

ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 3 (T1)
2023



Kirov, Russian Federation

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2023) ISSUE 3 (T.1), 156 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

Olga Bermant-Polyakova, PhD, Israel

Tatyana Fedotova, PhD, Professor, Ukraine

Alla Gabidullina, PhD, Professor, Ukraine

Pavel Gorev, PhD, Associate Professor, Russia

Mariya Greb, PhD, Associate Professor, Ukraine

Natalya Korableva, PhD, Associate Professor, Ukraine

Nikolay Kotryahov, PhD, Professor, Russia

Kanat Lakbaev, PhD, Associate Professor, Kazakhstan

Galina Nekrasova, PhD, Professor, Russia

Aleksander Nosov, PhD, Professor, Russia

Gennadiy Senkevich, PhD, Associate Professor, Ukraine

Samvel Sukiasyan, PhD, Professor, Armenia

Eugene Vechtomov, PhD, Professor, Russia

Elena Visotskaya, PhD, Professor, Ukraine

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,

KIROV, RUSSIAN FEDERATION

PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.

Editorial opinion can differ from opinion of authors.

If reprinted, the reference to the journal is required.

© All Rights Reserved

Printed in Russian Federation, 2023



CONTENTS

ПРИМЕНЕНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ДИСЦИПЛИН
«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» И «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»
Бахтиярова Ольга Николаевна, Птицына Инга Вячеславовна,
Подзорова Марина Ивановна
5-16

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И ТЕОРЕМА СИЛОВА
В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ
Безверхний Николай Владимирович
17-23

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПРОГРАММИСТОВ
Белоусов Алексей Иванович
24-40

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ
В ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ
Бирюков Олег Николаевич, Келдыш Елизавета Петровна
41-49

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА
В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ
Велищанский Михаил Александрович, Власов Павел Александрович,
Кавинов Алексей Владимирович
50-59

ПОВЫШЕНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ И МОТИВАЦИИ
В ПОЛУЧЕНИИ ИНЖЕНЕРНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ У СТУДЕНТОВ
НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ
«РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК»
Вергазова Ольга Бухтияровна, Королев Евгений Алексеевич,
Силин Иван Дмитриевич
60-66

ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПОСТРОЕНИЯ
ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
Власов Павел Александрович, Велищанский Михаил Александрович,
Кавинов Алексей Владимирович
67-75

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ
СТУДЕНТАМ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
Грибов Александр Федорович, Краснов Игорь Константинович,
Соколов Денис Николаевич
76-84

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ»:
СОСТАВЛЕНИЕ ВАРИАНТОВ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ»
Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович
85-89

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ:
ПРЕПОДАВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СРЕДЫ MATLAB
Кавинов Алексей Владимирович, Велищанский Михаил Александрович,
Власов Павел Александрович
90-100

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ
«ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ»
Кандаурова Ирина Евгеньевна, Чигирёва Ольга Юрьевна
101-109

КУРС СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ:
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
Краснов Игорь Константинович, Грибов Александр Федорович,
Жидков Евгений Николаевич
110-116

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ «ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ» И «ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ»
ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА НА ЛЕКЦИИ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
Нараленкова Ирина Игоревна
117-123

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА
ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ
Санаева Татьяна Александровна, Степанова Юлия Константиновна
124-127

ПРОВЕДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО ЗАДАЧАМ СНИЖЕНИЯ
РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ. МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ
Тверская Елена Сергеевна, Панкратов Владимир Александрович
128-134

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ
НА ТЕМУ «РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ»
Хасанов Наиль Алфатович, Бирюков Олег Николаевич
135-141

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ
«ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»
Чигирёва Ольга Юрьевна
142-149

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕМ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ
Шилова Зоя Вениаминовна, Забелина Светлана Борисовна
150-155

ПРИМЕНЕНИЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ДИСЦИПЛИН «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» И «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Аннотация

Одной из тем при изучении дисциплин «Исследование операций» и «Методы оптимизации» является «Решение задач линейного программирования». В статье рассмотрена постановка задачи линейного программирования, алгоритм решения этой задачи симплекс-методом, приведен пример решения задачи с использованием рассмотренного алгоритма, дана постановка и математическая постановка одной из задач линейного программирования - задачи о диете. Цель работы: проиллюстрировать особенности симплекс-метода для решения задач линейного программирования, которые имеют широкое применение в экономике. Успешное освоение этой темы будет способствовать выработке у студентов практических навыков применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности. Результатом исследования является материал, который может служить основой для подготовки практических и лабораторных занятий и представлять интерес для студентов и преподавателей.

Ключевые слова

линейное программирование, задачи линейного программирования, симплекс-метод, симплекс-таблица, разрешающий столбец, разрешающая строка, разрешающий элемент, оптимальное решение

АВТОРЫ

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Введение

Одним из самых распространенных инструментов решения оптимизационных задач в экономике является линейное программирование [1].

В процессе решения такого класса задач необходимо найти оптимальные значения параметров, доставляющих минимум или максимум целевой функции при заданных условиях на значения переменных [2]. При этом особенностью задач линейного программирования является то, что целевая функция и условия в системе ограничений линейные, а переменные принимают неотрицательные значения [3], [4].

Актуальность решения задач оптимизации, в том числе и задач линейного программирования, состоит в том, что оно позволяет с максимальной выгодой и минимальными затратами решать экономические задачи рационального использования ресурсов, таких как товары, деньги, оборудование, природные ресурсы и т. п. [5]

В результате изучения дисциплин «Исследование операций» и «Методы оптимизации» студенты должны знать основные методы решения задач математического программирования, в том числе задач линейного программирования, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, уметь применять эти методы для решения инженерных задач профессиональной деятельности, а также владеть навыками разработки алгоритмов и составления программ, реализующих эти методы.

Изучение дисциплин «Исследование операций» и «Методы оптимизации» предполагает предварительное освоение таких дисциплин учебного плана, как аналитическая геометрия; математический анализ; линейная алгебра, аналитическая геометрия и является предшествующей для дисциплин образовательной программы, связанных с теорией оптимального управления и программированием.

Для актуализации знаний по ранее изученным темам студентам предлагаются следующие вопросы:

1. Что называется рангом системы линейных алгебраических уравнений и как он определяется?
2. Какую задачу исследования операций называют задачей математического программирования?
3. Что отличает задачи линейного программирования от других задач математического программирования?
4. Какое решение задачи линейного программирования называют допустимым?
5. Какое решение задачи линейного программирования называют оптимальным?

С целью создания мотивации студентов к изучению дисциплин на занятиях можно рассмотреть задачу с практическим содержанием, например, задачу о диете, которая является одной из задач линейного программирования.

В Словаре Брокгауза и Эфрона дается такое определение: «Под диетой подразумевается пищевой режим, устанавливаемый для здоровых и больных соответственно возрасту, телосложению, профессии, климату, временам года и т. д.» [6].

Рассмотрим следующую задачу о диете [7], [8].

Постановка задачи о диете

Пусть имеются 10 видов продуктов, для каждого из которых известно содержание белков, жиров, углеводов в 100 г продуктов в среднем, а также стоимость и калорийность 100 г продукта (таблица 1).

Таблица 1

**Содержание питательных веществ и энергетическая ценность
некоторых продуктов**

Продукты	Химический состав (в 100 г продукта)				Стоимость 100 г, у.е.
	Белки, г	Жиры, г	Углеводы, г	Калорийность, ккал	
Хлеб	8	4	50	280	10
Крупа	10	2	70	330	7
Масло сливочное	0,5	82,5	1	750	72
Молоко	3	3	4	60	8
Сыр	25	30	0	370	70
Птица	30	10	0	240	17
Рыба	20	10	0	180	100
Картофель	2	0	18	80	5
Овощи	2	0	8	35	8
Фрукты	0,5	0	12	50	13

Известны средние суточные потребности взрослого человека (мужчины) в белках (66 - 117 г), жирах (80 - 100 г), углеводах (400 - 500 г) и калорийность рациона (2450 - 3750 ккал).

Задача состоит в том, чтобы определить, какое количество продуктов (в г) каждого вида продуктов следует включить в суточный рацион взрослого человека и при этом он будет иметь минимальную стоимость.

Математическая постановка задачи о диете

Обозначим через x_i - количество продуктов (по 100 г) i -го вида, $i = 1, 2, \dots, 10$.

Среди неотрицательных переменных x_1, x_2, \dots, x_{10} найти такие, которые доставляют минимум функции

$$F(x) = 10x_1 + 7x_2 + 72x_3 + 8x_4 + 70x_5 + 17x_6 + 100x_7 + 5x_8 + 8x_9 + 13x_{10}$$

и удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} 66 \leq 8x_1 + 10x_2 + 0,5x_3 + 3x_4 + 25x_5 + 30x_6 + 20x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 0,5x_{10} \leq 117, \\ 80 \leq 4x_1 + 2x_2 + 82,5x_3 + 3x_4 + 30x_5 + 10x_6 + 10x_7 \leq 100, \\ 400 \leq 50x_1 + 70x_2 + x_3 + 4x_4 + 18x_8 + 8x_9 + 12x_{10} \leq 500, \\ 2450 \leq 280x_1 + 330x_2 + 750x_3 + 60x_4 + 370x_5 + 240x_6 + 180x_7 + 80x_8 + 35x_9 + \\ + 50x_{10} \leq 3750. \end{cases}$$

Целевая функция определяет суммарную стоимость продуктов в суточном рационе взрослого человека. Условия в системе ограничений определяют то, что суммарное количество белков, жиров, углеводов продуктов и их калорийность в суточном рационе взрослого человека удовлетворяет их суточным потребностям соответственно.

Рассмотрим метод решения задач линейного программирования.

Методология и результаты исследования

Постановка задачи линейного программирования

Среди неотрицательных переменных x_1, x_2, \dots, x_n найти такие, которые доставляют минимум функции [9], [10], [11]

Алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом

1. Определение базисных и свободных переменных задачи.

Находим ранг системы алгебраических уравнений, входящих в систему ограничений задачи линейного программирования, приведенной к каноническому виду.

Если система уравнений имеет ранг, равный m , то она будет иметь m базисных переменных и $n - m$ свободных переменных, где n - количество переменных задачи линейного программирования, приведенной к каноническому виду.

В рассматриваемой задаче ранг системы алгебраических уравнений равен 3, поэтому задача будет иметь 3 базисных и $6 - 3 = 3$ свободных переменных.

Выберем в качестве базисных переменных вспомогательные переменные x_4, x_5, x_6 , тогда свободными переменными будут переменные x_1, x_2, x_3 .

2. Выражение целевой функции и базисных переменных через свободные переменные.

Выражаем выбранные базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные.

В рассматриваемой задаче выразим базисные переменные x_4, x_5, x_6 через свободные переменные x_1, x_2, x_3 , используя уравнения системы (5),

$$\begin{aligned} x_4 &= -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5 \\ x_5 &= x_1 - x_2 + x_3 - 2 \\ x_6 &= -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7 \end{aligned} \quad (6)$$

Целевая функция (3) уже выражена через свободные переменные.

2. Построение симплекс-таблицы.

Для решения задачи линейного программирования симплекс-методом построим симплекс-таблицу (таблица 2).

В верхней строке симплекс-таблицы указываем свободные переменные x_1, x_2, x_3 , а в нижней строке - соответствующие им коэффициенты целевой функции (3).

В первом столбце симплекс-таблицы указываем базисные переменные x_4, x_5, x_6 и в строках, соответствующих этим переменным, записываем коэффициенты при соответствующих свободных переменных и свободные члены из выражений (6) этих базисных переменных.

Таблица 2

Своб. перем. / Баз. перем.	x_1	x_2	x_3	b_i
x_4	-1	-3	-2	5
x_5	1	-1	1	-2
x_6	-2	3	1	7
$F(x)$	2	-5	3	0

Определение 1. Если все свободные члены b_i ($1 \leq i \leq m$) в симплекс-таблице неотрицательны, а среди коэффициентов c_j ($1 \leq j \leq n$) целевой функции есть хотя бы один отрицательный, то такая симплекс-таблица называется полуприведенной.

Определение 2. Если все свободные члены b_i ($1 \leq i \leq m$) и коэффициенты c_j ($1 \leq j \leq n$) целевой функции в симплекс-таблице неотрицательны, то такая симплекс-таблица называется приведенной.

Примечание. В дальнейшем нумерацию строк в симплекс-таблице будем начинать со второй и нумерацию столбцов - со второго.

3. Проверка условий наличия решения задачи линейного программирования.

А. Если в строке симплекс-таблицы, соответствующей отрицательному свободному члену b_i ($1 \leq i \leq m$), нет ни одного положительного элемента, то задача линейного программирования решения не имеет (в этом случае невозможно найти разрешающий столбец).

Такое состояние симплекс-таблицы соответствует тому, что область допустимых решений задачи линейного программирования - пустое множество.

Б. Если в полуприведенной симплекс-таблице в столбце, соответствующем отрицательному коэффициенту c_j ($1 \leq j \leq n$) целевой функции, нет ни одного отрицательного элемента, то задача линейного программирования решения не имеет (в этом случае невозможно найти разрешающую строку).

Такое состояние симплекс-таблицы соответствует тому, что область допустимых решений задачи не ограничена снизу;

В. Если симплекс-таблица - приведенная, то ей соответствует оптимальное решение задачи линейного программирования.

При этом базисным переменным присваиваем значения соответствующих свободных членов b_i , а свободные переменные полагаем равными нулю.

Если в исходной задаче линейного программирования необходимо найти переменные, доставляющие минимум целевой функции $F(x)$, то минимальное значение $F_{min}(x)$ равно свободному коэффициенту c_0 в приведенной симплекс-таблице, т.е. $F_{min}(x) = c_0$.

Если в исходной задаче линейного программирования необходимо найти переменные, доставляющие максимум целевой функции $F(x)$, то свободный коэффициент c_0 в приведенной симплекс-таблице соответствует минимальному значению $F^*_{min}(x)$ вспомогательной целевой функции. А поскольку $F(x) = -F^*(x)$, то максимальное значение целевой функции $F(x)$ равно свободному коэффициенту c_0 в приведенной симплекс-таблице, взятое с противоположным знаком, т. е.

$$F_{max}(x) = -F^*_{min}(x) = -c_0.$$

Итерация 1.

В рассматриваемой задаче ни одно из условий А, Б, В для симплекс-таблицы 2 не выполняется, поэтому переходим к пункту 4.

4. Преобразование симплекс-таблицы.

1). Выбор разрешающего столбца.

Если среди свободных членов b_i ($1 \leq i \leq m$) есть отрицательный (если таких свободных членов несколько, выбираем любой), то в соответствующей строке находим любой положительный элемент. Столбец, в котором находится этот элемент, будет разрешающим.

Если симплекс-таблица полуприведенная, то в качестве разрешающего столбца выбираем столбец, соответствующий любому (обычно меньшему) отрицательному коэффициенту c_j ($1 \leq j \leq n$) целевой функции.

Будем обозначать разрешающий столбец знаком «*», а его номер - j^* .

Найдем разрешающий столбец в рассматриваемой задаче.

Симплекс-таблица 2 не является полуприведенной.

Поскольку среди свободных членов b_i ($1 \leq i \leq 3$) в симплекс-таблице есть отрицательный ($b_2 = -2$), то в этой строке находим любой положительный элемент.

Выберем элемент $a_{21} = 1$. В результате разрешающим будет первый столбец. Обозначим этот столбец знаком «*» (таблица 3).

Таблица 3

Своб. перем. Баз. перем.	x_1	x_2	x_3	b_i	
x_4	-1	-3	-2	5	$\frac{-5}{1} = -5$
x_5	1	-1	1	-2	$\frac{-2}{1} = -2$ *
x_6	-2	3	1	7	$\frac{7}{-2} = -3.5$
$F(x)$	2	-5	3	0	

*

2). Выбор разрешающей строки.

Находим отрицательные отношения свободных членов b_i к соответствующим элементам a_{ij} разрешающего столбца.

Среди полученных отношений выбираем меньшее по модулю. Строка, соответствующая выбранному отношению, будет разрешающей.

Будем обозначать разрешающую строку знаком «*», а ее номер - i^* .

Найдем разрешающую строку в рассматриваемой задаче (таблица 3).

Определяем отрицательные отношения свободных членов b_i к соответствующим элементам первого столбца. Результаты указаны справа от столбца свободных членов. Меньшее по модулю отрицательное отношение, равное -2, соответствует второй строке симплекс-таблицы. Эта строка и будет разрешающей. Обозначим ее знаком «*» (таблица 3).

3). Выбор разрешающего элемента.

Разрешающий элемент $a_{i^*j^*}$ находится на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца.

В рассматриваемой задаче разрешающий элемент $a_{2*1*} = 1$ расположен во второй строке и первом столбце. В таблице 3 разрешающий элемент отмечен кружком.

4). Построение новой симплекс-таблицы.

В новой симплекс-таблице меняем местами базисную переменную, соответствующую разрешающей строке, и свободную переменную, соответствующую разрешающему столбцу.

В рассматриваемой задаче в новой симплекс-таблице (таблица 4) меняем местами базисную переменную x_5 , соответствующую разрешающей строке, и свободную переменную x_1 , соответствующую разрешающему столбцу.

Примечания.

а) все вычисления будем производить с элементами «старой» симплекс-таблицы, а результаты записывать в соответствующие клетки новой симплекс-таблицы.

б) преобразованные элементы в формулах будем отмечать верхним индексом «Н».

Таблица 4

Своб. перем. Баз. перем.	x_5	x_2	x_3	b_i
x_4	-1	-4	-1	3
x_1	1	1	-1	2
x_6	-2	1	3	3
$F(x)$	2	-3	1	4

$$\frac{3}{-4} *$$

*

5). Преобразование разрешающего элемента.

Преобразованный разрешающий элемент $a_{i^*j^*}^H$ равен обратному значению разрешающего элемента $a_{i^*j^*}$, т. е.

$$a_{i^*j^*}^H = \frac{1}{a_{i^*j^*}}.$$

В рассматриваемой задаче $a_{2^*1^*}^H = \frac{1}{a_{2^*1^*}} = \frac{1}{1} = 1$.

Запишем это значение в соответствующую клетку симплекс-таблицы 4.

6). Преобразование элементов разрешающего столбца.

Все элементы разрешающего столбца, кроме разрешающего элемента, делим на разрешающий элемент $a_{i^*j^*}$

$$a_{ij^*}^H = \frac{a_{ij^*}}{a_{i^*j^*}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad l \neq i^*;$$

$$c_{j^*}^H = \frac{c_{j^*}}{a_{i^*j^*}}.$$

В рассматриваемой задаче

$$a_{11^*}^H = \frac{a_{11^*}}{a_{2^*1^*}} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$a_{31^*}^H = \frac{a_{31^*}}{a_{2^*1^*}} = \frac{-2}{1} = -2,$$

$$c_{1^*}^H = \frac{c_{1^*}}{a_{2^*1^*}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Полученные результаты запишем в соответствующие клетки первого столбца симплекс-таблицы 4.

7). Преобразование элементов разрешающей строки.

Все элементы разрешающей строки, кроме разрешающего элемента, делим на разрешающий элемент $a_{i^*j^*}$, взятый с противоположным знаком

$$a_{i^*j}^H = \frac{a_{i^*j}}{-a_{i^*j^*}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq j^*;$$

$$b_{i^*}^H = \frac{b_{i^*}}{-a_{i^*j^*}}.$$

В рассматриваемой задаче

$$a_{2^*2}^H = \frac{a_{2^*2}}{-a_{2^*1^*}} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$a_{2*3}^H = \frac{a_{2*3}}{-a_{2*1*}} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$b_{2*}^H = \frac{b_{2*}}{-a_{2*1*}} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Полученные результаты запишем в соответствующие клетки второй строки симплекс-таблицы 4.

8). Преобразование остальных элементов симплекс-таблицы.

Преобразование остальных элементов симплекс-таблицы выполняем по правилу прямоугольника, которое заключается в следующем.

Пусть a - преобразуемый элемент в симплекс-таблице, $pэ$ - разрешающий элемент.

Выбираем элементы b и c в симплекс-таблице так, чтобы вместе с преобразуемым элементом a и разрешающим элементом $pэ$ они образовывали вершины прямоугольника (рисунок 1).

