LX^T\vec{w} = \vec{w}$  и  $D\zeta_i \geq D\widehat{w}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Значит, несмещенность  $\vec{\zeta} \Leftrightarrow LX^T = E$ .

Для доказательства эффективности, рассмотрим  $D\vec{\zeta} = LD\vec{\eta}L^T = \sigma^2LL^T$ .

$$\begin{aligned}
LL^T &= (L - (XX^T)^{-1}X + (XX^T)^{-1}X)(L - (XX^T)^{-1}X + (XX^T)^{-1}X)^T \\
&= (L - (XX^T)^{-1}X)(L - (XX^T)^{-1}X)^T + (L - (XX^T)^{-1}X)X^T(XX^T)^{-1} \\
&\quad + (XX^T)^{-1}X(L^T - X^T(XX^T)^{-1}) + (XX^T)^{-1}X[(XX^T)^{-1}X]^T \\
&= (L - (XX^T)^{-1}X)(L - (XX^T)^{-1}X)^T + (LX^T - E)(XX^T)^{-1} + (XX^T)^{-1}(XL^T - E) \\
&\quad + (XX^T)^{-1}XX^T(XX^T)^{-1} = \{LX^T = E, \quad XL^T = E\} \\
&= (L - (XX^T)^{-1}X)(L - (XX^T)^{-1}X)^T + (XX^T)^{-1}.
\end{aligned}$$

Оба слагаемых имеют вид  $AA^T$ , а значит у каждого слагаемого неотрицательные диагональные элементы, сумма которых и представляет собой  $D\zeta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), и имеют наименьшие значения при  $L = (XX^T)^{-1}X$ . Соответствующая эффективная оценка  $\hat{\zeta} = (XX^T)^{-1}X\hat{\eta}$ , совпадает с оценкой МНК.

3. Матрица ковариаций оценки МНК:

$$D\hat{w} = (XX^T)^{-1}XD(\hat{\eta})X^T(XX^T)^{-1} = (XX^T)^{-1}X(\sigma^2E)X^T(XX^T)^{-1} = \sigma^2(XX^T)^{-1}.$$

### 7. Оценка остаточной дисперсии

Для дальнейших выкладок понадобится запись квадратичной формы через след матрицы  $A(z \cdot z^T)$ . Пусть  $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $z_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) тогда

$$z^T Az = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i a_{ij} z_j = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (z_j z_i) \right] \text{ и } A(z \cdot z^T) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik} z_k z_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

И, из последних двух соотношений, получим

$$z^T Az = \text{tr}(A(z \cdot z^T)).$$

При доказательстве теоремы 3.1 было получено соотношение

$$S(\bar{w}) = S(\hat{w}) + (\hat{w} - \bar{w})^T XX^T (\hat{w} - \bar{w}).$$

Рассмотрим статистики  $\hat{w}(\hat{\eta}) = (XX^T)^{-1}X\hat{\eta}$  и  $S(\hat{\eta}, \hat{w}) = (\hat{\eta} - X^T\bar{w})^T (\hat{\eta} - X^T\bar{w})$  и в дальнейших выкладках, для краткости, опустим их аргументы. Тогда

$$MS(\bar{w}) = MS(\hat{w}) + M \left[ (\hat{w} - \bar{w})^T XX^T (\hat{w} - \bar{w}) \right].$$

С другой стороны, по определению  $MS(\bar{w}) = M[\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}]$ . При этом  $\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2$ ;  $M[\varepsilon_i] = 0$ ;  $D[\varepsilon_i] = \sigma^2$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а значит  $M[\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}] = \sum_{i=1}^m M[\varepsilon_i^2] = \sum_{i=1}^m D[\varepsilon_i] = m\sigma^2$ , следовательно

$$MS(\bar{w}) = m\sigma^2.$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое

$$\begin{aligned}
M \left[ (\hat{w} - \bar{w})^T XX^T (\hat{w} - \bar{w}) \right] &= M \left[ \text{tr} \left( XX^T (\hat{w} - \bar{w}) (\hat{w} - \bar{w})^T \right) \right] \\
&= \text{tr} \left( XX^T M \left[ (\hat{w} - \bar{w}) (\hat{w} - \bar{w})^T \right] \right).
\end{aligned}$$

Поскольку оценка  $\hat{w}$  - несмещенная, имеем  $M[\hat{w}] = \bar{w}$  и  $D[\bar{w}] = M \left[ (\hat{w} - \bar{w}) (\hat{w} - \bar{w})^T \right] = \sigma^2(XX^T)^{-1}$ , значит

$$M \left[ (\hat{w} - \bar{w})^T XX^T (\hat{w} - \bar{w}) \right] = \sigma^2 \text{tr}(XX^T(XX^T)^{-1}) = \text{tr}E \cdot \sigma^2 = n\sigma^2.$$

В итоге, имеем  $m\sigma^2 = MS(\hat{w}) + n\sigma^2$  и  $MS(\hat{w}) = (m - n)\sigma^2$ .

Таким образом, если в качестве оценки  $\sigma^2$  выбрать  $\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{w})}{m-n}$ , то она будет несмещенной оценкой для  $\sigma^2$ :

$$M[\widehat{\sigma^2}] = \frac{MS(\widehat{w})}{m-n} = \frac{(m-n)\sigma^2}{m-n} = \sigma^2.$$

### Заключение

В работе был предложен материал для проведения лекции по линейной регрессии. В рамках занятия была изучена простая и множественная регрессии. При изучении множественной регрессии сформулирована и доказана теорема об оценке МНК, рассмотрена регрессия в спрямляющем пространстве, а также сформулированы и доказаны статистические свойства оценки МНК. Теоретический материал наглядно иллюстрируется примерами скриптов, разработанных средствами языка Python, которые реализуют предложенные в лекции алгоритмы.

---

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Ивченко, Г. И. Математическая статистика / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — 2-е изд., доп. — Москва : Высш. шк., 1992. — 303 с.
  2. Ивченко, Г. И. Введение в математическую статистику / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. — Москва : URSS : Изд-во ЛКИ, 2010. — 599 с.
  3. Дрейпер, Н. Р. Прикладной регрессионный анализ / Н. Р. Дрейпер, Г. Смит — 3-е изд. — Москва : Диалектика : Вильямс, 2007. — 911 с.
  4. Плас, Д. В. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение / Д. В. Плас — СПб. : Питер, 2020. — 572 с.
  5. Рашка, С. Python и машинное обучение / С. Рашка. — М. : ДМК Пресс, 2017. — 417 с.
- 

**Vladimir A. Pankratov,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[ivankovpl@mail.ru](mailto:ivankovpl@mail.ru)

**Elena S. Tverskaya,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[e\\_tverskaya@bmstu.ru](mailto:e_tverskaya@bmstu.ru)

**A lecture "Linear regression"**

**Abstract.** The paper presents the material for lecture on the courses "Mathematical Statistics" or "Machine Learning". Linear regression is a central statistical tool that allows you to build the relationship between data from a sample. However, despite the fact that linear regression is exhaustively described in the literature on mathematical statistics, there is a certain lack of practically oriented teaching on this topic. The article considers the following topics: simple linear regression, multivariate regression and least squares method, feature space and polynomial regression, properties of least squares estimates, and estimation of residual variance. The formulation of the regression problem and the formulation of theorems are satisfied the conditions on the moments of the first and second order, of the random variables appearing in them, only. Theoretical calculations are illustrated with examples in Python using the NumPy and Scikit-Learn libraries.

**Keywords:** linear regression, least squares method, Python, NumPy, Scikit-Learn.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕЙ В КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

### Аннотация

Актуальность данной работы обусловлена тем, что нейронные сети в настоящее время активно изучаются, развиваются и разрабатываются. Во многих учебных дисциплинах используется моделирование, являющееся универсальным подходом к изучению строения и поведения сложных объектов. Моделирование поведения интеллектуальных систем является ключевым направлением развития математического моделирования. В статье рассматриваются особенности построения простейших нейронных сетей на занятиях по компьютерному моделированию в университете.

### Ключевые слова

искусственный интеллект, нейрон, перцептрон, нейронные сети, компьютерное моделирование

### АВТОРЫ

**Подзорова Марина Ивановна,**  
кандидат педагогических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», г. Москва  
marinatichomirova@hotmail.com

**Птицына Инга Вячеславовна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», г. Москва  
inpt@mail.ru

**Бахтиярова Ольга Николаевна,**  
кандидат технических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
olga-bakh06@mail.ru

### Введение

Искусственный интеллект - неотъемлемая часть современного мира, а нейронные сети являются важнейшим направлением в изучении и применении ИИ. Компьютерные приложения берут за основу человеческий мозг и его особенности. Нейрон есть узел с несколькими входами и выходом. А нейросеть представляет собой множество нейронов, взаимосвязанных между собой. На первом этапе нейросеть учится устанавливать соответствие между входными и выходными сигналами, что является обучением. В начале работы нейронной сети к ней поступают входные данные, а затем, используя накопленные знания, нейросеть генерирует выходные сигналы.

Современные нейросети обучаются и повышают точность результата достаточно с большой скоростью. Уже сегодня их применяют к решению сложных задач, например, идентификация лиц, сортировка больших данных, прогнозирование и моделирование.

В курсе информатики раздел компьютерного моделирования является сложным, но очень важным, даже необходимым для создания моделей на занятиях по математике, физике, химии и других.

В результате изучения моделирования нейросетей обучающиеся приобретают навыки работы с большим объёмом информации, её структуризацией и систематизацией. В итоге студент получает навыки системного мышления, что позволяет ему успешно изучать современную образовательную программу и адаптироваться к современным реалиям.

### Методология и результаты исследования

Аппарат искусственных нейронных сетей – это математический аппарат, являющийся в определенном смысле компьютерной моделью нейронных сетей биологических объектов и человека, обладающий способностями к обучению на основе эмпирических данных, работы в случае недостатка информации или при ее значительной зашумленности [1]. Нейросети выгодно отличаются от традиционных алгоритмов тем, что их не нужно программировать в классическом понимании этого слова. Нейросети обучаются при каждом запросе пользователя к ним, и, чем больше запросов, тем «умнее» становится сеть.

Нейронная сеть составлена из узлов, моделирующих нервные клетки головного мозга человека, нейронов, которые соединены синаптическими связями [2]. При рассмотрении вопроса обучения сети, необходимо подробно разобрать представленное ниже изображение.



Рис. 1. Модель нейрона

Синаптическая связь включает в себя несколько составляющих, а именно: энергетический импульс, обозначенные на рисунке  $V_i$ ; дендриты, обозначенные на рисунке как  $i$ ; нейрон; аксон.

Каждый нейрон имеет в своем составе энергетический импульс  $V_i$ , который вырабатывается другими нейронами и принимается нейронными дендритами, с которыми нейроны связаны через разветвленные аксоны. В свою очередь, дендриты имеют индивидуальный вес, который обозначен на изображении  $\omega_{ik}$ . Вес дендритов имеет ключевое значение в изменении размера полученного энергетического импульса  $V_i$ , и в результате образует дендритный вес «принимающего» импульс нейрона. Так как полученный энергетический импульс распространяется вдоль дендритов нейрона, то, согласно закону распределения энергии, энергетический импульс  $V_i$  делится пропорционально дендритному весу (важно отметить, что указанное выше распределение энергии не реализуется в практических моделях).

Для расчета величины импульса  $V_i$  используется следующая функция:  $V_i = f(\sum \omega_{ik} V_{ki} - h_i)$ , где

$\omega_i$  - вес синаптической связи

$V_{ki}$  - доля энергии импульса

$\omega_{ik}$  - вес дендрита

$h_i$  - это пороговое значение.

Необходимость в установлении порогового значения  $h_i$  и веса синаптической связи  $\omega_i$  обусловлена спецификой контролирования нейрона, учитывая, что каждый нейрон способен контролироваться как внешне, так и по принципу независимого контроля путем использования обратной связи. Такие способы контролирования нейронов используются при реализации различных моделей.

Указанный регламент позволяет установить наиболее простой путь прохождения стимулов через сети, в результате чего формируются отношения такие как «предпосылка - эффект», и тем самым определяется возможность обучения сети, включая и ее способность к самостоятельному обучению.

Итак, возвращаясь к расчету величины импульса  $V_i$ , необходимо отметить, что функция  $f$  может отличаться, но, тем не менее, ее расчет не представляет большой сложности. Чаще всего функция  $f$  соответствует линейной форме, при этом проводится сравнение веса дендритов с имеющимся пороговым значением.

В случае, если значение веса дендрита превышает пороговое значение, то такое значение является значением уровня возбуждения нейрона [3].

Существуют различные подходы к определению значения возбуждения нейрона. Так для некоторых моделей характерно приравнивание значения возбуждения нейрона к единице. В такой системе отсутствия возбуждения нейрона соответствует нулю.

В других моделях для характеристики значения возбуждения нейрона используются отрицательные значения. В зависимости от отрицательного или положительного значения возбуждения нейрона определяется вес синаптического соединения, а также особенности воздействия на нейрон через разветвлённые аксонные соединения. Если значение возбуждения имеет положительное значение, то нейрону передается возбуждающий сигнал, побуждающий к действию. В случае, если значение возбуждения имеет отрицательное значение, то нейрону передается тормозящий действие сигнал.

Важно отметить, что количество передаваемого возбуждения или торможения связано с количеством соединений нейрона с аксонами. Так в процессе передачи отрицательных значений возбуждения нейронов могут возникать следующие эффекты: сеть может распознавать уровень ввода (приема), который указывается при приеме внешнего возбуждения (которым, например, предоставляется изображение), а также уровень вывода, который указывается путем определения решения проблемы, поднятой ранее. Сетевые операции могут быть рассчитаны на различные случаи. Указанные процессы могут имитировать прохождение возбуждения через сеть и контролировать его. В режиме распознавания (режим работы) и режиме обучения сеть функционирует.

Сделаем установку начальных значений весов дендритов для всей сети случайным образом. Будем использовать нейронную сеть для того, чтобы распознать почерк (иначе говоря, рукописный текст). Известно, что сетчатка глаза обладает способностью воспринимать изображения. В соответствии с данным обстоятельством, подобно сетчатке глаза будет работать входной слой. Подача изображения на входной слой, в соответствии с конкретной конфигурацией, сможет стимулировать большое количество нейронов, а именно рецепторов. Предположим, что к входному слою применяется определенный стандарт, например, буква «А». Определенные нейроны из выходного слоя через определенное время будут возбуждены в максимально возможной степени. Мы прикрепляем этот нейрон к букве «А», то есть увидим возбужденное со-



стояние этого нейрона как ответ: «Это буква А». Теперь с естественными искажениями, которые могут быть вызваны дрожащими руками, почерком и т. д., мы вновь вводим букву А.

Достигнуть максимального возбуждения могут различные нейроны. Необходимо выделить важные для нас моменты. Прежде всего, систему необходимо обучить. Очень важно, чтобы система могла дать ответ: это тоже буква А. Нам нужно получить максимальное возбуждение от одного и того же нейрона в выходном слое. Здесь появляется необходимость изменить вес и, скорее всего, порог в ткани вдоль пути возбуждения таким образом, чтобы требуемые нейроны входили в состояние возбуждения.

Основным и весьма важным элементом сетевого обучения является такая договоренность. «Алгоритм обучения» относится к алгоритму, используемому для этого случая. Одним из наиболее часто используемых алгоритмов обучения является алгоритм обратного распространения [4]. Этот алгоритм основан на прямом и обратном разделах, а также воспроизводит подход, используемый в динамическом программировании.

Здесь предлагается новый и более простой алгоритм «поиска». Основой этого алгоритма является непосредственное участие в процессе прокладки маршрута, возбуждение от стандартного до уровня выхода нейронов. Обучение сети данному образцу происходит после представления множества эталонов и настройки определенных параметров. В этом случае математическая проблема несоответствия управления параметрами для разных стандартов не рассматривается, поскольку этот процесс достаточно успешен и очень стабилен с разумной разницей между стандартами. Очевидным фактом является то, что процесс возбуждения одних и тех же нейронов в выходном слое строчными буквами или буквой А нецелесообразен. В лучшем случае нейроны могут определить, что это буква, а не, например, пунктуация.

Когда распознавание некоего объекта достигает определенного необходимого уровня, можно считать, что обучение подошло к концу. Для стандарта, который был обозначен, уже не нужно регулировать параметры. Такая необходимость со временем сводится к минимуму. При выполнении данных условий появляется возможность для работы в необходимом режиме - это режим распознавания. Если вы представляете разные буквы в сети, вы можете быть уверены, что если буква А будет случайно искажена или даже зашумлена (очевидно, в допустимых пределах), сеть, скорее всего, распознает ее, то есть соответствующие нейроны из выходного слоя будут возбуждены. [5]

Отметим еще один важный момент. Установлено, что для наилучшего и более легкого обучения требуется одно важное условие: необходимо наиболее полно представить стандарты. К таким стандартам можно отнести, например, изображение букв, когда они находятся под контролем прописей. Также такой стандарт может оказывать воздействие на некоторую степень отклонения, существенное влияние на которую оказывает почерк. Все это будет оказывать влияние на то, как будет подтверждена определенная буква.

Если мы в первый раз встречаемся с какой-либо теорией и начинаем в ней разбираться, то помочь в ускорении этого процесса нам может приобретение знаний по этому вопросу. Теория перцептрона достаточно интересна и оригинальна. Ее автором является Ф. Розенблатт. Он же является и автором перцептрона. Основные теоремы и определения теории перцептрона можно считать основой для всех последующих типов искусственных нейронных сетей. Понимание с точки зрения теории сигналов является, в данном случае, необходимым условием.

Некоторые компоненты перцептрона могут быть частными случаями искусственных нейронов с пороговыми передаточными функциями. Идентифицируем эти компо-

ненты. Логический определяемый элемент - А-элемент. Если алгебраическая величина суммы входных сигналов превышает определенный предел  $\theta$ , то А-элемент выдает сигнал «+1», в противном случае получаем сигнал «0». Сенсорный (чувствительный) элемент - S-элемент. Он реализует получение сигналов от результата воздействия различных видов энергии. В результате на выходе получаем «+1», если выходной сигнал превышает заданный порог  $\theta$ , в противном случае получаем «0». Активный (реагирующий) элемент - R-элемент. Он выдает «+ 1» при положительном числе входных сигналов, если же количество входных сигналов отрицательно, то «-1».

Т.е. элемент активен, если на выходе мы получаем единицу. Эти элементы реализуют скачкообразные функции, которые поэтому называются простыми. Согласно Розенблатту, существуют и другие типы функций - линейные. Таким образом, Розенблатт вводит определение, показанное ниже: Перцептрон - это сеть, состоящая из элементов S, A, R, с переменной матрицей взаимодействия W, элементы  $\omega_{ij}$  которой являются весовыми коэффициентами, определяемой последовательностью прошлых состояний сетевой активности [6]. Перцептрон с последовательным соединением - это система, в которой все связи, начинающиеся с элемента с логическим расстоянием d от ближайшего элемента S, заканчиваются элементом с логическим расстоянием d + 1 от ближайшего элемента S.

Простой перцептрон может представлять собой различные системы. Для этого он должен соответствовать определенным требованиям. Существует пять данных условий:

- 1) система характеризуется наличием только одного элемента R (все элементы A связываются с этим элементом);
- 2) система является перцептроном с последовательными связями. Данные связи проходят только от элементов S до элементов A и от элементов A до элементов R;
- 3) неизменными сохраняются веса всех связей от элементов S до элементов A (связей S-A);
- 4) время передачи каждого сообщения равно нулю или постоянной  $\tau$ ;
- 5) все функции активации элементов S-, A-, R имеют вид  $U_i(t) = f(a_i(t))$ , где  $a_i(t)$  - алгебраическая сумма всех сигналов, которые поступают на вход элемента  $u_i$ .

Такие перцептроны, где все элементы простые, называются элементарными перцептронами.

### *Концепции перцептрона, как часть теории нейронных сетей*

Система, имеющая соединения между элементами одного типа (S, A или R), расположенными на одинаковом логическом расстоянии от элемента S, а все другие ссылки имеют последовательный тип, называются скрещенным перцептроном [7].

Если же в системе имеется хотя бы одно соединение от более логичного элемента к более дальнему, то такая система называется обратной связью перцептрона. Такая сеть называется повторяющейся [8].

Если в системе устранить фиксированные граничные ограничения от элемента S до элемента A, то получим перцептрон с переменными связями S-A. Доказано, что улучшение характеристик перцептрона возможно в результате оптимизации связей S-A [9].

История концепции перцептрона достаточно интересна. Первоначальный смысл данной концепции был искажен вследствие нескольких факторов, к которым можно отнести следующие: малоразвитая терминология нейронных сетей; сильная критика и отсутствие правильного понимания задач исследования перцептрона; наличие в прессе неправильной информации и неверных сообщений.



Сравнивая разработки Розенблатта с результатами современных статей, можно выделить четыре класса перцептронов:

1. Перцептрон со скрытым слоем - классический перцептрон, имеющий только один слой элементов  $S$ ,  $A$  и  $R$  [10].

2. Однослойный перцептрон - это модель, в которой входной элемент напрямую связан с выходом через систему взвешивания [11]. Ему свойственно большое число ограничений.

3. Многослойный перцептрон Розенблатта - перцептрон, содержащий дополнительный слой  $A$ -элемента.

4. Многослойный перцептрон Румельхарта (частный случай многослойного перцептрона Розенблатта) - перцептрон, имеющий дополнительный уровень элемента  $A$ . В этом случае при обучении сети применяется метод ошибки обратного распространения, а все уровни элемента-наблюдателя проходят обучение (включая  $S$ - $A$ ).

Умение учиться - самое важное свойство нейронной сети [12]. Процесс обучения есть процесс установки весов и порогов, направленный на уменьшение различия между желаемым и выходным векторами.

### *Обучение с учителем*

Классическим методом обучения перцептрона является метод исправления ошибок [13]. Пусть нашей целью является обучение перцептрона разделению двух классов объектов так, чтобы результат перцептрона был положительным (+1) с точки зрения представления объектов первого класса, а в случае представления объектов второго класса - отрицательным (-1).

#### *Алгоритм для реализации этой цели:*

1. Случайным образом выбираем пороговые значения для элемента  $A$  и устанавливаем  $S$ - $A$ -соединения (они не изменятся в будущем).

2. Начальный коэффициент  $w_i$  предполагаем равным нулю.

3. Представляем объекты, указывающие класс, в котором они находятся.

4. Показываем перцептрону объект первого класса. Некоторые элементы  $A$  возбуждаются, а соответствующие им коэффициенты  $w_i$  увеличиваются на 1.

5. Показываем перцептрону объект второго класса. При этом коэффициенты  $w_i$ , соответствующие возбуждающимся при этом отображении элементам  $A$ , уменьшаем на 1.

6. Завершаем обе части шага 3 для всего обучающего образца. В результате обучения будут сформированы значения весов связи  $w_i$ .

Ф. Розенблатт разработал и доказал теорему сходимости перцептрона. Эта теорема показывает, что не существует начального состояния взвешивания, которое влияет на базовую тренировку перцептрона, коэффициент или последовательность стимулов. Другими словами, ограниченное время, безусловно, приведет к решению.

В процессе своей исследовательской деятельности Розенблатт нередко сотрудничал с различными учеными. К таким исследователям можно отнести, например, Блока, Кестена и Джозефа.

### *Обучение без учителя*

Концепция обучения перцептрона без учителя была также предложена Розенблаттом в дополнении к классическому методу [14]:

Система подкрепления, где веса всех активных связей  $c_{ij}$ , которые ведут к элементу  $u_{ij}$ , изменяются на одно и то же определенное количество  $\gamma$ , называется альфа-системой подкрепления. В течение этого времени веса неактивных связей не меняются.

Альфа-система изменяется в процессе разработки концепции многослойного перцептрона и определяется как дельта-правило. Цель такой модификации - сделать функцию обучения различимой. Такая ситуация применяется при использовании метода градиентного спуска, позволяющего изучать более одного слоя.

### *Метод обратного распространения*

Для обучения многослойных сетей был предложен алгоритм обучения градиенту, передающий сигналы ошибок, которые рассчитываются от выхода перцептрона на его вход, слой за слоем [15]. Можно с уверенностью сказать, что данный метод стал очень популярным в современном мире. Это произошло не случайно. Данный метод обладает некоторыми преимуществами. К таким преимуществам можно отнести легкость расчетов прямо на месте. Также для слоев нейронных сетей появляется вероятность формирования. Для того чтобы осуществить такой метод, необходимо следующее условие: требуется отличать передаточную функцию нейронов. В свою очередь, перцептрон необходим для использования непрерывного значения на входе, а также оставления двоичного сигнала.

### *Моделирование перцептрона*

В машинном обучении перцептрон - это алгоритм контролируемого обучения бинарных классификаторов. Двоичный классификатор является функцией, которая способна определить принадлежность (или ее отсутствие) входа. Данный тип линейного классификатора или, иначе говоря, алгоритм классификации, осуществляет свои предсказания на основе линейной функции предикатора, которая, в свою очередь, объединяет набор весов с вектором признаков.

Для того, чтобы перцептрон «научился» классифицировать изображения были созданы методы итеративного обучения методом проб и ошибок, которые напоминают обучение человека путём исправления ошибок [16].

Хотя для глубокого нейронного поведения требуются сложные биологические модели, исследования доказывают, что линейная модель, аналог перцептрона, вызывает поведение, схожее с поведением реальных нейронов [17].

### *Алгоритм работы перцептрона*

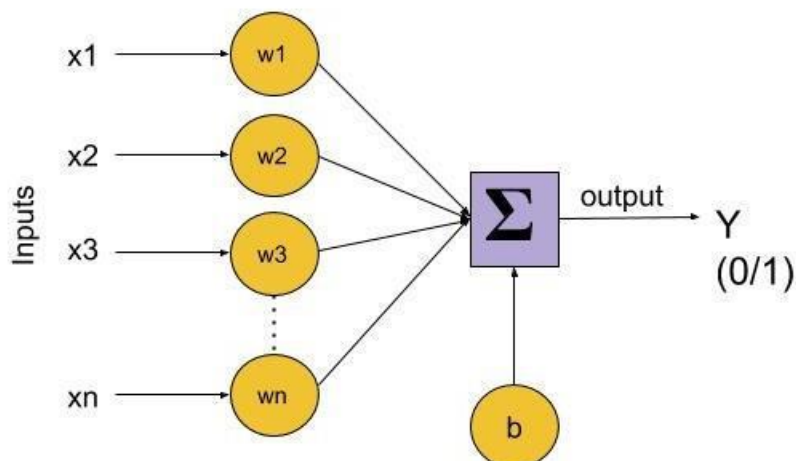


Рис. 2. Схема перцептрона

Поскольку перцептроны являются бинарными классификаторами (0/1), мы можем определить их вычисление следующим образом:

$$f_{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } b + \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Следует напомнить, что точечное (скалярное) произведение двух векторов длины  $n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) равно  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sum_i w_i \cdot x_i$ . Функция  $f(\mathbf{x}) = b + \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$  представляет собой линейную комбинацию векторов веса и признаков. Таким образом, перцептрон является линейным классификатором – алгоритмом, который предсказывает с помощью линейной функции предиктора.