Тогда для вычисления элемента a^H нужно вычесть из элемента a произведение элементов b и c , деленное на разрешающий элемент $pэ$

$$a^H = a - \frac{b \cdot c}{pэ}.$$

	b	...	a
...			...
$pэ$...	c

Рисунок 1

В соответствии с описанным правилом прямоугольника преобразование элементов симплекс-таблицы выполняем по формулам

$$a_{ij}^H = a_{ij} - \frac{a_{i*j} \cdot a_{ij*}}{a_{i*j*}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq i^*; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq j^*;$$

$$b_i^H = b_i - \frac{b_{i*} \cdot a_{ij*}}{a_{i*j*}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq i^*;$$

$$c_j^H = c_j - \frac{a_{i*j} \cdot c_{j*}}{a_{i*j*}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq j^*;$$

$$c_0^H = c_0 - \frac{b_{i*} \cdot c_{j*}}{a_{i*j*}}.$$

В рассматриваемой задаче

$$a_{12}^H = a_{12} - \frac{a_{2*2} \cdot a_{11*}}{a_{2*1*}} = -3 - \frac{-1 \cdot (-1)}{1} = -4,$$

$$a_{13}^H = a_{13} - \frac{a_{2*3} \cdot a_{11*}}{a_{2*1*}} = -2 - \frac{1 \cdot (-1)}{1} = -1,$$

$$a_{32}^H = a_{32} - \frac{a_{2*2} \cdot a_{31*}}{a_{2*1*}} = 3 - \frac{-1 \cdot (-2)}{1} = 1,$$

$$a_{33}^H = a_{33} - \frac{a_{2*3} \cdot a_{31*}}{a_{2*1*}} = 1 - \frac{1 \cdot (-2)}{1} = 3,$$

$$b_1^H = b_1 - \frac{b_{2*} \cdot a_{11*}}{a_{2*1*}} = 5 - \frac{(-2) \cdot (-1)}{1} = 3,$$

$$b_3^H = b_3 - \frac{b_{2*} \cdot a_{31*}}{a_{2*1*}} = 7 - \frac{(-2) \cdot (-2)}{1} = 3,$$

$$c_2^H = c_2 - \frac{a_{2*2} \cdot c_{1*}}{a_{2*1*}} = -5 - \frac{(-1) \cdot 2}{1} = -3,$$

$$c_3^H = c_3 - \frac{a_{2*3} \cdot c_{1*}}{a_{2*1*}} = 3 - \frac{1 \cdot 2}{1} = 1,$$

$$c_0^H = c_0 - \frac{b_{2*} \cdot c_{1*}}{a_{2*1*}} = 0 - \frac{(-2) \cdot 2}{1} = 4.$$

Полученные результаты запишем в соответствующие клетки симплекс - таблицы 4. Переходим к пункту 3 алгоритма.

Итерация 2.

3. В рассматриваемой задаче ни одно из условий А, Б, В для симплекс - таблицы 4 не выполняется, поэтому переходим к пункту 4.

4. Преобразование симплекс-таблицы 4.

1) Выбор разрешающего столбца.

Симплекс-таблица 4 является полуприведенной, поэтому в качестве разрешающего столбца выбираем второй столбец, соответствующий отрицательному коэффициенту c_2 целевой функции, равного - 3.

Обозначим этот столбец знаком «*» (таблица 4).

2) Выбор разрешающей строки.

Поскольку отрицательные отношения свободных членов b_i к соответствующим элементам a_{ij*} разрешающего столбца получается только для элементов первой строки ($\frac{b_1}{a_{12*}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$), то эта строка и будет разрешающей. Обозначим ее знаком «*» (таблица 4).

3) Выбор разрешающего элемента.

Разрешающий элемент $a_{1*2*} = -4$ находится на пересечении разрешающей (первой) строки и разрешающего (второго) столбца;

В таблице 4 разрешающий элемент отмечен кружком.

4) Построение новой симплекс-таблицы.

В рассматриваемой задаче в новой симплекс-таблице (таблица 5) меняем местами базисную переменную x_4 , соответствующую разрешающей строке, и свободную переменную x_2 , соответствующую разрешающему столбцу.

Таблица 5

Своб. перем. Баз. перем.	x_5	x_4	x_3	b_i
x_2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{11}{4}$
x_6	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{15}{4}$
$F(x)$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$

5) Преобразование разрешающего элемента.

В рассматриваемой задаче $a_{1*2*}^H = \frac{1}{a_{1*2*}} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

Запишем это значение в соответствующую клетку симплекс-таблицы 5.

6) Преобразование элементов разрешающего столбца.

Все элементы разрешающего столбца симплекс-таблицы 4, кроме разрешающего элемента, делим на разрешающий элемент $a_{1*2*} = -4$.

Полученные результаты запишем в соответствующие клетки второго столбца симплекс-таблицы 5.

7) Преобразование элементов разрешающей строки.

Все элементы разрешающей строки симплекс-таблицы 4, кроме разрешающего элемента, делим на разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком, т.е. на $-a_{1*2*} = -(-4) = 4$.

Полученные результаты запишем в соответствующие клетки первой строки симплекс-таблицы 5.

8) Преобразование остальных элементов симплекс-таблицы.

Преобразование остальных элементов симплекс-таблицы выполняем по правилу прямоугольника, описанному выше.

Полученные результаты запишем в соответствующие клетки симплекс-таблицы 5.

Симплекс-таблица 5 является приведенной, и поэтому ей соответствует оптимальное решение задачи линейного программирования.

Базисным переменным присваиваем значения соответствующих свободных членов b_i : $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_1 = \frac{11}{4}$, $x_6 = \frac{15}{4}$, а свободные переменные полагаем равными нулю: $x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = 0$.

Учитывая только основные переменные рассматриваемой задачи линейного программирования, получаем ее оптимальное решение $\mathbf{x}^* = \left(\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right)$.

При этом минимальное значение целевой функции $F_{min}(\mathbf{x})$ равно свободному коэффициенту $c_0 = \frac{7}{4}$ в приведенной симплекс-таблице 5, т.е.

$$F_{min}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) = \frac{7}{4}.$$

Для оценивания результатов освоения студентами данной темы предлагаются следующие вопросы:

1. Каков канонический вид задачи линейного программирования? Как привести задачу линейного программирования к каноническому виду?
2. Какая симплекс-таблица называется полуприведенной?
3. Какая симплекс-таблица называется приведенной?
4. Какому виду симплекс-таблицы соответствует отсутствие решения задачи линейного программирования и какова причина этого?
5. Какому виду симплекс-таблицы соответствует оптимальное решение задачи линейного программирования и как оно определяется?

Задание для самостоятельной работы

Для закрепления освоения данной темы студентам предлагается, используя описанный алгоритм, создать его программную реализацию и решить сформулированную задачу о диете.

Заключение

В работе приведен алгоритм решения задач линейного программирования симплекс-методом и пример его использования для решения практической задачи.

Материал, представленный в работе, может быть использован преподавателями при проведении практических и лабораторных занятий по теме «Решение задач линейного программирования», а также студентами для самостоятельной работы.

Приведенный в работе алгоритм решения задач линейного программирования симплекс-методом может помочь студентам получить навыки в разработке программного обеспечения для численного моделирования, а также способствовать выработке у них практических навыков применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Бородакий Ю.В. Линейное программирование в современных задачах оптимизации. - М.: МИФИ, 2008. - 564с.
2. Моисеев Н.Н. Методы оптимизации. - М.; Наука, 1978. - 187 с.
3. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учебное пособие. - М.:Физматлит, 2004. - 264 с.
4. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование. - М.: Высшая школа, 1980. - 450 с.
5. Бородакий Ю.В. Указ. соч.
6. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона в 82 т. и 4 доп. т. - М.: Терра, 2001. - 40726 с.
7. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М: Лань, 2011 - 352 с.
8. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб, для вузов - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 436 с.
9. Там же.
10. Таха Х.А. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.- 912 с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972. - 407 с.
12. Там же.

Olga N. Bakhtiyarova,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
olga-bakh06@mail.ru

Inga V. Ptitsyna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru

Marina I. Podzorova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
marinatichomirova@hotmail.com

Application of the simplex method for solving linear programming problems in the course of the disciplines "Operations Research" and "Optimization Methods"

Abstract. One of the topics in the study of the disciplines "Operations Research" and "Optimization Methods" is "Solving linear programming problems". The article considers the formulation of the linear programming problem, the algorithm for solving this problem by the simplex method, provides an example of solving the problem using the algorithm under consideration, and gives the formulation and mathematical formulation of one of the linear programming problems - the diet problem. The purpose of the work is to illustrate the features of the simplex method for solving linear programming problems that are widely used in economics. Successful mastering of this topic will contribute to the development of students' practical skills in applying optimization methods to solve theoretical and applied problems of professional activity. The result of the research is a material that can serve as a basis for the preparation of practical and laboratory classes and be of interest to students and teachers.

Keywords: linear programming, linear programming problems, simplex method, simplex table, resolving column, resolving row, resolving element, optimal solution.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И ТЕОРЕМА СИЛОВА В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Аннотация

Одной из базовых теорем в стандартном курсе высшей алгебры является теорема Лагранжа для конечных групп. Но далеко не всегда удается изложить теорему Силова, которая в частных случаях является обращением теоремы Лагранжа. О методе изложения этого интереснейшего раздела теории групп и о невозможности обратиться к теореме Лагранжа в общем случае и пойдет речь в данной статье. В статье сравниваются два метода доказательства теоремы Силова: прямой и использующий теорию представлений. Второй метод разобран достаточно подробно и позволяет эффективно и быстро решать поставленную задачу. Цель работы - продемонстрировать нестандартную эффективную методику доказательства классических теоретико-групповых теорем и увлечь читателя теорией представлений. Содержание статьи полезно студентам, магистрам и преподавателям университетов.

Ключевые слова

регулярное представление, матричное представление, силовская подгруппа, двойные смежные классы, действие группы

АВТОР

Безверхний Николай Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nbezv@mail.ru

Введение

Всем алгебраистам хорошо известно классическое доказательство теоремы Силова. Менее распространено в стандартных курсах по теории групп доказательство этой теоремы, использующее теорию представлений.

Остановимся на последнем - идее вложения группы подстановок в матричную группу и представлении конечной группы подстановками. Мы рассматриваем простой и красивый метод доказательства теоремы Силова.

Ограничения по применению этого метода могут быть вызваны отсутствием понятия матричного представления в программе ВУЗа и отсутствием достаточного времени для рассмотрения соответствующего теоретического материала. Мы приводим весьма краткое изложение теории, не углубляемся в теорию представлений, в результате чего получается сжатый материал, который можно изложить за одно занятие.

Отметим, что в большинстве курсов высшей алгебры, будь то педагогический университет или инженерный ВУЗ, не говоря уже о классических университетах, рассматривается раздел с элементами теории групп. Так же обстоит дело и в МГТУ им. Н.Э. Баумана. На специальностях с удвоенным количеством аудиторных занятий по математике во втором семестре в курсе Линейная Алгебра и Аналитическая Геометрия в обязательном порядке рассматривается теорема Лагранжа, чего нельзя сказать о невозможности её обращения и о теореме Силова. Ликвидации этого пробела и посвящена данная работа.

Методология и результаты исследования

Представления групп

Представлением группы [1] G называется любой гомоморфизм f группы G в некоторую группу W . Наибольшую ценность имеют группы W , в которых удобно производить вычисления. Таковыми являются группы подстановок и группы матриц. Мы будем исследовать некоторые свойства группы невырожденных матриц над конечным полем $GL_n(p^k)$ и её подгруппы $UT_n(p^k)$, состоящей из треугольных матриц с единицами на диагонали.

Обозначим $S(M)$ группу всех биекций множества M на себя. Если $|M| = m$, то $S(M)$ можно отождествить с группой S_m подстановок на m элементах.

Двойные смежные классы

Пусть K, H - произвольные подгруппы группы G . Множество вида $KgH = \{kgh \mid k \in K, h \in H, g \in G\}$ называется двойным смежным классом группы G по подгруппам K и H . Множество всех таких классов обозначают через $K \setminus G / H$.

Теорема (о свойствах двойных смежных классов).

Пусть K, H - подгруппы группы G . Тогда

- 1) для любого $g \in G$ существует единственный двойной смежный класс группы G по подгруппам K и H , содержащий g ;
- 2) G разбивается в объединение двойных смежных классов по подгруппам K и H ;
- 3) любой смежный класс KgH является объединением, состоящим из $|K : K \cap gHg^{-1}|$ различных левых смежных классов G по подгруппе H .

Доказательство.

1) любой элемент g принадлежит классу KgH , поскольку $g = ege$. Предположим, что g принадлежит ещё одному смежному классу KxH , тогда $g = kxh$ для некоторых $k \in K, h \in H$. Значит, $KgH = K(kxh)H = KxH$. Таким образом, классы совпали.

Свойство 2) следует из свойства 1).

Докажем 3). Рассмотрим двойной смежный класс KgH . Он является объединением левых смежных классов kgH , когда k пробегает подгруппу K . Пусть A - множество всех таких смежных классов, а B - множество всех левых смежных классов K по $K \cap gHg^{-1}$. Установим биекцию между множествами A и B . Для этого докажем, что отображение $\varphi: A \rightarrow B$, определённое по правилу $kgH \rightarrow k(K \cap gHg^{-1})$, где $k \in K$, является инъекцией и сюръекцией.

Начнём с проверки корректности задания φ . Если классы k_1gH и k_2gH совпадают: $k_1gH = k_2gH$, то $g^{-1}k_1^{-1}k_2g \in H$, и $k_1^{-1}k_2 \in K \cap gHg^{-1}$. И, наконец, левые классы с представителями k_1, k_2 по подгруппе $K \cap gHg^{-1}$ совпадают: $k_1(K \cap gHg^{-1}) = k_2(K \cap gHg^{-1})$.

Верна и обратная цепочка: если классы $k_1(K \cap gHg^{-1}) = k_2(K \cap gHg^{-1})$ совпадают, то совпадают и классы k_1gH и k_2gH . Установлены корректность и инъективность отображение φ .

Сюръективность φ очевидна.

Теорема 1. Пусть $K, H \leq G$, X - полная система представителей двойных смежных классов G по K, H . Тогда $|G:H| = \sum_{x \in X} |K:K \cap xHx^{-1}|$.

Доказательство.

Группа G разбивается на двойные смежные классы KxH с представителями $x \in X$. Каждый из них разбивается на $|K:K \cap xHx^{-1}|$ левых смежных классов G по H . Теорема 1 доказана.

Действие группы на множестве

Группа G действует слева на множестве X , если для любых элементов $g \in G, x \in X$ определён элемент $gx \in X$, причём $g_2(g_1x) = (g_2g_1)x, ex = x$ для всех $x \in X, g_1, g_2 \in G$.

Определение 1. Множество $Gx = \{gx | g \in G\}$ называется орбитой элемента x . Очевидно, орбиты любых двух элементов либо совпадают, либо не пересекаются. Поэтому множество X разбивается на непересекающиеся орбиты. Если орбита одна, то действие группы G на X называется транзитивным.

Число элементов в орбите называется её длиной.

Стабилизатором элемента $x \in X$ называется подгруппа $St_G(x) = \{g \in G | gx = x\}$.

Теорема (о длине орбиты). Длина орбиты Gx равна индексу стабилизатора $St_G(x)$ в группе G .

Доказательство.

Рассмотрим отображение $\varphi: Gx \rightarrow G/St_G(x)$, заданное правилом $gx \rightarrow gSt_G(x)$. Оно является биекцией.

Нормализатором подгруппы H группы G называется подгруппа $N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$.

Централизатором элемента $a \in G$ называется подгруппа $C_G(a) = \{g \in G | gag^{-1} = a\}$.

Из определений следует, что подгруппа H нормальна в своём нормализаторе: $H \triangleleft N_G(H)$, и элемент a коммутирует со всеми элементами своего централизатора: $\langle a \rangle \leq Z(C_G(a))$.

Следствие (из теоремы о длине орбиты).

1) Мощность множества подгрупп группы G , сопряжённых с данной подгруппой H , равна индексу нормализатора подгруппы H : $|G:N_G(H)|$.

2) Мощность множества элементов группы G , сопряжённых с данным элементом $a \in G$, равна индексу централизатора этого элемента: $|G:C_G(a)|$.

Доказательство.

1) Группа G действует на множестве $M = \{xHx^{-1} \mid x \in G\}$ сопряжениями: подгруппа xHx^{-1} под действием элемента g переходит в подгруппу $gxHx^{-1}g^{-1}$. Очевидно, это действие транзитивно, и стабилизатор подгруппы H совпадает с её нормализатором: $St_G(H) = N_G(H)$. Тогда $|M| = |G : N_G(H)|$.

2) Группа G действует на себе сопряжениями: элемент x переходит под действием элемента g в элемент gxg^{-1} . Орбиты этого действия - классы сопряжённых элементов. А длина орбиты равна индексу стабилизатора элемента:

$$|G : St_G(a)| = |G : C_G(a)|.$$

Теорема (о центре p -группы).

Центр конечной p -группы неединичен.

Доказательство.

Пусть G - конечная p -группа. Она разбивается в объединение классов сопряжённых элементов. Один из таких классов равен $\{e\}$. Так как мощности этих классов являются степенями числа p , и сумма этих мощностей есть степень числа p , то, кроме $\{e\}$, существуют и другие одноэлементные классы. Объединение всех одноэлементных классов совпадает с $Z(G)$.

Силоские подгруппы матричных групп

Определение 2. Пусть $|G| = p^k m, k \geq 1, (p, m) = 1, m$ - простое число. Тогда подгруппа H группы G называется силовской p -подгруппой, если $|H| = p^k$.

Теорема 2 [2]. Пусть $q = p^k$, тогда подгруппа $UT_n(q)$ является силовской p -подгруппой группы $GL_n(q)$.

Доказательство.

Найдём число невырожденных матриц порядка n над полем из q элементов. Пусть $A \in GL_n(q)$. Тогда её первая ненулевая строка может быть выбрана $q^n - 1$ способами. Если уже зафиксированы первые i линейно независимых строк, то $(i+1)$ -я линейно независимая от них строка может быть выбрана $q^n - q^i$ способами: все линейные комбинации фиксированных i строк определяются выбором i коэффициентов, у каждого из которых есть ровно q возможных значений.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } |GL_n(q)| &= \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = (q^n - 1)(q^n - q^1)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1}) = \\ &= (q^n - 1)q(q^{n-1} - 1)q^2(q^{n-2} - 1) \dots q^{n-1}(q - 1) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1)(q^{n-2} - 1) \dots (q - 1) = \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} m, (m, p) = 1. \end{aligned}$$

Кроме того, $|UT_n(q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Значит, подгруппа $UT_n(q)$ силовская. Теорема 2 доказана.

Лемма 1. Пусть H - силовская p -подгруппа конечной группы G_1 , K - подгруппа группы G_1 , причем $|K|$ делится на p . Тогда существует такой элемент $x \in G$, что $K \cap xHx^{-1}$ - силовская p -подгруппа группы K .

Доказательство.

Так как $|G_1 : H|$ не делится на p , то одно из слагаемых $|K : K \cap xHx^{-1}|$ в теореме 1 тоже не делится на p . Кроме того, $K \cap xHx^{-1}$ - p -группа как подгруппа p -группы xHx^{-1} . Поэтому $K \cap xHx^{-1}$ является силовской p -подгруппой группы G_1 . Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Произведение двух подмножеств H_1, H_2 группы G может не быть подгруппой даже в случае, когда H_1, H_2 - подгруппы. Но если одна из этих подгрупп нормальна, то H_1H_2 - подгруппа в G . Если обе подгруппы нормальны, то подгруппа H_1H_2 нормальна. Если подгруппы H_1, H_2 конечны, то $|H_1H_2| = \frac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$.

Теорема 3 (Силов). Пусть G - группа порядка $p^k m, k \geq 1, (p, m) = 1$, число p простое. Тогда

- 1) в группе G существует силовская p -подгруппа,
- 2) любая p -подгруппа группы G содержится в некоторой силовской p -подгруппе,
- 3) любые две силовские p -подгруппы сопряжены,
- 4) число силовских p -подгрупп делит m и сравнимо с 1 по модулю p .