Веса показывают эффективность каждой функции  $x_i$  в  $\mathbf{x}$  в поведении модели. Чем выше вес  $w_i$  элемента  $x_i$ , тем выше его влияние на результат. С другой стороны, смещение « $b$ » похоже на пересечение в линейном уравнении. Это константа, которая помогает модели адаптироваться таким образом, чтобы наилучшим образом соответствовать данным. Член смещения предполагает мнимый коэффициент входного признака  $x_0 = 1$ .

Следует напомнить, что точечное (скалярное) произведение двух векторов длины  $n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) равно  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = \sum_i w_i \cdot x_i$ . Функция  $f(\mathbf{x}) = b + \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$  представляет собой линейную комбинацию векторов веса и признаков. Таким образом, перцептрон является линейным классификатором – алгоритмом, который предсказывает с помощью линейной функции предиктора.

Веса показывают эффективность каждой функции  $x_i$  в  $\mathbf{x}$  в поведении модели. Чем выше вес  $w_i$  элемента  $x_i$ , тем выше его влияние на результат. С другой стороны, смещение « $b$ » похоже на пересечение в линейном уравнении. Это константа, которая помогает модели адаптироваться таким образом, чтобы наилучшим образом соответствовать данным. Член смещения предполагает мнимый коэффициент входного признака  $x_0 = 1$ .

### Заключение

Перцептрон является самой примитивной нейронной сетью, имеющей две входных и одну выходную клетки. Перцептроны дают возможность создавать набор «ассоциаций» между входными стимулами и нужной реакцией на выходе. Перцептроны группированы как искусственные нейронные сети: с одним скрытым слоем; с пороговой передаточной функцией; с прямым распространением сигнала. Перцептроны зачастую применяются для решения задач, которые относятся к бинарной классификации, когда выборка должна быть идентифицирована как принадлежащая к одному из predetermined двух классов.

Изучая и создавая модели простейших нейронных сетей в онлайн-средах, студенты развивают навыки компьютерного моделирования, приобретают опыт работы с большими данными методами машинного обучения. Результат создания компьютерной модели повышает мотивацию к обучению, расширяет кругозор, развивает абстрактное мышление, формирует навыки самостоятельного освоения новых технологий у студентов.

### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Зенкова Н. А., Арзамасцев А. А., Кожевников Ф. Ю. Использование аппарата искусственных нейронных сетей для построения компьютерных моделей психологических тестов // Вестник российских университетов. Математика. 2006. № 2. С. 185–189.
2. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – М.: Мир, 1992. – 240 с.
3. Хайкин С. Нейронные сети: Полный курс. – М.: «Вильямс», 2006. – 1104 с.
4. Бонгард М. М. Проблема узнавания. – М.: Наука, 1967. – 320 с.

5. Агабабян К. Г. Проблемы Ф. Розенблатта и совершенствования перцептрона. – Киев, 1975. – 23 с.
6. Брюхомицкий Ю. А. Нейросетевые модели для систем информационной безопасности: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005. – 160 с.
7. Тимонин В. А. Обзор и применение методов нелинейной оптимизации для обучения ИНС многослойный перцептрон / В.А. Тимонин, В.В. Демьянов, М.Ф. Каневский. – М. : ИБРАЭ РАН, 1999. – 29 с.
8. Назаренко М. А. Распознавание среднего гауссовской случайной величины двухслойным перцептроном при наличии равномерного шума. – Дубна: ОИЯИ, 1996. – 6 с.
9. Минский М., Пейперт, С. Персептроны. – М.: Мир, 1971. – 261 с.
10. Уоссермен Ф. Указ. соч.
11. Иванов В. В. Методы второго порядка для обучения многослойного перцептрона. – Дубна: ОИЯИ, 1994. – 10 с.
12. Назаренко М. А. Указ. соч.
13. Иванов В. В. Указ. соч.
14. Бонгард М. М. Указ. соч.
15. Бонгард М. М. Указ. соч.
16. Хайкин С. Указ. соч.
17. Агабабян К. Г. Указ. соч.

---

**Marina I. Podzorova,**

*Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[marinatichomirova@hotmail.com](mailto:marinatichomirova@hotmail.com)

**Inga V. Ptitsyna,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[inpt@mail.ru](mailto:inpt@mail.ru)

**Olga N. Bakhtiyarova,**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[olga-bakh06@mail.ru](mailto:olga-bakh06@mail.ru)

**Modeling neural networks in the course of computer science**

**Abstract.** The relevance of this work is due to the fact that neural networks are currently being actively studied, developed and developed. Many academic disciplines use modeling, which is a universal approach to studying the structure and behavior of complex objects. Modeling the behavior of intelligent systems is a key direction in the development of mathematical modeling. The article discusses the features of the construction of the simplest neural networks in the classroom on computer modeling at the university.

**Keywords:** artificial intelligence, neuron, perceptron, online environment, distance education, neural networks, computer modeling.

**ПРЕПОДАВАНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ПО РОССИЙСКИМ УЧЕБНИКАМ  
КОНЦА XVIII ВЕКА НА ПРИМЕРЕ УЧЕБНИКА  
П.И. ГИЛАРОВСКОГО «СОКРАЩЕНИЕ ВЫШНЕЙ МАТЕМАТИКИ»**

**Аннотация**

Актуальность темы обусловлена исследованием вопроса о программах курса высшей математики, сочетанию и порядку изучения ее различных разделов друг с другом, с другими курсами, использующими математические понятия, теоремы и технику работы с ними, а также подтверждению значительного педагогического российского потенциала, в том числе в поиске форм преподавания, на примере педагогической математической литературы второй половины XVIII века. Цель работы заключается в изучении отбора и глубины освоения разделов высшей математики, предназначенных для обучения учителей физики в конце XVIII века, а также всех, изучающих естествознание. Методом исследования является ознакомление с книгами по математике, изданными в рассматриваемый период, главным образом учебника П.И. Гиларовского «Сокращение вышней математики» (1796). Материалы статьи могут быть полезными педагогам педагогических, технических вузов и специалистам по истории российского образования.

**Ключевые слова**

педагогическое образование, инженерное образование, геометрия,  
математическое образование, дифференциальное исчисление,  
интегральное исчисление, конические сечения, учебники, П.И. Гиларовский

**АВТОРЫ**

**Птицына Инга Вячеславовна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», г. Москва  
inpt@mail.ru

**Бахтиярова Ольга Николаевна,**  
кандидат технических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
olga-bakh06@mail.ru

**Подзорова Марина Ивановна,**  
кандидат педагогических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», г. Москва  
marinatichomirova@hotmail.com

**Птицына Елена Владимировна,**  
студентка ФГБОУ ВО «Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова», г. Москва  
elena-pt@yandex.ru

**Введение**

Одной из проблем современного высшего образования является недостаточное согласование разделов высшей математики, которые используются при освоении раз-

личных дисциплин естественнонаучного цикла. В данной статье представлено решение аналогичной проблемы на примере изучения физики и математики в учебных заведениях России во второй половине XVIII века.

### Методология и результаты исследования

Методом исследования является анализ оригинальных старинных учебников по физике и математике. Методические подходы к составлению этих учебников могут быть использованы современными авторами.

#### *Краткий обзор учебного дела по математике во второй половине XVIII века*

В истории России XVIII век явился началом широкой государственной деятельности в области образования. Однако, несмотря на разнообразную поддержку государства в области образования со стороны различных сословий и существующий образовательный опыт, российское правительство поощряло практически полное копирование иностранных образцов. Особенно ярко заимствование иностранных схем выразилось в деле народного образования, в создании системы народных училищ. В частности, почти все учебники и учебные пособия для народных училищ переписывались с чужих образцов.

Однако в этот период для подготовки средних и высших сословий появляется большое количество учебников, написанных на русском языке в основном преподавателями кадетских корпусов и московского университета [1; 2].

Одной из причин этого являлась необходимость срочной подготовки инженерных военных кадров.

Еще одной причиной являлось изменение отношения в обществе к квалифицированным учительским кадрам, педагогический подъем, охвативший общество (правда, это мало касалось тяжелого положения учителей народных училищ). Так, на титульных листах учебников П.И. Гиларовского напечатано, что они сочинены «учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российского слога и латинского языка в благородном Пажеском корпусе».

Третьей причиной была возросшая в российском обществе потребность в образовании, что, в частности, выразилось в увеличении наборов, в том числе разночинских и женских, в учебные заведения повышенного образовательного уровня. Для преподавания в них требовались новые учебники.

К высшей математике традиционно относят дифференциальное, интегральное исчисление, аналитическую и дифференциальную геометрию, дифференциальные уравнения и некоторые другие разделы. Известны три отечественных учебника по высшей математике, написанных во второй половине XVIII века: П.И. Гиларовского (1796), А.Д. Барсова (1797) и С.Е. Гурьева (1798) [3; 4; 5]. Все они посвящены различным разделам математики, но при этом в каждом из них есть изложение метода пределов.

Учебник по математике П.И. Гиларовского издан после его издания учебника по физике (1793) [6] и может служить как дополнением к нему, так и самостоятельным учебным пособием.

#### *Учебники П.И. Гиларовского*

Гиларовский Петр Иванович был учителем в нескольких учебных заведениях второй половины XVIII века. Годы его жизни, биография практически не отражены в литературе [7]. Главными из выдающихся достижений П.И. Гиларовского считаются два его учебника:



*Руководство к физике, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российского слога и латинского языка в благородном Пажеском корпусе. (СПб.: Тип. Вильковскаго. Издание Комиссии об учреждении народных училищ).*

*Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российского слога и латинского языка в благородном Пажеском корпусе. (СПб.: Тип. Вильковскаго. Издание Комиссии об учреждении народных училищ).*

Тираж второй книги составлял 1000 экз. Поэтому тираж первой книги не мог быть меньше 1000, так как второй учебник содержит сведения по математике, необходимые для полного усвоения его курса физики.

Учебник по физике являлся выдающимся учебным руководством и длительное время использовался в российском преподавании [8].

Одной из его основных особенностей являлось собрание автором и изложение простейшим языком новейших достижений физики, а также химии, не входящих в иностранные учебники.

Другой особенностью были математические главы, находящиеся в конце учебника и служащие для разъяснения физических рассуждений, Прибавление математических доказательств и исследований к разным параграфам. Эти главы предназначались для изучения наиболее сильными учениками, и, естественно, этим математическим аппаратом желательно было владеть учителям.

В предисловии П.И. Гиларовский писал, что учителю перед изучением некоторых разделов физики желательно дать ученикам некоторые знания по геометрии и в зависимости от потребностей и возможностей учеников выбирать для них полезнейший материал.

Какие же сведения по математике, кроме элементарных алгебры, геометрии и тригонометрии, приводит П.И. Гиларовский в Прибавлении? Это сведения о методе пределов, о дифференциалах, свойствах конических сечений и некоторых понятиях, относящихся к дифференциальной геометрии.

Приведем несколько примеров.

«Чтобы найти самую большую высоту, до коей тело, брошенное под углом  $q$  может достигнуть, должно дифференциал  $K$  в уравнении  $A$  положить равным 0» [9, с. 440]..

«Вместо малой дуги описываемой маятником можно принять несколько безмерно малых прямых линий ... , наклоненных одна к другой под равными углами» [10, с. 445].

«Предмет бесконечно отдален» [11, с. 478].

«...в сечениях конических...эллипсис» [12, с. 454].

«Фокус сферического зеркала...» [13, с. 471].

«...радиус кривизны в безмерно малой дуге...» [14, с. 454].

«...ежели представить, что  $M$  в безмерно малое время  $dt$  подается на безмерно малое пространство  $ds...$ » [15, с. 466-467], далее приводятся равенства, содержащие дифференциалы  $dt$ ,  $ds$ .

Некоторые математические положения снабжены доказательствами, сформулированы следствия.

Очевидно, что подобный материал невозможно было полно изложить в небольшой части учебника. С целью дать достаточные знания для овладения математическим аппаратом разделов физики, изложенных в учебнике, П.И. Гиларовский пишет второй учебник, уже по математике.

Первая часть «Сокращения вышней математики» [16], названная автором «А) Сокращение вышней Алгебры, т.е. Дифференциального и Интегрального счисления»,



посвящена автором не алгебре, а началам дифференциального и интегрального исчисления.

В ней дано определение функции как «состояния, в котором находится какое-нибудь переменное количество» [17, с. 2], дифференциала функции (как приращения функции) [18, с. 3]: «взять дифференциал от какой-нибудь функции количества переменного есть не что иное, как представить перемену, которая в ней произойти должна от того, что самое переменное количество принимает приращение или умаление» [19, с. 3] (рис. 1).

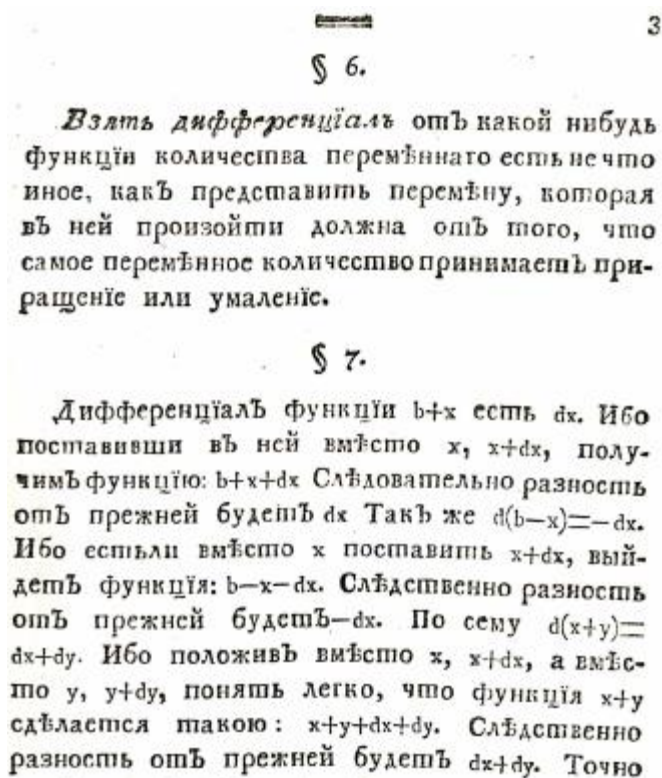


Рис. 1. Определение дифференциала функции в учебнике П.И. Гиларовского (1796 год)

Однако П.И. Гиларовский подразумевает нахождение предельного значения приращения функции до бесконечно малых первого порядка (рис. 2).

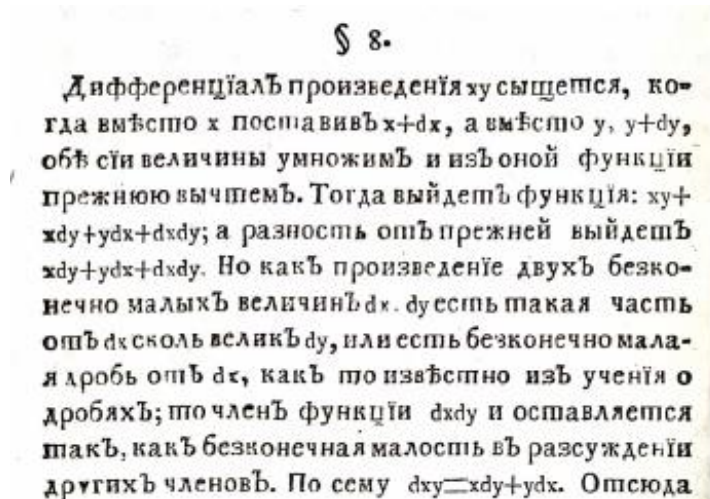


Рис. 2. Вычисление дифференциала произведения в учебнике П.И. Гиларовского (1796 год).

Подход П.И. Гиларовского к определению дифференциала функции, вероятно, продиктован ненужностью для современного ему преподавания физики более строгих определений. Не следует думать, что это являлось традицией в российском преподавании. Для сравнения приведем вполне современное определение из учебника А.Д. Барсова (рис. 3).

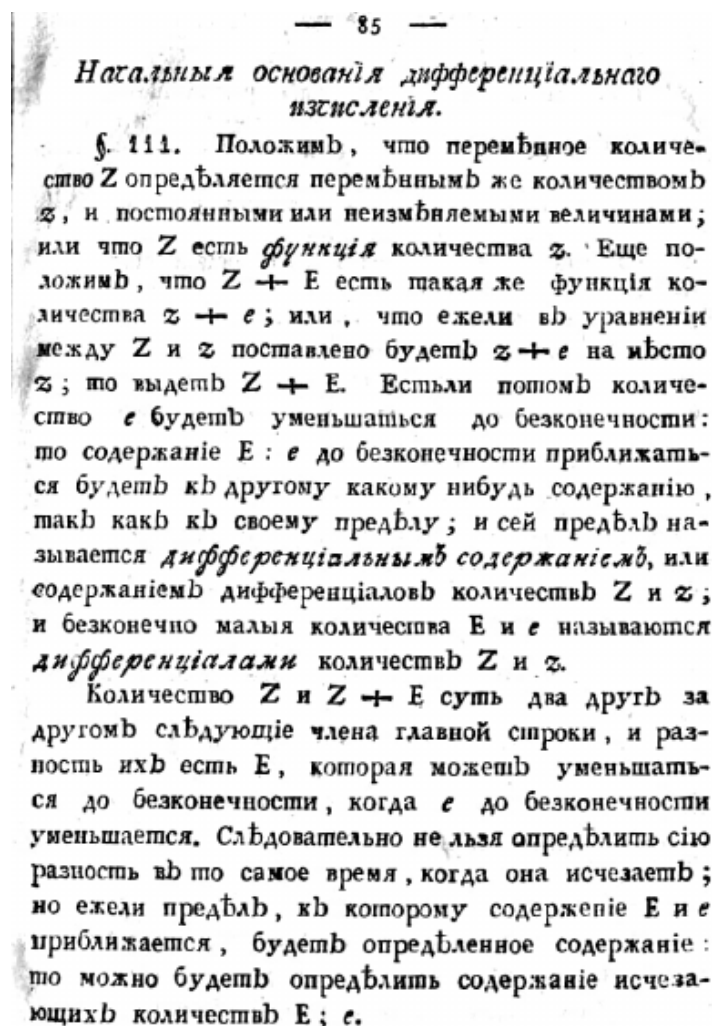


Рис. 3. Определение дифференциала функции в учебнике А.Д. Барсова (1797 год)

П.И. Гиларовский показывает, как находятся дифференциалы  $d(x+a)$ ,  $d(x+y)$ ,  $d(x^u)$ , дифференциал степенной функции с натуральным показателем, формулы для отрицательного целого и дробного показателя приводятся, ссылаясь на аналогию [20, с. 5], находится  $d(x/y)$ . Далее показывается, как брать дифференциалы от более сложных функций, составленных из произведений и частных.

Дифференциалы тригонометрических функций  $\sin x$  и  $\cos x$  вычисляются следующим образом

$$\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx.$$

При этом « $\cos dx$  или косинус бесконечно малой дуги бесконечно мало разнится от радиуса и следовательно может быть без чувствительной погрешности принят за радиус; а  $\sin dx$  бесконечно мало разнится от самой дуги  $dx$  так, что она вместо его поставлена быть может. По сему назвавши радиус единицею, как он в одной формуле и приемлется, получим  $\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x$ . Следовательно, разность  $\sin(x + dx)$  и  $\sin x$  будет равна  $dx \cos x$ , или  $d \sin x = dx \cos x$ » [21, с. 8-9].

Аналогично выводится формула  $d \cos x = - d x \sin x$ . Автор пишет, что «отсюда удобно сыскать дифференциалы Тангенса, Котангенса, Секанса и Косеканса».

Очевидно, что эти рассуждения очень нестрогие, однако приводят к верным результатам, и имеют «многообразное ... употребление» в физике.

Далее П.С. Гиларовский объясняет, что «когда переменное количество дойдет до самой высшей или до самой нижней степени так, что уже более увеличиваться или уменьшаться не может; тогда оно сделается постоянным; следовательно, дифференциал его равен будет нулю» [22, с. 10], а затем, как определить, «высшая или нижняя степень» имеет место. Приводятся примеры из геометрии и физики.

Интегралы вводятся следующим образом: «по данному дифференциалу найти ту самую Функцию, от коей он взят, называется взять *интеграл*» [23, с. 16]. Он означает обыкновенно буквою  $S$ . Так напр[имер] интеграл от  $dx$  есть  $x$  или  $S dx = x, \dots, S (y dx + x dy) = xy$ » [24, с. 16].

Автор не пишет, что интеграл является множеством функций, но замечает, что «1) ... иногда бывает нужно по взятии интеграла прибавить к нему или вычесть какое нибудь постоянное количество», и что «2) легко можно безчисленное множество выдумать функций количества  $x$  и к ним приставить  $d x$ , а интеграл от них найти весьма трудно, или не возможно. В сем то состоит главное упражнение знаменитых алгебраистов, чтоб из разных дифференциалов находить их интегралы» [25, с. 18].

Упомянув Эйлера, Сори, Кестнера, Карштена, автор указывает «самый нужнейший» способ: «брать интеграл или сколько можно к нему подходить ближе от таких ... функций, в кои входят количества разрешающиеся на бесконечные строки. Так напр[имер] дабы найти интеграл формулы  $dx / (1+x)$ , должно  $1 / (1+x)$  разрешить в бесконечную строку»

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

и проч. по чему

$$dx / (1+x) = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx + \dots$$

и проч. а сей строки интеграл есть

$$x - (x^2 / 2) dx + (x^3 / 3) dx - (x^4 / 4) dx + \dots$$

и проч.» [26, с. 20]. Итак, ключом ко всему является «Ньютонова формула».

Вторая большая часть учебника называется «В) *Высшая геометрия, или учение о кривых линиях*». Она разделяется на две части, из коих

I) содержит сечения Конические ... ,

II) содержит в себе учение о других кривых линиях как Алгебраических так и Трансцендентных».

Таким образом, большая часть книги - о геометрических образах и их свойствах.

В части I) о конических сечениях уравнения кривых выводятся из их определения (например, как сечений конуса) без привлечения декартовой системы координат, два зависящих друг от друга параметра кривых называются абсцисса и аппликата.

П.И. Гиларовский рассматривает в качестве конических сечений только параболу, эллипс («еллипсис») и гиперболу («иперболу»). Используя теоремы так называемой элементарной геометрии, он получает их различные уравнения:

$$y^2 = px \text{ для параболы,}$$

$$y^2 = px - (px^2 / 2a) \text{ и } y^2 = (p / 2a) (a^2 - x^2) \text{ для эллипса и}$$

$$y^2 = px + (px^2 / 2a) \text{ и } y^2 = (p / 2a) (x^2 - a^2) \text{ для гиперболы.}$$

Одновременно автор выводит множество их свойств и практически всегда представляет эти свойства в сравнении (рис. 4).

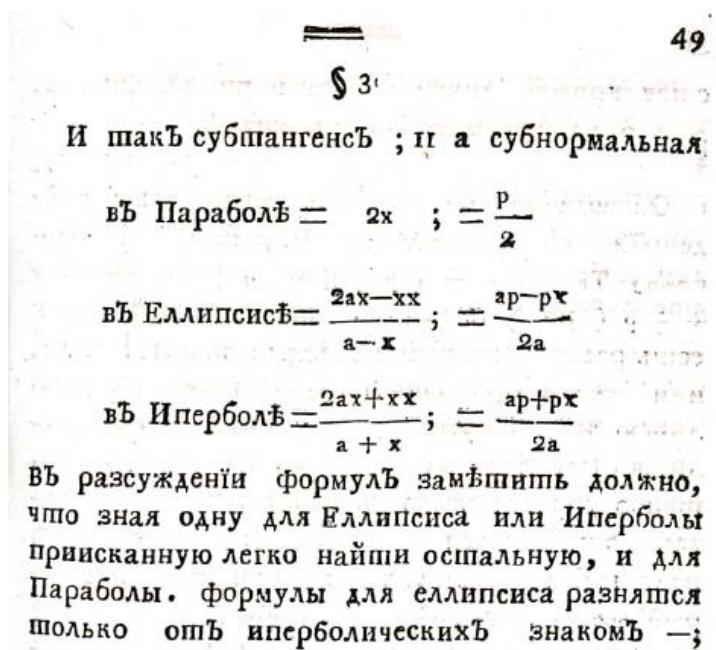


Рис. 4. Сравнительное изображение свойств эллипса, гиперболы и параболы в учебнике П.И. Гиларовского (1796 год)

В современных учебниках по кривым второго порядка о большинстве из этих свойств не упоминается.

При доказательстве некоторых свойств автор переходит в формулах к пределу, устремив абсциссу или какой-нибудь параметр к нулю или к бесконечности. При этом обозначение предела не используется и функция приравняется к своему пределу (рис. 5).

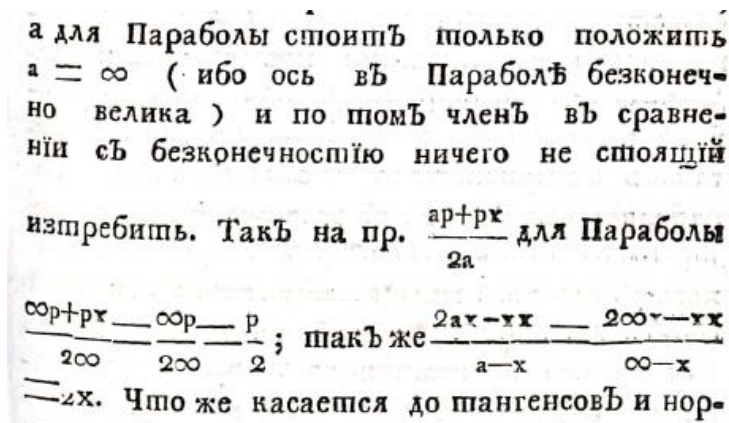


Рис. 5. Вычисление предельных значений в учебнике П.И. Гиларовского (1796 год)

Так как стремление к бесконечности имеет одинаковый характер, то дроби сокращаются на общий бесконечный множитель, а в суммах (в числителе и в знаменателе), содержащих бесконечные слагаемые, все остальные величины, не стремящиеся к бесконечности, отбрасываются.

Аналогично отбрасываются слагаемые в числителях и знаменателях различных отношений, если они стремятся к нулю. В частности, так поступает автор при нахождении радиусов кривизны кривых (рис. 6) [27, с. 75-76].