Доказательство.

Как известно, любая конечная группа вложима в группу подстановок $S_r, r = |G|$. Оказывается, существует вложение и в группу матриц $GL_r(F)$ над полем F . Действительно, рассмотрим вложение $S_r \rightarrow GL_r(F)$ по правилу $\sigma \rightarrow A_\sigma$, где $(A_\sigma)_{ij} = 1 \Leftrightarrow \sigma(j) = i, (A_\sigma)_{ij} = 0 \Leftrightarrow \sigma(j) \neq i$. Вместе с теоремой Кэли оно определяет искомого вложение группы G в $GL_r(F)$.

Утверждение 1) теоремы Силова следует из леммы 1 при $G_1 = GL_n(p), H = UT_n(p), K = G$.

Второе (третье) утверждение следует из той же леммы при $G_1 = G$ и K равном p -подгруппе (силовской) группы G_1 .

Докажем четвертое утверждение. Пусть $H \leq G$ - силовская p -подгруппа. Из пункта 3) следует, что число силовских p -подгрупп группы G равно мощности множества $M = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. Эта мощность в соответствии с теоремой о длине орбиты равна индексу нормализатора подгруппы $H \leq G$: $|M| = |G : N_G(H)|$. Значит, число $|M|$ является делителем числа m .

Рассмотрим действие подгруппы H сопряжением на множестве M : группа gHg^{-1} под действием элемента $h \in H$ переходит в группу $hgGg^{-1}h^{-1}$. Так как длина орбиты при действии группы равна индексу стабилизатора элемента. В нашем случае это означает, что длина орбиты является делителем порядка группы $|H| = p^k$. И только одна орбита $\{H\}$ имеет длину 1.

Действительно, если бы существовала другая орбита $\{gHg^{-1}\}$ длины 1, то подгруппы H, gHg^{-1} коммутировали бы, и множество $H \circ gHg^{-1}$ было бы группой. Порядок такой группы в соответствии с леммой 2 равен $\frac{|H||gHg^{-1}|}{|H \cap gHg^{-1}|}$ и, очевидно является

степенью p^l числа p , большей, чем k . Это противоречит тому, что подгруппа H силовская. Остаётся заметить, что $|M|$ есть сумма длин всех орбит. Теорема Силова доказана.

Ложность обращения теоремы Лагранжа

Теоремы Силова гарантируют наличие подгрупп соответствующего порядка. Наличие элементов порядка, равного простому делителю порядка группы устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4.

Если порядок группы G делится на простое число p , то G содержит элемент порядка p .

Доказательство.

Пусть $|G| = n = mp$. Если $m=1$, G - циклическая порядка p . Далее рассуждаем индукцией по m .

Пусть $H \leq G, |G:H|$ не делится на p . Тогда $|H| \vdots p$, и по индуктивному предположению H содержит элемент порядка p .

Пусть индекс любой истинной подгруппы H группы G делится на p . Обозначим через $K_i, i \in \{1, 2, \dots, s\}$ классы сопряжённых элементов группы G . Тогда $n = n_1 + n_2 + \dots + n_s, n_i = |K_i|$. Пусть $n_1 = 1$ - класс из единичного элемента. Поскольку число элементов, сопряжённых с данным, равно индексу нормализатора данного элемента, то есть индексу некоторой подгруппы группы G , то по предположению выше все $n_i \neq 1$ - кратные p индексы подгрупп группы G . Так как $n \vdots p$, число классов с $n_i = 1$, кратно p . Значит, центр группы G имеет порядок, кратный p . Центр - абелева подгруппа порядка, кратного p . По теореме о разложении конечной абелевой группы в прямое произведение циклических подгрупп центр содержит элемент порядка p .

Справедливость теоремы 4 может создать ложное впечатление о существовании элементов всех порядков, делящих порядок группы. Этому способствует и ошибочность трактовки обязательной в курсах высшей алгебры теоремы Лагранжа. Важно акцентировать невозможность её обращения. Обосновывается это следующим примером [3].

Рассмотрим группу подстановок порядка 12:

$$G = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (1234) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (1342) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (2143) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (1423) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (3412) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (3241) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (4321) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (4213) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (2314) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (2431) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (3124) \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} (1234) \\ (4132) \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

Эта группа не содержит подгрупп порядка 6. Но в соответствии с теоремой 4 содержит подгруппы порядков 2 и 3, а теорема Силова гарантирует наличие подгруппы порядка 4.

Заключение

Материал данной статьи предназначен для знакомства с понятием представления группы, демонстрации эффективности различных теоретико-групповых методов при решении задач классической теории групп. Цель - изложить материал, уместный в рамках одного занятия, по мнению авторов достигнута. Отсутствие некоторых доказательств может быть компенсировано решением соответствующих задач на факультативном уровне.

Интерес к теории представлений очевиден: при решении многих задач, например, проверке равенства или сопряжённости элементов в группе G , гораздо проще сделать это в соответствующей линейной группе или группе подстановок. Особенно удобной оказывается эта методика в случае точных представлений. Для них равенство в группе G выполняется тогда и только тогда, когда соответствующее равенство верно в образе, например, в группе матриц.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Вингберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2001, 543 с.
2. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. Москва – Ижевск «Институт компьютерных исследований», 2002, 148 с.
3. Холл М. Теория групп. Издательство иностранной литературы, Москва 1962, 468 с.

Nikolai V. Bezverkhny,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nbezv@mail.ru

Matrix representations of groups and the Sylow theorem in the university course of higher Algebra

Abstract. One of the basic theorems in a standard higher algebra course is Lagrange's theorem for finite groups. But it is not always possible to state Sylow's theorem, which in special cases is a reversal of Lagrange's theorem. The method of presenting this most interesting section of group theory and the impossibility of inverting Lagrange's theorem in the general case will be discussed in this article. The article compares two methods of proving Sylow's theorem: direct and using representation theory. The second method is discussed in sufficient detail and allows you to solve the problem efficiently and quickly. The purpose of the work is to demonstrate a non-standard effective method for proving classical group-theoretic theorems and to captivate the reader with representation theory. The content of the article is useful for students, masters and university teachers.

Keywords: regular representation, matrix representation, Sylow subgroup, double adjacent classes, group action.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ПРОГРАММИСТОВ

Аннотация

Актуальность рассматриваемой методической задачи обусловлена тем, что в учебных планах студентов-программистов существенное место занимает математическая логика, и требуется отработка методики строгого и в то же время доступного указанному контингенту изложения основ математической логики. В статье рассматривается методика изложения метода резолюций в исчислении высказываний и в исчислении предикатов, ориентированная на аудиторию студентов-программистов. Большое внимание уделяется анализу содержательных логических задач.

Ключевые слова

математическая логика, формальная теория, исчисление высказываний, исчисление предикатов, метод резолюций, методические проблемы

АВТОР

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

Введение

Данная статья является продолжением публикаций автора по методике изложения разделов курса логики и теории алгоритмов [1, 2] и посвящена изложению основ метода резолюций. Все понятия и обозначения, касающиеся исчисления высказываний (в виде теории, известной как *теория L*) следует искать во второй публикации, а это же по поводу исчисления предикатов - в первой. Для понимания настоящей статьи прочтение двух указанных обязательно. Необходимо также иметь в виду ссылки на источники в этих статьях.

Метод резолюций является эффективным методом построения формальных доказательств в логических формальных теориях. Именно он является основой для разработки программ, с помощью которых удастся автоматизировать поиск формального доказательства как в исчислении высказываний, так и в исчислении предикатов и теориях 1-го порядка.

Метод резолюций, как эффективная процедура построения формального доказательства в формальных теориях, до настоящего времени является предметом научных исследований. Так в статьях [3] и [4] предлагаются новые стратегии поиска опровержений через учет весов дизъюнктов с целью экономии ресурсов при программном обеспечении баз данных. Нечто похожее, а именно учет рейтинга дизъюнктов с целью оптимизации поиска резольвент, предлагается в работе [5]. Приводятся соответствующие алгоритмы реализации.

Основная методическая инновация в настоящей статье состоит в использовании содержательных задач («головоломки», порой сказочно-юмористических). Это позволяет показать преимущества и издержки формализации, перекинув мост от содержательной логики к формальной. Часть из рассматриваемых здесь задач придумана автором, часть взята из других источников. В частности, разбирается известная задача

Л. Кэрролла о поросятах [6], путешествующих на воздушном шаре. Заметим, что в академических курсах логики этому содержательному аспекту не уделяется должного внимания. Но он важен в качестве демонстрации логики как «скелета» каких-то событий, реальных или сказочных. В этой связи обратим внимание на работу [7], в которой дается решение методом резолюций так называемой «загадки Эйнштейна» [8]. Заметим при этом, что при изучении математики очень важно показать связь между «сухими» формализмами и реальностью.

Статья делится на три раздела: в первом дается описание метода резолюций в исчислении высказываний, приводятся примеры; во втором - в исчислении предикатов, а в третьем разбираются содержательные задачи, для каждой из которых дается содержательное решение и решение методом резолюций применительно к исчислению предикатов.

Следует подчеркнуть, что в статье не ставится цель подробного и строгого изложения метода резолюций. Статья не есть учебник; здесь будет дана некая *методическая схема*, которая используется при рассмотрении самых основ метода резолюций в курсе математической логики, читаемом автором и его коллегами студентам-программистам в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Методология и результаты исследования

Рассматриваемая в статье методика основана на известных из перечисленных источников концепциях изложения математической логики с учетом особенностей аудитории, в которой читается курс. За основу взято изложение метода резолюций в книге [9], в которой строгость изложения удачно сочетается с доступностью.

Из учебных пособий отечественной литературы, где подробно изложен метод резолюций, укажем на пособия [10] и [11].

Далее рассматриваются основные рубрики, по которым раскладывается теоретический материал, включая полученные результаты.

Метод резолюций в исчислении высказываний

Идея метода резолюций применительно к исчислению высказываний состоит в следующем.

Пусть нужно доказать, что некоторая формула Φ является тавтологией.

Тогда отрицание формулы преобразуется к КНФ, которая рассматривается как множество дизъюнктов, где каждый дизъюнкт есть элементарная дизъюнкция в составе полученной КНФ.

К этому множеству дизъюнктов применяется следующее правило:

$$\frac{A \vee L_1, \neg A \vee L_2}{L_1 \vee L_2},$$

где A - (пропозициональная) буква, понимаемая так же, как и в теории L , а L_1 и L_2 - дизъюнкты, называемое резольвентивным правилом (правилом R). Это правило можно применить к такой паре дизъюнктов, которая содержит контрарные буквы. Заключение этого правила называется резольвентой дизъюнктов-посылок. Последовательно применяя правило R, получая всё новые резольвенты и, тем самым, расширяя исходное множество дизъюнктов, стремимся к тому, чтобы на некотором шаге этого процесса, называемого резольвентивным выводом, получить пустой дизъюнкт, который по определению считается резольвентой пары контрарных букв:

$$\frac{A, \neg A}{\square}.$$

Тогда заключаем к несовместности исходного множества дизъюнктов, то есть к противоречивости отрицания доказываемой формулы и, следовательно, можем утверждать, что сама исходная формула доказана, то есть является тавтологией.

Можно действовать и так: если исходная формула $\Phi = \Theta \rightarrow \Psi$, то исходное множество дизъюнктов получается после приведения к КНФ посылки записанной импликации и отрицания ее заключения.

Обоснования резолютивного правила может быть дано в виде вывода в теории L:

1. $A \vee L_1 = \neg A \rightarrow L_1$ - гипотеза
2. $\neg A \vee L_2 = \neg\neg A \rightarrow L_2$ - гипотеза
3. $\neg L_1 \rightarrow \neg\neg A$ - (R7) к шагу (1)
4. $\neg L_1 \rightarrow L_2 = L_1 \vee L_2$ - (R1) к шагам (3) и (2)

Таким образом, заключение резолютивного правила является логическим следствием его посылок.

Один из дизъюнктов L_1 или L_2 может быть пустым. Получаем частые случаи резолютивного правила:

$$\frac{A \vee L_1, \neg A}{L_1} \text{ и } \frac{A, \neg A \vee L_2}{L_2}$$

Легко показать, что если из исходного множества дизъюнктов выводится пустой дизъюнкт, то оно несовместно (противоречиво, тождественно ложно). Доказательство обратного, то есть, что из любого несовместного множества дизъюнктов выводится пустой дизъюнкт, значительно сложнее. Это свойство полноты метода резолюций, и его доказательство не рассматривается.

Рассмотрим теперь некоторые содержательные задачи.

Задача про забастовку [12]

Если конгресс отказывается действовать, то забастовка не будет окончена, если только она не длится более года, и президент фирмы не уходит в отставку.

Закончится ли забастовка, если конгресс отказывается действовать, а забастовка только началась?

Решение

Введем логические переменные:

p - конгресс отказывается действовать,

q - забастовка заканчивается,

r - президент (фирмы) уходит в отставку,

s - забастовка длится более года.

Решение методом резолюций

Построим исходное множество дизъюнктов:

$$p \rightarrow (\neg q \vee (r \& s)) = \neg p \vee \neg q \vee (r \& s) = (\neg p \vee \neg q \vee r) \& (\neg p \vee \neg q \vee s).$$

Исходные дизъюнкты:

1. $\neg p \vee \neg q \vee r$
2. $\neg p \vee \neg q \vee s$
3. p
4. $\neg s$
5. q (подвергаем отрицанию заключение импликации)

Резолютивный вывод:

6. $\neg q \vee s$ - резольвента (2) и (3)

7. s - (5) и (6)

8. \square - (4) и (7)

Получили пустой дизъюнкт, что и требовалось.

Можно изменить условие: первое условие осталось прежним, но стало известно, что конгресс отказывается действовать, забастовка закончилась, и президент фирмы в отставку не ушел. Можно ли отсюда заключить к тому, что забастовка затянулась (длилась более года)?

Формула переписывается в виде:

$$(p \rightarrow (\neg q \vee (r \& s))) \& p \& q \& \neg r \rightarrow s.$$

Исходные дизъюнкты:

1. $\neg p \vee \neg q \vee r$

2. $\neg p \vee \neg q \vee s$

3. p

4. $\neg r$

5. q

6. $\neg s$ (подвергаем отрицанию заключение импликации)

7. $\neg p \vee \neg q$ - (2) и (6), или (1) и (4)

8. $\neg q$ - (3) и (7)

9. \square - (5) и (8)

Задача с пятью переменными

Доказать $\vdash [((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)) \rightarrow E] \rightarrow [(E \rightarrow A) \rightarrow (\neg D \rightarrow A)]$

Преобразуем посылку (левую квадратную скобку):

$$\begin{aligned} ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)) \rightarrow E &= \neg(\neg(A \rightarrow B) \vee (\neg C \rightarrow \neg D)) \vee E = \\ &= \neg((A \& \neg B) \vee (C \vee \neg D)) \vee E = (\neg(A \& \neg B) \& \neg(C \vee \neg D)) \vee E = \\ &= ((\neg A \vee B) \& (\neg C \& D)) \vee E = (\neg A \vee B \vee E) \& (\neg C \vee E) \& (D \vee E). \end{aligned}$$

Преобразуем отрицание заключения:

$$\neg[(E \rightarrow A) \rightarrow (\neg D \rightarrow A)] = (E \rightarrow A) \& \neg(\neg D \rightarrow A) = (\neg E \vee A) \& \neg D \& \neg A.$$

Исходное множество дизъюнктов:

1. $\neg A \vee B \vee E$

2. $\neg C \vee E$

3. $D \vee E$

4. $\neg E \vee A$

5. $\neg D$

6. $\neg A$

Далее:

7. $\neg E$ - (4) и (6)

8. D - (3) и (7)

9. \square - (5) и (8).

Целесообразно сравнить это решение с решением в виде доказательства в теории L [13], чтобы убедиться в более высокой эффективности метода резолюций.

Метод резолюций в исчислении предикатов 1-го порядка

Применение метода резолюций в исчислении предикатов (далее используем аббревиатуру ИП1) требует существенной предварительной работы. А именно, чтобы получить исходное множество дизъюнктов, нужно к последовательности формул в исчислении предикатов, которая строится при формализации задачи, применить некоторые преобразования: 1) построить *предваренную нормальную форму* (ПНФ); 2) из ПНФ получить *стандартную скелемовскую форму*; 3) провести *унификацию* некоторых формул.

Рассмотрим коротко эти преобразования.

Говорят, что формула ИП1 задана в *предваренной нормальной форме* (ПНФ), если она имеет вид:

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)P(x_1, x_2, \dots, x_n, y, z, \dots),$$

где $(\forall i = 1, \dots, n)(Q_i \in \{\forall, \exists\})$, а формула P , называемая матрицей, не содержит

кванторов. Заметим, что помимо связанных вхождений переменных x_1, x_2, \dots, x_n матрица может содержать и некоторые свободные переменные. Цепочка кванторов перед матрицей называется кванторной приставкой.

Можно доказать, что любая формула может быть преобразована к эквивалентной ПНФ.

Основные правила преобразования:

1) Тождества булевой алгебры

$$2) (\forall x)F(x) \wedge G \equiv (\forall x)(F(x) \wedge G)$$

$$3) (\forall x)F(x) \vee G \equiv (\forall x)(F(x) \vee G)$$

при условии, что x не входит в G .

4) То же для квантора существования.

$$5) \neg(\forall x)F(x) \equiv (\exists x)\neg F(x)$$

$$6) \neg(\exists x)F(x) \equiv (\forall x)\neg F(x)$$

$$7) (\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)(F(x) \wedge G(x))$$

$$8) (\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x) \equiv (\exists x)(F(x) \vee G(x))$$

9) $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(F(x) \vee G(y))$, где y не входит в F (необходимо переименование связанной переменной во второй формуле слева!)

$$10) (\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge G(y))$$
, где y не входит в F .

Правила (7) - (10) могут быть обобщены:

$$11) (Q_1x)F(x) \vee (Q_2x)G(x) \equiv (Q_1x)(Q_2y)(F(x) \vee G(y))$$

$$12) (Q_1x)F(x) \wedge (Q_2x)G(x) \equiv (Q_1x)(Q_2y)(F(x) \wedge G(y)),$$

где Q_1 и Q_2 независимо в (11) и (12) пробегают множество кванторов.

Необходимость переименования связанной переменной в (9) и (10) иллюстрируется такими простыми контрпримерами.

Пусть $F(x) = "x \text{ четно}"$, $G(x) = "x \text{ нечетно}"$. Тогда формула $(\forall x)(F(x) \vee G(x))$ истинна в целочисленной интерпретации, а формула $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$ ложна.

В этом же случае формула $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)$ истинна, а формула $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ ложна.

Все приведенные выше эквивалентности могут быть стандартно доказаны.

Докажем, например, (3):

1. $(\forall x)F(x) \vee G \equiv \neg(\forall x)F(x) \rightarrow G$ - гипотеза
2. $\neg G \rightarrow \neg\neg(\forall x)F(x)$ - R7, (1)
3. $\neg\neg(\forall x)F(x) \rightarrow (\forall x)F(x)$ - секвенция (3)
4. $\neg G \rightarrow (\forall x)F(x)$ - R1, (2) и (3)
5. $(\forall x)F(x) \rightarrow F(x)$ - схема (4)
6. $\neg G \rightarrow F(x)$ - R1, (4) и (5)
7. $F(x) \vee G$ - коммутативность дизъюнкции
8. $(\forall x)(F(x) \vee G)$ - Gen, (7).

Обратно:

1. $(\forall x)(F(x) \vee G)$ - гипотеза
2. $(\forall x)(G \vee F(x)) \equiv (\forall x)(\neg G \rightarrow F(x))$ - коммутативность дизъюнкции
3. $(\forall x)(\neg G \rightarrow F(x)) \rightarrow (\neg G \rightarrow (\forall x)F(x))$ - схема (5); корректно, так как x не входит в G .
4. $\neg G \rightarrow (\forall x)F(x) \equiv G \vee (\forall x)F(x)$ - MP, (2) и (3)
5. $(\forall x)F(x) \vee G$ - коммутативность дизъюнкции.

Опираясь на записанные выше правила (1) - (8), можно рассмотреть более сложные примеры.