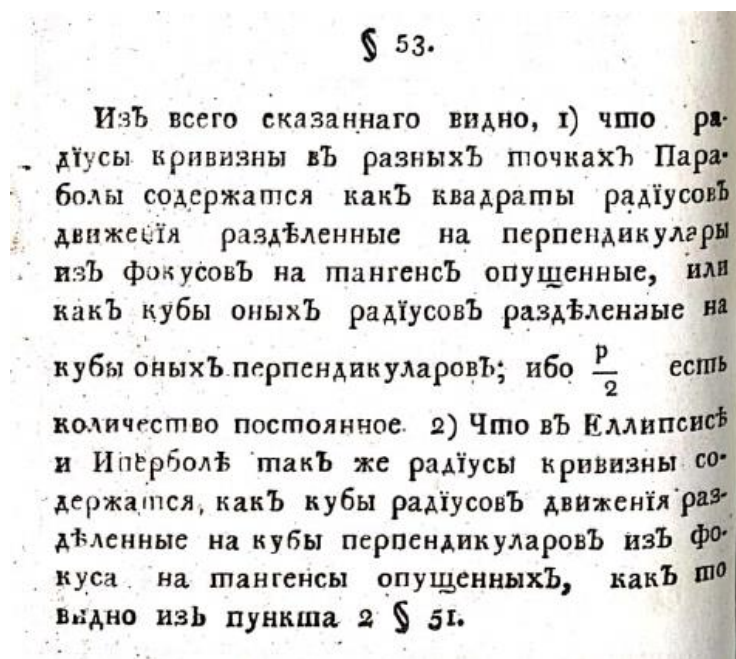


Рис. 6. Сравнение результатов о радиусах кривизны в учебнике П.И. Гиларовского (1796 год)

С помощью дифференциалов и интегралов автор решает такие же задачи, как и современные студенты всех технических вузов при изучении приложений определенного интеграла: нахождение площади криволинейной трапеции, объема («толстоты») тела вращения, площади боковой поверхности тела вращения, длины плоской кривой линии.

В качестве кривых, используемых в этих задачах, П.И. Гиларовский рассматривает параболы, эллипсы и гиперболы.

Вот как, например, автор вычисляет площадь криволинейной трапеции (рис. 7).

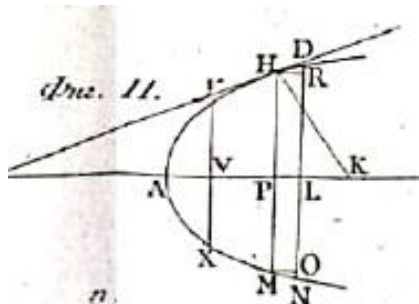


Рис. 7. Рисунок к выводу формулы для площади криволинейной трапеции в учебнике П.И. Гиларовского (1796 год)

«Естьли Фиг.11 представляет какую нибудь кривую линию, которой ось падает на линию АК, АР абсцисса, НР и РМ равныя аппликаты, а линия DLN в безмерно малом разстоянии от НРМ так, что  $PL = dx$ , а  $DR = NO = dy$ ; то нетрудно понять, что площадь трапеция HDMN безконечно мало разнится от площади прямоугольника HRMO, или разнится площадью треугольников HDR и MON, кои суть  $(dx dy) / 2 + (dx dy) / 2 = dx dy =$  безконечной малости умноженной на безконечную же малость... Посему  $= (2 dy) / 2$  и может почтеться безконечно малым приращением криволинейного пространства, или его дифференциалом. И так сие пространство  $= \int 2y dx$ , где стоит только вместо у и х поставить из уравнения каждой кривой линии им равное, взять его интеграл, а по том, смотря по величине и положению х будет увеличиваться площадь, коея  $udx$  есть

дифференциал так, что можно находить целую площадь криволинейную, если не бесконечна» [28, с. 79-80].

При этом о пределах интегрирования автор не упоминает.

Для параболы (между двумя ветвями параболы) интеграл вычисляется с помощью выведенной ранее формулы для интеграла от степенной функции. Делается вывод, что найденная площадь равна  $2/3$  площади прямоугольника с основанием  $x$  и высотой  $2y$  [29, с. 80], что используется в дальнейшем.

Для эллипса и гиперболы интеграл вычисляется приближенно с помощью «Ньютоновой формулы» [30, с. 81-84]. Отметим, что в упомянутом учебнике А.Д. Барсова разбирается способ вычисления таких интегралов, однако почти нет геометрических сведений.

Приближенный способ вычисления интегралов используется и в следующих параграфах.

Часть учебника, посвященная параболам, эллипсам и гиперболам, заканчивается решением интересных задач: как зная величину тангенса и одну из величин (субтангенс, нормальную или субнормальную) найти уравнение кривой и, следовательно, определить ее тип. Под тангенсом, субтангенсом, нормальной и субнормальной понимаются длины некоторых отрезков, связанных с кривой, в частности, лежащих на касательной и нормали к кривой, проведенных в любой ее точке [31, с. 45-46, 96-97].

В части II) П.И. Гиларовский дает определения алгебраических и трансцендентных кривых, приводит примеры, а для некоторых из них, например, для циклоиды, решает те же задачи, что и в части I) для конических сечений. При выводе уравнений кривых также как и для конических сечений автор не использует декартову систему координат. В этой части он также приводит примеры из физики, в которых используются полученные свойства кривых.

Завершается часть II определением дифференциалов второй степени, примерами их вычисления и использованием, например, для нахождения радиусов кривизны кривых, их «поворотных» и «возвратных» точек [32, с. 131], а также примерами из физики.

После сделанного краткого обзора содержания первого из известных нам отечественных учебников по высшей математике обратим внимание на его методические особенности. Ведь его автор - известный российский педагог конца XVIII века. Более того, в истории отечественного образования утвердилось мнение, что российская система образования представляет собой продукт почти полного заимствования европейского, и организация этого заимствования преподносится как достижение государства. Мы считаем, что собственному образовательному потенциалу российского общества требовалось дать возможность развития. Показательным является принятие учебника П.И. Гиларовского по физике Комиссией народных училищ вместо переводного учебника.

Кроме предметного содержания, исследование учебников П.И. Гиларовского может открыть исследователям педагогические и методические приемы обучения.

Вот некоторые из них.

В учебниках П.И. Гиларовского доказательства формул и утверждений обычно предшествуют самим формулам и очень редко [33, с. 75] следуют за ними. Как правило, автор подводит читателей к выводам, а не наоборот. Он как бы ведет читателя за собой к новым открытиям. При этом в начале нового «путешествия» автор иногда заинтриговывает читателя так, как бы он поступал на уроке при живом общении с учениками. Приведем пример.

«Всякому внимательному человеку не трудно усмотреть, что бесчисленное есть множество нужных и полезных вещей натурою и искусством производимых, кои имеют вид криволинейный, однакож не круговой а со всем особливою кривизны, так

что по простой Геометрии его измерять и узнавать нет способа... И так нельзя не иметь любопытства узнать свойства сих кривых линий и чрез то притти в состояние разуметь их и употреблять» [34, с. 21].

«...вычисление сие весьма важно, как то в последствии сие самим делом оправдится» [35, с. 2].

В середине математического материала можно встретить доброжелательные обращения учителя к ученикам:

«По сему остерегаться должно, чтоб постоянных величин не означать никогда буквою  $d$ , дабы не было сумнения в рассуждении того, что  $d$  означает» [36, с. 2];

«дифференциал синуса дуги  $x$  удобно найдется, ежели...» [37, с. 8].

Автор ненавязчиво втягивает учеников в непростые математические упражнения. Например, после объяснения как брать дифференциал от сложной функции он пишет: «По сему весьма полезно делать самому себе задачи для взятия дифференциалов от функций, которых бы сколько можно были сложнее...» [38, с. 7].

Одним из недостатков оформления материала в учебниках П.И. Гиларовского является достаточно плотное оформление текста: практически отсутствие увеличенных межстрочных интервалов, жирного шрифта и курсива для выделения слов Теорема, Доказательство, Следствие, их формулировок. Пронумерованные параграфы следуют один за другим, часто без заголовков: в учебнике по физике в математическом Прибавлении знаки параграфов стоят в начале абзацев, в учебнике по математике - в середине строки и выделены увеличенными межстрочными интервалами, часто различными на различных страницах. Редкие заголовки напечатаны курсивом с новой строки после знака параграфа. Несколько основных заголовков напечатаны крупным жирным шрифтом. С другой стороны, увеличенная плотность текста уменьшает объем учебника, что может психологически восприниматься учениками как положительный фактор. Также к недостаткам учебника в его первом издании относится большое количество опечаток, что можно объяснить спешностью автора не оставить без математического обоснования его «Руководство к физике». Фактически оба учебника по физике и по математике можно считать одним двухтомным изданием.

Примеры из физики, из геометрии, опора на алгебраический и геометрический материал показывают взаимозависимость различных дисциплин естественнонаучного образования, усиливают мотивацию обучающихся.

### Заключение

Учебник П.И. Гиларовского «Сокращение вышней математики» написан с целью обосновать математически некоторые положения теории, на которые опирался его учебник «Руководство к физике». Он был предназначен как для изучающих физику, так и для преподающих ее учителей, а также для всех интересующийся разделами высшей математики.

Следовательно, учитель П.А. Гиларовский считал необходимым сочетать знания обоих предметов, в частности, преподающему физику учителю знать более объема преподавания, а изучающему физику - знать математический аппарат физики. С другой стороны, следуя П.И. Гиларовскому, осваивающий математику для изучения другого предмета может некоторые разделы изучить с некоторой степенью «нестрогости», а другие разделы, наоборот, изучить с большей степенью подробности.

Оригинальные учебники «Руководство к физике» и «Сокращение вышней математики» П.И. Гиларовского, написанные учителем с учетом его педагогического опыта, были востребованы и безусловно способствовали росту образованности заинтересованной российской аудитории конца XVIII века.



## ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Птицына И.В., Бахтиярова О.Н., Шклянко В.А., Птицына Е.В. (2021). Учебная литература для образования инженеров второй половины XVIII века. Педагогика. Вопросы теории и практики, №5, с. 791-804.
2. Птицына И.В., Бахтиярова О.Н., Птицына Е.В. (2022). Учебники по геометрии для подготовки учителей и инженеров второй половины XVIII века. Modern European Researches, № 1-2, с. 110-120.
3. Гиларовский П.И. (1796). Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российского слога и латинского языка в благородном Пажеском корпусе. СПб.: Тип. Вильковского. Издание Комиссии об учреждении народных училищ.
4. Барсов А.Д. (1797). Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при имп. Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов. М.: Изданием бухгалтера И.Новикова: Унив. тип., у Ридигера и Клаудия.
5. Гурьев С.Е. (1798). Опыт о усовершеннии элементов геометрии, составляющий первую книгу математических трудов академика Гурьева. СПб.: При Имп. Акад. Наук.
6. Гиларовский П.И. (1793). Руководство к физике, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российского слога и латинского языка в благородном Пажеском корпусе. СПб.: Тип. Вильковского. Издание Комиссии об учреждении народных училищ.
7. Бобынин В.В. (1916). Гиларовский, Петр Иванович. Русский биографический словарь А.А. Половцова (Т. 5, С. 179-182). СПб.: Тип. Г. Лиснера и Д. Совко.
8. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
9. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
10. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
11. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
12. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
13. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
14. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
15. Гиларовский П.И. (1793). Указ. Соч.
16. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
17. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
18. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
19. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
20. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
21. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
22. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
23. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
24. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
25. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
26. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
27. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
28. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
29. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
30. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
31. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
32. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
33. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
34. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
35. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
36. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
37. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.
38. Гиларовский П.И. (1796). Указ. Соч.

**Inga V. Ptitsyna,**  
 Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

[inpt@mail.ru](mailto:inpt@mail.ru)

**Olga N. Bakhtiyarova,**  
 Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow  
[olga-bakh06@mail.ru](mailto:olga-bakh06@mail.ru)

**Marina I. Podzorova,**

*Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

marinatichomirova@hotmail.com

**Elena V. Ptitsyna,**

*Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[elena-pt@yandex.ru](mailto:elena-pt@yandex.ru)

**Teaching higher mathematics according to Russian textbooks of the late 18th century on the example of P.I. Gilarovsky "Reduction of Higher Mathematics"**

**Abstract.** The relevance of the topic is due to the study of the issue of the programs of the course of higher mathematics, the combination and order of studying its various sections with each other, with other courses using mathematical concepts, theorems and the technique of working with them, as well as confirming the significant Russian pedagogical potential, including in search forms of teaching, on the example of pedagogical mathematical literature of the second half of the 18th century. The purpose of the work is to study the selection and depth of development of sections of higher mathematics, intended for teaching physics teachers at the end of the 18th century, as well as all those studying natural science. The research method is the study of mathematical books published in the period under review, mainly the textbook by P.I. Gilarovsky *Abbreviation of Higher Mathematics* (1796). The materials of the article can be useful for teachers of pedagogical and technical universities and specialists in the history of Russian education.

**Keywords:** pedagogical education, engineering education, mathematical education, differential calculus, integral calculus, geometry, conic sections, textbooks, P.I. Gilarovsky.

## ЭЛЕМЕНТЫ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Аннотация

В целях повышения уровня теоретической и практической подготовки студентов ведение различных методов и приемов в процесс изучения теории вероятностей позволяет студентам получить более глубокие знания, повысить познавательный интерес интеллектуальной деятельности. Проблемное обучение направлено на развитие творческого процесса решения нестандартными методами нестандартных учебных задач, на активизацию познавательной деятельности студентов и на актуализацию знаний в области математики.

### Ключевые слова

теория вероятностей, проблемное обучение, методы обучения, проблемная ситуация, нестандартные задачи, учебный процесс

### АВТОР

**Санаева Татьяна Александровна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Российский биотехнологический университет (РОСБИОТЕХ)»,  
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», г. Москва  
tatyanasanaeva@yandex.ru

### Введение

Профессиональная деятельность преподавателя сосредоточена на достижение целей обучения. Поставленные цели обучения во многом зависят от методов обучения. При выборе тех или иных методов обучения высшей математике педагогу необходимо учитывать психологические особенности мышления студентов разных факультетов и уровень соответствующей подготовки. У студентов гуманитарного направления преобладает наглядно-образное мышление, эмоциональное восприятие окружающей действительности, богатое воображение. Для таких студентов предпочтительнее выбирать методы коллективных работ, методы, основанные на диалогах и дискуссиях. Студентам технических и естественнонаучных специальностей свойственны: аналитическое мышление, умение рассуждать, устанавливать логические связи, анализировать, синтезировать, выявлять функциональные зависимости между процессами. Для таких студентов предпочтительнее выбирать индивидуальные методы работы или работы в малых группах. В процессе управления познавательной деятельностью студентов необходимо использовать различные методы обучения.

### Методология и результаты исследования

Методы обучения, приводящие к разрешению созданных проблемных ситуаций в учебном процессе, к творческому подходу решения нестандартных задач, позволяют внедрять в учебный процесс проблемное обучение. Тезис С. Л. Рубинштейна «Мышление начинается с проблемной ситуации» обосновывает психологическую основу проблемного обучения. Осознание проблемной ситуации, выявление затруднения решения проблемы, недостаток имеющихся знаний позволяет раскрывать пути его преодоления с помощью поиска новых знаний, новых проблем, новых способов решения

поставленных задач. Творческий процесс решения нестандартными методами нестандартных учебных задач приводит к понятию проблемного обучения [1]. Одной из функций проблемного обучения является развитие творческого мышления студентов, которое ориентировано на формирование и развитие творческой деятельности. Для выработки профессионального мышления необходимы творческие способности:

- потенциал видения и формулирования проблемы;
- способность выдвинуть гипотезу;
- сбор и анализ данных, предпочтение методики их обработки;
- способность формулировать выводы;
- находить практическое применение полученных результатов.

Для воплощения такой функции необходимо подвергать рассмотрению совокупность проблем, которая охватывает типы проблем, присущие данной области знаний.

Можно выделить основные три группы проблем, возникающие в процессе обучения математике.

К первой группе относятся проблемы математического описания ситуаций и задач, зарождающиеся в различных сферах деятельности. Проблема построения математической модели.

Ко второй группе можно причислить проблемы, заключающиеся в процессе исследования поставленной задачи. В результате решения поставленной задачи систематизируются знания, вырабатываются новые выводы.

К третьей группе имеют отношения проблемы, связанные с применением новых полученных знаний. Проблемы этой группы выявляют новые возможности приложения полученных знаний.

Для привлечения студентов к созданию проблемной задачи, решению нестандартных задач можно добавлять различные методы и приемы в учебном процессе.

Рассмотрим некоторые из них на примере теории вероятностей [2].

1) Введение новой темы лекции или вывод формул начинается с решения задач, приводящих к проблеме.

Например, перед изучением формулы Пуассона предложить решить задачу: «Как найти вероятность того, что в отправленной партии из 10000 коробок 5 коробок повредятся. Если вероятность того, что одна коробка повредиться составляет 0,0001».

2) При формулировке цели лекции привлечь студентов.

При изучении темы «Равномерное распределение» предложить решить задачу и с помощью вопросов подвести студентов к формулировке темы лекции.

3) Предложить студентам ответить на вопросы перед постановкой темы:

а) «Игральный кубик бросают два раза. Можно ли определить полную систему событий: выпадение одинакового числа очков на каждом кубике и выпадение разного числа очков при первом и втором броске?»

б) «Монету подбрасывают дважды. Образуют ли полную систему события: выпала хотя бы одна решка, выпал хотя бы один орел?»

Предложенные вопросы позволят студентам настроиться на рабочий лад, подготовить их к восприятию новой темы, правильно определять полную систему событий.

4) Разбор несовместных явлений, существующих противоречий с помощью вопросов почему..., несмотря на..., если..., то, хотя...

Данные методы можно применять при изучении темы «Вероятность попадания случайно точки в полуполосу. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник.»

5) С целью создания проблемной ситуации формулируется гипотеза и проведение исследования.

Например, при усвоении темы «Основные понятия теории вероятностей. Свойства вероятностей». Перед непосредственным изучением темы вводим основные понятия теории вероятностей: испытание, событие, относительная частота, рассматриваем свойства вероятностей. Можно предложить студентам привести примеры понятий «испытание, событие» из материала изучаемых профильных дисциплин.

*Задача.* Произведена органолептическая оценка желейного мармелада двух видов с концентрации добавки 0,2% и 0,3%. Показатели образца, содержащего пищевую концентрацию добавки 0,2%, составляют вероятность 0,55. Найти вероятность того, что при выборе двух элементов оба будут разного вида.

*Решение:* Проблемное обучение заключается как в постановки задачи, вопроса, создание проблемной ситуации, так и в самостоятельной творческой работы студентов над предложенным вопросом, открытия новых свойств, выдвижения гипотез, обоснование умозаключений.

Опираясь на имеющиеся знания, студенты сразу не видят пути решения поставленной задачи. Поэтому можно предложить записать условие задачи на математическом языке, для того чтобы использовать определения, законы, теоремы. Параллельно с эти студенты приобретут о математическом моделировании.

В результате обсуждений получаем:

- событие А - выбор желейного мармелада с концентрацией добавки 0,2% и ее вероятность равна 0,55 ( $P(A)=0,55$ );

- событие В - выбор желейного мармелада с концентрацией добавки 0,3%.

Так как события А и В противоположные, то  $P(A)+P(B)=1$ .

Следовательно,

$$P(B)=1-P(A)=1-0,55=0,45$$

Проанализируем всевозможные случаи выбора элементов разного вида:

1) 2 желейных мармелада с концентрацией добавки 0,2% ( $A_1 \cdot A_2$ ),

2) 2 желейных мармелада с концентрацией добавки 0,3% ( $B_1 \cdot B_2$ ),

3) 1 желейный мармелад с концентрацией добавки 0,2% и 1 желейный мармелад с концентрацией добавки 0,3% ( $A \cdot B$ ).

Наводящие вопросы: Какую систему событий они составляют? Вспомните свойства вероятности суммы событий, составляющих полную систему.

Применим их к данной задаче:

$$P(A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + A \cdot B) = P(A_1 \cdot A_2) + P(B_1 \cdot B_2) + P(A \cdot B) = 1.$$

Необходимо найти  $P(A \cdot B)$ . Студенты приходят к выводу, что для нахождения результата, необходимо решить подзадачи: найти вероятности  $P(A_1 \cdot A_2)$ ,  $P(B_1 \cdot B_2)$ .

Найдем вероятность 2 желейных мармелада с концентрацией добавки 0,2% ( $A_1 \cdot A_2$ ) и 2 желейных мармелада с концентрацией добавки 0,3% ( $B_1 \cdot B_2$ ), применяя свойства произведения независимых событий

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0,55 \cdot 0,55 = 0,3025$$

$$P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1)P(B_2) = 0,45 \cdot 0,45 = 0,2025$$

Следовательно, ответ на поставленный вопрос студенты могут найти самостоятельно

$$P(A \cdot B) = 1 - (P(A_1 \cdot A_2) + P(B_1 \cdot B_2)) = 1 - (0,3025 + 0,2025) = 0,495$$

Данный пример охватывает несколько подзадач, которые направляют к усвоению дальнейших тем теории вероятностей.

6) Привлечение студентов к обобщению фактов.

Обобщение фактов используется при практическом применении комбинаторных задач.

7) Неполное изложение лекционного материала. Предложить студентам самостоятельно изучить часть учебного материала.

8) Привлечение студентов к формулированию выводов, высказыванию прогнозов.

Лекция или практическое занятие не может полностью строиться на проблемном обучении, так как он занимает больше времени, чем допустимо выделить на обучение. Поэтому при осуществлении проблемного обучения необходимо производить отбор фрагментов отдельных пунктов темы, разделов.

### Заключение

Различные методы преподавания в сочетании с проблемным обучением позволяют получить наиболее благоприятные результаты в обучении. Ведение различных методов и приемов в процесс изучения теории вероятностей позволяет студентам получить более глубокие знания, повысить познавательный интерес интеллектуальной деятельности.

---

#### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Использование информационных технологий в преподавании в преподавании математического моделирования // Modern European Researches. Salzburg, 2022. Т.1.№1. С. 121-124
2. Теория и практика преподавания физико-математических дисциплин в технологическом университете: монография / М.: РОСБИОТЕХ, Изд-во., Перо, 2023. 80с.URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50045843>

---

**Tatyana A. Sanaeva,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Russian Biotechnological University (ROSBIOTECH); Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*  
[tatyanasanaeva@yandex.ru](mailto:tatyanasanaeva@yandex.ru)

#### **Elements of problem-based learning in probability theory**

**Annotation.** In order to increase the level of theoretical and practical training of students, conducting various methods and techniques in the process of studying probability theory allows students to gain deeper knowledge, increase the cognitive interest of intellectual activity. Problem-based learning is aimed at developing the creative process of solving non-standard methods of non-standard educational tasks, at activating the cognitive activity of students and at updating knowledge in the field of mathematics.

**Keywords:** probability theory, problem-based learning, teaching methods, problem situation, non-standard tasks, educational process.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАУССА И ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА В ПРОТОКОЛАХ РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА В КУРСЕ «КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОТОКОЛЫ»

### Аннотация

В статье рассматривается методика изложения схемы А. Шамира разделения секрета. Эта схема обычно изучается в курсе «Криптографические протоколы» для студентов специальностей, связанных с защитой информации. При реализации схемы возникает ряд математических задач. Показано, как можно решать такие задачи на основе метода Гаусса или с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа. Отмечено, что в общем случае при вычислениях в конечном поле из  $p$  элементов применяются алгоритмы нахождения обратного элемента (расширенный алгоритм Евклида, алгоритм быстрого возведения в степень). Для вычисления значений секретного многочлена используется схема Горнера. Разобрано несколько базовых примеров.

### Ключевые слова

криптографический протокол, разделение секрета, метод Гаусса, интерполяционный многочлен Лагранжа, конечное поле

### АВТОРЫ

**Семенов Юрий Станиславович,**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
независимый исследователь, г. Москва  
yuri\_semenoff@mail.ru

**Андреева Татьяна Владимировна,**

кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
t-v-andreeva@mail.ru

**Власов Павел Александрович,**

кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
pvlx@mail.ru

### Введение

Схема разделения секрета, предложенная А. Шамиром [1] (см. также, например, [2]), является одной из основных криптографических процедур, рассматриваемых в курсе «Криптографические протоколы» для студентов, специализирующихся на защите информации.

Напомним [3], что *криптографическим протоколом (криптопротоколом)* называют распределенный алгоритм, предназначенный для решения некоторой задачи с целью обеспечения целостности и неотслеживаемости передаваемой информации, содержание которой следует хранить в тайне. При этом число участников криптопротокола может быть достаточно большим, а участники могут не доверять друг другу. Схема протокола, как правило, интерактивна, а в случае возникновения



сбоев (конфликтов, коллизий) должна быть предусмотрена процедура их разрешения. Криптопротоколы разделения секрета не являются исключением.

В художественной литературе и приключенческом кино (например, в фильме *Cutthroat Island - Остров головорезов*, 1995) встречается сюжет про сокровища, спрятанные пиратами на некоем острове. Чтобы найти сокровища, требуется составить карту из отдельных кусков, по части карты определить место клада невозможно. Куски карты надо по сюжету сначала отыскать, поскольку они оказываются у разных людей, которые действуют в своих интересах, знают о своей части секрета и о существовании других частей. До поры до времени кусок карты служит каждому участнику поиска своего рода гарантией безопасности.

Аналогичные ситуации возникают и в банковской сфере. Например, чтобы открыть ячейку с документами при совершении сделки, в ряде случаев необходимо присутствие всех заинтересованных лиц, при этом банк помимо обеспечения сохранности документов может играть и контролируемую роль (роль арбитра для участников сделки).

Формализованные схемы составления полной информации из ее частей носят название криптопротоколов разделения секрета. Перейдем к формальной постановке задачи в схеме Шамира.

**Постановка задачи.** Лидер (выделенный участник с особой ролью) должен распределить части секрета (понятие секрета уточним позже) между остальными  $n$  участниками протокола с тем условием, что, собрав вместе свои части секрета, любые  $k$  или более участников смогли бы восстановить секрет, в то время как никакая группа из менее чем  $k$  участников секрет восстановить не смогла бы.

Предполагается, что лидер владеет полной информацией о секрете. Также предполагается, что не все участники доверяют лидеру и в случае возникновения сбоя они имеют право проверить правильность распределения лидером долей секрета.

Число  $k$ , где  $k \leq n$ , играет роль порогового параметра. Его можно назвать величиной кворума.

### Методология и результаты исследования

**Реализация схемы Шамира.** Пусть  $p$ ,  $p > n$ , - достаточно большое простое число,  $F = Z_p$  - конечное поле из  $p$  элементов. Число  $p$  является открытым ключом.

Лидер выбирает многочлен

$$f(x) = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \dots + a_0 \in Z_p[x]$$

степени  $k - 1$  (или не выше  $k - 1$ ), принимающий значения в поле  $Z_p$ . Этот многочлен будем считать "полным секретом", он должен держаться лидером в тайне. Лидер также присваивает остальным участникам номера  $1, 2, \dots, n$  (рассматриваемые как целые числа по модулю  $p$ , или элементы поля  $Z_p$ ), которые он им сообщает. Далее лидер вычисляет значения

$$y_i = f(i) = a_{k-1}i^{k-1} + a_{k-2}i^{k-2} + \dots + a_0 \in Z_p, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и отправляет значение  $y_i$  персонально участнику с номером  $i$ . Число  $y_i$  и считается долей секрета, находящейся у  $i$ -го участника.