Например, правило (9) может быть доказано так:

1. $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)F(x) \vee (\forall y)G(y)$ - переименовываем связанную переменную во втором члене дизъюнкции
2. $(\forall x)(F(x) \vee (\forall y)G(y))$ - согласно правилу (3) (x не входит в G).
3. $(\forall x)(\forall y)(F(x) \vee G(y))$ - согласно (3), так как y не входит в F .

Аналогично для правила (10) и всех обобщений.

Замечание. Связанную переменную всегда можно переименовать. Точнее, имеют место следующие эквивалентности:

$(\forall x)F(x) \equiv (\forall y)F(y)$ и $(\exists x)F(x) \equiv (\exists y)F(y)$ при условии, что y не входит в $F(x)$.

Это легко доказать (имеется в виду, что после замены всех вхождений переменной x на переменную y вхождений первой переменной в исходную формулу уже не остается).

Рассмотрим еще один пример: дана формула

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y))$, $y \notin \text{Var}(P)$ (под $\text{Var}(P)$ понимается множество всех переменных в формуле P , тогда как $FV(P)$ обозначает множество всех свободных входящих переменных в формуле P).

Используя записанные выше правила, получим:

$$\begin{aligned} (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)) &\equiv (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \equiv \\ &\equiv (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \end{aligned}$$

Переход к *сколемовской стандартной форме*, состоящий в устранении из приставки всех кванторов существования, производится следующим образом.

Если приставка начинается квантором существования $(\exists x)$, то всюду в матрице переменную x следует заменить некоторой предметной константой a . Эта константа абстрактна, как и при применении правила выбора.

Если в приставке квантор $(\exists x)$ стоит где-то посередине, то следует отметить все стоящие перед ним кванторы общности $(\forall u_1), (\forall u_2), \dots, (\forall u_m)$ и в приставке все вхождения переменной x заменить термом $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$, где f - некоторая функция (точнее, функциональный символ), называемая функцией Сколема, или сколемовской функцией. Сколемовская стандартная форма не эквивалентна исходной ПНФ, но можно доказать, что если она невыполнима, то невыполнима и исходная ПНФ.

Для построенной выше ПНФ получим $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x)))$

Еще один пример, показывающий важность учета всех кванторов общности, стоящих в приставке до удаляемого квантора существования, независимо от их расположения в приставке).

Для исходной ПНФ $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\exists t)F(x, y, z, u, t)$ получим

$$(\forall x)(\forall z)(\forall u)F(x, f(x), z, u, g(x, z, u)).$$

Перейдем теперь к рассмотрению процедуры *унификации формул*. Подробный алгоритм унификации рассмотрен в книге [14]. Здесь ограничимся изложением основной идеи и рассмотрением примеров. Унификация производится для конечного множества атомарных формул с одним и тем же предикатным символом, но с различными термами-аргументами.

Формулы синхронно читаются слева направо (то есть анализируется их скобочная структура. В случае рассогласования, то есть, когда на одном и том же месте в скобочных структурах в одной формуле стоит переменная, а в другой функциональный символ - заголовок некоторого терма, производится замена переменной соответствующим термом. Так продолжают до тех пор, пока формулы не совпадут, или окажется, что унификация невозможна. В первом случае получается последовательность замен (подстановок) вида «переменная := терм», которая называется *наиболее общим унификатором* (НОУ) исходного множества формул.

Поясним это на примерах.

1) Рассмотрим множество, состоящее из трех формул:

$$\{p(x, f(y, z)), p(x, t), p(t, f(h(u, v), g(v)))\}$$

Первое рассогласование, которое можно увидеть, состоит в том, что на месте второго терма во второй формуле, переменной t , в первой стоит терм $f(y, z)$.

Тогда, если применить подстановку $\sigma_1 = \{t := f(y, z)\}$, две первые формулы совпадут, и мы получим новое множество формул, состоящее уже из двух формул:

$$\{p(x, f(y, z)), p(f(y, z), f(h(u, v), g(v)))\}.$$

После подстановки $\sigma_2 = \{x := f(y, z)\}$ получим:

$$\{p(f(y, z), f(y, z)), p(f(y, z), f(h(u, v), g(v)))\}.$$

Далее нетрудно увидеть, что после применения подстановок

$$\sigma_3 = \{y := h(u, v)\} \text{ и } \sigma_4 = \{z := g(v)\}$$

получим результат унификации, а именно формулу

$$p(f(h(u, v), g(v)), f(h(u, v), g(v))).$$

Последовательность (композиция) подстановок

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$$

и будет в данном случае НОУ исходного множества формул.

Результат применения НОУ σ к исходному множеству формул Φ будем обозначать $\Phi\sigma$.

Может оказаться, что исходное множество формул не унифицируемо.

Например, если для множества формул

$$\{p(x, f(y, z)), p(x, t), p(t, f(h(u, v), g(t)))\}$$

выполнить последовательно подстановки

$$\sigma_1 = \{t := f(y, z)\}, \sigma_2 = \{x := f(y, z)\}, \sigma_3 = \{y := h(u, v)\},$$

то получим две формулы

$$\{p(f(h(u, v), z), f(h(u, v), z)), p(f(h(u, v), z), f(h(u, v), g(f(h(u, v), z))))\},$$

но для их унификации потребовалась бы рекурсивная замена

$$z := g(f(h(u, v), z)),$$

что недопустимо.

В то же время замена переменной t в терме $g(t)$ какой-нибудь другой делает множество унифицируемым (см. первый пример).

Еще одна ситуация неунифицируемости возникает, если в процессе отождествления формул мы сталкиваемся с необходимостью заменить терм на терм, что также недопустимо.

Например, для множества

$$\{p(f(a), g(x)), p(y, y)\}$$

после подстановки $y := f(a)$ получим формулы $\{p(f(a), g(x)), p(f(a), f(a))\}$, которые нельзя унифицировать, так как пришлось бы заменять терм на терм.

Рассмотрим теперь, как происходит построение резолювенты при применении метода резолюций в ИП1.

Исходное множество дизъюнктов получается после того, как все кванторы из формул устранены. Кванторы существования устраняются после приведения формул

к сколемовской форме, а кванторы общности просто снимают, основываясь на том, что, если множество формул, формализующих некоторую задачу, окажется несовместным без кванторов общности, оно будет по-прежнему несовместно с этими кванторами.

Перед построением резольвенты может понадобиться унификация формул внутри некоторого дизъюнкта (называемая *склежкой*) и между разными дизъюнктами при применении резолютивного правила.

Рассматривая эти процедуры, мы несколько упрощаем алгоритмы, изложенные в [15], но для целей настоящего изложения этого достаточно.

Начнем с рассмотрения склейки.

Если в дизъюнкте есть две атомарные формулы с одним и тем же предикатным символом, $r(t_1, \dots, t_n)$ и $r(s_1, \dots, s_n)$, и если существует наиболее общий унификатор (НОУ) τ такой, что $r(t_1, \dots, t_n)\tau = r(s_1, \dots, s_n)\tau = r(\theta_1, \dots, \theta_n)$, то последняя формула называется результатом склейки двух исходных.

Теперь рассмотрим построение резольвенты двух дизъюнктов.

Пусть даны дизъюнкты

$$D_1 = D_1' \vee p(t_1, \dots, t_n), D_2 = D_2' \vee \neg p(s_1, \dots, s_n).$$

$$\text{Обозначим } L_1 = p(t_1, \dots, t_n), L_2 = \neg p(s_1, \dots, s_n).$$

Если существует НОУ σ такой, что $L_1\sigma = p(\theta_1, \dots, \theta_n), L_2\sigma = \neg p(\theta_1, \dots, \theta_n)$, то резольвентой исходных дизъюнктов будет

$$D_1'\sigma \vee D_2'\sigma.$$

Предварительно внутри каждого из исходных дизъюнктов может быть проведена склейка. При этом предполагается, что эти дизъюнкты не имеют общих переменных.

Рассмотрим несколько простых примеров.

$$1) D_1 = P(x) \vee Q(x), D_2 = \neg P(a) \vee R(x)$$

Следует переименовать переменную, например, во втором дизъюнкте.

Перепишем:

$$D_1 = P(x) \vee Q(x), D_2 = \neg P(a) \vee R(y).$$

Легко найти НОУ: $\sigma = \{x := a\}$ (или $\sigma = \{a / x\}$).

$$\text{Тогда } D_1\sigma = P(a) \vee Q(a), D_2\sigma = D_2 = \neg P(a) \vee R(y)$$

Получаем резольвенту $Q(a) \vee R(y)$.

Требование, чтобы исходные дизъюнкты не имели общих переменных, вообще говоря, существенно.

Изменим второй дизъюнкт:

$$\tilde{D}_2 = \neg P(a) \vee R(y) \vee R(h(u, v)).$$

Тогда сначала нужно получить склейку $\tilde{D}'_2 = \neg P(a) \vee R(h(u, v))$, где использован унификатор $\tau = \{y := h(u, v)\}$, а потом - резольвенту:

$$Q(a) \vee R(h(u, v)).$$

Оставив во втором дизъюнкте переменную x , мы получили бы для этой переменной разные замены на терм, что недопустимо.

$$2) D_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)), D_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(h(u, v))$$

Выполняем склейку, полагая $x := f(y)$:

$$D'_1 = P(f(y)) \vee R(g(y)), D_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(h(u, v)).$$

Строим резольвенту, используя унификатор $\sigma = \{y := g(a)\}$:

$$R(g(g(a))) \vee Q(h(u, v)).$$

В целом, можно утверждать, что нахождение НОУ в процессе резолютивного вывода позволяет найти такие значения предметных переменных, которые делают исходное множество дизъюнктов несовместным.

Переходим к рассмотрению содержательных задач.

Начнем с задачи о таможенниках, взятой из книги [16].

Содержательная формулировка:

1. Таможенные чиновники обыскивают каждого, кто въезжает в страну, кроме VIP.

2. Некоторые люди, способствовавшие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков

3. Никто из VIP не способствовал провозу наркотиков.

Доказать, что

4. Некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

Решение

Введем предикаты:

$E(x)$ - "x въезжает в страну»,

$V(x)$ "x есть VIP",

$S(x, y)$ - "y обыскивает x",

$C(x)$ - "x - таможенник»,

$P(x)$ - "x способствует провозу наркотиков».

Переводим на язык ИП1 посылки:

$$1. (\forall x)(E(x) \& \neg V(x) \rightarrow (\exists y)(S(x, y) \& C(y)))$$

$$2. (\exists x)(P(x) \& E(x) \& (\forall y)(S(x, y) \rightarrow P(y)))$$

$$3. (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg V(x))$$

Отрицание заключения:

$$4. \neg(\exists z)(P(z) \& C(z)) = (\forall z)(\neg P(z) \vee \neg C(z))$$

Покажем подробно построение ПНФ и сколемовской формы для первых двух формул:

1)

$$(\forall x)(E(x) \& \neg V(x) \rightarrow (\exists y)(S(x, y) \& C(y))) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\neg E(x) \vee V(x) \vee (\exists y)(S(x, y) \& C(y))) \equiv$$

$$\equiv (\forall x)(\exists y)(\neg E(x) \vee V(x) \vee (S(x, y) \& C(y)))$$

Сколемовская форма:

$$(\forall x)(\neg E(x) \vee V(x) \vee (S(x, f(x)) \& C(f(x))))$$

$$2) (\exists x)(\forall y)(P(x) \& E(x) \& (S(x, y) \rightarrow P(y))) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \& E(x) \& (\neg S(x, y) \vee P(y)))$$

Сколемовская форма:

$$(\forall y)(P(a) \& E(a) \& (\neg S(a, y) \vee P(y))).$$

Исходное множество дизъюнктов:

$$1. \neg E(x) \vee V(x) \vee S(x, f(x))$$

$$2. \neg E(x) \vee V(x) \vee C(f(x))$$

$$3. P(a)$$

4. $E(a)$
5. $\neg S(a, y) \vee P(y)$
6. $\neg P(x) \vee \neg V(x)$
7. $\neg P(z) \vee \neg C(z)$

Резолютивный вывод:

8. $\neg V(a), x := a$ - (3) и (6)
9. $\neg E(a) \vee C(f(a)), x := a$ - (2) и (8)
10. $C(f(a))$ - (4) и (9)
11. $V(a) \vee S(a, f(a)), x := a$ - (1) и (4)
12. $S(a, f(a))$ - (8) и (11)
13. $P(f(a)), y := f(a)$ - (5) и (12)
14. $\neg C(f(a)), z := f(a)$ - (7) и (13)
15. \square - (10) и (14).

Замечание. Другой вариант вывода (принадлежит автору статьи):

- 8а. $V(a) \vee C(f(a)), x := a$ - (2) и (4)
- 9а. $\neg V(a), x := a$ - (3) и (6)
- 10а. $C(f(a))$ - (8а) и (9а)
- 11а. $\neg E(a) \vee V(a) \vee P(f(a)); x := a, y := f(a)$ - (1) и (5)
(заметим, что $\sigma = \{x := a, y := f(a)\}$ - НОУ формул $S(x, f(x))$ и $S(a, y)$)
- 12а. $V(a) \vee P(f(a))$ - (4) и (11а)
- 13а. $P(f(a))$ - (9а) и (12а)
- 14а. $\neg C(f(a)); z := f(a)$ - (7) и (13а)
- 15а. \square - (10а) и (14а).

Заметим, что в содержательном доказательстве мы пришли бы к тому же противоречию: предположив, что обыскивающий некоего “а” не есть таможенник, мы получили бы, что он не может быть никем, кроме как таможенником. Иначе пришлось бы допустить, что въезжающего обыскивают два разных человека, что невозможно ввиду слова «исключительно» в условии задачи. То есть кто-то один обыскивает.

Следующая задача придумана автором (в стиле некоторых, более простых, задач из книги Л. Кэррола [17]).

Джек и его друг крокодил Гена

1. Всякий, кто читает газеты по пятницам, добр.
2. Ни один крокодил не читает газет по пятницам.
3. Ни один добрый не дружит с тем, кто зол.
4. Джек читает газеты по пятницам и дружит с крокодилом Геней.
5. Доказать, что существуют добрые крокодилы, не читающие газет по пятницам.

Содержательное решение: предположим, что крокодилов, указанных в п. 5, не существует. Но у Джека есть друг-крокодил. Джек добр, так как читает газеты по пятницам. Тогда получается, что он дружит со злым крокодилом, что невозможно, так как ни один, кто добр, не дружит с тем, кто зол. Противоречие. Следовательно, Гена - добрый крокодил, который, как и всякий крокодил, не читает газет по пятницам. Теорема доказана.

Формализация, в которой введены предикаты:

$R(x)$ - x читает газеты по пятницам,

$K(x)$ - x добр,

$C(x)$ - x есть крокодил,

$F(x, y)$ - x дружит с y .

Запишем условие на языке ИП1 («Джек» и «Гена» - предметные константы, в данном случае указания на конкретных индивидов):

1. $(\forall x)(R(x) \rightarrow K(x))$
2. $(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg R(x))$
3. $(\forall x)(K(x) \rightarrow \neg(\exists y)(\neg K(y) \& F(x, y))) \equiv$
 $\equiv (\forall x)(\neg K(x) \vee (\forall y)(K(y) \vee \neg F(x, y)))$
4. $R(\text{Джек})$
5. $C(\text{Гена})$
6. $F(\text{Джек}, \text{Гена})$
7. $(\exists x)(C(x) \& K(x) \& \neg R(x))$ (то, что нужно доказать).

Дизъюнкты:

1. $\neg R(x) \vee K(x)$
2. $\neg C(x) \vee \neg R(x)$
3. $\neg K(x) \vee K(y) \vee \neg F(x, y)$
4. $R(\text{Джек})$
5. $C(\text{Гена})$
6. $F(\text{Джек}, \text{Гена})$
7. $\neg C(x) \vee \neg K(x) \vee R(x)$ (из отрицания заключения, т. е. того, что нужно доказать).

Вывод:

8. $\neg R(x) \vee K(y) \vee \neg F(x, y)$ - (1) и (3)
9. $K(y) \vee \neg F(\text{Джек}, y); x := \text{Джек}$ - (4) и (8)
10. $K(\text{Гена}); y := \text{Гена}$ - (6) и (9)
11. $\neg K(\text{Гена}) \vee R(\text{Гена})$ - (5) и (7); $x := \text{Гена}$
12. $\neg R(\text{Гена}); x := \text{Гена}$ - (2) и (5)
13. $\neg K(\text{Гена})$ - (11) и (12)
14. \square - (10) и (13).

Можно рассмотреть вариацию (и, одновременно, усложнение) этой задачи:

1. Всякий, кто читает газеты по пятницам, добр.
2. Ни один крокодил не читает газет по пятницам.
3. Читающие газеты по пятницам существуют.
4. У всякого читающего газеты по пятницам есть друг-крокодил.
5. Ни один добрый не дружит с тем, кто зол.
6. Доказать, что существуют добрые крокодилы, не читающие газет по пятницам.

Формализация:

1. $(\forall x)(R(x) \rightarrow K(x))$
2. $(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg R(x))$
3. $(\exists x)R(x)$
4. $(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(C(y) \& F(x, y)))$
5. $(\forall x)(K(x) \rightarrow \neg(\exists y)(\neg K(y) \& F(x, y))) \equiv$
 $\equiv (\forall x)(\neg K(x) \vee (\forall y)(K(y) \vee \neg F(x, y)))$
6. $(\exists x)(C(x) \& K(x) \& \neg R(x))$ (то, что нужно доказать).

Дизъюнкты:

1. $\neg R(x) \vee K(x)$
2. $\neg C(x) \vee \neg R(x)$
3. $R(a)$
4. $\neg R(x) \vee C(f(x))$
5. $\neg R(x) \vee F(x, f(x))$
6. $\neg K(x) \vee K(y) \vee \neg F(x, y)$
7. $\neg C(x) \vee \neg K(x) \vee R(x)$ - из отрицания заключения.

Вывод:

8. $\neg R(x) \vee K(y) \vee \neg F(x, y)$ - (1) и (6)
9. $K(y) \vee \neg F(a, y); x := a$ - (3) и (8)
10. $C(f(a)); x := a$ - (3) и (4)
11. $F(a, f(a)); x := f(a)$ - (3) и (5)
12. $K(f(a)); y := f(a)$ - (9) и (11)
13. $\neg K(f(a) \vee R(f(a)); x := f(a)$ - (7) и (10)
14. $\neg R(f(a)); x := f(a)$ - (2) и (10)
15. $\neg K(f(a))$ - (13) и (14)
16. \square - (12) и (15).

Здесь важно постулировать, что читающие газеты по пятницам действительно существуют, то есть постулировать непустоту соответствующего множества. Это позволяет в процессе резолютивного вывода получить дизъюнкты шагов 3, 10 и 11, где константа a заменяет условного Джека, а терм $f(a)$ - условного крокодила Гену, друга Джека. Иначе резолютивный вывод не пройдет, то есть пустой дизъюнкт не получится.

В заключение рассмотрим известную задачу Л. Кэрролла о поросятах, путешествующих на воздушном шаре:

1. Всякий, кто не танцует на туго натянутом канате и не ест пирожков за один пенс, стар.
2. Со свиньями, которые временами испытывают головокружение, обращаются почтительно.
3. Разумное существо, отправляясь в путешествие на воздушном шаре, берет с собой зонтик.
4. Не следует завтракать в присутствии посторонних тому, кто имеет смешной вид и ест пирожки за один пенс.

5. Юные существа, отправляющиеся в путешествие на воздушном шаре, временами испытывают головокружение.

6. Жирные существа, имеющие смешной вид, могут завтракать при посторонних, если только они не танцуют на туго натянутом канате.

7. Ни одно разумное существо не станет танцевать на туго натянутом канате, если оно временами испытывает головокружение.

8. Свинья с зонтиком имеет смешной вид.

9. Все, кто не танцует на туго натянутом канате и с кем обращаются почтительно, жирны.

Доказать, что ни один разумный поросенок не отправится путешествовать на воздушном шаре.

(**Определение.** Поросенок - юная свинья. Также принимается, что «старый» есть «не молодой».)

Приводимое ниже решение принадлежит автору статьи.

Содержательное решение

Предположим, что некий разумный поросенок отправится путешествовать на воздушном шаре. Поскольку он юн, он тогда временами испытывает головокружение (5), а поскольку при этом разумен, то не танцует на туго натянутом канате (7).

Далее, так как он свинья, временами испытывающая головокружение, то с ним обращаются почтительно (2), а так как при этом он не танцует на туго натянутом канате, то он является жирным существом (9), а так как, далее, отправляясь в путешествие, он берет с собой зонтик (3), то имеет смешной вид (8). Следовательно, в силу (6) он может завтракать при посторонних.

Далее, он ест пирожки за один пенс, ибо если бы он их не ел, то в силу (1) был бы стар, что противоречит его юности.

Следовательно, согласно (4), он не может завтракать в присутствии посторонних.

Противоречие.

Решение методом резолюций

Переводя содержательное условие на язык исчисления предикатов 1-го порядка, сразу опускаем кванторы общности по переменной x .

Вводим предикаты:

- 1) $Clever(x)$ - “ x разумен”
- 2) $Young(x)$ - “ x молод (юн)”
- 3) $Pig(x)$ - “ x - свинья”
- 4) $Travel(x)$ - “ x отправляется в путешествие на воздушном шаре”
- 5) $Dance(x)$ - “ x танцует на туго натянутом канате”
- 6) $Eat(x)$ - “ x ест пирожки за 1 пенс”
- 7) $Umb(x)$ - “ x берет с собой зонтик”
- 8) $Br(x)$ - “ x завтракает при посторонних”
- 9) $Vert(x)$ - “ x временами испытывает головокружение”
- 10) $resp(x)$ - “к x относятся почтительно”
- 11) $Fat(x)$ - “ x жирен”
- 12) $Funny(x)$ - “ x имеет смешной вид”.

Тогда для исходных предпосылок будем иметь:

1. $\neg Dance(x) \& \neg Eat(x) \rightarrow \neg Young(x)$
2. $Pig(x) \& Vert(x) \rightarrow resp(x)$
3. $Clever(x) \& Travel(x) \rightarrow Umb(x)$
4. $Funny(x) \& Eat(x) \rightarrow \neg Br(x)$
5. $Young(x) \& Travel(x) \rightarrow Vert(x)$
6. $Fat(x) \& Funny(x) \rightarrow (\neg Dance(x) \rightarrow Br(x))$
7. $Clever(x) \& Vert(x) \rightarrow \neg Dance(x)$
8. $Pig(x) \& Umb(x) \rightarrow Funny(x)$
9. $\neg Dance(x) \& resp(x) \rightarrow Fat(x)$

Отрицание заключения даст конъюнкцию
 $Clever(a) \& Young(a) \& Pig(a) \& Travel(a)$.

Исходные дизъюнкты:

1. $Dance(x) \vee Eat(x) \vee \neg Young(x)$
2. $\neg Pig(x) \vee \neg Vert(x) \vee resp(x)$
3. $\neg Clever(x) \vee \neg Travel(x) \vee Umb(x)$
4. $\neg Funny(x) \vee \neg Eat(x) \vee \neg Br(x)$
5. $\neg Young(x) \vee \neg Travel(x) \vee Vert(x)$
6. $\neg Fat(x) \vee \neg Funny(x) \vee Dance(x) \vee Br(x)$
7. $\neg Clever(x) \vee \neg Vert(x) \vee \neg Dance(x)$
8. $\neg Pig(x) \vee \neg Umb(x) \vee Funny(x)$
9. $Dance(x) \vee \neg resp(x) \vee Fat(x)$
10. $Clever(a)$
11. $Young(a)$
12. $Pig(a)$
13. $Travel(a)$

Вывод:

14. $Dance(a) \vee Eat(a); x := a$ - (1) и (11); везде в дальнейшем переменной x присваивается значение a (некая предметная константа)

15. $\neg Vert(a) \vee resp(a)$ - (2) и (12)
16. $\neg Travel(a) \vee Umb(a)$ - (3) и (10)
17. $Umb(a)$ - (13) и (16)
18. $\neg Umb(a) \vee Funny(a)$ - (8) и (12)
19. $Funny(a)$ - (17) и (18)
20. $\neg Travel(a) \vee Vert(a)$ - (5) и (11)
21. $Vert(a)$ - (13) и (20)
22. $\neg Vert(a) \vee \neg Dance(a)$ - (7) и (10)
23. $\neg Dance(a)$ - (21) и (22)
24. $Eat(a)$ - (14) и (23)
25. $\neg Vert(a) \vee resp(a)$ - (2) и (12)
26. $resp(a)$ - (21) и (25)

27. $Dance(a) \vee Fat(a)$ - (9) и (26)
28. $Fat(a)$ - (23) и (27)
29. $\neg Funny(a) \vee Dance(a) \vee Br(a)$ - (6) и (28)
30. $Dance(a) \vee Br(a)$ - (19) и (29)
31. $Br(a)$ - (23) и (30)
32. $\neg Eat(a) \vee \neg Br(a)$ - (4) и (19)
33. $\neg Br(a)$ - (24) и (32)
34. \square - (31) и (33).

Можно заметить, что резолютивный вывод следует логике содержательного решения. И противоречие получилось то же самое.

Интересно отметить и то, что если бы мы захотели доказать утверждение задачи «в лоб», нам потребовалось бы составить таблицу истинности из 2^{12} строк (12 выписанных выше атомарных формул, рассматриваемых как логические переменные), что означает практическую неразрешимость задачи таким способом (или требует очень больших вычислительных затрат, не реализуемых вручную). Да и доказательство в теории 1-го порядка (исчислении предикатов) потребовало бы гораздо больше усилий, чем решение методом резолюций. Всё это означает, что установление истинности какой-либо формулы в рамках некоторой дедуктивной системы неизмеримо более эффективно, чем построение таблиц истинности даже там, где они в принципе возможны.

Заключение

Рассмотрена методика изложения метода резолюций применительно к исчислению высказываний и исчислению предикатов 1-го порядка. Больше внимания, чем в других источниках, уделено анализу содержательных логических задач с использованием метода резолюций. При этом все решения (кроме одного) являются оригинальными.

Статья может быть полезна как обучающимся по соответствующей программе, так и преподавателям, читающим курс математической логики.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Безверхний Н.В., Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам: основы исчисления предикатов // Modern European Researches 2022. - № 1-2. - С. 46 - 54
2. Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам // Modern European Researches 2021. - № 2-1. - С. 42 - 58
3. Лещинская М.В. Стратегия управления выводом в методе резолюций с использованием весов дизъюнктов / В сб.: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Труды международной научной конференции. Воронежский государственный университет. Воронеж, 2023, с. 1407-1411.
4. Лещинская М.В., Леденева Т.М. Новая стратегия поиска опровержений метода резолюций и алгоритмы ее реализации / В сб.: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Труды международной научной конференции. Воронежский государственный университет. Воронеж, 2022, с. 1628-1633.
5. Леденева Т.М., Лещинская М.В. Метод резолюций и стратегии поиска опровержений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2021. - №1. – С. 98-111.
6. Кэррол Л. Логическая игра. - М.: Наука, 1991. - 368 с.
7. Ефремова М.И. Решение некоторых логических задач на языке программирования ПРОЛОГ / XLVII итоговая студенческая научная конференция УдГУ. Удмуртский государственный университет, 2019. – С. 8-10.
8. Stangroom J. Einstein's riddle : riddles, paradoxes, and conundrums to stretch your mind. – New York: Bloomsbury USA, 2009. – 144 pp.
9. Чень Ч, Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Мир, 1983. – 360 с.
10. Попова С. В., Ходырев И. А. Математическая логика: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 217 с.

11. Герасимов А. С. Курс математической логики и теории вычислимости: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «ЛЕМА», 2011. — 284 с.
12. Чень Ч, Ли Р. Указ. соч.
13. Белоусов А.И. Указ. соч. (2021)
14. Чень Ч., Ли Р.. Указ. соч.
15. Там же
16. Там же
17. Кэррол Л. Указ. соч.

Alexey I. Belousov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

al_belous@bk.ru

Some methodological aspects of presenting the resolution method for student programmers

Abstract. The relevance of the methodological task under consideration is due to the fact that mathematical logic occupies a significant place in the curriculum of student programmers, and it is necessary to develop a methodology for presenting the fundamentals of mathematical logic in a strict and at the same time accessible to the specified contingent. The article discusses the methodology for presenting the resolution method in propositional calculus and predicate calculus, aimed at an audience of student programmers. Much attention is paid to the analysis of informal logical problems.

Keywords: mathematical logic, formal theory, propositional calculus, predicate calculus, resolution method, methodological problems.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

Аннотация

Одним из способов формализации понятия алгоритма являются рекурсивные функции. Важнейшей теоремой теории рекурсивных функций является теорема об эквивалентности двух разных способов формализации понятия алгоритма: рекурсивных функций и функций, вычислимых на машине Тьюринга. Цель работы заключается в рассмотрении методики преподавания теории рекурсивных функций и, в частности, доказательства указанной теоремы об эквивалентности. В работе предлагается порядок изложения основных определений и фактов теории рекурсивных функций, минимально необходимый для доказательства теоремы об эквивалентности, а также приводится само доказательство. Работа будет полезна преподавателям вузов при подготовке к лекциям по теории алгоритмов.

Ключевые слова

теория алгоритмов, рекурсивные функции, машина Тьюринга

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Келдыш Елизавета Петровна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
liza.keldysh@bmstu.ru

Введение

Одним из основных понятий математики является понятие алгоритма. В начале XX века появилось несколько эквивалентных формальных определений этого понятия. В данной работе рассматриваются две формализации алгоритма - через рекурсивные функции и через машины Тьюринга. В первом случае определяется некоторый класс функций (называемых частично рекурсивными функциями) и утверждается, что эти и только эти функции могут быть вычислены с помощью некоторых алгоритмов. Во втором случае определяется некое устройство преобразования данных (машина Тьюринга) и утверждается, что именно работа такого устройства и соответствует тому, что принято считать алгоритмами.

Эквивалентность этих двух формальных подходов к понятию алгоритма составляет важную часть теории алгоритмов. Целью данной работы является рассмотрение методики преподавания теории рекурсивных функций и, в частности, доказательства указанной эквивалентности. В учебниках по теории алгоритмов далеко не всегда приводится подробное доказательство эквивалентности (см. [1], [2], [3]). В учебниках [4], [5], [6] теорема об эквивалентности доказывается, но помимо этого приводится и много

других утверждений и требуется ещё выделить те из них, которые необходимы для проведения доказательства. В работе предлагается порядок изложения основных определений и фактов теории рекурсивных функций, минимально необходимый для доказательства теоремы об эквивалентности, а также приводится само доказательство.

Методология и результаты исследования

Вначале изложения теории рекурсивных функций необходимо заметить, что и аргументы, и значения рекурсивных функций будут натуральными числами, к которым в теории алгоритмов принято также относить и число ноль. Поэтому символом \mathbb{N} здесь будем обозначать множество всех неотрицательных целых чисел. Кроме того, рекурсивные функции могут иметь несколько аргументов, т. е. являются функциями вида $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}^m = \underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_m$ есть m -я декартова степень множества \mathbb{N} , состоящая из всевозможных упорядоченных наборов из m натуральных чисел (включая ноль).

Для описания рекурсивных функций вводят операторы композиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Оператор композиции действует на m -местную функцию f и n -местные функции g_1, g_2, \dots, g_m и даёт в результате n -местную функцию φ такую, что

$$\forall x_1, \dots, x_n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Обозначается: $\varphi = S(f, g_1, \dots, g_m)$ или $\varphi = f \circ (g_1, \dots, g_m)$.

Оператор примитивной рекурсии действует на n -местную функцию f и $(n + 2)$ -местную функцию g и даёт в результате $(n + 1)$ -местную функцию φ такую, что для любых x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n, 0) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ \varphi(x_1, \dots, x_n, y + 1) &= g(x_1, \dots, x_n, y, \varphi(x_1, \dots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Обозначается: $\varphi = R(f, g)$.

Как видим, значения функции $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ вычисляются последовательно сначала для $y = 0$, затем для $y = 1$, потом для $y = 2$ и т. д. При этом для вычисления следующего значения нужно знать предыдущее. Отсюда и название «рекурсия». Примитивной же рекурсия называется потому, что достаточно знать только одно предыдущее значение и не требуются более ранние значения.

Пример. Подействуем оператором примитивной рекурсии на функции $f(x) = x$ и $g(x, y, z) = z + 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= f(x) = x, \\ \varphi(x, 1) &= g(x, 0, \varphi(x, 0)) = \varphi(x, 0) + 1 = x + 1, \\ \varphi(x, 2) &= g(x, 1, \varphi(x, 1)) = \varphi(x, 1) + 1 = x + 2. \end{aligned}$$

Продолжая далее, несложно заметить, что получится функция:

$$\varphi(x, y) = x + y \quad \square$$

Оператор минимизации действует на n -местную функцию f и даёт в результате n -местную функцию φ такую, что $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ равно такому натуральному y , для которого значения

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \quad f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1), \quad \dots, \quad f(x_1, \dots, x_{n-1}, y - 1)$$

определены и не равны x_n , а $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n$. В случае если хотя бы одно из перечисленных значений функции f оказывается неопределённым, или эти значения определены для всех y , но никогда не дают x_n , то соответствующее значение функции φ считается неопределённым на данном наборе аргументов.

Обозначается: $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mu_y [f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n]$ или $\varphi = \mu f$.

Применение оператора минимизации к функции f фактически заключается в решении уравнения $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n$ относительно переменной y . Найденные решения обозначают через $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. При этом уравнение решается перебором всех возможных значений y , начиная с нуля и по возрастанию, и ищется наименьшее решение этого уравнения. Важно, что поиск решения выполняется алгоритмически. Это означает, что если для очередного значения y проверить равенство оказывается невозможно, либо равенство не выполняется ни для какого значения y , и вычисления продолжатся бесконечно долго, то полагают, что уравнение не имеет решения, и соответствующее значение функции φ оказывается неопределённым.

Пример. Подействуем оператором минимизации на функцию $f(x) = 2x$. Имеем: $\varphi(x) = \mu_y[f(y) = x]$. Для поиска $\varphi(x)$ нужно найти минимальное решение уравнения $2y = x$ относительно переменной y . Ясно, что если x - чётное, то $y = \frac{x}{2}$. Если же x - нечётное, то решения уравнения не существует. Поэтому

$$\varphi(x) = \begin{cases} x/2, & \text{если } x - \text{чётное,} \\ \text{не опред.,} & \text{если } x - \text{нечётное.} \end{cases}$$

На функцию $\varphi(x)$ вновь подействуем оператором минимизации и найдём функцию $\psi = \mu\varphi$. Для поиска $\psi(0)$ найдём наименьшее y , такое что $\varphi(y) = 0$. Ясно, что $\psi(0) = 0$. Далее, так как $\varphi(0) = 0$, а $\varphi(1)$ не определено, то все остальные значения $\psi(1), \psi(2), \psi(3), \dots$ не определены. Поэтому

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \text{не опред.,} & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Как видим, $\mu(\mu f) \neq f$ \square

Пример. Подействуем оператором минимизации на функцию $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Имеем: $\varphi(x_1, x_2) = \mu_y[f(x_1, y) = x_2]$. Для поиска $\varphi(x_1, x_2)$ нужно найти минимальное решение уравнения $x_1 + y = x_2$ относительно переменной y . Ясно, что если $x_2 \geq x_1$, то $y = x_2 - x_1$. В противном случае решения нет. Поэтому

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 - x_1, & \text{если } x_2 \geq x_1, \\ \text{не опред.,} & \text{если } x_2 < x_1. \end{cases} \quad \square$$

С помощью введённых операторов композиции, примитивной рекурсии и минимизации определяются классы примитивно рекурсивных, частично рекурсивных и общерекурсивных функций.

Простейшими рекурсивными функциями называются следующие функции:

1) **функция следования:**

$$s(x) = x + 1;$$

2) **нулевая функция:**

$$o(x) = 0;$$

3) **функции-проекторы:**

$$I_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m.$$

Функция называется **примитивно рекурсивной**, если она может быть получена из простейших рекурсивных функций с помощью конечного числа применений операторов композиции и примитивной рекурсии.

Функция называется **частично рекурсивной**, если она может быть получена из простейших рекурсивных функций с помощью конечного числа применений операторов композиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Функция называется **общерекурсивной**, если она частично рекурсивна и всюду определена.

Ясно, что если применять операторы композиции и примитивной рекурсии к всюду определённым функциям, то будут получаться вновь всюду определённые функции. Поэтому всякая примитивно рекурсивная функция всюду определена и, следовательно, является общерекурсивной. Кроме того, по определению всякая общерекурсивная функция является частично рекурсивной. В то же время можно доказать,

что это три различных класса функций, т. е. существуют общерекурсивные функции, которые не являются примитивно рекурсивными, и существуют частично рекурсивные функции, которые не являются общерекурсивными.

Пример. Постоянная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$, где $a \in \mathbb{N}$, является примитивно рекурсивной. В самом деле, найдём композицию нулевой функции o и функции следования s :

$$f_1 = S(s, o).$$

Сначала на аргумент x действует нулевая функция, отображая x в ноль. Затем на ноль действует функция следования, отображая ноль в единицу:

$$x \xrightarrow{o} 0 \xrightarrow{s} 1.$$

Так что получаем функцию, тождественно равную единице для всех x :

$$f_1(x) \equiv 1.$$

Найдём теперь композицию функции $f_1(x) \equiv 1$ и функции следования s :

$$f_2 = S(s, f_1).$$

Ясно, что $f_2(x) \equiv 2$. Аналогично, строя дальше композицию с функцией следования, можно получить функцию одной переменной, тождественно равную трём, четырём и вообще любому числу a , т. е. $f_a(x) \equiv a$. Далее, применяя оператор композиции $S(f_a, I_1^n)$, получаем постоянную функцию от n переменных \square

Теорема 1. Если функции f и g примитивно рекурсивны, то их сумма $f + g$ и произведение $f \cdot g$ также примитивно рекурсивны.

Доказательство. Рассмотрим тождественную функцию $I_1^1(x) = x$ и композицию $s_z = s \circ I_3^3$. Ясно, что $s_z(x, y, z) = z + 1$. Далее применим оператор примитивной рекурсии $\sigma = R(I_1^1, s_z)$, получим функцию $\sigma(x, y) = x + y$. Применение теперь оператора композиции $S(\sigma, f, g)$ даёт требуемую сумму функций $f + g$.

Рассмотрим композицию $\sigma_{x,z} = S(\sigma, I_1^3, I_3^3)$. Ясно, что $\sigma_{x,z}(x, y, z) = x + z$. Применим оператор примитивной рекурсии к нулевой функции $o(x)$ и функции $\sigma_{x,z}$. Обозначим: $\pi = R(o, \sigma_{x,z})$.

$$\pi(x, 0) = o(x) = 0,$$

$$\pi(x, 1) = \sigma_{x,z}(x, 0, \pi(x, 0)) = x + \pi(x, 0) = x,$$

$$\pi(x, 2) = \sigma_{x,z}(x, 1, \pi(x, 1)) = x + \pi(x, 1) = x + x = 2x.$$

Продолжая далее, несложно заметить, что получится функция: $\pi(x, y) = x \cdot y$. Применение теперь оператора композиции $S(\pi, f, g)$ даёт требуемое произведение функций $f \cdot g$ \square

Далее следует показать примитивную рекурсивность по очереди следующих функций: возведения в степень x^y , усечённой разности

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y, \\ 0, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

модуля разности $|x - y|$, минимума $\min(x, y)$ и максимума $\max(x, y)$, сигнума sg и антисигнума \overline{sg}

$$sg(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad \overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

остатка $mod(x, y)$ и неполного частного $\left[\frac{x}{y} \right]$ от деления x на y (причём для $y = 0$ полагают значения обеих функций равными нулю), функций, определяемых условными выражениями следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} b_1, & \text{если } x = a_1, \\ b_2, & \text{если } x = a_2, \\ \dots & \dots \\ b_n, & \text{если } x = a_n \\ b_{n+1} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} c_1, & \text{если } x = a_1 \text{ и } y = b_1, \\ c_2, & \text{если } x = a_2 \text{ и } y = b_2, \\ \dots & \dots \\ c_n, & \text{если } x = a_n \text{ и } y = b_n, \\ c_{n+1} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (*)$$

и, наконец, ещё следующих четырёх функций:

- функцию $c_r(x, k)$, которая выдаёт цифру, стоящую в k -м разряде числа x , записанного в r -ичной системе счисления (при этом разряд единиц считается нулевым, разряд десятков - первым и т. д., другими словами, если $x = x_n r^n + x_{n-1} r^{n-1} + \dots + x_1 r + x_0$, то $c_r(x, k) = x_k$);

- функции $h_r(x, k, y)$, которая ищет цифру, стоящую в k -м разряде числа x , записанного в r -ичной системе счисления, и заменяет эту цифру на y ;

- функция $u_r(x, k)$, которая вырезает цифру, стоящую в k -м разряде числа x , записанного в r -ичной системе счисления, при этом все цифры в $(k + 1)$ -м и более старших разрядах сдвигаются на один разряд вниз;

- функция $v_r(x, k, y)$, которая сдвигает на один разряд вверх все цифры в k -м и более старших разрядах числа x , записанного в r -ичной системе счисления, а в k -й разряд числа x вставляет цифру y .