**Замечание.** Вычисление долей секрета удобно производить с помощью быстрого алгоритма - схемы Горнера (над полем  $Z_p$ ). Напомним классическую схему Горнера (подробнее см., например, [4]).

Составляется следующая таблица (схема):

	$a_{k-1}$	$a_{k-2}$	$a_{k-3}$	...	$a_0$
$x = i$	$b_{k-1} = a_{k-1}$	$b_{k-2} = b_{k-1}i + a_{k-2}$	$b_{k-3} = b_{k-2}i + a_{k-3}$	...	$b_0 = b_1i + a_0 = y_i$

В первой строке этой таблицы выписываются коэффициенты многочлена  $f(x)$ , включая нули. Во второй строке указывается подставляемое значение  $x = i$ , а дальше вписываются числа:  $b_k = a_k$ ,  $b_j = b_{j+1}i + a_j$ ;  $j = k - 2, k - 3, \dots, 0$ . Все вычисления ведутся по модулю  $p$ .

Последнее число в нижней строке и будет нужным значением  $y_i = f(i)$ .

**Пример 1.** Лидер выбрал секретный многочлен  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 7 \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ . Определить, какие доли секрета он сообщит участникам с номерами 1, 2, 3 и 4.

Для решения воспользуемся схемой Горнера (сразу с несколькими строками):

	2	1	0	7
$x = 1$	2	3	3	10
$x = 2$	2	5	10	1
$x = 3$	2	7	8	5
$x = 4$	2	9	10	8

Вычисления проводились по модулю 13. Таким образом, участники с номерами 1, 2, 3 и 4 получают доли секрета 10, 1, 5 и 8 соответственно.

**Восстановление секрета.** Покажем, что  $k$  участников с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , собрав вместе свои доли секрета, смогут найти коэффициенты секретного многочлена  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ , т.е. они смогут восстановить секрет. Если для восстановления секрета соберётся более  $k$  участников, то можно поступить так. Какие-то  $k$  участников восстановят секретный многочлен по своим данным, а для остальных собравшихся участников можно просто произвести проверку корректности полученных от лидера долей секрета по их номерам с использованием уже найденного многочлена.

**Способ 1. Применение метода Гаусса.** Пусть имеется  $k$  участников с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$  и долями секрета  $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$ . Они составляют систему из  $k$  линейных уравнений над полем  $\mathbb{Z}_p$  относительно  $k$  неопределённых коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ , которые и надо найти:

$$\begin{cases} a_0 + a_1j_1 + \dots + a_{k-1}j_1^{k-1} = y_{j_1}, \\ \dots \dots \dots \\ a_0 + a_1j_k + \dots + a_{k-1}j_k^{k-1} = y_{j_k}. \end{cases}$$

Хорошо известно, что определитель этой системы - это определитель Вандермонда

$$V(j_1, j_2, \dots, j_k) = \begin{vmatrix} 1 & j_1 & \dots & j_1^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & j_k & \dots & j_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq s < t \leq k} (j_t - j_s).$$

В поле  $\mathbb{Z}_p$  этот определитель отличен от нуля, поскольку номера  $j_1, j_2, \dots, j_k$  различны по модулю  $p$ . Таким образом, система будет иметь единственное решение. Это решение может быть найдено, скажем, по методу Гаусса (см., например, [5]).

С учётом того, что система определена над полем  $\mathbb{Z}_p$ , при решении, как правило, нужно уметь находить обратные элементы по модулю  $p$ . В общем случае это можно сделать либо с помощью алгоритма нахождения обратного элемента по модулю (на

основе алгоритма Евклида), либо с помощью алгоритма быстрого возведения в степень - ввиду малой теоремы Ферма  $a^{-1} = a^{p-2} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ . Подробности относительно алгоритмов можно найти, например, в книге [6]. При небольших значениях  $p$  обратные элементы несложно получать подбором.

**Пример 2.** Известно, что в схеме разделения секрета лидер использовал многочлен  $f(x) \in \mathbb{Z}_{13}[x]$  степени не выше 2, а участникам с номерами 1, 2 и 4 достались доли секрета 2, 8 и 11 соответственно. Требуется определить многочлен  $f(x)$ . Верно ли, что участник с номером 3 получил часть секрета, равную 5?

Ищем секретный многочлен методом неопределенных коэффициентов, т.е. в виде  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Подставляя номера 1, 2 и 4, получаем систему

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 8, \\ a_0 + 4a_1 + 3a_2 = 11. \end{cases}$$

При этом было использовано равенство  $16 = 3 \in \mathbb{Z}_{13}$ .

Для решения системы приведём полную таблицу обратных элементов по модулю 13:

$c$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$c^{-1}$	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

Прямым ходом метода Гаусса получаем:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

При использовании элементарных преобразований было использовано равенство  $6^{-1} = 11 \in \mathbb{Z}_{13}$ .

Обратным ходом метода Гаусса получаем:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Таким образом,  $f(x) = 6 + 4x + 5x^2$ .

Сделаем проверку, а заодно и вычислим  $f(3)$ :

	5	4	6
$x = 1$	5	9	2
$x = 2$	5	1	8
$x = 3$	5	6	11
$x = 4$	5	11	11

Отсюда  $f(3) = 11 \neq 5 \in \mathbb{Z}_{13}$ .

**Замечание.** В том случае, когда число  $r$  участников, собравшихся восстановить секрет, будет меньше  $k$ , решение системы уравнений не даст однозначного ответа (число решений системы тогда будет равно  $p^{k-r}$ ). Вероятность угадать секретный многочлен при достаточно больших простых  $p$  будет пренебрежимо малой.

**Способ 2. Применение интерполяционного многочлена Лагранжа.** Восстановить секрет можно также и с помощью *интерполяционного многочлена Лагранжа*, известного из курса «Численные методы» (см., например, [7]).

Пусть  $F = \mathbb{R}$  - поле действительных чисел, а  $y = g(x)$  - некоторая (вообще говоря, неизвестная) функция, точные значения которой известны в точках  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :

$$y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots, y_k = g(x_k).$$

Требуется (хотя бы приближённо) найти значения функции  $y = g(x)$  в точках  $x$ , которые отличны от  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и которые лежат на отрезке  $[m, M]$ , где  $m$  - наименьшее, а  $M$  - наибольшее из чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (задача *интерполяции*). Если требуется найти значения функции  $y = g(x)$  в точках  $x$ , которые лежат вне отрезка  $[m, M]$ , то такая задача называется задачей *экстраполяции*.

Ж. Л. Лагранж (1736 - 1813) предложил для решения задачи интерполяции заменить функцию  $g(x)$  многочленом  $f(x)$  степени не выше  $k - 1$ , который в точках  $x_1, x_2, \dots, x_k$  принимает те же значения  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , что и функция  $g(x)$ . Получаемый многочлен теперь называется интерполяционным многочленом Лагранжа. Именно он часто применяется для приближённого вычисления значений функции  $g(x)$  в промежуточных точках. Рис. 1 иллюстрирует примерное поведение графиков функции  $g(x)$  и её многочлена Лагранжа  $f(x)$ .

Заметим, что если функция  $g(x)$  сама является многочленом степени не выше  $k - 1$ , то её многочлен Лагранжа  $f(x)$  степени не выше  $k - 1$  будет с ней тождественно совпадать,  $f(x) \equiv g(x)$ .

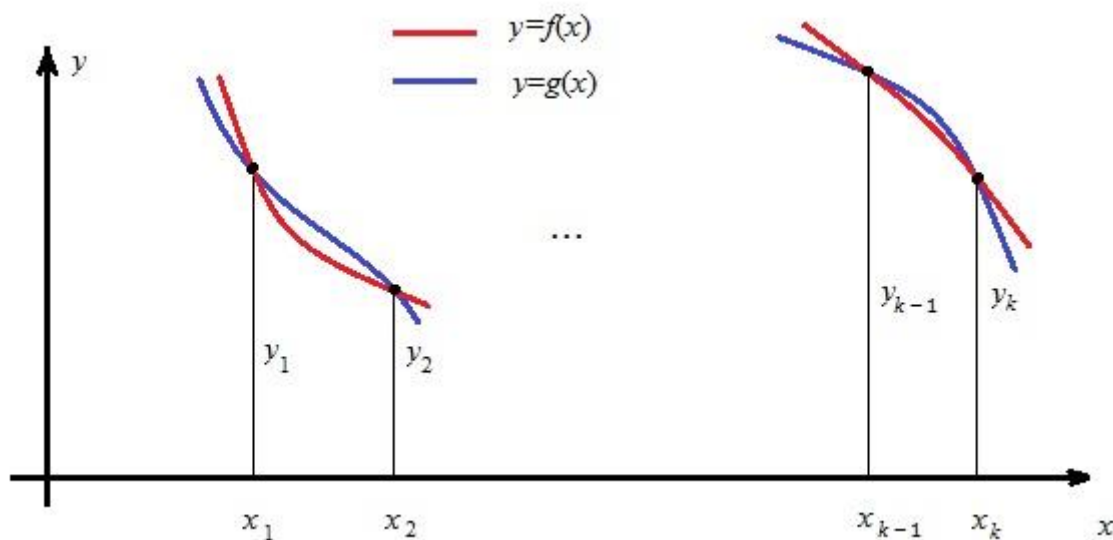


Рис. 2.

Многочлен Лагранжа выписывают по формуле

$$f(x) = \sum_{i=1}^k y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (*)$$

Несложно проверить, что при подстановке  $x = x_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, k$ , в правую часть (\*) все слагаемые, кроме  $h$ -го, зануляются (поскольку в числителе этих слагаемых есть множитель  $x - x_h$ ), а слагаемое с номером  $h$  даст в точности нужное значение  $y_h$ . Кроме того, степень этого многочлена, очевидно, не превышает  $k - 1$ .

Поскольку для составления многочлена Лагранжа требуются только арифметические действия, выполняемые в любом поле, то его можно также выписывать и над конечным полем  $F = \mathbb{Z}_p$ . Все коэффициенты после раскрытия скобок приводятся тогда по модулю  $p$ . В частности, многочлен Лагранжа можно использовать и в схеме Шамира разделения секрета.

**Пример 3.** В схеме разделения секрета лидер использовал многочлен  $f(x) \in Z_{13}[x]$  степени не выше 3, а участникам с номерами 1, 2, 4 и 5 достались доли секрета 3, 10, 2 и 7 соответственно. Требуется явно определить многочлен  $f(x)$  как интерполяционный многочлен Лагранжа.

Запишем по формуле (\*):

$$f(x) = \frac{3(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} + \frac{10(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} + \\ + \frac{2(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} + \frac{7(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)}.$$

Упростим в кольце  $Z_{13}[x]$  по отдельности каждое слагаемое. При раскрытии скобок в числителе можно воспользоваться формулами Виета. Таблица обратных элементов приведена в примере 2.

$$f_1(x) = \frac{3(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} = 3 \cdot (-1)^{-1} \cdot (-3)^{-1} \cdot (-4)^{-1}(x-2)(x-4)(x-5) = \\ = -4^{-1}(x^3 - 11x^2 + 12x - 1) = 3(x^3 + 2x^2 + 12x + 12) = 3x^3 + 6x^2 + 10x + 10;$$

$$f_2(x) = \frac{10(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} = 10 \cdot (-2)^{-1} \cdot (-3)^{-1}(x-1)(x-4)(x-5) = \\ = 5 \cdot 3^{-1}(x^3 - 10x^2 + 3x - 7) = 6(x^3 + 3x^2 + 3x + 6) = 6x^3 + 5x^2 + 5x + 10;$$

$$f_3(x) = \frac{2(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot (-1)^{-1}(x-1)(x-2)(x-5) = \\ = -3^{-1}(x^3 - 8x^2 + 4x - 10) = 4(x^3 + 5x^2 + 4x + 3) = 4x^3 + 7x^2 + 3x + 12;$$

$$f_4(x) = \frac{7(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} = 7 \cdot 4^{-1} \cdot 3^{-1}(x-1)(x-2)(x-4) = \\ = 6(x^3 - 7x^2 + x - 8) = 6(x^3 + 6x^2 + x + 5) = 6x^3 + 10x^2 + 6x + 4.$$

Отсюда

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = 6x^3 + 2x^2 + 11x + 10.$$

В конце вычислений делаем проверку по схеме Горнера:

	6	2	11	10
$x = 1$	6	8	6	3
$x = 2$	6	1	0	10
$x = 4$	6	0	11	2
$x = 5$	6	6	2	7

### Заключение

Подведём итоги. В работе были рассмотрены методические аспекты изложения схемы Шамира для разделения секрета в курсе «Криптографические протоколы», читаемом студентам специальностей, связанных с защитой информации. Было показано, как возникающие при математической реализации схемы задачи можно решать на основе метода Гаусса и с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа.

Для вычисления значений секретного многочлена и для проверки правильности результата применялась схема Горнера. Было отмечено, что при вычислениях в конечном поле из  $p$  элементов следует применять алгоритмы нахождения обратного элемента по модулю  $p$  (расширенный алгоритм Евклида, алгоритм быстрого возведения в степень по модулю).

## ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Shamir A. How to share a secret. Commun. ACM , NY: Association for Computing Machinery, 1979, vol. 22, iss. 11, 612 - 613. - doi:10.1145/359168.359176
2. Чмора А.Л. Современная прикладная криптография. - 2-е изд., стер. - М.: Гелиос АРВ, 2002.
3. Введение в криптографию. Под общ. ред. В. В. Яценко. - 4-е изд., доп. М.: МЦНМО, 2012.
4. Александрова О.В., Семенов Ю.С. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции. Решение упражнений и задач. - М.: Илекса, 2015.
5. Александрова О.В., Семенов Ю.С. Конспект лекций по линейной алгебре. - М.: Илекса, 2018.
6. Введение в криптографию. Указ. соч.
7. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 7-е изд., 2011.

**Yuri S. Semenov,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, independent researcher, Moscow, Russia*  
[yuri\\_semenoff@mail.ru](mailto:yuri_semenoff@mail.ru)

**Tatiana V. Andreeva,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[t-v-andreeva@mail.ru](mailto:t-v-andreeva@mail.ru)

**Pavel A. Vlasov,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[pvlx@mail.ru](mailto:pvlx@mail.ru)

**Presentation of the method of moments for constructing point estimates in the course “Mathematical An application of the Gauss elimination method and the Lagrange interpolating polynomial in protocols of secret sharing in course “Cryptographic protocols”**

**Abstract.** In the article we considered methodical aspects of presenting the A.Shamir’s secret sharing scheme. This scheme used to be investigated in the course “Cryptographic protocols” for the students specialized in information security. Several mathematical problems arise in the implementation of the scheme. We showed how one could solve such problems on the base of the Gauss elimination method or using the Lagrange interpolating polynomial. We discussed how to apply, in general, algorithms of finding the inverse element in the finite field with  $p$  elements (the extended Euclidean algorithm, fast power algorithms). The Horner’s scheme for calculation of secret polynomial values was used. Some basic examples were studied.

**Keywords:** Cryptographic protocol, secret sharing, Gauss elimination method, Lagrange interpolating polynomial, finite field.

## ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ

### Аннотация

Актуальность статьи обусловлена возрастающей популярностью методов вычислений. Далеко не каждый раз представляется возможность решать физические задачи аналитическими методами, не всегда получается описать некоторое физическое явление. Их идея заключается в замене непрерывной среды её дискретным аналогом: в рассматриваемой области, где ищут решение, вводят разностную сетку с определёнными шагами по времени и пространству. Цель работы состоит в исследовании различных способов поиска численного решения для одномерного и двумерного уравнений переноса, в том числе применительно к различным физическим процессам. Представлены описания численных методов, проведено сравнение результатов вычислительных экспериментов.

### Ключевые слова

численные методы, гиперболические уравнения, уравнение переноса, разностные схемы, метод конечных разностей, метод интерполяционного профиля, интегро-интерполяционный метод, Matlab, Wolfram Mathematica

### АВТОРЫ

**Титов Александр Дмитриевич,**  
аспирант

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
titov.alex31@yandex.ru

**Забелина Светлана Борисовна,**

кандидат педагогических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
zabelina\_sb@mail.ru

### Введение

В данной работе рассматриваются задачи, связанные с переносом во времени. Математической моделью данного процесса является уравнение переноса. Это — дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает изменение скалярной величины в пространстве и во времени. Является уравнением гиперболического типа.

В одномерной постановке уравнение переноса принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

В двумерной постановке уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Уравнение переноса имеет обширное применение. В одномерном случае можно полагать, что описывается распространение волны в направлении пространственной координаты с заданной скоростью (коэффициент или функция, стоящая в уравнении перед частной производной по пространству, то есть допускаются случаи, что скорость может быть как постоянной, так и переменной).



Различные формы записи волнового уравнения лежат в основе уравнений непрерывности, являющиеся мощным аппаратом в области механики сплошной среды. Там неизвестную функцию интерпретируют исходя из физики процесса. В любой физической постановке выражается одинаковая идея: непрерывность изменения некоторой величины. Такими сохраняющимися величинами могут быть энергия, плотность жидкости или газа, плотность тока, плотность потока. [1]

Существуют применения в метрологии, океанографии, гидродинамике, оптике, биологии, моделях диффузионных процессов, квантовой механике и физике полупроводников. В биологии с помощью уравнения переноса и его различных разновидностей (в основном в интерпретации процесса диффузии) изучают поведение микроорганизмов, миграцию организмов, эволюционную адаптацию к изменяющейся среде. А в физике полупроводников можно с помощью данного математического аппарата составлять систем для изучения изменения электрического тока и концентрации электронов.

Уравнение переноса служит основой для формулировки записи системы уравнений Максвелла, которые сыграли ключевую роль в развитии теоретической физики и оказали важное влияние на многие области физики, в частности электромагнетизм, дифракция и специальная теория относительности. На них базируется множество математических моделей в электродинамике, а при учете тех или иных условий можно получить исчерпывающие сведения о конкретном физическом процессе. [2]

Часто бывают случаи, когда полностью исследовать некоторый физический процесс за счет умений аналитически решать задачи не получается. Данная ситуация затрагивают математические модели, связанные с уравнением переноса. Поэтому прибегают к численным методам. В данной работе затрагиваются три метода, с помощью которых удастся получить решение задач: метод CIP (Constrained Interpolation Profile, CIP), метод FDTD (метод конечных разностей во временной области, МКРВО), метод  $\Delta$ -P3 (эрмитова разностная схема против потока).

Метод CIP предлагает аппроксимацию функции не только по значению функции в узлах сетки, но и по значению производной, согласованной с решаемым уравнением. Он состоит в построении внутри каждой ячейки полинома третьей степени, а на следующий временной слой решение переносится по характеристике уравнения. Важно отметить, что в обычных конечно-разностных схемах при определении производных по значениям сеточных функций в узлах теряется информация внутри ячейки, что приводит к сглаживанию решения. Данный метод был разработан японскими учеными в середине 80-х годов. Недостатком CIP является ограниченность применения: затруднительно при вычислениях на негладких данных. Также для повышения порядка точности рассматриваются полиномы более высоких порядков (пятой, седьмой или девятой), но это требует знание информации о высших производных функции. Однако, для схем седьмого и девятого порядка точности наблюдается увеличение погрешности вычислений при уменьшении значения шага сетки. Это связано с тем, что возникает погрешность вычислений, связанная с особенностью хранения чисел в ЭВМ. До сих пор создаются его разновидности, которые считаются новшеством в разработке численных методов. [3]

FDTD метод является специальным методом для дискретизации уравнений Максвелла (для любых видов возбуждения поля). Разработан китайско-американским математиком Кейном С. Йи в 60-х годах прошлого столетия. В данном методе предполагается, что дискретизация проводится в соответствии с методами конечных разностей (используют приближение центральными разностями). Стоит отметить, что метод FDTD фактически является методом Йи в этой области вычислительной математики. Особенностью алгоритма Йи является использование половинного шага по времени для одной из компонент и вид сетки, которая имеет «шахматный» вид. Таким образом, надо новые

значения функций находятся через заданные соотношения не только с предшествующего временного слоя, но и с промежуточного (между предшествующим и текущим). Следует отметить, что метод FDTD представляет собой вариацию интегро-интерполяционного метода. Также он позволяет учитывать специфические граничные условия. С его помощью решено множество задач электродинамики по всему миру. [4]

Эрмитова разностная схема использует те же принципы аппроксимации решения внутри ячейки, что и метод СР. Но вывод расчетной формулы для значения функции на следующем временном слое происходит посредством разложения функции в ряд Тейлора и применения дифференциальных следствий исходного уравнения в частных производных (теоремы Коши-Ковалевской). Данная схема была предложена в середине 2000-х годов во Франции. [5]

В Российской Федерации также занимаются исследованиями методов СР и Δ-РЗ, в частности исследователи из МФТИ, ИРЭ им В.А. Котельникова РАН и НГУ.

## Методология и результаты исследования

### Постановка задачи в общем виде

Рассматривается линейное уравнение переноса

$f_t + u f_x = 0$ , (3) где  $u = const \neq 0$  (имеет аналоги скорости распространения),  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Для единственности решения начальные и граничные данные

$$f(0, t) = \alpha(t), f(x, 0) = \varphi(x), \varphi(0) = \alpha(0). \quad (4)$$

Помимо условий (7) для уравнения (6) вводится дополнительное условие, которое получено дифференцированием обеих частей уравнения по пространственной переменной:

$$w_t + u w_x = 0, \quad (5) \text{ где } w(x, t) = f_x(x, t).$$

Характеристика уравнения переноса задается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u. \quad (6)$$

Точным решением задачи является функция

$$f(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - ut), & t \leq \frac{x}{u} \\ \alpha\left(t - \frac{x}{u}\right), & t > \frac{x}{u} \end{cases}. \quad (7)$$

В двумерном случае уравнение (3) примет вид

$$f_t + u f_x + v f_y = 0, \quad (8)$$

где  $u = const \neq 0$ ,  $0 \leq x \leq l_x$ ,  $v = const \neq 0$ ,  $0 \leq y \leq l_y$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Здесь  $u$  и  $v$  также имеют аналог скорости распространения. Как и в одномерном случае для корректности задачи даны начальные и граничные данные:

$$f(0, 0, t) = \alpha(t), f(x, y, 0) = \varphi(x, y), \varphi(0) = \alpha(0). \quad (9)$$

Также заданы дополнительные условия по обеим пространственным производным. Эта информация нужна для применения вычислительных алгоритмов типа СР. То есть предполагается следующее:

$$w_{1t} + u w_{1x} + v w_{1y} = 0, \quad w_{2t} + u w_{2x} + v w_{2y} = 0 \quad (10) \text{ где } w_1(x, t) = f_x(x, y, t) \text{ и } w_2(x, t) = f_y(x, y, t).$$

Помимо вышеперечисленных задач в данной работе рассматриваются системы уравнений переноса, где неизвестными являются две и три функции. Для них также заданы свои начальные и граничные данные, чтобы можно было найти их единственные решения. [6]

### Разностные схемы для поиска численных решений

#### Метод интерполяционного профиля

В качестве шаблона для каждой пространственной координаты по отдельности рассматриваются схемы «правый уголок» или «левый уголок» в зависимости от знака скорости в уравнениях (3), (8). Если скорость положительна, то используют «правый уголок», в противном случае – «левый уголок». Предполагается, что на каждом временном слое заданы значения функции и пространственной производной в узлах равномерной сетки.

В данной работе уделано внимание методу третьего порядка (схема СІРЗ), в котором интерполирующими полиномом для выбранного шаблона является кубический. Также есть схемы СІР5, СІР7, СІР9.

В таком случае решение одномерного уравнения (3) на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  (для положительной скорости) на шаге по времени  $n$  можно записать в виде многочлена

$$F_i^n = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (11)$$

Значение функции и ее пространственной производной переносятся на следующий временной слой по характеристике уравнения переноса:

$$f_i^{n+1} = F_i^n(x_i - a\tau), v_i^{n+1} = \frac{dF_i^n(x_i - a\tau)}{dx}. \quad (12)$$

В двумерном случае вводят равномерную сетку. На каждом временном слое заданы значения функции и пространственных производных.

Решение можно представить в нескольких способах: Туре-А, Туре-В и Туре-С. В данной работе рассмотрены Туре-А и Туре-В. Стоит отметить, что Туре-С отличается от Туре-А и Туре-В другой идеей интерполяции.

Интерполяционный полином на каждой ячейке в Туре-А имеет представление в виде

$$F(x, y) = c_{30}x^3 + c_{20}x^2 + c_{10}x + c_{03}y^3 + c_{02}y^2 + c_{01}y + c_{11}xy + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{00}. \quad (13)$$

В Туре-В интерполяционный полином записывается как

$$F(x, y) = c_{30}x^3 + c_{20}x^2 + c_{10}x + c_{03}y^3 + c_{02}y^2 + c_{01}y + c_{11}xy + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{13}x^3y + c_{31}xy^3 + c_{00}. \quad (14)$$

С помощью метода СІРЗ ещё можно решать систему дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = c \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = c \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{cases} \quad (15)$$

Для этого вводят функции  $\varphi_1 = f_1 + f_2$ ,  $\varphi_2 = f_1 - f_2$ , и решают через СІРЗ следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных (полученные уравнения друг от друга не зависят):

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - c \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Чтобы найти функции  $f_1$  и  $f_2$ , используют соотношения  $f_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ,  $f_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ .

Следует отметить, что данный метод устойчив для  $\sigma \leq 1$ . На практике порой удается получить устойчивость при  $1 < \sigma < 1.2$ . Это можно добиться, если шаг по пространству брать сравнительно малым ( $10^{-3}$  и менее). Однако лучше стараться подбирать  $0 \leq \sigma \leq 1$ , как в методе конечных разностей. [7]

### Метод FDTD

Метод конечных разностей во временной области (МКРВО, Finite Difference Time Domain, FDTD) является одним из наиболее популярных методов вычислительной электродинамики. Основан на дискретизации уравнений Максвелла, записанных в дифференциальной форме. Относится к классу сеточных методов. Позволяет учитывать свойства анизотропности и неоднородности материалов. Также позволяет моделировать различные краевые данные.

Также метод годится для разных форм возбуждений потока. В зависимости от формы возбуждения уравнения Максвелла записывают по-разному. Выделяют ТМ-возбуждение и ТЕ-возбуждение. В случае ТЕ-возбуждения нет электрического поля в направлении распространения, вдоль направления распространения имеется только магнитное поле. А в случае ТМ-возбуждения нет магнитного поля в направлении распространения, вдоль направления распространения имеется только электрическое поле. В зависимости от формы возбуждения по-разному записываются уравнения Максвелла и, соответственно, по-разному выглядят разностные схемы для численного решения.

МКРВО основан на алгоритме Ий. Его особенностью является введение полуцелого временного шага. Соответственно, некоторые компоненты высчитываются именно на нем, а не на целом шаге. Метод FDTD также применим для модифицированных уравнений Максвелла. [8]

В одномерном случае рассматриваются уравнения для ТМ-поляризации и ТЕ-поляризации соответственно:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial x} \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (17)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial x} \end{cases} \quad (18)$$

Для ТМ-поляризации разностный аналог задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{i+1/2}^{n+1/2} &= H_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_{i+1/2} \Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n) \\ E_i^{n+1} &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_i \Delta x} (H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i-1/2}^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (19)$$

А в случае ТЕ-поляризации для нахождения новых значений надо использовать такие соотношения:

$$\begin{aligned} E_{i+1/2}^{n+1/2} &= E_{i+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\epsilon_{i+1/2} \Delta x} (H_{i+1}^n - H_i^n) \\ H_i^{n+1} &= H_i^n - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} (E_{i+1/2}^{n+1/2} - E_{i-1/2}^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (20)$$

### Эрмитова схема с разностью против потока

Предполагается, что в каждом узле в определенный момент времени задана сеточная функция  $u_i^n$ , которая аппроксимирует точное решение. Рассматривают дополнительную дискретную величину  $r_n^i$ , которая является аппроксимацией функции  $r(xi, tn) = h \cdot ux(xi, tn)$ .

Выделяют схемы Δ-Р3 (в качестве дополнительной информации используют первую пространственную производную), Δ-Р5 (в качестве дополнительной информации используют первую и вторую пространственные производные), Δ-Р7 (в качестве дополнительной информации используют первую, вторую и третью пространственные производные), Δ-Р9 (в качестве дополнительной информации используют первую,

вторую, третью и четвертую пространственные производные). Применение этих схем не ограничивается одномерным уравнением переноса. Возможно применение для двумерных уравнений и систем уравнений. [9]

В данной работе акцент будет сосредоточен на схеме  $\Delta$ -P3 для одномерного уравнения. В этом случае рассматривают кубический полином, интерполирующий численное решение в ячейке в определённый момент времени:

$$\tilde{u}(x) = c_1 + c_2(x - x_i) + c_3(x - x_i)^2 + c_4(x - x_i)^3; \quad (21)$$

$$\tilde{r}(x) = h\tilde{u}_x = h(c_2 + c_3(x - x_i) + c_4(x - x_i)^2). \quad (22)$$

Для решения одномерного уравнения для положительных скоростей справедливо

$$u_i^{n+1} = (\sigma - 1)^2(2\sigma + 1)u_i^n + \sigma^2(3 - 2\sigma)u_{i-1}^n + \sigma^2(1 - \sigma)r_{i-1}^n - \sigma(\sigma - 1)^2r_i^n, \quad (23)$$

$$r_i^{n+1} = 6\sigma(1 - \sigma)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (\sigma - 1)(3\sigma - 1)r_i^n + \sigma(3\sigma - 2)r_{i-1}^n, \quad (24)$$

где  $\sigma = \frac{a\tau}{h}$  – число Куранта.

Для решения одномерного уравнения в случае отрицательных скоростей запись соотношений будет несколько иначе. Она примет следующий вид:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma^2((2 + \sigma)r_i^n + (1 + \sigma)r_{i+1}^n + (3 + 2\sigma)u_i^n) + \sigma^2(3 + 2\sigma)u_{i+1}^n - \sigma r_i^n, \quad (25)$$

$$r_i^{n+1} = 6\sigma(1 + \sigma)(u_i^n - u_{i+1}^n) + (1 + 4\sigma + 3\sigma^2)r_i^n + \sigma(3\sigma + 2)r_{i+1}^n. \quad (26)$$

### Вычислительный эксперимент

Расчет по методу интерполяционного профиля

Вычислительный эксперимент проводился на одномерной задаче  $u_t + au_x = 0$ ,  $a = 1$ ,  $x \in [0; 2\pi]$  с начальным условием вида  $\varphi(x) = \sin(x) \cos(x)$  и с периодическими граничными условиями.

Начальное условие изображено на рис. 1.

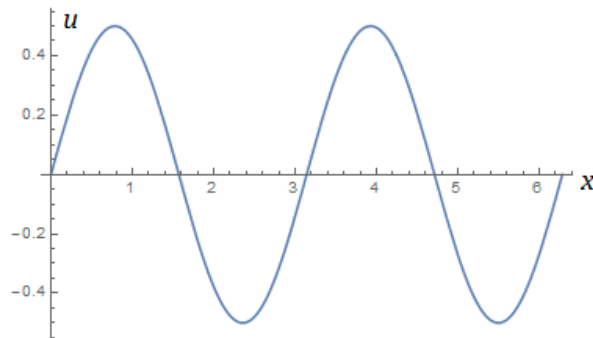


Рис. 1. Начальные данные  $\varphi(x)$ .

Расчет проводился для времени  $T = 2\pi$ , число Куранта  $\sigma = 0.5$  и для числа точек  $n_1 = 64$ ;  $n_2 = 128$ ;  $n_3 = 256$ .

Численное решение для  $n_1$  представлено ниже:

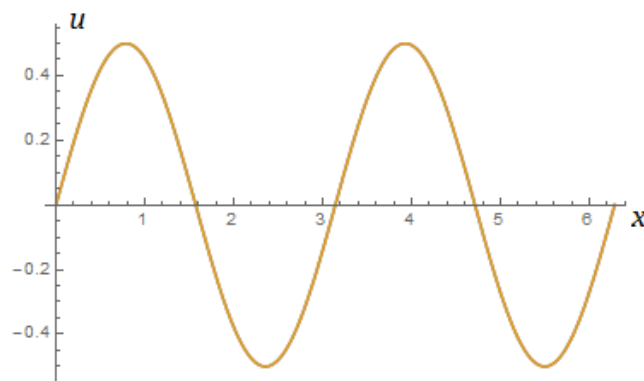


Рис. 2. Численное решение для  $T = 2\pi$  и  $n_1$  точек.

Поскольку финальное время составляет полный период функции  $\varphi(x)$  и ввиду заданных периодических граничных условий, точное решение на данном моменте времени совпадает с начальными данными.

Ниже приведена таблица погрешностей в норме  $L_1$  в зависимости от количества точек дискретизации:

Таблица 1.

### Зависимость величины погрешности от числа точек

число точек	Погрешность
$n_1 = 64$	0.001079
$n_2 = 128$	0.00012936
$n_3 = 256$	0.00001583

Из данной таблицы видно, что при увеличении числа точек в 2 раза погрешность падает в 8.34 и в 8.18 раз соответственно. Значит, третий порядок точности достигается, как и должно быть.

Если взять отрицательный знак скорости, то через время  $T = 2\pi$  получится аналогичное изображение решения и будут возникать такие же значения погрешностей. Будет также третий порядок. Это можно объяснить переиндексацией коэффициентов интерполяционного полинома в зависимости от шаблона (схожестью конструкции коэффициентов для положительных и отрицательных скоростей распространения процесса).

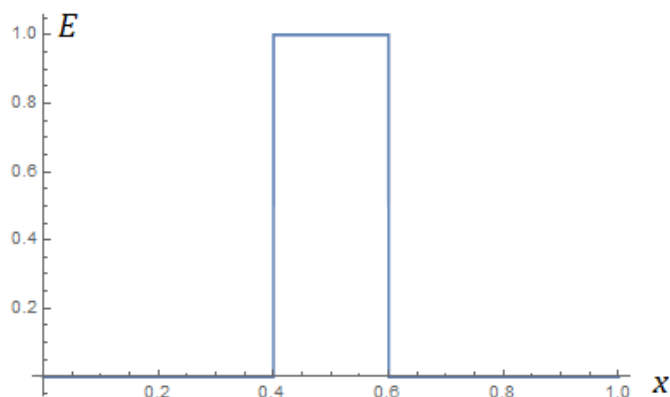
Также вычислительный эксперимент проводился на одномерной системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Взяты начальные данные:

$$H(x) = 0, E(x) = \begin{cases} 1, x \in [0.4; 0.6] \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Начальное изображение намагниченности электрического поля выглядит так:

Рис. 3. Начальные данные  $E(x)$ .

Эксперимент проводился на отрезке  $[0; 1]$  при 128 точках разбиения, конечное время  $T = 0.05$ , число Куранта  $\sigma = 0.3$ .

Решения будет выглядеть следующим образом (см. рис. 4-5).

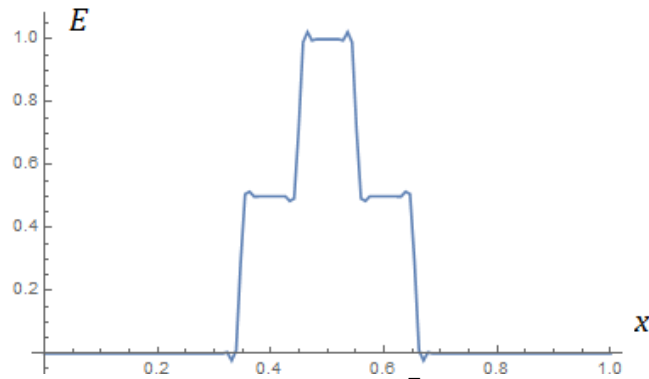


Рис. 4. Численное решение компоненты  $E$  в момент времени  $T = 0.05$ .

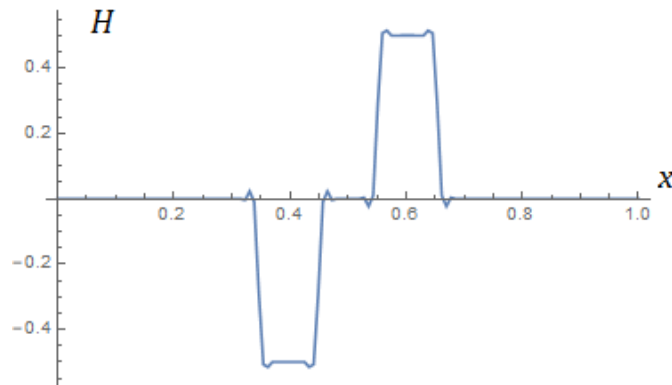


Рис. 5. Численное решение компоненты  $H$  в момент времени  $T = 0.05$ .

Ниже приведены (см. рис. 6-7) двумерные графики сечений, построенные в Wolfram Mathematica через функцию ListDensityPlot. Она отображает значения исследуемой функции (зависящей от времени и одной пространственной координаты) в ячейках сетки с помощью окрашивания в различные цвета палитры (строится график таблично заданной функции). На горизонтальной оси отмечается число точек разбиения по пространственной координате, по вертикальной оси — число шагов по времени (для данного примера их 21).

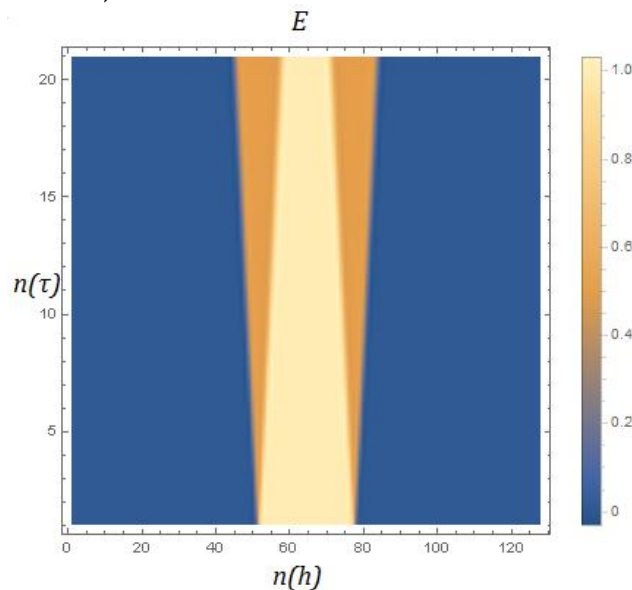


Рис. 6. Изменение компоненты  $E$  (по оси  $Ox$  отложено число шагов по времени, по оси  $Oy$  — по пространству).



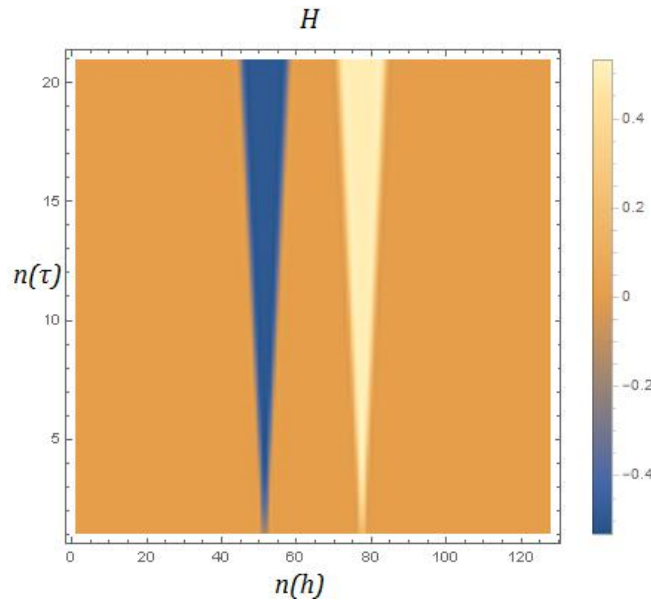


Рис.7. Изменение компоненты  $H$  (по оси  $Ox$  отложено число шагов по времени, по оси  $Oy$  – по пространству).

Стоит отметить, что производная для таких начальных данных подсчитывалась численно (через разности). Данные результаты согласуются со статьей [10].

Также рассматривается двумерная задача  $f_t + uf_x + vf_y = 0$  в области  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq t \leq T = 1\}$ . Значения коэффициентов (скорости переноса) равны  $u = \pm 1, v = \pm 1$ . Заданы шаги по пространству  $h_x = h_y = h = 1/32$ , число Куранта  $\sigma = 0.45$ , шаг по времени  $\tau = \sigma h$ .

Заданы периодические граничные условия и начальные данные вида:

$$\varphi(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y);$$

На рисунках 8-11 приведены решения методами CIP3 Type-A, CIP3 Type-B, точные решения, модули разностей численных и точного решения, модуль разности численных решений друг с другом. Стоит отметить, что решения представлены в виде контурных графиков. Их особенность заключается в представлении на плоскости функций двух переменных с помощью линий равного уровня. Они получаются, если трехмерная поверхность пересекается рядом плоскостей, расположенных параллельно друг другу. При этом контурный график представляет собой совокупность спроецированных на плоскость  $Oxy$  линий пересечения поверхности плоскостями. [11]

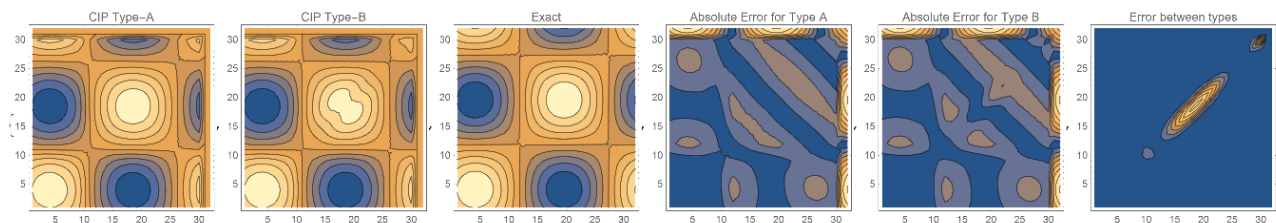


Рис. 8. Расчет при  $u < 0, v < 0$  с начальными данными  $\varphi(x, y)$ .

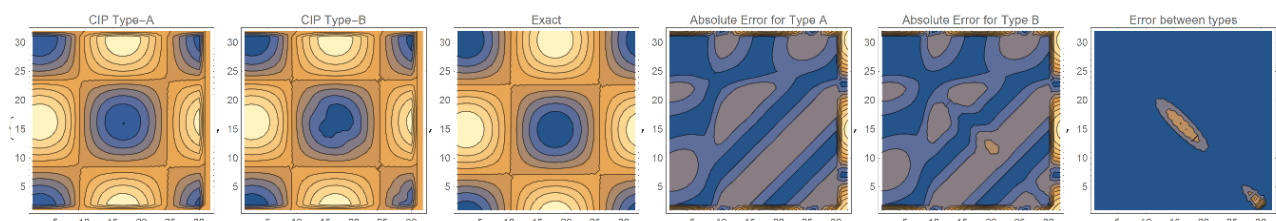


Рис. 9. Расчет при  $u < 0, v > 0$  с начальными данными  $\varphi(x, y)$ .

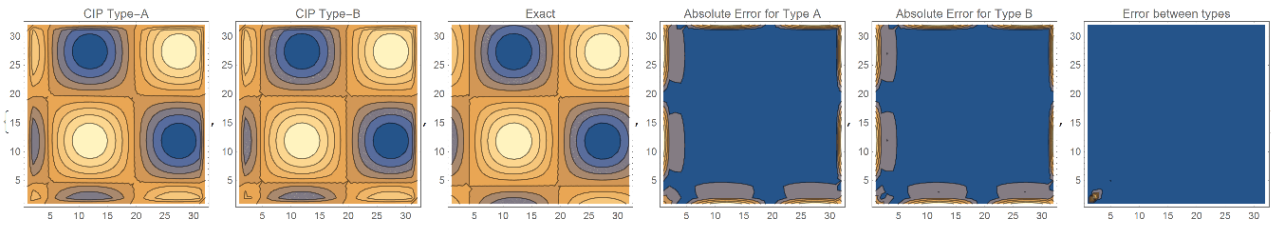


Рис. 10. Расчет при  $u > 0, v > 0$  с начальными данными  $\varphi(x, y)$ .

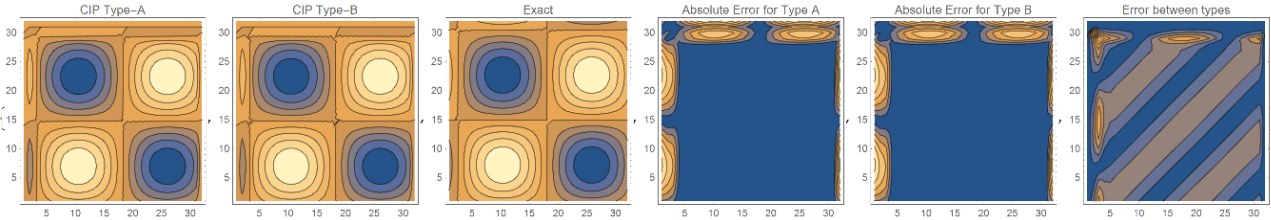


Рис. 11. Расчет при  $u > 0, v < 0$  с начальными данными  $\varphi(x, y)$ .

Проведено сравнение по времени реализации методов Type-A и Type-B, каждый из которых реализован в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica двумя способами: где циклы полностью прописаны и где циклы реализованы с помощью встроженных функций (векторизованный способ).

В таблице 2 для случая  $u < 0, v < 0$  показаны эти сравнения.

Таблица 2.

**Сравнение результатов времени длительности вычислительного эксперимента**

Начальные данные	CIP3 Type-A	CIP3 Type-B	CIP3 Type-A (векторизованный)	CIP3 Type-B (векторизованный)
$\varphi(x, y)$	4.0635	8.7995	1.621264	3.393

Видно, что векторизованный способ работает быстрее для обоих типов метода CIP. Также можно сделать вывод, что Type-A работает быстрее. Это объясняется тем, что для интерполяции по Type-A на каждом шаге требуется высчитывать на два коэффициента меньше.

Расчет по методу FDTD

Рассматривается система уравнений 
$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu \frac{\partial E}{\partial x} \\ \frac{\partial E}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

где  $\mu = 1, \epsilon = 1$ ,  $H$  – напряженность магнитного поля,  $E$  – напряженность электрического поля.

В вычислительном эксперименте взяты нулевые начальные данные ( $H(x, 0) = 0, E(x, 0) = 0$ ) и граничное условие вида

$$E(0, t) = \sin(2\pi f_0 t) \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2k^2}\right), \text{ где заданы параметры } f_0 = 0.6, t_0 = 4.2; k = 1.8.$$

Стоит отметить, что метод FDTD в силу его особенности позволяет задавать граничное условие только для одной из компонент в зависимости от вида поляризации.

На рисунках 12 и 13 приведены результаты расчетов для компонент магнитного и электрического полей соответственно. Взят отрезок  $x \in [0; 40]$ , конечное время  $T = 20$ . Шаг по пространству  $h = \frac{1}{256}$ , число Куранта  $\sigma = 0.45$ , шаг по времени  $\tau = h\sigma/\mu$ .

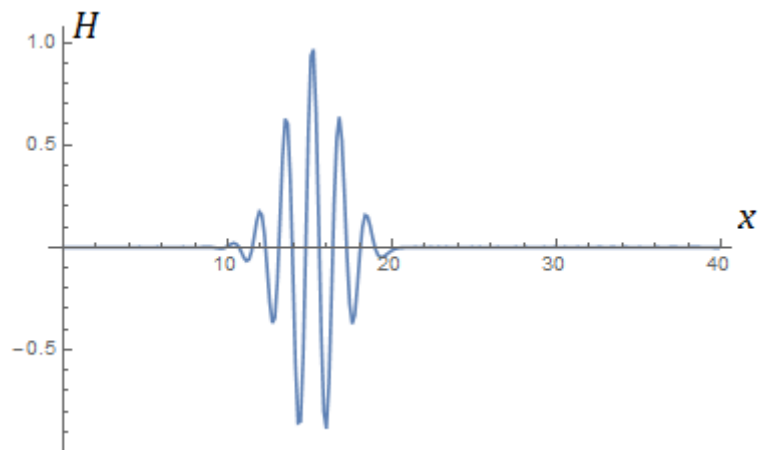


Рис. 12. Расчет напряженности магнитного поля.

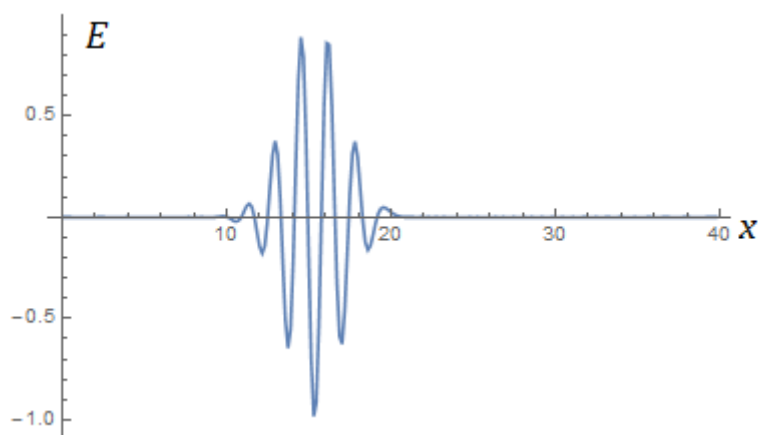


Рис. 13. Расчет напряженности электрического поля.

Следует отметить, что данные результаты согласуются с полученными в статье [12].

Также вычислительный эксперимент проводился на одномерной системе из предыдущего раздела с аналогичными начальными данными. Однако, в качестве граничного условия принято, что на левом конце отрезка значение одной из неизвестных компонент равно нулю ( $E(0, t) = 0$ ). Численное решение для начальных данных

$H(x) = 0, E(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0.4; 0.6] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$  при времени  $T = 0.05$  представлено на рисунках 14-15. [13]

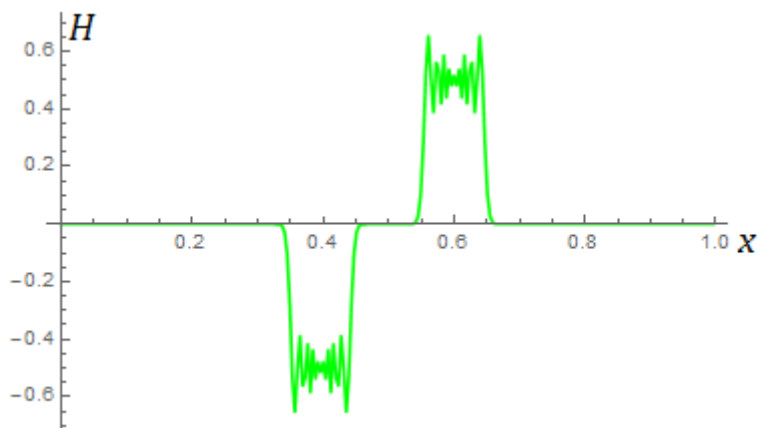
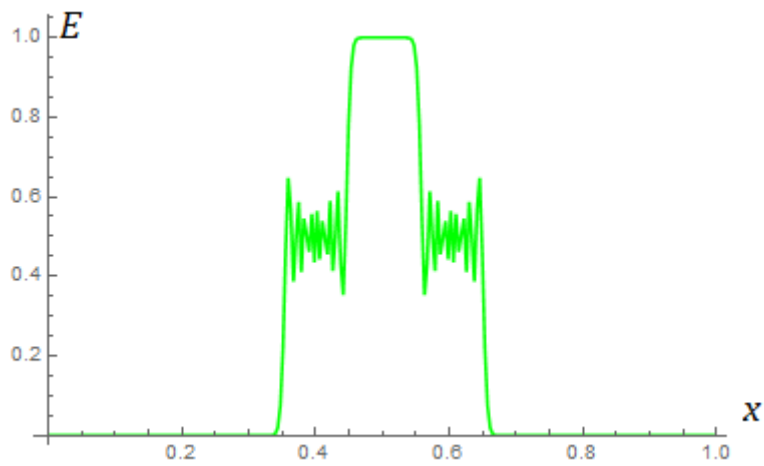


Рис. 14. Численное решение компоненты H.

Рис. 15. Численное решение компоненты  $E$ .

Совместное изображение решений по методам FDTD и CIP3 представлено ниже (см. рис. 16-17).

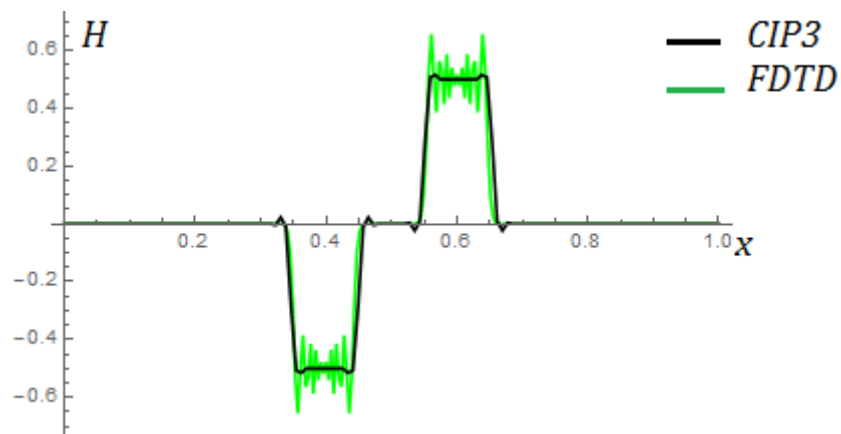


Рис. 16. Численное решение напряженности магнитного поля по методам FDTD и CIP3.