Доказательство примитивной рекурсивности некоторых из перечисленных функций можно оставить студентам в качестве упражнений, после чего перейти к рассмотрению эквивалентности рекурсивных функций и машин Тьюринга.

Рекурсивные функции задаются на множестве \mathbb{N} всех неотрицательных целых чисел, а вычислимые на машине Тьюринга функции задаются на множестве $\Omega(A)$ всех слов в конечном алфавите A . Поэтому перед рассмотрением вопроса об эквивалентности классов рекурсивных и вычислимых на машине Тьюринга функций нужно сначала строго определить, какие функции вида $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A)$ называются рекурсивными и каким образом функции вида $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ будут вычисляться на машине Тьюринга.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$. Для её вычисления на машине Тьюринга условимся, что внешний алфавит машины содержит десять цифр и специальный символ для отделения во входных данных одного числа от другого. Пусть для определённости таким разграничивающим символом будет амперсанд $\&$. Тогда функция $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ будет вычислимой на машине Тьюринга, если существует программа для машины Тьюринга, внешний алфавит которой содержит символы $\{0, 1, 2, \dots, 9, \&\}$ и которая при подаче на вход m чисел, разграниченных амперсандом $\&$, вычисляет значения функции f либо закликивается, если соответствующее значение функции f не определено. На входных данных, которые нельзя идентифицировать как набор из m натуральных чисел, разделённых амперсандом, программа может работать, как угодно, в том числе и закликиваться.

Теорема 2. *Всякая частично рекурсивная функция вычислима на машине Тьюринга.*

Доказательство. Для проведения доказательства потребуем, чтобы все рассматриваемые программы для машины Тьюринга удовлетворяли следующему дополнительному требованию: в процессе вычислений машина Тьюринга не имеет права изменять ячейки ленты, расположенные слева от входного слова, но имеет возможность просмотреть их. Поэтому если машине нужны дополнительные ячейки для хранения промежуточных вычислений, то будет использоваться часть ленты справа от входного слова.

Ясно, что машина Тьюринга (с указанным дополнительным требованием) существует для вычисления простейших рекурсивных функций: функции следования $s(x) = x + 1$, нулевой функции $o(x) = 0$ и функций проекторов $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$. Поэтому достаточно доказать, что операторы композиции, примитивной рекурсии и минимизации, применённые к вычислимым на машине Тьюринга функциям, дают в результате снова вычислимые на машине Тьюринга функции.

Рассмотрим реализацию на машине Тьюринга оператора композиции. Пусть даны функции f, g_1, \dots, g_m , вычислимые соответственно машинами $M_f, M_{g_1}, \dots, M_{g_m}$. Машина,

вычисляющая композицию $S(f, g_1, \dots, g_m)$, будет работать по следующей схеме. Сначала входное слово, состоящее из n натуральных чисел, разделённых амперсандом &, копируется вправо на свободное место на ленте и на этой копии с помощью машины M_{g_1} вычисляется функция g_1 . Ситуация на ленте после этого будет выглядеть так.

$$x_1 \& \dots \& x_n \quad g_1(x_1, \dots, x_n)$$

Далее исходное входное слово копируется ещё раз вправо на свободное место на ленте и на этой копии с помощью машины M_{g_2} вычисляется функция g_2 . Ситуация на ленте после этого будет выглядеть так.

$$x_1 \& \dots \& x_n \quad g_1(x_1, \dots, x_n) \quad g_2(x_1, \dots, x_n)$$

Так продолжается далее, пока не будут вычислены все функции g_1, \dots, g_m .

$$x_1 \& \dots \& x_n \quad g_1(x_1, \dots, x_n) \quad g_2(x_1, \dots, x_n) \quad \dots \quad g_m(x_1, \dots, x_n)$$

После этого исходное входное слово удаляется и на ленте остаётся набор из m слов, являющихся результатами вычисления функций g_1, \dots, g_m . Эти слова соединяются символом &, и это будет входное слово для функции f , вычисление которой приводит к завершению работы машины.

Таким образом, если функции f, g_1, \dots, g_m вычислимы на машине Тьюринга, то и их композиция $S(f, g_1, \dots, g_m)$ может быть вычислена с помощью некоторой машины Тьюринга.

Рассмотрим теперь реализацию на машине Тьюринга оператора примитивной рекурсии. Пусть даны функции f и g , вычисляемые соответственно машинами M_f и M_g . Машина, вычисляющая функцию $R(f, g)$, будет работать по следующей схеме. Сначала производится начальная подготовка входных данных. Перед входным словом ставится символ & и пробел, а само входное слово сдвигается вправо на 2 позиции на ленте. Далее во входном слове последний аргумент уменьшается на 1, и само слово копируется вправо на свободное место на ленте. Потом последний аргумент в этом слове вновь уменьшается на 1, и слово ещё раз копируется вправо на свободное место. Так продолжается до тех пор, пока последний аргумент не уменьшится до нуля. В этом случае слово ещё раз копируется вправо и последний аргумент просто удаляется. Результат работы машины к этому моменту выглядит так:

$$\& \ x_1 \& \dots \& x_n \& y - 1 \quad x_1 \& \dots \& x_n \& y - 2 \quad \dots \quad x_1 \& \dots \& x_n \& 0 \quad x_1 \& \dots \& x_n$$

Далее на последнем слове с помощью машины M_f вычисляется функция f и результат вычисления с помощью символа & присоединяется к предыдущему слову.

$$\& \ x_1 \& \dots \& x_n \& y - 1 \quad x_1 \& \dots \& x_n \& y - 2 \quad \dots \quad x_1 \& \dots \& x_n \& 0 \& f(x_1, \dots, x_n)$$

Теперь на последнем слове с помощью машины M_g вычисляется функция g . Результат вычисления присоединяется символом & к предыдущему слову и вновь на последнем слове вычисляется функция g . Вычисления функции g будут производиться до тех пор, пока не будет достигнут одиноко стоящий амперсанд &, указывающий на то, что вычисления пора прекращать.

Рассмотрим теперь реализацию на машине Тьюринга оператора минимизации. Пусть дана функция f , вычисляемая машиной M_f . Машина, вычисляющая функцию μf , будет работать по следующей схеме. Сначала во входное слово между последним и предпоследним аргументом вставляется ещё один аргумент y , который будет хранить результат работы машины. Вначале это число 0. Далее изменённое входное слово без последнего аргумента копируется вправо на свободное место на ленте.

$$x_1 \& \dots \& x_{n-1} \& 0 \& x_n \quad x_1 \& \dots \& x_{n-1} \& 0$$

На последнем слове с помощью машины M_f вычисляется функция f . Если результат вычисления совпадает с последним аргументом исходного слова x_n , то уда-

ляется всё, кроме числа 0, и работа машины на этом закачивается. В противном случае удаляется результат вычисления функции f , число 0 увеличивается на 1 и входное слово без последнего аргумента копируется вправо на свободное место на ленте.

$$x_1 \& \dots \& x_{n-1} \& 1 \& x_n \quad x_1 \& \dots \& x_{n-1} \& 1$$

На последнем слове с помощью машины M_f вновь вычисляется функция f . Если результат вычисления совпадает с последним аргументом исходного слова x_n , то удаляется всё, кроме числа 1, и работа машины на этом закачивается. В противном случае число 1 увеличивается на 1, и всё продолжается по циклу \square

Рассмотрим теперь вычислимую на некоторой машине Тьюринга функцию $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A)$, где A - некоторый конечный алфавит. Для доказательства частичной рекурсивности функции f потребуется зафиксировать кодирование слов в алфавите A с помощью натуральных чисел. Пусть алфавит состоит из n букв: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Слову $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s}$ поставим в соответствие число $\overline{i_1 i_2 \dots i_s}$ в системе счисления с основанием $r > n$. Другими словами, каждому слову поставим в соответствие число, цифры которого есть просто номера букв этого слова. Пустому слову поставим в соответствие число ноль. Ясно, что подобное кодирование зависит от выбора основания r и задаёт биективное соответствие между множеством всех непустых слов в алфавите A и множеством всех натуральных чисел, в записи которых есть только цифры от 1 до n .

Обозначим через $c(w)$ натуральное число, соответствующее слову w , а через $c^{-1}(m)$ - слово, отвечающее числу m . При этом если в числе m есть хотя бы одна цифра, отличная от цифр от 1 до n , то положим, что $c^{-1}(m)$ не определено. Каждой функции $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A)$ поставим в соответствие функцию $\hat{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такую, что $\hat{f} = c \circ f \circ c^{-1}$. Видим, что если функция f слово w отображает в слово w' , то функция \hat{f} номеру слова w ставит в соответствие номер слова w' . Другими словами, функция \hat{f} действует так же, как и функция f , только не на словах, а на номерах этих слов. Заметим, что функция \hat{f} зависит от выбора основания r системы счисления.

Функция $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A)$ называется примитивно рекурсивной (общерекурсивной или частично рекурсивной), если таковой будет соответствующая ей функция $\hat{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, действующая на номерах слов при некотором выборе основания r , большего, чем количество букв в алфавите A .

Теорема 3. *Всякая вычислимая на машине Тьюринга функция частично рекурсивна.*

Доказательство. Пусть дана вычислимая на машине Тьюринга функция $f : \Omega(A) \rightarrow \Omega(A)$, причём для её вычисления требуется внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где a_0 обозначает пустой символ, и внутренний алфавит $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m, !\}$. Определим кодирование состояния машины Тьюринга с помощью натуральных чисел в системе счисления с основанием $r = n + m + 2$. Цифрами от 0 до n будем кодировать элементы внешнего алфавита, а цифрами от $n + 1$ до $n + m + 1$ закодируем элементы внутреннего алфавита. Заключительное состояние машины кодируется максимальной в данной системе счисления цифрой $n + m + 1$.

Кодирование заключается в следующем. Пусть на ленте машины Тьюринга записано слово $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s}$ (от самого левого непустого элемента до самого правого непустого), и автомат машины наблюдает символ a_{i_k} и находится в состоянии q_j . Тогда это состояние машины Тьюринга кодируется числом $i_1 i_2 \dots (n + j) i_k \dots i_s$. Другими словами, цифра, кодирующая внутреннее состояние автомата, располагается перед цифрой, кодирующей символ, на который смотрит автомат.

Ясно, что в числе, кодирующем состояние машины, всегда будет ровно одна цифра, которая больше n . Эта цифра указывает на положение автомата и его внутреннее состояние.

Докажем теперь частичную рекурсивность функции $\hat{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, которую вычисляет машина Тьюринга. Для этого введём в рассмотрение функции $t(x, y)$, $w(x)$ и $q(x)$. Функция $t(x, y)$ выдаёт состояние машины Тьюринга при работе на входном слове x через y тактов работы. Функции $w(x)$ и $q(x)$ по заданному текущему состоянию x машины Тьюринга выдают соответственно текущее слово на ленте машины и текущее внутреннее состояние автомата.

С использованием введённых функций выражение для функции f может быть записано следующим образом:

$$f(x) = w\left(t\left(x, \mu_y[|q(t(x, y)) - (n + m + 1)| = 0]\right)\right).$$

В самом деле, вычисление функции f сводится к последовательному вычислению состояний машины Тьюринга $t(x, 0)$, $t(x, 1)$, $t(x, 2)$, ... до тех пор, пока внутреннее состояние автомата машины $q(t(x, y))$ не окажется заключительным, которое кодируется числом $n + m + 1$.

Для доказательства частичной рекурсивности функции f теперь достаточно доказать частичную рекурсивность функций $t(x, y)$, $w(x)$ и $q(x)$.

Функция $q(x)$ находит в числе x цифру, кодирующую внутреннее состояние автомата. Это единственная в числе x цифра, которая больше n , и она может быть найдена оператором минимизации:

$$q(x) = c_r\left(x, \mu_k[(n + 1) \div c_r(x, k) = 0]\right),$$

что доказывает частичную рекурсивность функции $q(x)$.

Функция $w(x)$ вырезает из числа x цифру, кодирующую внутреннее состояние автомата:

$$w(x) = u_r\left(x, \mu_k[(n + 1) \div c_r(x, k) = 0]\right),$$

что доказывает частичную рекурсивность функции $w(x)$.

Функция $t(x, y)$ может быть определена с помощью примитивной рекурсии. Начальное значение $t(x, 0)$ по числу x , задающему входное слово, выдаёт число, описывающее начальное состояние машины Тьюринга, т. е. вставляет в начало числа x цифру $n + 1$, соответствующую начальному внутреннему состоянию автомата q_1 :

$$t(x, 0) = v_r\left(x, \mu_k[c_r(x, k) = 0], n + 1\right).$$

Осталось доказать, что каждое очередное состояние $t(x, y + 1)$ машины вычисляется через предыдущее состояние $t(x, y)$ частично рекурсивно.

Рассмотрим функции $\varphi_a(a, q)$, $\varphi_q(a, q)$ и $\varphi_p(a, q)$, которые по текущему наблюдаемому автоматом символу a и внутреннему состоянию автомата q выдают соответственно символ, который нужно записать в текущую ячейку ленты (функция φ_a), новое внутреннее состояние автомата (функция φ_q) и перемещение автомата (функция φ_p). Положим $\varphi_p(a, q) = 0$, если перемещать автомат не нужно, $\varphi_p(a, q) = 1$, если нужно выполнить сдвиг на одну ячейку вправо, и $\varphi_p(a, q) = 2$, если нужно выполнить сдвиг влево. Каждая из функций φ_a , φ_q и φ_p однозначно определяется программой для машины Тьюринга, может быть функцией вида (*) и поэтому является примитивно рекурсивной.

Для вычисления $t(x, y + 1)$ нужно из $t(x, y)$ извлечь текущее внутреннее состояние автомата машины и наблюдаемый автоматом символ, затем с помощью функций φ_a , φ_q и φ_p узнать о действиях на очередном такте работы машины Тьюринга и выполнить соответствующие преобразования над числом $t(x, y)$. Все эти преобразования,

очевидно, сводятся к поиску одних цифр и их замене на другие, а также вырезанию и вставке цифр, что может быть реализовано примитивно рекурсивными функциями □

Таким образом, всякое вычисление с числами можно рассматривать как преобразование слов в алфавите, состоящем из цифр. И обратно, всякое преобразование слов в некотором алфавите можно интерпретировать как вычисление на номерах этих слов. И как было показано в двух последних теоремах, два данных способа вычислений эквивалентны в смысле класса разрешимых задач. Другими словами, частично рекурсивные функции приводят к тому же формальному понятию алгоритма, что и машина Тьюринга.

Заключение

В работе рассмотрена эквивалентность рекурсивных функций и функций, вычисляемых на машине Тьюринга. Предложенный в работе порядок изложения учебного материала позволяет рассказать доказательство эквивалентности в рамках одной лекции. При этом отдельные элементы доказательства можно оставлять студентам в качестве упражнений. Знакомство с доказательством этой эквивалентности и в целом с теорией рекурсивных функций поможет студентам лучше понять как математическую сторону самой теории алгоритмов и таких её разделов, как алгоритмически неразрешимые задачи и эффективные вычисления, так и другие разделы математики, связанные в первую очередь с основаниями математики и математической логикой. В качестве дополнительного задания можно предложить студентам самостоятельно познакомиться с другими эквивалентными способами формализации понятия алгоритма такими, как машины Поста, нормальные алгорифмы Маркова, λ -исчисление Чёрча, машины Шёнфилда и др.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
2. Морозов А.С. Введение в вычислимость. – М.: НГУ, 2005. – 114 с.
3. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир, 1972. – 624 с.
4. Игошин В.И. Теория алгоритмов: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2016. – 318 с.
5. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 368 с.
6. Минский М. Вычисления и автоматы. – М.: Мир, 1971. – 366 с.

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

Elizaveta P. Keldysh,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

Methodological aspects of teaching recursive functions in the theory of algorithms

Abstract. One of the ways to formalize the concept of an algorithm is recursive functions. The most important theorem of the theory of recursive functions is the theorem on the equivalence of two different ways of formalizing the concept of an algorithm: recursive functions and functions computable on a Turing machine. The purpose of the work is to consider the methodology of teaching the theory of recursive functions and, in particular, the proof of the equivalence theorem. The paper proposes the order of presentation of the basic definitions and facts of the theory of recursive functions, the minimum necessary to prove the equivalence theorem, and also provides the proof itself. The work will be useful for university teachers in preparing for lectures on the theory of algorithms.

Keywords: theory of algorithms, recursive functions, Turing machine.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Аннотация

С задачей вычисления кратных, в частности двойных, интегралов студенты технических вузов сталкиваются, как правило, на втором и последующих курсах. Потребность вычисления кратных интегралов возникает при решении множества инженерных задач, задач по физике, теории вероятностей и т.д. Поэтому обучение грамотному вычислению кратных интегралов является актуальной задачей при подготовке студентов технических специальностей. В статье рассматриваются особенности методики преподавания решения задачи по вычислению двойного интеграла в декартовой системе координат. Приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для обоснования рассматриваемого метода решения, а также иллюстрирующие его применение примеры.

Ключевые слова

двойной интеграл, повторный интеграл

АВТОРЫ

Велищанский Михаил Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Власов Павел Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Кавинов Алексей Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Введение

Решение задачи о площади криволинейной трапеции привело к возникновению понятия определенного интеграла. Понятие двойного интеграла так же первоначально возникло при решении прикладных задач: задачи об объеме цилиндрического тела, о массе пластины и т.п. Со временем круг задач, в которых используется понятие двойного интеграла (и его обобщения - кратного интеграла), существенно расширился. Не случайно практически в любом современном математическом пакете есть множество средств по вычислению двойных интегралов (как аналитически, так и численными методами). Этим примером мы лишь хотим подчеркнуть, что задача вычисления двойного интеграла остается актуальной и в настоящее время. Грамотный инженер должен не только уметь пользоваться подобными пакетами программ, но и

иметь представления о том, как они работают, какие методы в них используются, а так же владеть основными методами вычисления подобных интегралов.

В данной работе авторы на основании опыта преподавания в МГТУ им. Н.Э. Баумана курса «Кратные и криволинейные интеграла, теория поля и ряды» постарались показать, как можно изложить материал занятия по обозначенной теме.

Методология и результаты исследования

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению вычисления двойного интеграла и иллюстрирующих примеров, приведем некоторые известные [1,2] определения и теоремы, которые нам потребуются в дальнейшем.

Начнем, естественно, с определения двойного интеграла, хотя непосредственно на самом занятии данное определение, на наш взгляд, давать излишне, поскольку метод вычисления напрямую с ним не связан. Как и в случае определенного интеграла, определение двойного интеграла вводится при помощи понятия интегральной суммы.

Определение 1. Пусть в замкнутой области G плоскости xOy конечной площади $S = m(G)$ и конечного диаметра $d(G)$ определена функция $z = f(x, y)$. Пусть $\{G_k\}$ - произвольное разбиение G на систему подобластей, пересекающихся, быть может, лишь по границам, а $M_k = (x_k, y_k) \in G_k$ - произвольная отмеченная точка. Если вне зависимости от выбора разбиения $\{G_k\}$ и системы отмеченных точек M_k существует конечный предел I интегральной суммы $I_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot m(G_k)$, при условии что $\max d(G_k) \rightarrow 0$, то его называют двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по замкнутой области G и обозначают

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_G f(x, y) dS.$$

Область G при этом называют областью интегрирования, а саму функцию $f(x, y)$ называют интегрируемой в области G .