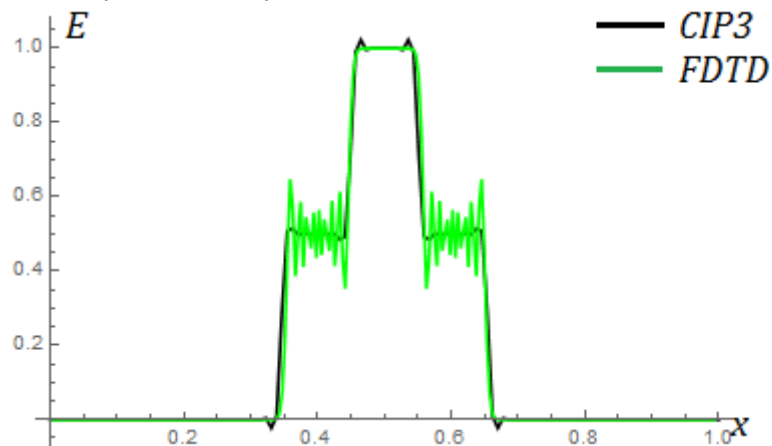
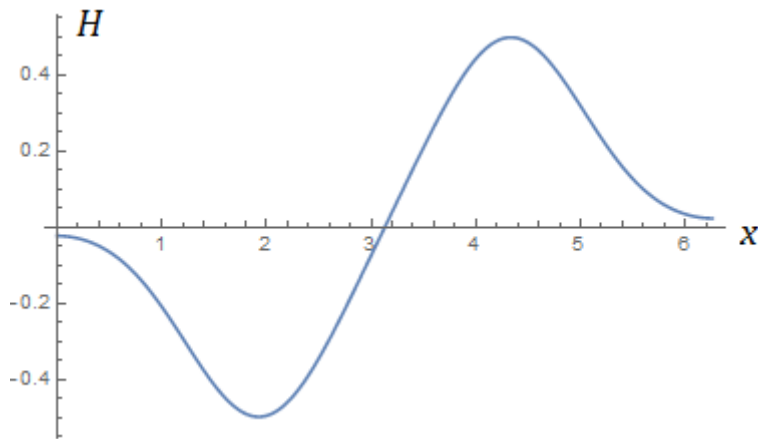
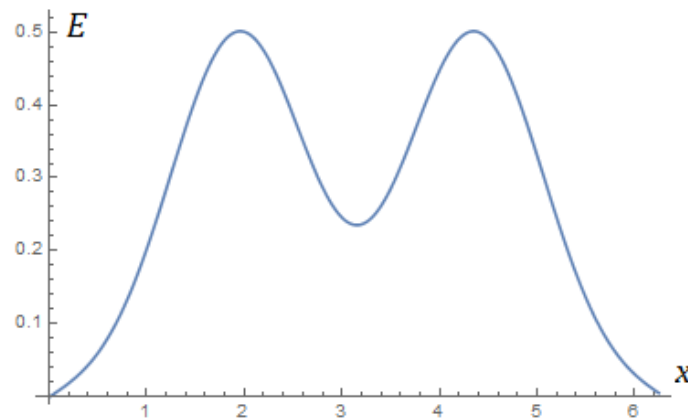
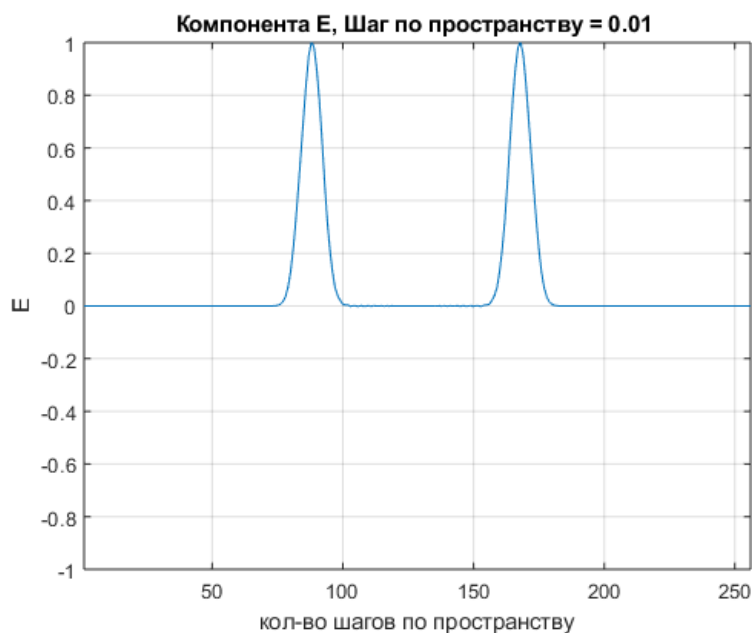


Рис. 17. Численное решение напряженности электрического поля по методам FDTD и CIP3.

Если взять начальные данные вида:  $H(x) = 0, E(x) = \exp(-(x - \pi)^2)$ , то к моменту времени  $T = 1.2$  решение системы будет выглядеть следующим образом (см. рис. 18-19):

Рис. 18. Численное решение компоненты  $H$ .Рис. 19. Численное решение компоненты  $E$ .

Также с помощью метода FDTD решена задача с условием симметрии [14], когда вместо граничных данных задается условие в середине исследуемой области и нулевыми начальными данными. Параметры  $\mu = \epsilon = 1, \tau = 0.005, \sigma = 0.5, h = 0.01$ . На рисунках 20-21 представлены решения при условии  $E(t) = \exp(-0.5 \frac{(t-20)^2}{64})$ .

Рис. 20. Численное решение компоненты  $E$  с условием симметрии.

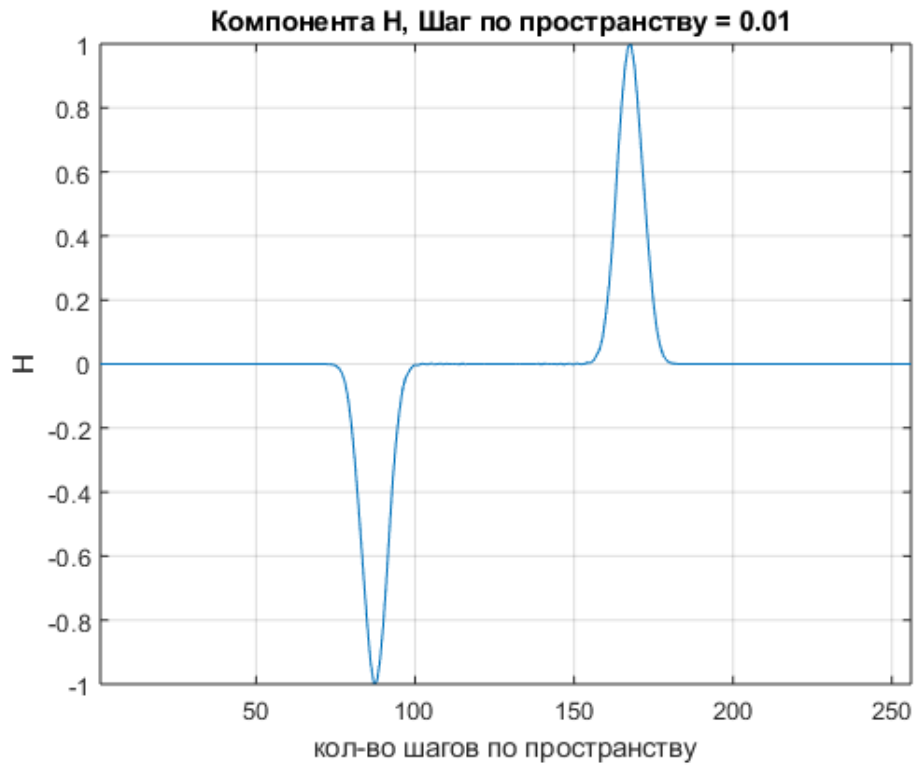


Рис. 21. Численное решение компоненты  $H$  с условием симметрии.

Расчет по методу  $\Delta$ -P3

Рассматривается одномерная задача  $u_t + au_x = 0, a = 1, x \in [-1; 1]$  с начальным условием вида  $\varphi(x) = \sin(\pi x) \cos(\pi x)$  и с периодическими граничными условиями.

Вычислительный эксперимент проводился для конечного времени  $T = 2$ , числа Куранта  $\sigma = 0.8$ . Были взяты шаги по пространству  $h_1 = \frac{1}{64}$ ;  $h_2 = \frac{1}{128}$ . Им соответствуют шаги по времени  $\tau_1 = 0.0125$ ;  $\tau_2 = 0.00625$ . Результаты расчетов при  $h_2$  и  $\tau_2$  представлены ниже:

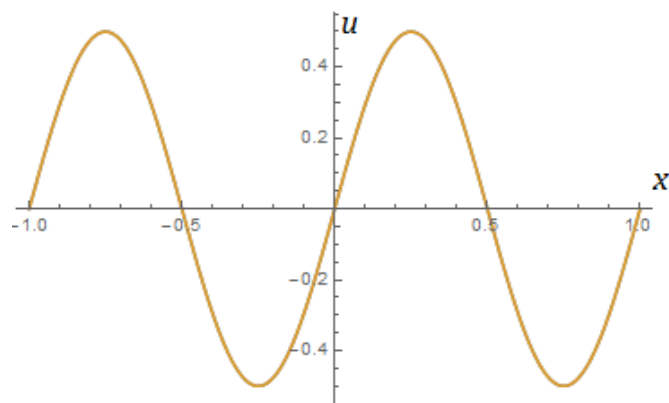


Рис. 22. Вычислительный эксперимент при  $T = 2, \sigma = 0.8, h_2, \tau_2$ .

В таблице 3 показаны значения погрешностей в норме  $L_1$ :

Таблица 3.

### Результаты погрешностей

Шаг по пространству	Шаг по времени	Погрешность
0.015625	0.0125	0.00002123
0.0078125	0.00625	$2.5985 \cdot 10^{-6}$

Отношение погрешностей при уменьшении шагов в два раза уменьшается в 8.17 раз. Это говорит о соблюдении третьего порядка точности метода.

Если взять отрицательное значение скорости, то при тех же параметрах времени и числа Куранта получатся аналогичные результаты расчетов и погрешностей. Как и в случае метода СР это можно объяснить схожестью конструкции коэффициентов для положительных и отрицательных скоростей распространения процесса (то есть для другого направления скорости их можно получать формальной переиндексацией и сменой знаков).

Также с помощью данного метода решены задачи с начальными данными вида

$$H(x) = 0, E(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0.4; 0.6] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

с периодическими граничными условиями. Их решения представлены ниже на рисунках 23-24 соответственно.

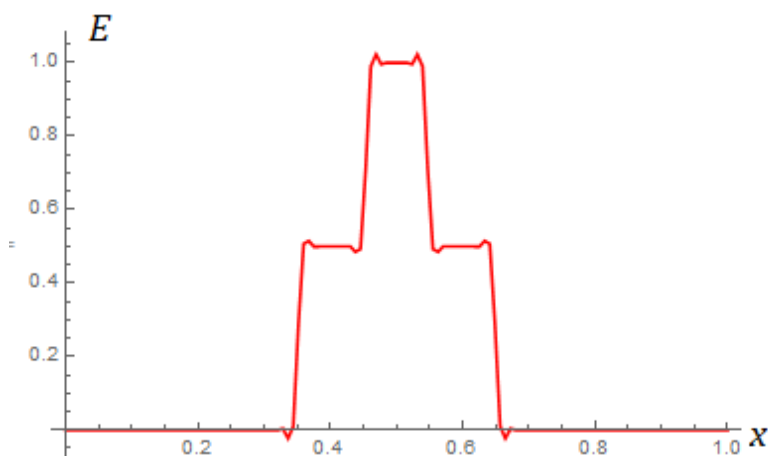


Рис. 23. Численное решение для компоненты  $E$  к моменту времени  $T=0.05$ .

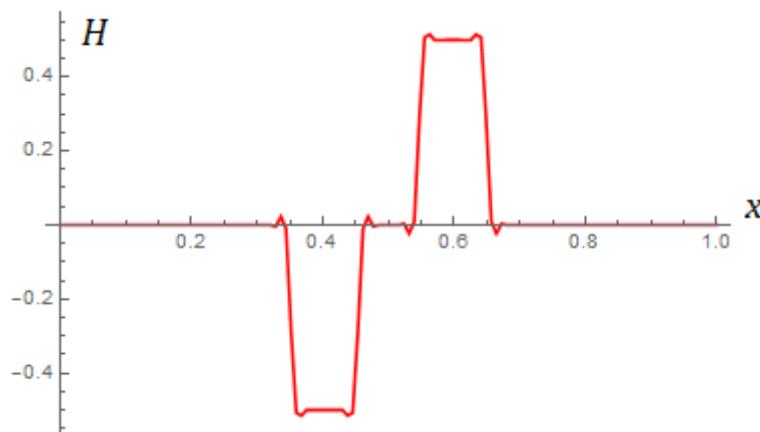


Рис. 24. Численное решение для компоненты  $H$  к моменту времени  $T=0.05$ .

### Заключение

В данной работе проведено исследование различных численных методов решения одномерного и двумерного уравнений переноса. Представлены четыре метода для реализации их решений и их описания. Проведены численные расчеты в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica и в пакете прикладных программ Matlab, а также сравнения методов с аналитическими решениями, показывающие работоспособность данных алгоритмов.

Особое внимание в работе уделено методам FDTD (метод конечных разностей во



временной области) и CIP (метод интерполяционного профиля), поскольку с их помощью решается множество практических задач. Для метода CIP были выведены коэффициенты для расчетов значений при отрицательных скоростях и когда скорости в уравнениях двумерной системы принимают разные знаки. Представлены две вариации метода. Показаны сравнения решений между ними. Это подтверждает многогранность данного численного метода, позволяет говорить об его огромных перспективах в области вычислительной математики и о возможности дальнейшего развития.

Также обозначены возможности применения данного математического аппарата в физических процессах. В частности, некоторые из решенных задач являются наглядной иллюстрацией использования уравнения переноса в приложениях электродинамики, механики сплошной среды, оптики и специальной теории относительности.

---

#### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. — 512 с.
2. Гринев А.Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики. М.: Изд-во «Радиотехника», 2012. — 336 с.
3. Okubo K. Analysis of an Electromagnetic Field Created by Line Current Using Constrained Interpolation Profile Method, 2007
4. Akram G., Jasmy Y. Simulation of the Finite Difference Time Domain in Two Dimension, 2012
5. Capdeville G. A new category of Hermitian upwind schemes for computational acoustics. Journal of Computational Physics 210, 2005. — 133-170 с.
6. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. — 364 с.
7. Aoki T., Yabe T. Multidimensional Cubic Interpolation for UCF Hydrodynamics Simulation, 1991
8. Akram G., Jasmy Y. Указ. Соч. (4)
9. Capdeville G. Указ. Соч. (5)
10. Hung L.V. Analysis of electromagnetic field using the constrained interpolation profile method, 2012
11. Yabe T., Ishikawa T., Kadota Y., Ikeda F. A Multidimensional Cubic-Interpolated Pseudoparticle (CIP) Method without Time Splitting Technique for Hyperbolic Equations, 1990
12. Loui H., 1D-FDTD using MATLAB, 2004
13. O.V. Kravchenko, D.P. Egorov, N.T. Vilisova, D.V. Churikov and A.D. Titov. Interpolation type schemes application to analysis of electromagnetic field propagation, in Photonics and Electromagnetics Research Symposium, Rome, Italy, June 2019, Session 3A4. SC1: Computational Techniques in Electromagnetics and Applications. PP.2298-2302. DOI: 10.1109/PIERS-Spring46901.2019.901758
14. Ohner G., Two Dimensional Finite Difference Time Domain Computation of Electromagnetic Fields in Python, 2018.

---

**Alexander D. Titov,**  
Graduate Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
[titov.alex31@yandex.ru](mailto:titov.alex31@yandex.ru)

**Svetlana B. Zabelina,**  
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
[zabelina\\_sb@mail.ru](mailto:zabelina_sb@mail.ru)

#### Application of high-order precision difference schemes for modeling evolutionary problems

**Abstract.** The relevance of the article is due to the increasing popularity of computational methods. Not every time it is possible to solve physical problems by analytical methods, it is not always possible to describe some physical phenomenon. Their idea is to replace the continuous medium with its discrete analog: in the area under consideration, where a solution is being sought, a difference grid with certain steps in time and space is introduced. The purpose of the work is to study various ways of finding a numerical solution for one-dimensional and two-dimensional transfer equations, including in relation to various physical processes. Descriptions of numerical methods are presented, and the results of computational experiments are compared.

**Keywords:** numerical methods, hyperbolic equations, transfer equation, difference schemes, finite difference method, interpolation profile method, integro-interpolation method, Matlab, Wolfram Mathematica.

**ОСОБЕННОСТИ АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА КАК ЯЗЫКА МЕЖДУНАРОДНОГО ДИСКУРСА****Аннотация**

Актуальность исследования обусловлена распространённостью английского как языка научных исследований. Цель работы - определить систему основных особенностей написания научных статей на английском языке. Выявлено системное отличие английского языка научных текстов от неформального английского языка. Результаты работы могут быть использованы при написании статей на английском языке.

**Ключевые слова**

английский язык, формальный язык, неформальный язык

**АВТОРЫ**

**Уткина Надежда Вениаминовна,**  
кандидат философских наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический  
университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
utkina-nv@yandex.ru

**Голубев Алексей Евгеньевич,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана»,  
старший научный сотрудник  
ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук», г. Москва  
v-avgolu@hotmail.com

**Романычев Александр Иванович,**  
доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический  
университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва

**Введение**

Английский язык распространился очень быстро благодаря Британской империи, экономическому, культурному и военному значению США, а в последнее время и благодаря Интернету. По словам английского телеведущего и журналиста Джереми Паксмана англичане оставили человечеству «величайшее наследие - их язык» [1]. Три четверти почты в мире написано на английском языке, четыре пятых всех данных, хранящихся на компьютерах, составлено на английском языке, и этим языком пользуются две трети ученых мира, которые публикуют свои работы и общаются с коллегами на английском языке, тем самым принимают участие в международном дискурсе. В значительной степени английский стал языком технологий, науки, путешествий и международной политики. В настоящее время подсчитано, что по-английски может немного говорить четверть населения земного шара.

### Методология и результаты исследования

Доминирование английского языка обусловлено не столько его уникальностью, сколько историческими факторами. У английского языка есть ряд некоторых особенностей, которые делают его наиболее подходящим для написания научных трудов. В частности, относительно несложный грамматический строй языка. Порядок слов не вызывает затруднений и нет необходимости беспокоиться о роде существительных или о соответствующих окончаниях прилагательных. При спряжении изменения глаголов также ограничены.

Другой характерной особенностью английского языка выступает богатство его словарного запаса, придающее писателям большую гибкость при выборе слов. Разнообразие лексики обусловлено несколькими факторами. Во-первых, английский язык имеет французские, германские и скандинавские корни. В результате для обозначения одного и того же предмета или понятия в английском языке существует как французское, так и английское слово. В качестве примера можно привести следующие слова: «*infancy*» и «*childhood*», «*judicious*» и «*wise*», «*malady*» и «*sickness*», «*transmit*» и «*send*». Другим источником вариативности английского являются заимствования из других языков. Английский заимствовал слова из всех языков, с которыми он соприкасался на протяжении веков. Например, такие слова давно стали общеупотребительными в английском: «*kindergarten*», «*tsar*», «*aubergine*», «*yacht*», «*tsunami*», «*yoghurt*», «*algebra*», «*caravan*», «*igloo*», «*budgerigar*», «*mosquito*», «*pseudonym*», «*fjord*». Немецкий философ Артур Шопенгауэр был вполне прав, когда описывал английский как язык-пэчворк [2].

В своей книге «*Mother Tongue: The story of the English Language*» Билл Брайсон утверждает, что такое богатство словарного запаса дает английскому языку преимущество перед многими другими языками [3]. Американский писатель полагает, что язык с более широким словарным запасом имеет больше возможностей выражать одну и ту же мысль. Это спорный факт, с которым можно и не согласиться, поскольку для выражения своих мыслей совсем не обязательно обладать большим словарным запасом. Другой американский писатель Эрнест Хемингуэй был знаменит тем, что использовал в своем творчестве ограниченный набор слов, был точен и лаконичен. Тем не менее, он был способен выражать сильные эмоции и описывать глубокие мысли.

Написание научных трудов на английском языке имеет некоторые свои особенности. Он отличается от языка, который используется в романах, газетах, электронных сообщениях. Слова тщательно выбираются, чтобы соответствовать определенному стилю и прописываются полностью, без сокращений. Все предложения полные, взаимосвязаны и пунктуационно оформлены. В текстах используются предложения с законченной мыслью или действием. Незаконченное предложение заставляет читателя искать полный смысл или оставляет его с впечатлением, что что-то важное было опущено. Например, в тексте «*Scientific work is a puzzle of assumptions, imagination, inference and vision. It happens that (1) someone disproves (2) a hypothesis and shows that the insight the first scientist had was wrong. This also a part of science; to learn to live with disappointments (3). A scientist should never give up and should be able to try experiments again and again. From this it is becomes clear the science is a never-ending fairy tale*» [4]. Под цифрой (1) нужно опустить ненужные слова «*It happens that*», во втором случае (2) глагол «*disprove*» лучше сочетается со словами «*law*» и «*theory*», а со словом «*hypothesis*» лучше использовать глагол «*formulate*», в третьем случае (3) в последней части предложения отсутствует глагол, поэтому оно считается неполным.

Незаконченные высказывания в научных трудах могут быть использованы в заголовках. Например, такой заголовок как «*Measurement of speed of the expansion of the Universe*» достаточно общий. Так же заголовок с цифрами, вводящий данные, часто

не является законченным высказыванием. Объясняется это двумя факторами. Во-первых, такие заголовки подобно заголовкам газет, которые часто являются незаконченными предложениями, звучат выразительнее. Во-вторых, так часто делают, чтобы сократить число печатных знаков. Многие журналы имеют четкие ограничения по количеству печатных знаков в заголовках.

При написании научных работ на английском не используются усеченные формы глаголов такие как «*it's*», «*isn't*», «*can't*», «*don't*», поскольку употребление подобных сокращенных форм может привести к двусмысленности. «*it's*» – это сокращение от «*it is*», и не имеет ничего общего с притяжательной формой от «*it*». Следующие три примера иллюстрируют разницу. «*The power is red. It's red power. Its colour is red*». Если вы будете всегда писать полные формы, то проблем с пониманием не будет. Кроме того, следует избегать начинать предложения с «*and*», «*but*», «*with*», «*because*», «*so*», поскольку постановка данных слов в начале предложения считается признаком плохого стиля и неформального английского. При написании научного текста лучше не использовать для обозначения точности такие слова как «*a lot*», «*a bit*», «*a little*», их обычно заменяют на «*several*», «*many*», «*certain*», «*numerous*», «*considerable*». Не рекомендуется так же употреблять такие прилагательные как «*amazing*», «*incredible*», «*unbelievable*», «*stunning*», «*spectacular*», которые не совсем уместны в научном контексте, имеют оттенок неясности, сенсационности, и преувеличения.

При введении дополнительной информации, написанной в предыдущем предложении, используйте такие слова как «*in addition*», «*further*», «*furthermore*», «*indeed*», «*moreover*», что избавит вас от необходимости начинать предложения с «*and*». «*However*», «*in contrast*», «*instead*», «*nevertheless*», «*occasionally*», «*of course*», «*on the contrary*», «*otherwise*» используются для противопоставления. Начинать предложение с «*because*», тоже является признаком плохого стиля. В данном случае выручит «*instead*», которое объединит это предложение с предыдущим, и слово «*because*» уйдет во вторую часть предложения. Если вы делаете выводы, то логично воспользоваться словами «*thus*», «*as a result*», «*to the end*», «*consequently*», «*hence*», «*in short*», «*subsequently*», «*therefore*». Такие слова избавят вас от необходимости начинать предложение со слова «*so*». Кроме того, не рекомендуется использовать в конце предложений «*too*», «*also*», «*thought*», «*yet*».

При написании научных работ не рекомендуется использовать слово «*get*». Во-первых, «*get*» является признаком плохого стиля в научной работе. Во-вторых, понятность и ясность предложения будет всегда лучше, когда вы избегаете «*get*» и используете вместо него более подходящие глаголы такие как «*have*», «*receive*», «*obtain*», «*possess*» или «*become*». Подобным образом и фразы с «*get*» заменяются одним словом, которое более четко выражает мысль. Например, альтернативами к «*get rid of*» могут быть слова «*delete*», «*eliminate*», «*omit*», «*remove*», а выражение «*get better*» лучше заменить на «*ameliorate*», «*improve*», «*recover*». Рассмотрим пример с глаголом «*get*». «*My supervisor got excited when I got some results using samples I got from Africa. However, she got angry when she got to know that I had got hold of them illegally*». Улучшенный текст выглядит более формальным, когда «*got*» заменен другими глаголами. «*My supervisor became excited when I obtained some results using samples from Africa. However, she grew angry when she found out that I acquired them illegally*».

Электронные письма и текстовые сообщения по мнению Тима Скерна постепенно подводят нас к исчезновению артиклей «*a*» и «*the*» из английского языка, а пока они полностью не исчезли, важно их правильно употреблять в английском языке [5]. Кроме того, использование их представляет зачастую особую проблему для тех, у которых в родном языке таких грамматических категорий нет. Это носители китайского, японского, славянских языков, и большинство африканских языков. Рассмотрим три примера. «*During his voyages, Darwin noticed variation in animals. He became interested*

*in a variation in the beaks of finches. Only a scientist with Darwin's background could have noticed the variation in these birds*». Слово «*variation*» встречается в каждом предложении. В первом предложении перед ним артикль отсутствует «*a*» или «*the*», поскольку это универсальное понятие. Во втором предложении слово «*variation*» употребляется уже с неопределенным артиклем «*a*», поскольку вариация в клювах это лишь одна вариация из многих, которые наблюдал ученый. В третьем предложении перед словом «*variation*» стоит определенный артикль «*the*», поскольку эта вариация уже знакома, она упомянута во втором предложении.

При написании аннотаций, статей на английском языке иногда возникает вопрос о выборе его вариантов: британский или американский. В качестве ответа следует отметить, что не важно какой вариант английского будет выбран, куда важнее, четкость, понятность и краткость вашей статьи. Вряд ли редактор американского научного журнала отклонит статью из-за того, что написана она на английском с другого континента. Расстановка запятых в американском варианте английского языка или написание «*sulphate*»/«*sulfate*» не будет судьбоносным решением для вашей работы. Если редакция приняла вашу статью к изданию, то корректоры подправят ее под нормы данного журнала. Если вы только начинаете писать научные работы, то предпочтение можно отдать американскому варианту английского языка по двум причинам. Во-первых, орфография в американском английском более простая, чем в британском английском. Во-вторых, американский английский моложе британского варианта. Американская грамматика, по представлению А. Шопенгауэра менее совершенна, чем британская. В качестве доказательства можно перечислить особенности использования собирательных существительных «*team are playing/team is playing*», некоторых форм глаголов «*got/gotten*», место наречий. Десятки различий встречаются в употреблении предлогов. Например, в американском английском некоторые предлоги опускаются, а в британском варианте английского языка необходимы для использования. Так, британский журнал «*Nature*» может написать «*On Monday the students protested against the removal of scientific writing from their curriculum*». В противоположность, американский журнал «*Science*» структурировал бы предложение с меньшим количеством предлогов. «*Monday the students protested the removal of scientific writing from their curriculum*». Таким образом, лучше не тратить время на раздумывание о выборе варианта английского, а сконцентрироваться на основных моментах научной работы. Читатели запомнят вас по качеству работы и продвижению в знаниях, а не по тому какой вариант английского языка вы использовали для написания вашей статьи. В общем, не слово главное, а образ мыслей!