Таким образом, можно записать

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\max d(G_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot m(G_k).$$

Замечание 1. Под диаметром $d(H)$ некоторой области H понимают максимальное расстояние между любыми двумя точками этой области.

Замечание 2. Здесь и далее под замкнутой областью мы будем понимать именно квадратируемую замкнутую область [3]. Однако для простоты слово «квადрируемая» мы будем опускать, тем более что в типовых задачах, разбираемых со студентами, все области являются таковыми.

Теорема 1. Всякая непрерывная в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$ функция $f(x, y)$ интегрируема в G .

Все рассматриваемые в данной статье функции являются или считаются (если функция задается в общем виде) непрерывными [4], т.е. удовлетворяющими данной теореме.

Из свойств двойного интеграла приведем лишь одно, которое будем непосредственно использовать в рассматриваемых далее примерах.

Свойство 1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в областях G_k таких, что $m(G_i \cap G_j) = 0, \forall i \neq j; G = \bigcup_{k=1}^N G_k$, то она интегрируема в области G , причем

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^N \iint_{G_k} f(x, y) dx dy.$$

Данное свойство называется свойством аддитивности двойного интеграла.

Отметим, что вычисление двойного интеграла непосредственно по определению 1 в большинстве случаев излишне громоздко и трудоемко (как, впрочем, и в случае определенного интеграла). Основным методом является сведение двойного интеграла к повторному интегралу, т.е., по сути, к вычислению двух определенных интегралов, которые студенты второго курса, как правило, уже умеют более-менее хорошо вычислять. Поэтому в данной работе, основное внимание будет уделено именно сведению двойного интеграла к повторному, а не непосредственно вычислению полученного повторного интеграла. По нашему мнению такого же подхода следует придерживаться и на семинаре, особенно учитывая очень ограниченные временные рамки, отводимые на данную задачу.

Сведение двойного интеграла по некоторой области G к повторному интегралу базируется на следующих результатах [5].

Определение 2. Область интегрирования G называют Y-правильной (правильной в направлении оси Oy), если она описывается следующими соотношениями:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}, \quad (1)$$

если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют неравенству $y_1(x) \leq y_2(x), \forall x \in [a, b]$. Если же область G описывается соотношениями:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}, \quad (2)$$

где функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$ и удовлетворяют неравенству $x_1(y) \leq x_2(y), \forall y \in [c, d]$, то область G называют X-правильной (правильной в направлении оси Ox).

Примеры Y-правильной и X-правильной областей приведены на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

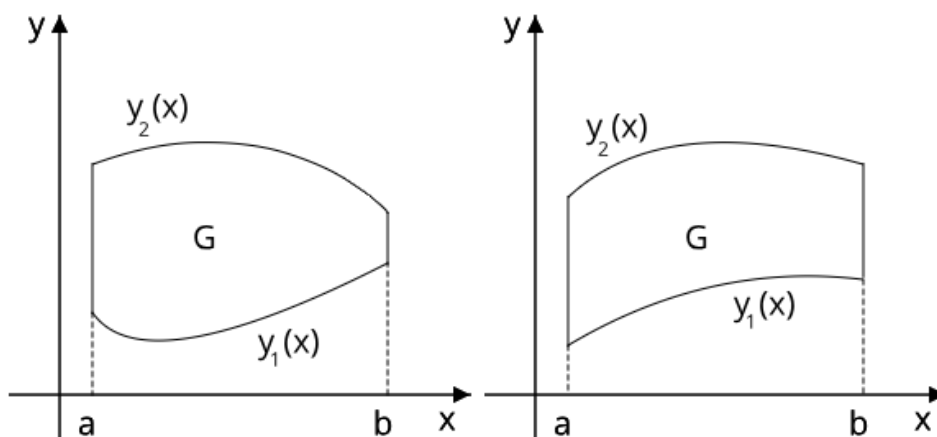


Рис. 1 Y-правильные области

Теорема 2. Если существует двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области интегрирования G вида (1) и при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, то существует повторный интеграл $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, причем верно равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3)$$

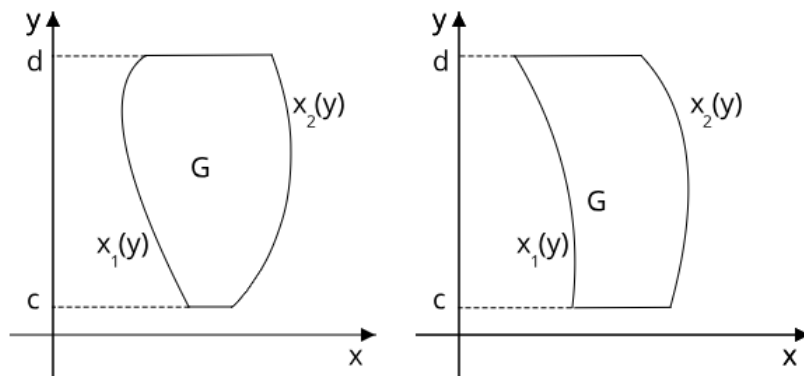


Рис. 2 X-правильные области

Имеет место, аналогичная теореме 2, теорема для X-правильной области.

Теорема 3. Если существует двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области интегрирования G вида (2) и при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ существует интеграл $I(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$, то верно равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (4)$$

Замечание 3. Приведенные в теоремах 2 и 3 результаты геометрически можно трактовать как нахождение объема тела по известным площадям поперечных сечений при помощи определенного интеграла. В этом случае внутренние интегралы в (3), (4) представляют собой площадь поперечного сечения рассматриваемого тела плоскостями $x = e$, $e \in [a, b]$ и $y = l$, $l \in [c, d]$ соответственно.

Чтобы воспользоваться результатами теорем 2 и 3 необходимо в первую очередь правильно классифицировать область интегрирования на указанные в определении 2 типы и представить ее в соответствующем виде ((1) или (2) в зависимости от типа области). Обычно это можно сделать исходя из геометрических соображений. Далее необходимо воспользоваться формулами (3), (4). Следует так же отметить, и на это надо обязательно обратить внимание студентов, что бывают области, которые могут быть отнесены сразу к обоим типам. Как следствие, двойной интеграл в этом случае может быть сведен в повторный при помощи любой из формул (3) или (4). В подобной ситуации выбирается тот вариант, который обеспечивает более удобное вычисление полученных повторных интегралов.

Поскольку, как уже упоминалось ранее, основное внимание должно быть уделено сведению двойного интеграла к повторному, то и большинство примеров будут

именно на эту задачу. Не лишним, так же, будут задания на построение области интегрирования по заданному повторному интегралу, поскольку, как показывает практика, основные ошибки при вычислении двойного интеграла студенты допускают именно в расстановке пределов интегрирования в повторном интеграле, а не непосредственно в его вычислении.

Далее мы рассмотрим ряд примеров, которые, на наш взгляд, могут быть использованы при проведении семинара по рассматриваемой теме.

Пример 1. Вычислить повторный интеграл и нарисовать область, на которую распространяется данный двойной интеграл $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$ [6].

Вычисление повторного интеграла начинают с внутреннего определенного интеграла, в котором полагают одну из переменных (в данном примере это переменная y) постоянной. Полученную после интегрирования внутреннего определенного интеграла функцию подставляют во внешний определенный интеграл и вычисляют его. Таким образом, имеем

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2yx \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \left(\frac{1}{3}y + y^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}.$$

Для того чтобы нарисовать область интегрирования отметим, что в данном случае двойной интеграл был представлен в виде (4) и, как следствие, наша область имеет представление (2). Таким образом, искомая область G может быть описана следующим образом $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1\}$ (см. рис. 3). На семинаре можно предложить студентам следующий способ построения области:

1. Сначала строим границы, задаваемые внешним интегралом (поскольку там границы всегда постоянные). В нашем случае это $y = 0$ и $y = 2$, т.е. наша область расположена между двумя горизонтальными прямыми.

2. Поскольку внутренний интеграл вычисляется по переменной x , то оставшиеся границы искомой области задаются уравнениями $x =$ нижняя граница внутреннего интеграла и $x =$ верхняя граница внутреннего интеграла. В рассматриваемом примере это $x = 0$ и $x = 1$.

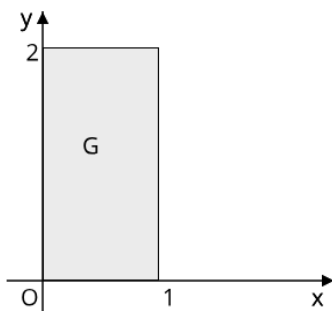


Рис. 3

Заметим, что в данном примере не только пределы внешнего повторного интеграла постоянные, но постоянны и пределы внутреннего интеграла. Это объясняется тем, что границы нашей области G являются линиями параллельными координатным осям.

Пример 2. Вычислить повторный интеграл и нарисовать область, на которую распространяется данный двойной интеграл $\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy$ [7].

Вычисление данного интеграла проводим аналогично предыдущему примеру.

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y} \right) \Big|_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = -\frac{4}{2} + \frac{16}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Область интегрирования в данном примере ограничена двумя вертикальными линиями $x=1$ и $x=2$ с боков и кривыми $y = \frac{1}{x}$ и $y = x$ снизу и сверху соответственно (см. рис. 4).

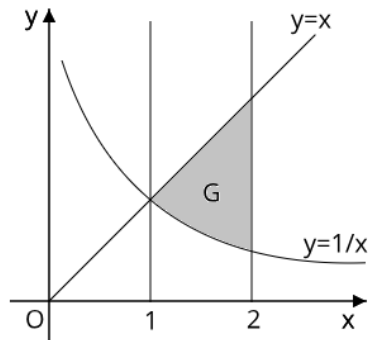


Рис. 4

Пример 3. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_G f(x,y) dx dy$, где область интегрирования G ограничена кривыми $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$ (см. рис. 5).

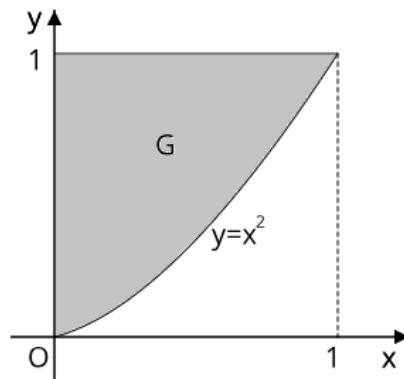


Рис. 5

Заметим, что область интегрирования G является правильной как в направлении оси Oy так и в направлении оси Ox . Поэтому мы можем воспользоваться как формулой (3), так и формулой (4). На практике, в таких случаях, выбирают тот вариант, который обеспечивает более удобные пределы интегрирования/более простую первообразную.

Для начала представим область G в виде (1). Значения a и b из (1) представляют собой левый и правый концы отрезка, получающегося проектированием данной области на ось Ox . В данном случае $a = 0$, $b = 1$. Для того чтобы определить функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ мысленно проводим на плоскости Oxy вертикальные прямые. Сечение G данными прямыми есть отрезки, причем нижний конец этих отрезков лежит на кривой $y = x^2$, а верхний - на $y = 1$. Эти кривые и будут нижней ($y_1(x)$) и верхней

($y_2(x)$) границами области G соответственно. Таким образом, исходный двойной интеграл сводится к следующему повторному интегралу:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy.$$

Для представления области G в виде (2) проектируем ее на ось Oy . Тогда $c=0$, $d=1$. Для определения границ $x_1(y)$ и $x_2(y)$, по аналогии с первым случаем, мысленно получаем сечения области G горизонтальными прямыми. Левые концы получившихся в сечении отрезков лежат на кривой $x=0$, а правые - на кривой $x=\sqrt{y}$. Данные функции будут соответственно функциями $x_1(y)$ и $x_2(y)$ соответственно (см. (2)). Исходный двойной интеграл в данном случае сводится к следующему повторному интегралу:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Пример 4. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$, где область G представляет собой круговой сектор OAB с центром в точке $O(0;0)$, у которого концы дуги $A(1;1)$ и $B(-1;1)$ (см. рис. 6).

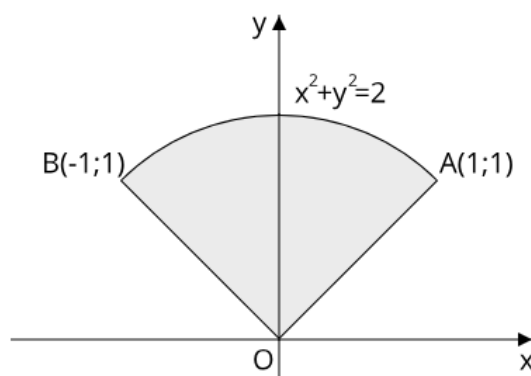


Рис. 6

По условию задачи необходимо представить двойной интеграл по области G в виде (3) и (4). Для этого область интегрирования G требуется представить в виде (1) и (2) соответственно.

Для представления области G в виде (1) проектируем ее на ось Ox . В рассматриваемом случае $a=-1$, $b=1$. Для определения нижней $y_1(x)$ и верхней $y_2(x)$ границ области G рассматриваем сечения данной области вертикальными прямыми. При этом нижний конец получившихся в сечении отрезков лежит на кривой, описываемой двумя различными уравнениями $y=-x$, $-1 \leq x < 0$ и $y=x$, $0 \leq x \leq 1$ (если студенты вспомнят функцию модуль, то тогда можно описать одним уравнением $y=|x|$, $-1 \leq x \leq 1$). Верхний конец отрезков лежит на верхней части окружности $x^2 + y^2 = 2$, $-1 \leq x \leq 1$, т.е. на кривой $y = \sqrt{2 - x^2}$. Таким образом, учитывая что функция $y_1(x)$ в (1) будет составной (если не использовать модуль), для представления двойного интеграла в виде (3) воспользуемся свойством 1 аддитивности двойного

интеграла и разобьем область G на две подобласти (см. рис. 7) $G_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$ и $G_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$.

С учетом этого, исходный двойной интеграл можно записать в виде следующего повторного интеграла:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

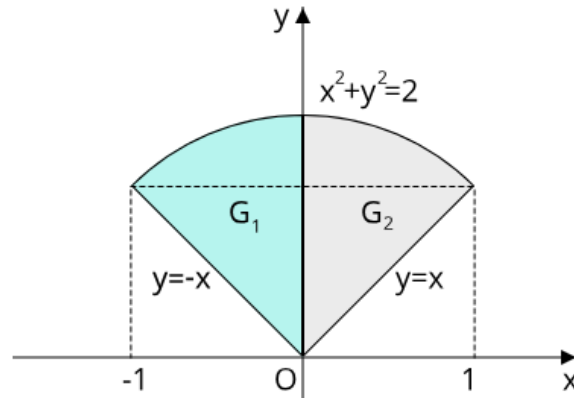


Рис. 7

Для представления области G в виде (2) проектируем ее на ось Oy и получаем $c = 0, d = \sqrt{2}$. Анализ сечений области G горизонтальными прямыми показывает, что границы $x_1(y)$ и $x_2(y)$ в (2) так же будут составными:

$$x_1(y) = \begin{cases} -y & \text{при } 0 \leq y \leq 1; \\ -\sqrt{2-y^2} & \text{при } 1 \leq y \leq \sqrt{2}; \end{cases} \text{ и } x_2(y) = \begin{cases} y & \text{при } 0 \leq y \leq 1; \\ \sqrt{2-y^2} & \text{при } 1 \leq y \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

С учетом данного представления, используя свойство 1, можно представить исходный двойной интеграл в виде следующей суммы двух повторных интегралов (см. рис. 8)

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

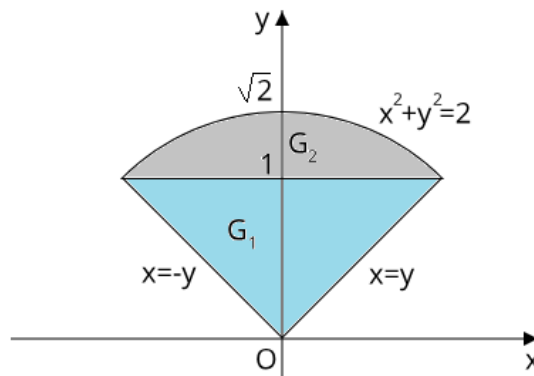


Рис. 8

Еще одним типом задач, которые необходимо разобрать на данном семинаре, на наш взгляд, является изменения порядка интегрирования. Кроме чисто методической пользы подобной задачи (студенты лишней раз разберут задачу на связь области ин-

тегрирования и пределов интегрирования в повторном интеграле) у нее есть и практическая польза: в некоторых задачах изменение порядка интегрирования позволяет существенно упростить вычисления получившихся интегралов.

Пример 5. Изменить порядок интегрирования в следующем двойном интеграле

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy \quad [8].$$

Как и в большинстве предыдущих задач, решение подобного типа задач следует начинать с построения области интегрирования G . Здесь повторный интеграл задает область G в виде (1): $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2a, \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{4ax}\}$ (см. рис. 9).

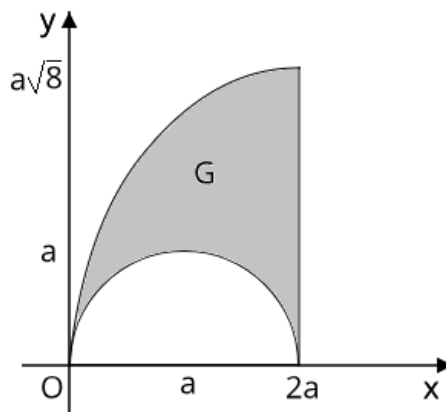


Рис. 9

Согласно рис. 9 видно, что данная область G не является X-правильной. Для того чтобы представить ее в виде (2) необходимо разбить ее на три подобласти (G_1 , G_2 и G_3 , см. рис. 10) и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла. Тогда

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{y^2/4a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \int_a^{a\sqrt{8}} dy \int_{y^2/4a}^{2a} f(x, y) dx.$$

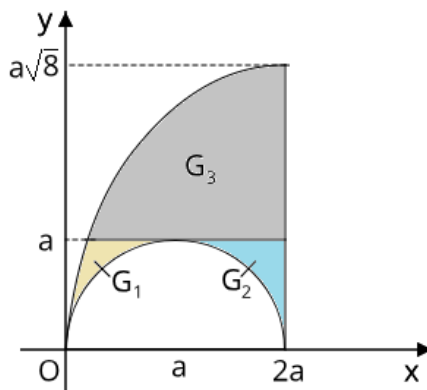


Рис. 10

Заключение

В статье авторы на основании собственного опыта рассматривают методику преподавания решения задач по вычислению двойного интеграла в декартовой системе координат. Рассмотрен основной способ вычисления подобных интегралов - сведение к повторному интегралу. Приведены примеры, иллюстрирующие использование данного метода. Даны методические рекомендации на что, по мнению авторов, необходимо особенно пристально обратить внимание при преподавании данной темы. Данная информация может быть использована при проведении соответствующих занятий со студентами технических специальностей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т. 2. – М.: «Наука», 1985. – 560 с.
2. В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 497 с.
3. Там же.
4. В.Д. Морозова. Введение в анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 408 с.
5. В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. Кратные и криволинейные ... Указ.соч.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Астрель, 2003. – 472 с.
7. Там же.
8. Там же.

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

Alexey V. Kavinov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Methodological aspects of calculating the double integral in the Cartesian coordinate system

Abstract. Students of technical universities face the problem of calculating multiples integrals, in particular double integrals, as a rule, in the second and subsequent courses. The need to calculate multiple integrals arises when solving a variety of engineering problems, problems in physics, probability theory, etc. Therefore, teaching competent calculation of multiple integrals is an urgent task in the preparation of students of technical specialties. The article discusses the features of teaching methods for solving the problem of calculating a double integral in a Cartesian coordinate system. Brief theoretical information necessary to substantiate the considered solution method is provided, as well as examples illustrating its application.