### Заключение

Таким образом, полные, связные, пунктуационно оформленные предложения с законченной мыслью используются при написании научной литературы. Такие принципы утвердились много лет назад и со временем мало изменились. Руководствуясь данными принципами, можно предотвратить конфликтные ситуации с научным сообществом и сэкономить время при написании научных статей.

---

#### ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Paxman, J. The English. – London: Penguin Books, 1999, p. 234.
  2. Шопенгауэр А. Мир как воля и представление. М.: Мысль, - 1993. – 626 с.
  3. Bryson, B. Mother tongue: The story of the English language. – NY.: – Penguin, 2008. – 269 с.
  4. Skirn, T. Writing scientific English. Facultas. WUV, 2009 – 191с.
  5. Там же.
-



**Nadezhda V. Utkina,**

*Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[utkina-nv@yandex.ru](mailto:utkina-nv@yandex.ru)

**Alexey E. Golubev,**

*Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Senior researcher, ishlinisky institute for problems in mechanics of Russian academy of science, Moscow, Russia*

[v-avgolu@hotmail.com](mailto:v-avgolu@hotmail.com)

**Alexandr I. Romanytchev,**

*Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

**About conducting classes on the topic "calculation of curvilinear integrals"**

**Abstract.** In order to improve the level of mathematical training of students, it is necessary to pay special attention to the basic issues of mathematics. The study of curvilinear integrals is an important component of the mathematical education of students and is a mandatory topic in the course of mathematical analysis for students of mathematical and technical specialties. Successful mastering of this topic helps students to solve theoretical and applied problems of physics, mechanics and related engineering disciplines. The content of the article is of interest to both teachers and students.

**Keyword:** calculation of curvilinear integrals, application of curvilinear integrals, Green's equation.

## НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

### Аннотация

В технических университетах дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в образовательные программы обучения для большинства специальностей. Цель статьи - представить материалы, достаточные для изложения темы «Законы больших чисел» с учетом количества часов, выделяемых на изучение дисциплины на разных специальностях. Приведены формулировки теорем Чебышева, Маркова, Хинчина, Бернулли и Пуассона и их доказательства. Разобраны примеры решения задач по данной теме. Содержание статьи будет полезно студентам и преподавателям технических университетов.

### Ключевые слова

законы больших чисел, случайные величины, сходимость по вероятности, математическое ожидание, дисперсия, схема испытаний Бернулли

### АВТОР

**Хорькова Нина Григорьевна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
ninakhorkova@bmstu.ru

### Введение

Под законами больших чисел в теории вероятностей понимается ряд теорем, в которых устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным. В учебниках и задачниках по теории вероятностей (см., например, [1]-[5]) рассматриваются различные наборы теорем, называемых законами больших чисел. В данной работе, следуя [6], приводятся шесть формулировок закона больших чисел, учитывающих особенности последовательностей случайных величин. Так, например, выделены теорема Чебышева и обобщенная теорема Чебышева, первая из которых поясняет смысл математического ожидания случайной величины, и то, почему его называют средним значением. Также приведена теорема Бернулли, которая обосновывает статистическое определение вероятности. В процессе доказательства каждой теоремы возникает неравенство, использование которого позволяет доказать сходимость последовательности случайных величин. Также эти неравенства позволяют оценивать вероятности событий, наблюдаемых в некоторой серии опытов, число опытов, необходимых для оценки вероятности с заданной точностью и т.п. Такие неравенства в тексте взяты в рамки. Отметим, что все эти неравенства являются следствиями неравенства Чебышева, которое дает достаточно грубую оценку вероятности события. Поэтому при решении задач полезно сравнить оценки, полученные с помощью законов больших чисел, и с помощью следствий центральной предельной теоремы.



### Методология и результаты исследования

В теории вероятностей рассматриваются различные виды сходимости последовательностей случайных величин (сходимость всюду, сходимость к нулю с вероятностью 1, или почти наверное, сходимость в среднем квадратичном, сходимость по вероятности). Далее рассматриваются формулировки закона больших чисел, в которых используется сходимость по вероятности.

**Определение.** Последовательность случайных величин  $\{X_n\}$ , заданных на одном и том же вероятностном пространстве, **сходится по вероятности** к случайной величине  $X$  при  $n \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0. \quad (1)$$

Для сходимости по вероятности последовательности случайных величин будем использовать обозначение  $X_n \xrightarrow{P} X$ . Условие (1) удобно записать также в следующем виде:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \exists N : \forall n > N P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \delta. \quad (2)$$

При доказательстве теорем, выражающих закон больших чисел, используют второе неравенство Чебышева в центрированной форме. Доказательство этого утверждения можно найти в большинстве учебников по теории вероятностей.

**Второе неравенство Чебышева.** Пусть  $X$  - случайная величина с математическим ожиданием  $M[X]$  и дисперсией  $D[X]$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство:

$$P(|X - M[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим модель, в рамках которой будет сформулирован первый вариант закона больших чисел. Пусть  $X$  - случайная величина с математическим ожиданием  $M[X]$  и дисперсией  $D[X]$ . Над случайной величиной  $X$  производится серия из  $n$  независимых опытов и вычисляется среднее арифметическое наблюдаемых значений. Найдем математическое ожидание и дисперсию среднего арифметического наблюдаемых значений и выясним, как они изменяются с увеличением  $n$ . Для решения этой задачи введем случайные величины  $X_i$  - значение случайной величины  $X$  в  $i$ -м опыте. Тогда  $X_1, \dots, X_n$  - совокупность независимых случайных величин, каждая из которых распределена по тому же закону, что и случайная величина  $X$ . Рассмотрим случайную величину  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  - «среднее арифметическое наблюдаемых значений». Тогда

$$M[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X] = M[X], D[Y] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X] = \frac{1}{n} D[X].$$

Таким образом, математическое ожидание  $M[Y]$  не зависит от  $n$ , а дисперсия  $D[Y] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Вторым фактом означает, что при  $n \gg 1$   $Y$  - случайная величина со сколь угодно малой дисперсией, т.е. при  $n \gg 1$  случайная величина  $Y$  ведет себя почти как неслучайная величина.

**Теорема Чебышева.** Пусть  $X$  - случайная величина с математическим ожиданием  $M[X]$  и дисперсией  $D[X]$ , над которой производятся  $n$  независимых опытов. Пусть  $X_i$  - значение случайной величины  $X$  в  $i$ -м опыте. Тогда среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины  $X$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к ее математическому ожиданию  $M[X]$ :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} M[X]$ .

**Доказательство.** Применим второе неравенство Чебышева (3) к случайной величине  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ :

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - M[X]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D[X]}{n\varepsilon^2}. \quad (4)$$

Очевидно, что  $\frac{D[X]}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - M[X] \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0. \blacksquare$$

**Обобщенная теорема Чебышева.** Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  - независимые случайные величины с математическими ожиданиями  $M[X_i]$  и дисперсиями  $D[X_i]$ , причем  $\exists L > 0$  такое, что  $D[X_i] < L, \forall n$ , т.е. дисперсии ограничены в совокупности. Тогда среднее арифметическое наблюдаемых значений случайных величин  $X_i$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i].$$

**Доказательство.** Для дисперсии случайной величины  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  имеем  $D[Y] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] \leq L/n$ . Далее, применяя к случайной величине  $Y$  второе неравенство Чебышева, получим

$$P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{L}{n\varepsilon^2}. \quad (5)$$

Следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0. \blacksquare$

Следствием обобщенной теоремы Чебышева является

**Теорема Хинчина.** Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с математическими ожиданиями  $M[X_i] = m$  и дисперсиями  $D[X_i] = D$ . Тогда  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} m$ .

При доказательстве этой теоремы используется неравенство

$$P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{D}{n\varepsilon^2}. \quad (6)$$

Обобщением теорем Чебышева на случай зависимых случайных величин является теорема Маркова, которая доказывается аналогичным образом.

**Теорема Маркова.** Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  - случайные величины с математическими ожиданиями  $M[X_i]$ . Пусть также выполнено следующее условие  $\frac{1}{n^2} D[\sum_{i=1}^n X_i] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i]$ .

Следующие две формы закона больших чисел используют схемы испытаний Бернулли. Рассмотрим сначала классическую схему Бернулли. Производится  $n$  независимых опытов, каждый из которых имеет два исхода (появление некоторого события  $A$  - «успех» или появление противоположного события  $\bar{A}$  - «неуспех»), причем вероятность появления события  $A$  во всех опытах постоянна и равна  $p$ . Пусть случайная величина  $X_i$  - индикатор события  $A$  в  $i$ -м опыте,  $M[X_i] = p$ ,  $D[X_i] = pq$ ,  $q = 1 - p$ . Тогда  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  - число появлений события  $A$  в серии из  $n$  опытов. Значение случайной величины  $X$  обозначают также как  $n_A$ . Величину  $n_A/n$  называют частотой события  $A$  в серии из  $n$  опытов. Известно, что  $M[X] = np$ ,  $D[X] = npq$  (случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы).

**Теорема Бернулли.** Частота события  $A$  сходится по вероятности к вероятности события  $A$ :  $\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Применив второе неравенство Чебышева (3) к случайной величине  $\frac{n_A}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , получим неравенство, из которого следует утверждение теоремы:

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \blacksquare \quad (7)$$

В обобщенной схеме испытаний Бернулли вероятность появления события  $A$  меняется от опыта к опыту:  $P(A) = p_i$  в  $i$ -м опыте. Известно, что  $M[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ ,  $D[X] = \sum_{i=1}^n p_i q_i$ .

**Теорема Пуассона.** В обобщенной схеме испытаний Бернулли  $\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^n p_i$  при  $n \rightarrow \infty$ .

#### Примеры решения задач

**Задача 1.** Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин  $\{X_n\}$ , заданных своими рядами распределений?

$X_n$	$-2\sqrt{n}$	0	$2\sqrt{n}$
$p_n$	$\frac{1}{n}$	$1 - \frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

**Решение.** Вычисляем математические ожидания  $M[X_n] = -\frac{2\sqrt{n}}{n} + 0 + \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0$ , дисперсии  $D[X_n] = M[X_n^2] - (M[X_n])^2 = 8$ ,  $D[X_n] \leq 8 = L$ . Следовательно, к рассматриваемой последовательности случайных величин применим закон больших чисел в форме обобщенной теоремы Чебышева.

**Задача 2.** Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин  $\{X_n\}$ , заданных своими рядами распределений?

$X_n$	$-5n$	0	$5n$
$p_n$	$2^{-n}$	$1 - 2^{1-n}$	$2^{-n}$

**Решение.** Вычисляем математические ожидания  $M[X_n] = 0$  и дисперсии  $D[X_n] = \frac{25n^2}{2^{n-1}}$ . Так как  $D[X_n] \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то существует такая постоянная  $L > 0$ , что  $D[X_i] < L, \forall n$ , и к рассматриваемой последовательности случайных величин также применим закон больших чисел в форме обобщенной теоремы Чебышева.

**Задача 3.** Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин  $\{X_n\}$ , заданных своими рядами распределений?

$X_n$	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
$p_n$	0,5	0,5

**Решение.** Вычисляем математические ожидания  $M[X_n] = 0$  и дисперсии  $D[X_n] = \ln n$ . Очевидно, что условие ограниченности дисперсий в совокупности нарушено. Проверим выполнение условий теоремы Маркова. Учитывая независимость случайных величин, получим

$$\frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n \ln i < \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, к рассматриваемой последовательности случайных величин применим закон больших чисел в форме теоремы Маркова.

**Задача 4.** Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин  $\{X_n\}$ , если плотность распределения случайной величины  $X_n$  имеет вид  $f_n(x) = \frac{(n+1)n^{n+1}|x|}{(x^2+n)^{n+2}}$ ?

**Решение.** Вычисляем математические ожидания и дисперсии. В силу нечетности подинтегральной функции  $M[X_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_n(x) dx = 0$ . Тогда для дисперсий получим:

$$\begin{aligned} D[X_n] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_n(x) dx = 2(n+1)n^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+n)^{n+2}} dx = \\ &= (n+1)n^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{x^2+n-n}{(x^2+n)^{n+2}} d(x^2+n) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, к рассматриваемой последовательности случайных величин применим закон больших чисел в форме обобщенной теоремы Чебышева.

**Задача 5.** Сколько надо произвести замеров поперечного сечения деревьев на большом участке, чтобы средний диаметр измеренных деревьев отличался от истинного среднего значения диаметров всех деревьев на участке меньше, чем на 2 см с вероятностью, не меньшей 0,95, если среднее квадратичное отклонение измерений не больше 10.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X_i$  - результат измерения  $i$ -го дерева. Тогда  $X_1, \dots, X_n, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с математическими ожиданиями  $M[X_i] = m$  и дисперсиями  $D[X_i]$ , причем  $D[X_i] \leq 100$ . Используем следствие неравенства (5)

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{L}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{100}{n\varepsilon^2}.$$

Решая неравенство  $1 - \frac{100}{n\varepsilon^2} \geq 0,95$  при  $\varepsilon = 2$ , получим  $n \geq 500$ .

**Задача 6.** На складе находятся 300 ящиков с одинаковыми лампочками. Из каждого ящика взяли по одной лампочке. Оценить снизу вероятность того, что средняя продолжительность горения ламп из этой выборки отличается от общей средней не более, чем на 5 часов, если среднее квадратичное отклонение не больше 6.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X_i$  - время горения лампочки из  $i$ -го ящика,  $D[X_i] < 36$ . Тогда, используя неравенство (5), получим

$$P\left(\left|\frac{1}{300} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{300} \sum_{i=1}^n M[X_i]\right| < 5\right) \geq 1 - \frac{36}{300 \cdot 25} = 0,9952.$$

**Задача 7.** Вероятность появления случайного события в одном испытании  $p = 0,8$ . Проведено 320 испытаний. В каком интервале с вероятностью  $p = 0,95$  будет лежать наблюдаемая частота?

**Решение.** Используем следствие неравенства (7):

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Решая уравнение  $1 - \frac{0,8 \cdot 0,2}{320\varepsilon^2} = 0,95$ , получим  $\varepsilon = 0,1$ . Следовательно, наблюдаемая частота будет лежать в интервале  $(0,7; 0,9)$ .

### Заключение

В работе предложена методика изложения темы «Законы больших чисел» в рамках курса «Теория вероятностей», изучаемого студентами технических университетов. Приведены различные формулировки закона больших чисел, показана идея доказательства теорем, разобраны примеры решения задач.

---

**ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ**

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов – 3-е изд., испр./ Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 456 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – 5-е изд.– М.: Высшая школа, 1998. – 576 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения.– 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – 7-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 479 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука,1984. – 608 с.
6. Вентцель Е.С. Указ. соч.

---

**Nina G. Khorkova,**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

[ninakhorkova@bmstu.ru](mailto:ninakhorkova@bmstu.ru)

**Some methodological aspects of teaching the topic "Laws of large numbers" at the technical university**

**Abstract.** The article proposes a methodology for presenting the topic "Laws of large numbers" within the course "Probability Theory", studied by students of technical universities. Various formulations of the law of large numbers (the theorems of Chebyshev, Markov, Khinchin, Bernoulli and Poisson) are considered. Examples of solving problems on this topic are analyzed in detail. The article will be useful to students and teachers of technical universities.

**Keywords:** laws of large numbers, random variables, convergence in probability, mathematical expectation, variance, Bernoulli test scheme.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»

### Аннотация

Актуальность рассматриваемой проблемы обусловлена важностью создания мотивации обучающихся к исследовательской деятельности. На примере изучения темы «Определенный интеграл и его приложения» показана взаимосвязь точных и прикладных наук. Целью работы является формирование у студентов навыков владения методами математического анализа, а также умения применять их к решению физических задач. В статье уделено внимание основным этапам изучения темы: актуализация знаний, мотивация введения понятия «определенный интеграл», проиллюстрированы геометрический и физический смыслы определенного интеграла. Показан пример составления алгоритма для решения конкретного типа физических задач, а также приведены задачи с анализом решения и набор задач с ответами для контроля освоения данной темы. Материалы статьи могут быть полезными для самостоятельной работы студентов, а также преподавателям первого курса при подготовке к проведению практических занятий.

### Ключевые слова

определенный интеграл, геометрический смысл определенного интеграла, физический смысл определенного интеграла, формула Ньютона-Лейбница, площадь плоской фигуры, объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения, физические задачи

### АВТОР

**Чигирёва Ольга Юрьевна,**  
кандидат физико-математических наук, доцент  
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Баумана», г. Москва  
mkfn12@yandex.ru

### Введение

В истории математики принято считать, что интегральное и дифференциальное исчисление, как разделы математического анализа, появились в XVIII веке, и в этом главная роль принадлежит великим ученым: Исааку Ньютону (1643-1727), Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646-1716) и Леонарду Эйлеру (1707-1783). Однако следует вспомнить научное наследие древних и средневековых ученых. Всем известен закон Архимеда о плавающих телах [1], но интересны и сделанные им математические открытия. Архимед заложил основы метода интегральных сумм; доказал, что объемы шара и описанного около него цилиндра относятся как 2:3, а площадь сегмента параболы равна  $\frac{4}{3}$  площади вписанного в него треугольника и др. [2]. Метод построения касательной к кривой, предложенный в его работе, получил свое развитие в дифференциальном исчислении. В Новое время задача о вычислении площадей плоских фигур привлекала внимание ученых, занимающихся математикой, астрономией и физикой. Иоганн Кеплер (1571-1630), Бонавентура Кавальери (1598-1647), Пьер Ферма

(1601-1665), Блез Паскаль (1623-1662) посвятили свои работы изучению метода квадратур. В трудах Ньютона и Лейбница были разработаны две различные концепции интеграла. Если использовать современную терминологию, то можно сказать, что Ньютон в своих работах использовал неопределенный интеграл и рассматривал интегрирование как операцию, обратную к дифференцированию, а Лейбниц рассматривал определенный интеграл. Дальнейшее развитие интегрального исчисления нашло свое отражение в работах Огюстена Луи Коши (1789-1857). Введя понятие определенного интеграла, Коши рассматривает неопределенный интеграл, как частный случай определенного с переменным верхним пределом [3].

Понятие «определенный интеграл» является одним из фундаментальных в курсе современного математического анализа, в котором последовательно излагаются сначала теория пределов, а затем—дифференциальное и интегральное исчисление. Интерес к данным разделам имеет важное практическое значение, так как они являются основой для математических методов [4], которые широко используются во многих науках: механике, физике, астрономии, биологии и химии. Поэтому владение методами математического анализа [5] позволит студентам применять их к решению прикладных задач в профессиональной деятельности.

### Методология и результаты исследования

Понятие определенного интеграла является одним из основных математических понятий и широко используется при решении задач, поскольку имеет различные геометрические приложения, применяется при решении задач механики, а также многих физических задач.

В соответствии с основной профессиональной образовательной программой, при освоении темы «Определенный интеграл и его приложения» планируется формирование у студентов следующих компетенций:

- 1) способность анализировать задачи профессиональной деятельности на основе методов математического анализа;
- 2) способность применять методы математического анализа в профессиональной деятельности.

Требования к освоению темы «Определенный интеграл и его приложения» определяются следующими показателями. Студент должен: *знать* определение понятия «определенный интеграл», его геометрический и физический смысл; формулу Ньютона-Лейбница, свойства определенного интеграла; геометрические и физические приложения определенного интеграла; *уметь* выбрать метод решения задачи, исходя из ее постановки; *владеть* методами математического анализа и применять их к решению прикладных задач.

#### *Повторение темы «Первообразная и неопределенный интеграл»*

Для актуализации знаний студентов по ранее изученной теме можно предложить следующие вопросы и задачи [6].

1. Какую функцию называют первообразной для функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ ?
2. Верно ли, что если  $F(x)$  — одна из первообразных функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , то и функция  $F(x) + Const$  также является первообразной для функции  $f(x)$ ?
3. Что называют неопределенным интегралом от функции  $f(x)$ ?
4. В чем заключается свойство линейности неопределенного интеграла?
5. В чем состоит метод замены переменной нахождения неопределенного интеграла?
6. Найдите неопределенный интеграл, применяя метод замены переменной:



$$1) \int x(x-1)^3 dx; \quad 2) \int \frac{\sin(\ln x) dx}{x}; \quad 3) \int \frac{x dx}{4x^2+7}; \quad 4) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}; \quad 5) \int \frac{e^{2x} dx}{e^x+1}.$$

7. В чем состоит метод интегрирования по частям нахождения неопределенного интеграла?

8. Найдите неопределенный интеграл, применяя метод интегрирования по частям:

$$1) \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad 2) \int x^2 \sin x dx.$$

#### Мотивация введения понятия «определенный интеграл»

Для мотивации [7] введения понятия «определенный интеграл» целесообразно рассмотреть задачу о нахождении пути, пройденного телом при прямолинейном движении в одном направлении за данный промежуток времени при известной зависимости мгновенной скорости  $v(t)$  тела от времени.

Решение данной задачи для частных случаев рассмотрено в школьном курсе физики [8] и известно обучающимся: при прямолинейном *равномерном* движении скорость  $v(t) = v_0 = \text{const}$ , а путь, пройденный телом за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , равен  $S = v_0(t_2 - t_1)$  – площади закрашенного прямоугольника (см. рис. 1); при прямолинейном *равноускоренном* движении мгновенная скорость линейно зависит от времени  $v(t) = v_0 + at$ , ( $a > 0$ ), а путь, пройденный телом за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , равен площади закрашенной трапеции (см. рис. 2).

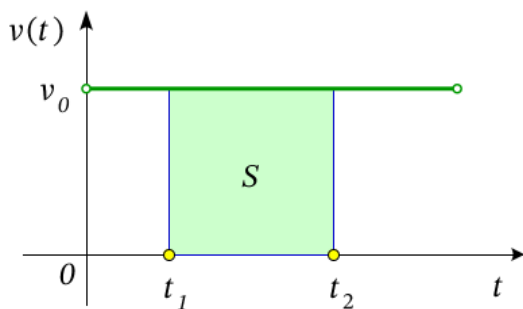


Рис. 1

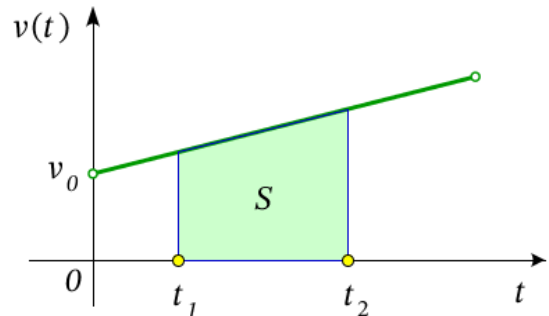


Рис. 2

Далее рассмотрим следующую задачу: как при прямолинейном движении в одном направлении найти путь, пройденный телом за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , при произвольно заданной зависимости мгновенной скорости  $v(t)$  тела от времени. Решение данной задачи сводится к нахождению площади  $S$  фигуры, ограниченной снизу осью  $Ot$ , сверху – графиком функции  $v(t)$ , а слева и справа – отрезками вертикальных прямых  $t = t_1$  и  $t = t_2$ .

Однако, геометрическим методом найти точное значение площади  $S$  не удастся, и требуется поиск аналитического метода, основанного на новых теоретических знаниях.

#### Введение понятия «определенный интеграл»

Изложение новой учебной информации организуется в соответствии с содержанием учебников по математическому анализу [9, 10]. Для введения понятия «определенный интеграл» рассматривается традиционная задача о нахождении площади криволинейной трапеции.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a, b]$ . Найдем площадь криволинейной трапеции – плоской фигуры, ограниченной снизу осью  $Ox$ , сверху – графиком функции  $f(x)$ , а слева и справа – отрезками вертикальных прямых  $x = a$  и  $x = b$  (см. рис. 3).

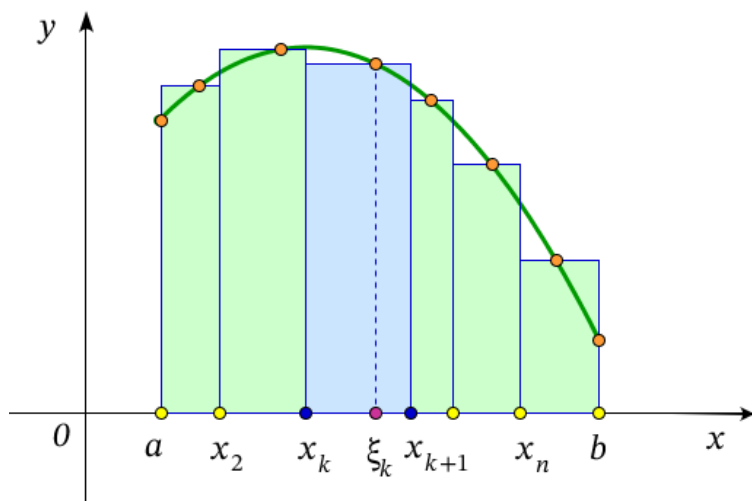


Рис. 3

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками:  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ .

Выберем произвольно точку  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n}$  и найдем значение функции  $f(x)$  в каждой точке  $\xi_k$ :  $f(\xi_k)$ .

Вычислим площадь всех закрашенных прямоугольников:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n, \quad \text{где } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Площадь  $S$  криволинейной трапеции приближенно равна площади  $S_n$  ступенчатой фигуры, составленной из  $n$  прямоугольников. Для того чтобы найти более точное значение площади криволинейной трапеции, нужно отрезок  $[a, b]$  разбить на большее число частей меньшей длины. Устремим  $\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$  к нулю (неограниченно увеличивая  $n$ ) и примем за точное значение площади  $S$  криволинейной трапеции предел суммы:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Рассмотренная задача приводит к понятию определенного интеграла.

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками:  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ . Выберем произвольно точку  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{1, n}$  и найдем значение функции  $f(x)$  в каждой точке  $\xi_k$ :  $f(\xi_k)$ . Составим сумму  $S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$  (где  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ), которую называют *интегральной суммой* функции  $f(x)$ , отвечающей данному разбиению отрезка  $[a, b]$  и выбору точек  $\xi_k, k = \overline{1, n}$ . Обозначим через  $\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ .

Если существует конечный предел  $S$  интегральных сумм функции  $f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , не зависящий ни от разбиения отрезка  $[a, b]$  на части, ни от выбора точек  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ , то его называют *определенным интегралом* от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$  и обозначают:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

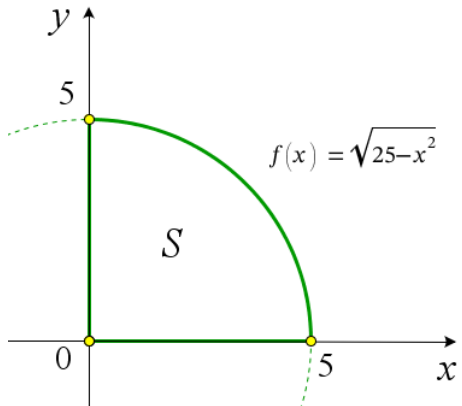
При этом функцию  $f(x)$  называют *интегрируемой* (по Риману) на отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема.** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  интегрируема на этом отрезке.

**Геометрический смысл** определенного интеграла: число  $S$  – площадь криволинейной трапеции, – покажем на следующем примере (см. табл. 1).

Таблица 1.

## Иллюстрация геометрического смысла определенного интеграла

Вычисление интеграла	Геометрическая интерпретация
<p><b>Пример.</b> Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите:</p> $\int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx.$ <p><b>Решение.</b> Рассмотрим функцию</p> $f(x) = \sqrt{25-x^2}, \quad x \in [0; 5].$ <p>Найдем площадь 1/4 части круга радиуса 5 (см. рис. 4):</p> $S = \frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 = 6,25\pi$ <p>и воспользуемся геометрическим смыслом определенного интеграла</p> $\int_0^5 \sqrt{25-x^2} dx = 6,25\pi.$	 <p style="text-align: center;">Рис. 4</p>

## Формула Ньютона-Лейбница

Прежде чем ввести формулу Ньютона-Лейбница, поставим перед обучающимися следующие вопросы: «Как можно вычислить определенный интеграл?», «Связан ли определенный интеграл с неопределенным? Если «да», то каким образом?» и перейдем к физической интерпретации определенного интеграла на примере задачи о нахождении пути, пройденного телом за заданный промежуток времени, при прямолинейном движении в одном направлении, когда известна зависимость мгновенной скорости  $v(t)$  тела от времени.

Из курса физики известно, что  $v(t) = x'(t)$ , где  $x(t)$  – закон движения тела по прямой. Тогда путь, пройденный телом за промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , равен  $S = x(t_2) - x(t_1)$ . С другой стороны,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt,$$

откуда получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = x(t_2) - x(t_1).$$

Обратим внимание, что математически равенство  $v(t) = x'(t)$  означает, что  $x(t)$  – первообразная функции  $v(t)$ .

Введем формулу Ньютона-Лейбница: пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , и  $F(x)$  – одна из ее первообразных. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

которое называют *формулой Ньютона-Лейбница*.

## Основные свойства определенного интеграла

1. **Линейность:** если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$  и справедливо равенство

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2. **Аддитивность:** если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, x_0]$  и  $[x_0, b]$ , то функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3. **Интегрируемость модуля функции:** если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то справедливо равенство

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

### Вычисление определенного интеграла

Для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции применяют формулу Ньютона-Лейбница, используя такие же приемы отыскания первообразных, как и для случая неопределенного интеграла [11], но важно учитывать некоторые особенности. Проиллюстрируем выше сказанное на конкретных примерах.

При решении следующей задачи первообразная находится с помощью свойства линейности определенного интеграла и стандартной таблицы интегралов [12], а затем применяется формула Ньютона-Лейбница.

**Задача 1.** Используя физический смысл определенного интеграла, найдите путь, пройденный телом при прямолинейном движении, за промежуток времени  $0 \leq t \leq 5$ с, если зависимость скорости тела от времени выражается формулой  $v(t) = 2t + 3t^2$  м/с [13].

**Решение.** Вычислим путь, пройденный телом, за указанный промежуток времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_0^5 (2t + 3t^2) dt = 2 \int_0^5 t dt + 3 \int_0^5 t^2 dt = (t^2 + t^3) \Big|_{t=0}^5 = 150 \text{ (м)}.$$

Основными методами вычисления определенного интеграла являются метод замены переменной и формула интегрирования по частям. Приведем формулировки данных теорем [14] и продемонстрируем методику их применения к решению типовых задач, предложенных для самостоятельной работы в сборнике [15].

**Теорема (замена переменной в определенном интеграле).**

Пусть выполнены следующие условия:

1) функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;  
 2) отрезок  $[a, b]$  является множеством значений функции  $x = g(t)$ , определенной на промежутке  $\alpha \leq t \leq \beta$  и имеющей на этом промежутке непрерывную производную;

3)  $g(\alpha) = a$  и  $g(\beta) = b$ .

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

Следует обратить внимание студентов на результат применения данной теоремы к функции  $f(x)$ , являющейся четной (нечетной) и непрерывной на отрезке  $[-a, a]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ – четная;} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ – нечетная.} \end{cases}$$

Далее на конкретном примере рассмотрим метод замены переменной для вычисления определенного интеграла.

**Задача 2.** Вычислите определенный интеграл

$$\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2} dx.$$

**Решение.** Для наглядности представления решения задачи предлагается следующая форма записи (см. табл. 2), содержащая подробные пояснения к каждому этапу решения задачи.

Таблица 2.

**Разбор типовой задачи на вычисление определенного интеграла**

Пояснения к решению задачи	Запись решения
Вычислим определенный интеграл:	$\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2} dx =$
воспользуемся подстановкой: $x = \ln t$ , $dx = \frac{dt}{t}$ ; найдем пределы интегрирования: при $x = \ln 2$ получаем значение $t = 2$ , а при $x = \ln 6$ – значение $t = 6$ ;	$= \int_2^6 \frac{\sqrt{t-2}}{t+2} dt =$
применим метод замены переменной: $u = \sqrt{t-2}$ , $du = \frac{dt}{2\sqrt{t-2}} = \frac{dt}{2u}$ ; определим пределы интегрирования: при $t = 2$ получаем значение $u = 0$ , а при $t = 6$ – значение $u = 2$ ;	$= 2 \int_0^2 \frac{u^2}{u^2 + 4} du =$
выполним преобразование подынтегральной функции:	$= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{u^2 + 4}\right) du =$
воспользуемся свойством линейности определенного интеграла:	$= 2 \int_0^2 du - 8 \int_0^2 \frac{du}{u^2 + 4} =$
найдем первообразные (таблица интегралов) и применим формулу Ньютона-Лейбница:	$= 2u \Big _0^2 - 8 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} \Big _0^2 =$
преобразуем полученное выражение и запишем ответ:	$= 4 - 4 \frac{\pi}{4} = 4 - \pi.$

**Теорема (формула интегрирования по частям).**

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, b]$ . Тогда имеет место следующая формула

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = (u(x)v(x)) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

Следующий пример иллюстрирует применение формулы интегрирования по частям.

**Задача 3.** Вычислите определенный интеграл

$$\int_1^e \ln^2 x dx.$$

**Решение.** Для вычисления данного интеграла дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \frac{dx}{x}; \\ dv = dx, \quad v = x; \end{array} \right| = (x \ln^2 x)|_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx = \\ &= e - 2 \int_1^e \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}; \\ dv = dx, \quad v = x; \end{array} \right| = e - 2 \left[ (x \ln x)|_1^e - \int_1^e dx \right] = \\ &= e - 2[e - (e - 1)] = e - 2. \end{aligned}$$

### Вычисление площади плоской фигуры

При решении задач на вычисление площадей плоских фигур применяется геометрический смысл определенного интеграла.

Если плоская фигура ограничена снизу и сверху соответственно графиками функций  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$ , непрерывных на отрезке  $[a; b]$ , а слева и справа – отрезками вертикальных прямых  $x = a$  и  $x = b$ , то ее площадь  $S$  может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Приведем подробные решения типовых задач по данной теме.

**Задача 4.** Используя геометрический смысл определенного интеграла, найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{и} \quad y = 5 - \frac{1}{4}(x - 2)^2.$$

**Решение.** Построим графики функций  $y_1(x) = \frac{1}{4}x^2$  и  $y_2(x) = 5 - \frac{1}{4}(x - 2)^2$ .

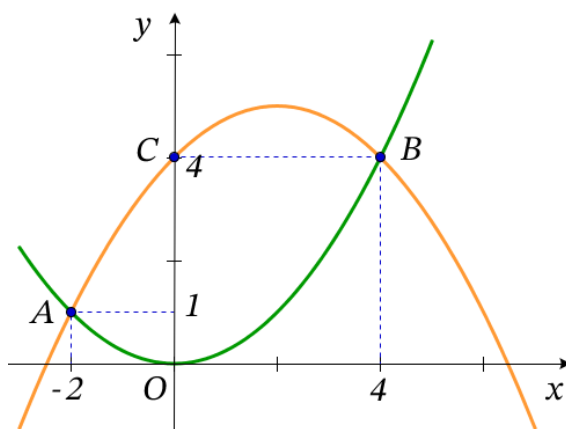


Рис. 5

Отметим следующее:

- 1) графики функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  пересекаются в двух точках  $A(-2, 1)$  и  $B(4, 4)$ ;
- 2) функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  непрерывны на отрезке  $[-2; 4]$ ;
- 3) неравенство  $y_1(x) \leq y_2(x)$  выполняется  $\forall x \in [-2; 4]$ .

Тогда площадь фигуры (см. рис. 5), ограниченной кривыми  $AOB$  и  $BCA$  может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_{-2}^4 (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Преобразуем подынтегральную функцию и вычислим определенный интеграл:

$$S = \int_{-2}^4 \left( 5 - \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \int_{-2}^4 \left( 4 + x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left( 4x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^4 = 18.$$

Следующий пример показывает прием решения задачи о вычислении площади плоской фигуры для случая, когда одна из ее границ (например, верхняя) задана графиком непрерывной функции  $y(x)$  вида:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & \text{если } a \leq x \leq x_0; \\ y_2(x), & \text{если } x_0 \leq x \leq b; \end{cases}$$

то есть в промежутке  $a \leq x \leq b$  непрерывная функция  $y(x)$  задана различными аналитическими выражениями.

**Задача 5.** Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми

$$y = 2x, \quad y = 6 - x \quad \text{и} \quad y = \frac{x}{2}.$$

**Решение.** На рис. 6 построены графики линейных функций:

$y_1(x) = 2x$  (прямая  $OA$ ),  $y_2(x) = 6 - x$  (прямая  $AB$ ) и  $y_3(x) = \frac{x}{2}$  (прямая  $OB$ ) и найдены координаты их точек пересечения:  $O(0,0)$ ,  $A(2,4)$  и  $B(4,2)$ .

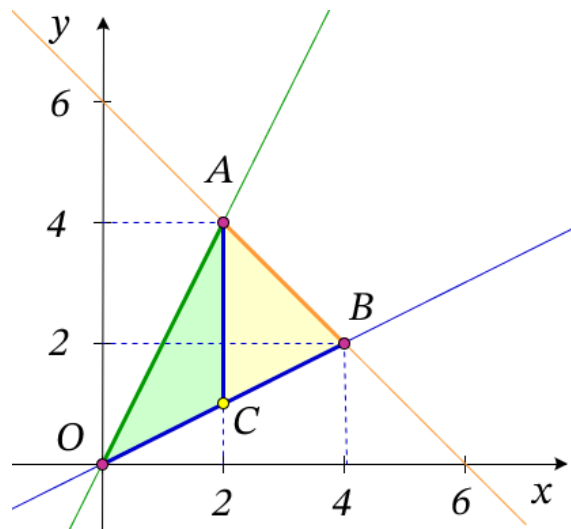


Рис. 6

Так как  $\triangle OAB$  ограничен снизу графиком функции  $y_3(x) = \frac{x}{2}$  (отрезок прямой  $OB$ : при  $0 \leq x \leq 4$ ), а сверху — графиками функций  $y_1(x) = 2x$  (отрезок прямой  $OA$ : при  $0 \leq x \leq 2$ ) и  $y_2(x) = 6 - x$  (отрезок прямой  $AB$ : при  $2 \leq x \leq 4$ ), то искомая площадь  $S$  треугольника  $OAB$  будет равна сумме площадей  $\triangle OAC$  и  $\triangle ABC$ :

$$\begin{aligned} S &= S(\triangle OAC) + S(\triangle ABC) = \int_0^2 (y_1(x) - y_3(x)) dx + \int_2^4 (y_2(x) - y_3(x)) dx = \\ &= \int_0^2 \left( 2x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_2^4 \left( 6 - x - \frac{x}{2} \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^2 x dx + 6 \int_2^4 dx - \frac{3}{2} \int_2^4 x dx = 6. \end{aligned}$$

#### Вычисление объема тела вращения и площади его поверхности

В школьном курсе геометрии рассматриваются тела вращения: шар, прямой круговой цилиндр, конус и приводятся формулы для вычисления объемов данных тел и площадей их поверхностей. Интерес представляет общий случай, когда поверхность тела образована вращением вокруг оси  $Ox$  некоторой кривой.



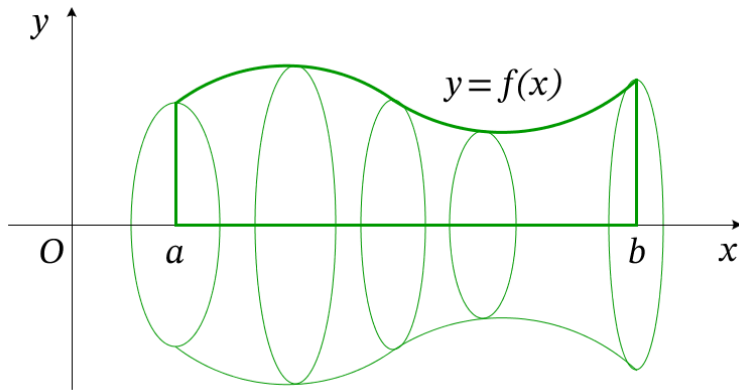


Рис. 7

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда объем  $V$  тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции (см. рис. 7), ограниченной снизу осью  $Ox$ , сверху – графиком функции  $f(x)$ , а слева и справа – отрезками вертикальных прямых  $x = a$  и  $x = b$ , может быть найден по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

*Замечание.* Если тело образовано вращением вокруг оси  $Ox$  плоской фигуры, ограниченной снизу и сверху графиками функций  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$ , непрерывных на отрезке  $[a; b]$ , а слева и справа – отрезками вертикальных прямых  $x = a$  и  $x = b$ , то его объем  $V$  может быть вычислен по формуле

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx.$$

Если на отрезке  $[a; b]$  функция  $y = f(x)$  имеет непрерывную производную  $f'(x)$ , то площадь  $S$  поверхности, образованной вращением графика функции  $f(x)$  вокруг оси  $Ox$ , может быть найдена по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Задача 6.** Найдите объем и площадь поверхности тора (см. рис. 8), полученного вращением круга, заданного уравнением  $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ,  $a < b$ , вокруг оси  $Ox$  (см. рис. 9).

*Решение.*

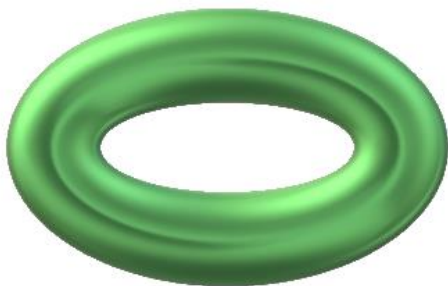


Рис. 8

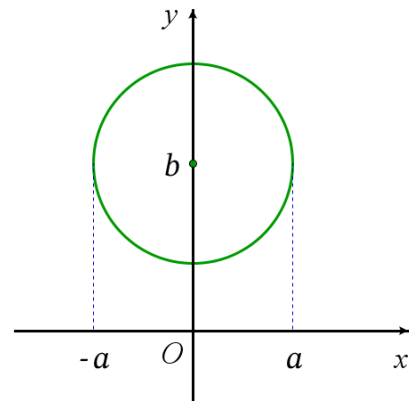


Рис. 9

Вычислим объем тора

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-a}^a \left( (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right) dx = \\
 &= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt; \\ x = \pm a \Rightarrow t = \pm \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\
 &= 4\pi b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t} a \cos t dt = 4\pi a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = \\
 &= 4\pi a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\pi a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi^2 a^2 b.
 \end{aligned}$$

Площадь  $S$  поверхности тора равна сумме площадей  $S_1$  и  $S_2$  поверхностей, образованных вращением графиков функций  $y_1(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$  (нижняя дуга окружности) и  $y_2(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$  (верхняя дуга окружности) вокруг оси  $Ox$

$$\begin{aligned}
 S_{2,1} &= 2\pi \int_{-a}^a (b \pm \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \pm 2\pi a \int_{-a}^a dx = \\
 &= 2\pi ab \left( \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_{-a}^a \pm 4\pi a^2 = 2\pi^2 ab \pm 4\pi a^2.
 \end{aligned}$$

Следовательно,  $S = 4\pi^2 ab$ .

#### Физические задачи на применение определенного интеграла

При решении задач с физическим содержанием необходимо:

1. выделить физические величины, которые используются в задаче;
2. определить каким физическим законом (формулой) связаны эти величины (см. табл. 3);
3. переформулировать физическую задачу на язык математики;
4. применить математический метод для нахождения искомой величины;
5. выполнить проверку полученного решения, исходя из теории размерностей физических величин;
6. записать результат решения задачи, используя физические понятия.

Таблица 3.

#### Примеры типов задач с физическим содержанием

Искомая физическая величина	Физические законы
Работа, совершаемая	
1) при выкачивании жидкости из резервуара, на преодоление силы тяжести;	второй закон Ньютона;
2) при извлечении на поверхность тела, погруженного в жидкость;	закон Архимеда;
3) при растяжении (сжатии) пружины, стержня;	закон Гука;
4) при изотермическом сжатии газа.	Закон Бойля-Мариотта.
Сила давления на пластину, погруженную вертикально в жидкость.	Закон Паскаля.
Время вытекания жидкости из сосуда.	Закон Торричелли.

Алгоритм решения задачи о вычислении силы давления на пластину высоты  $h$ , погруженную вертикально в жидкость:

1. выполним рисунок к задаче и введем обозначения;
2. рассмотрим элементарную площадку, представляющую собой криволинейную трапецию высоты  $\Delta x$ , расположенную на глубине  $x$ :  $[x, x + \Delta x] \subset [0, h]$ , где  $\Delta x$  – достаточно мало.

3. примем следующие допущения:

1) давление во всех точках элементарной площадки практически одинаково;

2) площадь криволинейной площадки приближенно будем считать равной площади прямоугольника высоты  $\Delta x$  и ширины  $l(x)$ , определяемой формой пластины:  $\Delta S \approx l(x)\Delta x$ ;

4. согласно закону Паскаля [16], при сделанных допущениях, значение силы давления на элементарную площадку приближенно будет равно  $\Delta F \approx \rho g x l(x)\Delta x$ ; следовательно, дифференциал  $dF = \rho g x l(x)dx$ ;

5. вычислим силу давления, действующую на всю пластину, погруженную в жидкость:

$$F = \rho g \int_0^h x l(x) dx.$$

**Задача 7.** Найдите силу давления на квадратную пластину со стороной  $h$ , погруженную вертикально в жидкость плотности  $\rho$ . Выясните, отличаются ли значения силы давления на части квадрата, на которые он разделяется диагональю.

*Решение.*

1. Выполним рисунок к задаче и введем обозначения (см. рис. 10).

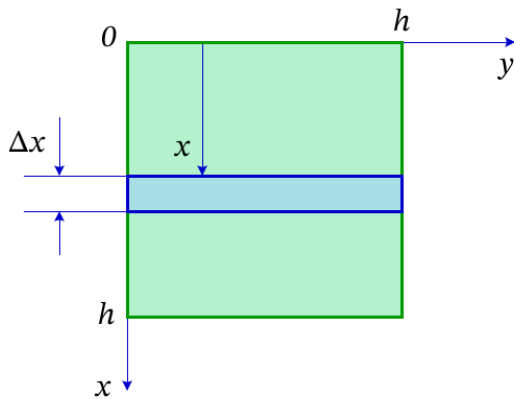


Рис. 10

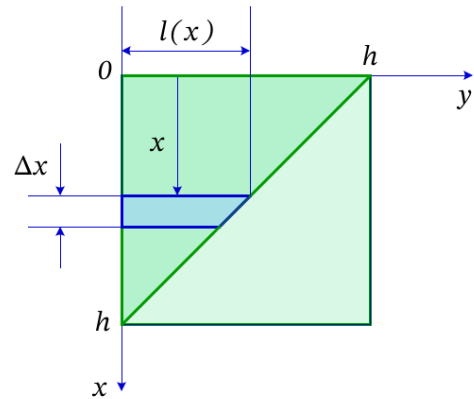


Рис. 11

2. Рассмотрим элементарную площадку (прямоугольник) высоты  $\Delta x$ , расположенную на глубине  $x$ :  $[x, x + \Delta x] \subset [0, h]$ , где  $\Delta x$  – достаточно мало.

3. Примем следующее допущение: давление во всех точках элементарной площадки практически одинаково; тогда значение силы давления на эту площадку приближенно будет равно  $\Delta F \approx \rho g x \Delta S$ , где  $\Delta S = h \Delta x$ ;

следовательно, дифференциал  $dF = \rho g h x dx$ .

4. Вычислим силу давления, действующую на всю квадратную пластину, погруженную в жидкость:

$$F = \rho g h \int_0^h x dx = \frac{1}{2} \rho g h^3.$$

5. Для треугольной пластины (см. рис. 11) проведем аналогичные рассуждения: рассмотрим элементарную площадку (криволинейную трапецию) высоты  $\Delta x$ , расположенную на глубине  $x$ :  $[x, x + \Delta x] \subset [0, h]$ , где  $\Delta x$  – достаточно мало.

6. Примем следующие допущения:

1) давление во всех точках элементарной площадки практически одинаково;

2) площадь криволинейной площадки приближенно будем считать равной площади прямоугольника высоты  $\Delta x$  и ширины  $l(x)$ , определяемой формой пластины:  $\Delta S \approx l(x)\Delta x$ ; записав уравнение прямой (диагональ квадрата), получаем  $l(x) = h - x$ , тогда  $\Delta S \approx (h - x)\Delta x$ .

7. При сделанных допущениях значение силы давления на элементарную площадку приближенно будет равно  $\Delta F_1 \approx \rho g x(h-x)\Delta x$ ;  
следовательно, дифференциал  $dF_1 = \rho g x(h-x)dx$ .

8. Вычислим силу давления, действующую на треугольную пластину, погруженную в жидкость:

$$F_1 = \rho g \int_0^h x(h-x)dx = \frac{1}{6} \rho g h^3.$$

9. Сила давления, действующая на другую треугольную пластину, будет равна  $F_2 = F - F_1$ . Таким образом, силы давления на две части квадратной пластины, разделенной ее диагональю, отличаются в  $k = \frac{F_2}{F_1} = 2$  раза.

*Ответ:* сила давления на квадратную пластину равна  $\frac{1}{2} \rho g h^3$ , а силы давления на ее части отличаются в 2 раза.

### Задания для контрольной работы

Для оценивания результатов освоения студентами данной темы предлагаются задачи для самостоятельной работы из сборника [17].

**Задача 8.** Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y^2 = 4x$  и  $x^2 = 4y$ .

*Ответ:*  $S = \int_0^4 \left( 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{16}{3}.$

**Задача 9.** Найдите силу давления на пластину, погруженную вертикально в жидкость плотности  $\rho$ . Пластина имеет форму полукруга радиуса  $R$ , диаметр которого находится на поверхности жидкости.

*Ответ:*  $F = \rho g \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} \rho g R^3.$

**Задача 10.** Цилиндр с подвижным поршнем заполнен паром объема  $V_0$  под давлением  $p_0$ . Найдите работу, которую надо совершить, чтобы при изотермическом процессе объем пара уменьшить в два раза (цилиндр расположен горизонтально).

*Указание:* при изотермическом процессе  $pV = const$ .

*Ответ:*  $A = p_0 V_0 \int_0^{\frac{V_0}{2S}} \frac{dx}{\frac{V_0}{S} - x} = p_0 V_0 \ln 2,$

где  $S$  – площадь поперечного сечения поршня.

### Заключение

Тема «Определенный интеграл и его приложения» читается студентам не только математических, но и других специальностей, которые связаны с решением прикладных задач в различных областях науки: механике, физике, астрономии, биологии и химии. Для создания познавательного интереса к данной теме и мотивации обучающихся к дальнейшей исследовательской деятельности в статье приведены некоторые исторические факты, в конспективной форме изложен теоретический материал и рассмотрены задачи с анализом решения, ориентированные на формирование у студентов способностей применять методы математического анализа в профессиональной деятельности. Материалы статьи могут быть полезными для самостоятельной работы студентов, а также преподавателям при подготовке к проведению практических занятий.

## ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. Т1. Механика. Теплота. Молекулярная физика / Под ред. Г.С. Ландсберга. 14-е изд. М.: Физматлит, 2020. 608 с.
2. Панов В.Ф. Математика древняя и юная / Под ред. В.С. Зарубина. 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 648 с.
3. Там же.
4. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 496 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть I: учеб. для вузов. М.: Физматлит, 2019. 648 с.
6. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 6-е изд., стер. Перепечатка с 3-го изд. 1993г. М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. 480 с.
7. Хуторской А.В. Педагогика: учебник для вузов. Стандарт третьего поколения. СПб: Питер, 2019. 608 с.
8. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. 7-е изд., испр. / Под общ. ред. С.С. Герштейна. М.: Физматлит, 2019. 520 с.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.1. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1988. 712 с.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Указ. соч.
11. Там же.
12. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Изд-во АСТ, 2020. 703 с.
13. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Указ. соч.
14. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Указ. соч.
15. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Указ. соч.
16. Ландсберг Г.С. Указ. соч.
17. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Указ. соч.

**Olga Yu. Chigiryova**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[mkfn12@yandex.ru](mailto:mkfn12@yandex.ru)

**Methodological aspects of the topic presentation "Definite integral and its applications"**

**Abstract.** The relevance of the problem under consideration is due to the importance of creating students' motivation for research activities. Using the example of studying the topic "A definite integral and its applications", the relationship between exact and applied sciences is shown. The aim of the work is to develop students' skills in mathematical analysis methods, as well as the ability to apply them to solving physical problems. The article pays attention to the main stages of studying the topic: actualization of knowledge, motivation for the introduction of the concept of "definite integral", the geometric and physical meanings of a definite integral are illustrated. An example of an algorithm for solving a specific type of physical problems is shown, as well as problems with the analysis of the solution and a set of problems with answers to control the development of this topic. The materials of the article can be useful for independent work of students, as well as for first-year teachers in preparation for practical classes.

**Keywords:** definite integral, geometric meaning of definite integral, physical meaning of definite integral, Newton-Leibniz formula, area of a flat figure, volume of a body of rotation, surface area of a body of rotation, physical problems.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 1 (T.1), 2023  
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER

Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education  
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION  
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE

Autonomous non-profit organization of supplementary professional education  
"Inter-regional center of innovative techniques in education"

Sent for printing 02-05-2023

Circulation 1000

Order 013120/125

© All Rights Reserved, 2023