Keywords: double integral, iterated integral.

**ПОВЫШЕНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ И МОТИВАЦИИ
В ПОЛУЧЕНИИ ИНЖЕНЕРНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ У СТУДЕНТОВ
НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ
«РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК»**

Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена необходимостью развития и совершенствования у студентов навыка применения изученных математических методов и знаний из специальных дисциплин к решению конкретных технических задач, которые встречаются в процессе научно-производственной практики и на производстве. Для решения задачи определения допускаемого внутреннего избыточного давления емкости для ракетного топлива студенты и аспиранты выбрали метод расчета тонкостенных оболочек. С помощью преподавателей был составлен план работы над задачей и организована опытно-экспериментальная работа. Результаты изучения теоретических источников и проведения опытно-экспериментальной работы позволяют говорить об эффективности применения такого метода. Результаты проведенной работы были применены при проведении занятий с целью повышения познавательной активности студентов. Содержание статьи будет интересно преподавателям, студентам, старшеклассникам.

Ключевые слова

познавательная активность, организация учебной работы по решению технической задачи, навык решения технических задач, метод расчета тонкостенных оболочек, емкость, транспортировка и хранение топлива

АВТОРЫ

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
vergazova@bmstu.ru

Королев Евгений Алексеевич,
аспирант
ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет», г. Москва
evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

Силин Иван Дмитриевич,
аспирант
ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный
государственный технический университет», г. Москва
Vsilin9@gmail.com

Введение

Объектом изучения выступает процесс обучения математике в высшей школе.

Предметом исследования явилось выявление роли прикладных задач на познавательную активность и мотивацию студентов в процессе обучения математике.

С целью изучить влияние решения прикладных задач на познавательные мотивацию и активность в двух студенческих группах занятия по курсу аналитической геометрии проводились традиционным образом (контрольная группа), в двух других группах (экспериментальная группа) в содержание учебного материала, помимо типовых задач, были добавлены дополнительный теоретический материал и задача прикладного характера на прочностный расчет.

Емкости, предназначенные для хранения и выдачи компонентов ракетного топлива, должны обеспечивать его надежное, безопасное и долговечное хранение. Создание емкостей, отвечающих всем предъявляемым требованиям, является неотъемлемой частью комплекса наземного технологического оборудования. Решение столь важной и актуальной задачи успешно выполнено с помощью проведения прочностного расчета емкостей и последующего анализа полученных результатов. Указанная задача была решена методом расчета тонкостенных оболочек. Перед проведением расчета студенты актуализировали знания по курсу аналитической геометрии (тема «Кривые и поверхности второго порядка»). Решение задачи прикладного значения, как правило, способствует повышению активной познавательной деятельности студентов.

Методология и результаты исследования

Повышение познавательной активности, развитие творческих способностей, знакомство студентов с будущей профессией всегда требовали и требуют первостепенного внимания педагогов высшей школы.

Познавательная деятельность студентов, как часть процесса обучения, включает в себя мотивацию, проблему, реализацию, контроль и самоконтроль, оценку и самооценку.

Одним из способов повышения учебной мотивации студентов является решение задач прикладного характера. Особый тип объекта изучения требует от студента углубления уже сформированных знаний, а также осознания студентом необходимости получения новых знаний, связанных с будущей профессиональной деятельностью. [1]

С целью изучить влияние решения прикладных задач на познавательные мотивацию и активность была проведена следующая работа. В двух студенческих группах занятия по теме «Кривые и поверхности второго порядка» (курс аналитической геометрии) проводились традиционно (повторение необходимого теоретического материала, решение типовых задач). В двух других группах, помимо традиционного содержания занятия, был рассмотрен практический материал по теме «Емкости для топлива. Расчет тонкостенных оболочек». Часть необходимых расчетов была подготовлена аспирантами на слайдах заранее.

В начале изучения темы «Кривые и поверхности второго порядка» во всех группах на семинарских занятиях был проведен опрос. Студентов просили сформулировать, для чего, по их мнению, необходимы знания по этой теме. Варианты ответов приведены в таблице 1. (Таблица 1)

Таблица 1

Варианты ответов	Контрольная группа (35 студентов)	Экспериментальная группа (33 студента)
«Успешно сдать контрольное мероприятие по модулю»	21 (60%)	23 (69%)
«Сдать экзамен на хорошую отметку»	6 (17%)	8(23%)
«Рассматриваемые линии и поверхности интересны с точки зрения истории математики»	2 (6%)	0
Затруднились с ответом	6 (17%)	3(7%)

Как видно, никто из студентов не задумался о роли получаемых математических знаний в собственном качественном профессиональном образовании.

Первая часть занятий строилась во всех студенческих группах строилась одинаковым образом: повторение основных характеристик эллипса, гиперболы и параболы, изображение линий на чертеже, решение задач на определение характеристик линий и приведение уравнений к каноническому виду.

Затем в двух студенческих группах был рассмотрен дополнительный материал прикладного характера.

Перед студентами была поставлена задача определить допустимое внутреннее избыточное давление в емкости для перевозки и хранения топлива.

Тонкостенные оболочки вращения являются составляющей частью конструкций авиационной и ракетно-космической техники. В качестве емкостей широко используются сферические (шары-баллоны) емкости, торовые емкости, цилиндрические емкости с различными очертаниями днищ [2].

Расчет тонкостенных оболочек основан на следующих допущениях:

а) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами напряжений;

б) совокупность точек, находящихся на нормали, проведенной к срединной поверхности до деформации, образует после деформации прямую, нормальную к деформированной срединной поверхности.

С учетом особенностей решения предстоящей задачи работа студентов была организована следующим образом:

1) ознакомление студентов с видами емкостей (торовые, цилиндрические и т.д.);

2) актуализация знаний из курса аналитической геометрии по теме «Кривые и поверхности второго порядка», решение типовых задач на определение основных характеристик кривых второго порядка;

3) изучение специальной литературы, рассматривающей метод расчета тонкостенных оболочек;

4) расчет допустимого внутреннего избыточного давления емкости с учетом ее формы;

5) формулирование выводов о допустимости или недопустимости выбранных характеристик емкостей различных видов.

Во многих случаях можно допустить, что нормальные напряжения в нормальных сечениях оболочки распределяются равномерно по ее толщине, т. е. пренебречь изгибающими моментами, действующими в сечениях оболочки (безмоментная теория). Так, например, в зонах оболочки, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил и моментов, от мест жесткого закрепления оболочки, от ребер усиления и вообще от мест приложения упругих и жестких связей, напряжения могут быть в обычных случаях с большой точностью определены по безмоментной теории [3].

Изгибные напряжения носят обычно характер местного возмущения напряженного состояния и имеют существенно заметную величину лишь около мест закрепления и нагрузки [4].

Вследствие локальности этих напряжений их во многих случаях можно в расчет и не принимать, несмотря на то, что они достигают иногда значительных величин; их можно, например, не учитывать, если появление пластических деформаций и местное изменение формы оболочки не снижают ее несущей способности; их следует учитывать, если материал оболочки хрупкий, или если нагрузка циклическая, или такая, что снижает несущую способность оболочки.

Самой распространенной формой оболочки, работающей под внутренним давлением, является цилиндрическая. Емкости давления используют в качестве сосудов и баллонов для хранения и транспортировки сжатых (воздух, пропан, бутан, пентан, аммиак) и сжиженных (азот, кислород, водород, гелий) газов, которые применяются в различных областях авиационной и ракетно-космической техники.

Емкости под нефтепродукты - необходимая мера для безопасного накопления и сбережения воды и нефти. Необходимо исключить любую причину воспламенения топлива, хранимого внутри. [5] На рисунке 1 приведен пример резервуара для хранения топлива из нефтепродуктов. (Рис. 1).



Рис. 1. Резервуар для хранения топлива из нефтепродуктов.
(Источник: ООО "НПО "Спецнефтемаш". Производство резервуарного оборудования, емкостных аппаратов и трубопроводной арматуры).

В конструктивно-силовую схему емкостей давления, как правило, входят: обечайка, днище, шпангоуты и узлы крепления. Обечайки подкрепляют при необходимости силовым набором. Силовой набор может быть:

- продольным в виде стрингеров;
- поперечным в виде шпангоутов;
- продольно-поперечным в виде вафельной конструкции.

Большинство емкостей изготавливают сваркой, поэтому в расчетах необходимо учитывать ослабляющее влияние сварного шва.

Материалы, применяемые для изготовления емкостей давления, должны обеспечивать их надежную работу в течение расчетного срока службы с учетом заданных условий эксплуатации, состава и характера среды (коррозионная активность, взрывоопасность, токсичность) и влияния температуры окружающего воздуха. Материалом для таких емкостей, как правило, является сталь листовая 12Х18Н10Т-М26. [6]

Общий вид емкости приведен на рисунке 2. (Рис. 2).

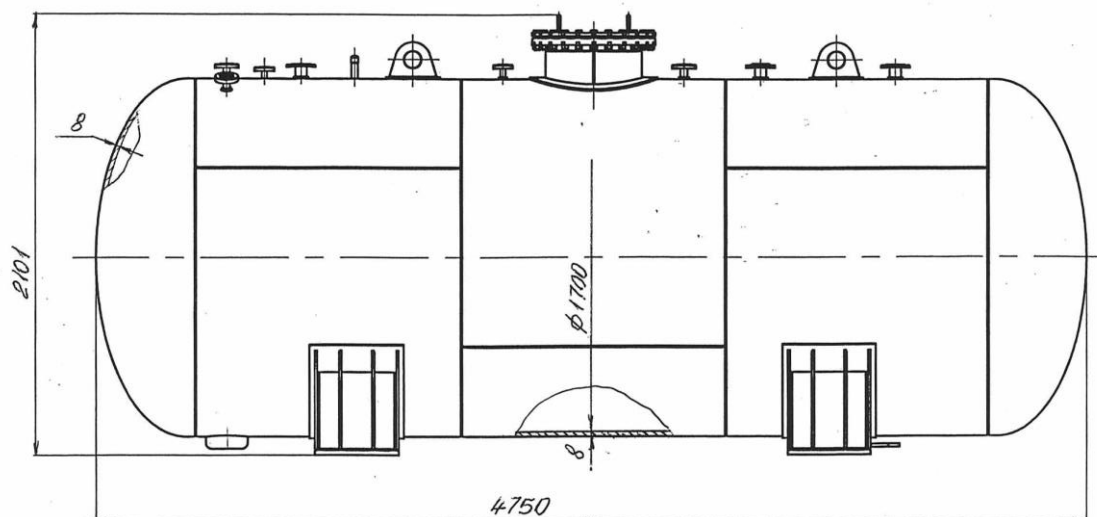


Рис. 2. Общий вид емкости

Студенты работали над определением допускаемого внутреннего избыточного давления. Расчеты проводились для емкости объемом $V = 10 \text{ м}^3$.

Определение допускаемого внутреннего избыточного давления емкости.

Условие применения расчетных формул для обечайки при внутреннем диаметре сосуда $D \geq 200 \text{ мм}$

$$\frac{S - C_{об}}{D} \leq 0,1$$

где $C_{об}$ – сумма прибавок к расчетной толщине стенки обечайки (мм).

$$C_{об} = C_1 + C_{2об},$$

$C_{2об}$ – прибавка для компенсации минусового допуска,

$S = 8 \text{ мм}$ в условиях решаемой задачи.

$$C_{2об} = 0,8 \text{ мм.}$$

$$C_{об} = 0 + 0,8 = 0,8 \text{ мм,}$$

$$\frac{8 - 0,8}{1700} \leq 0,1.$$

$$0,004 < 0,1.$$

Таким образом, условие выполняется. [7]

Допускаемое внутреннее избыточное давление для цилиндрической обечайки без отверстий равно:

$$[p]_{1об} = \frac{2 [\sigma] \varphi_p (S - C_{об})}{D + (S - C_{об})}$$

где $[p]_{1об}$ – допускаемое внутреннее избыточное давление для обечайки (МПа),

φ_p – коэффициент прочности сварного шва.

Для продольного сварного шва $\varphi_p = 1,0$.

$$[p]_{1об} = \frac{2 \cdot 158 \cdot 1,0 \cdot (8 - 0,8)}{1700 + (8 - 0,8)} = 1,33 \text{ МПа.}$$

Определение допускаемого внутреннего избыточного давления для эллиптического днища без отверстий.

Условия применения расчетных формул для эллиптического днища имеет вид:

$$0,002 \leq \frac{S_1 - C_{дн}}{D} \leq 0,100,$$

$$0,2 \leq \frac{H}{D} \leq 0,5,$$

где $C_{дн}$ – сумма прибавок к расчетной толщине стенки днища (мм),

$$C_{дн} = C_1 + C_{2дн},$$

где $C_{2дн}$ – прибавка для компенсации минусового допуска для толщины $S_1 = 8 \text{ мм}$, $C_{2дн} = 0,8 \text{ мм}$ в условиях решаемой задачи.

$$C_{дн} = 0 + 0,8 = 0,8 \text{ мм,}$$

H – высота выпуклой части днища без учета цилиндрической части, $H = 425 \text{ мм}$.

$$0,002 \leq \frac{8 - 0,8}{1700} \leq 0,100,$$

$$0,2 \leq \frac{425}{1700} \leq 0,5,$$

$$0,002 < 0,004 < 0,100,$$

$$0,2 < 0,25 < 0,5.$$

Значит, условия выполняются [8].

Допускаемое внутреннее избыточное давление для эллиптического днища

$$[p]_{\text{дн}} = \frac{2 \cdot (S_1 - C_{\text{дн}}) \cdot \varphi_{\text{дн}} \cdot [\sigma]}{R + 0,5(S_1 - C_{\text{дн}})},$$

где $[p]_{\text{дн}}$ – допускаемое внутреннее избыточное давление для эллиптического днища (МПа),

$\varphi_{\text{дн}}$ – коэффициент прочности сварного шва, $\varphi_{\text{дн}} = 1,0$ для решаемой задачи,

R – радиус кривизны в вершине днища, мм, для эллиптических днищ с $H = 0,25D$, $R = D$, $R = 1700$ мм,

$$[p]_{\text{дн}} = \frac{2 \cdot (8 - 0,8) \cdot 1 \cdot 158}{1700 + 0,5 \cdot (8 - 0,8)} = 1,34 \text{ МПа.}$$

Таким образом, прочность сосуда обеспечена при:

–внутреннем избыточном (расчетном) давлении до 0,77 МПа (7,9 кгс/см²);

–пробном гидравлическом давлении до 1,04 МПа (10,6 кгс/см²);

Заключение

После проведения занятий студентам был снова задан вопрос: «Зачем, с какой целью изучаются линии и поверхности второго порядка в курсе аналитической геометрии?» Полученные результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

Варианты ответов	Контрольная группа (35 студентов)	Экспериментальная группа (33 студента)
«Успешно сдать контрольное мероприятие по модулю»	8 (23%)	-
«Сдать экзамен на хорошую отметку»	14 (40%)	-
«Знания по изучаемой теме необходимы для работы над курсовым, дипломным проектом»	2 (6%)	5 (15%)
«Знания по изучаемой теме необходимы инженеру в его профессиональной деятельности»	4(12%)	28 (85%)
Затруднились с ответом	7 (19%)	-

Как показывают результаты, студенты экспериментальной группы уверены в необходимости получаемых знаний в работе инженера. Небольшая группа студентов (5 человек) считает, что знания необходимы для успешного выполнения курсовой или дипломной работы, то есть в учебной перспективе. Студенты экспериментальной группы уже не считают ближайшее контрольное мероприятие главной целью изучения столь важного вопроса.

Решение прикладной задачи мотивирует студентов к качественному изучению математики, совершенствует вычислительные навыки, показывает важность и необходимость математических методов для инженерного дела. Применение метода расчета тонкостенных оболочек делает возможным найти оптимальные решения многих современных технических задач. Возможно, проектирование новых емкостей для компонентов ракетного топлива, обеспечивающих их надежное, безопасное и долговечное хранение, станет будущей специальностью.

На примере реальных производственных задач студенты применяют изученное математических и специальных дисциплинах. Студенты учатся организовывать самостоятельную работу по решению поставленной производственной задачи, выделяя основные этапы: актуализация полученных математических знаний, работа со специальной литературой, применение полученных знаний к решению конкретной задачи, проведение расчетов и их анализ, формулирование выводов. Как результат, возрастает мотивация качественного освоения знаний, совершенствования навыков, необходимых в выбранной специальности. Следует также отметить, что успешное выполнение поставленной задачи является для данной возрастной группы важной потребностью социального характера. Решение реальных производственных задач - основа формирования и развития профессиональных качеств будущего инженера.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Тарабрина Т.Б. Формирование учебно-профессиональной мотивации студентов технических вузов. <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-uchebno-professionalnoy-motivatsii-studentov-tehnicheskikh-vuzov> (Дата обращения 21.08.2023)
2. Ефанов К.В. Теория расчета оболочек нефтяных аппаратов. М. Litres. 2019. 50 с.
3. Расчет пластин методом конечных элементов: учеб. пособие для вузов / Белкин А. Е., Гаврюшин С. С. М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2008. 230 с.
4. Краткий справочник конструктора нестандартного оборудования. В 2-х томах / В.И.Бакуменко М. Машиностроение.1997.
5. Методические рекомендации по определению технологических потерь нефти (нефтепродуктов), транспортируемой(ых) магистральным трубопроводным транспортом. Утв. Минэнерго России. 26.09.2022. М. 2022.
6. Подвижная заправочная станция. Разработка и эксплуатация: Учеб. пособие / О.Е. Денисов, Р.Н. Кузнецов, О.П. Матвеева, Н.А. Морозов. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 240 с.
7. Метод конечных элементов. Основы / Галлагер Р. М. Мир. 1984. 428 с.
8. Методы численного анализа математических моделей / Галанин М. П., Савенков Е. Б. М. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2010. 590 с.

Olga B. Vergazova,

Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

vergazova@bmstu.ru

Evgeny A. Korolev,

Postgraduate student, Moscow Automobile and Road State Technical University, Moscow

evgeniy-alex.korolev@yandex.ru

Ivan D. Silin,

Postgraduate student, Moscow Automobile and Road State Technical University, Moscow

Vsilin9@gmail.com

Increasing cognitive activity and motivation in obtaining an engineering specialty among students by the example of solving the applied problem "Calculation of thin-walled shells"

Annotation. The relevance of the problem under study is due to the need for students to develop and improve the skill of applying the studied mathematical methods and knowledge from special disciplines to solving specific technical problems that occur in the process of scientific and industrial practice and in production. To solve the problem of determining the permissible internal overpressure of the propellant tank, students and postgraduates chose a method for calculating thin-walled shells. With the help of teachers, a work plan was drawn up on the task and experimental work was organized. The results of studying theoretical sources and conducting experimental work allow us to speak about the effectiveness of using such a method. The results of the work carried out were applied during classes in order to increase the cognitive activity of students. The content of the article will be interesting to teachers, students, high school students.

Keywords: cognitive activity, organization of educational work on solving technical problems, skill of solving technical problems, method of calculating thin-walled shells, capacity, transportation and storage of fuel.

ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Аннотация

В курсе математической статистики важное место занимает понятие точечной оценки. Это понятие возникает при рассмотрении задачи оценивания неизвестных параметров: дана случайная величина, общий вид (тип, класс) закона распределения которой известен. Закон распределения при этом зависит от одного или нескольких неизвестных скалярных параметров, требуется оценить значения этих параметров. Один из подходов к решению этой задачи заключается в построении точечных оценок. В статье рассматривается методика изложения темы «Метод максимального правдоподобия построения точечных оценок»: приводится описание метода и разбираются методические аспекты его использования для различных законов распределения.

Ключевые слова

оценивание параметров, точечная оценка, метод максимального правдоподобия, функция правдоподобия, экстремум функции

АВТОРЫ

Власов Павел Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Велищанский Михаил Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Кавинов Алексей Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Введение

Как известно [1], одной из основных задач математической статистики является получение научно обоснованных выводов о свойствах массовых процессов или явлений по результатам экспериментов или наблюдений. Более узко одну из основных задач математической статистики можно сформулировать следующим образом: имеется случайная величина X , закон распределения которой неизвестен; требуется по результатам наблюдений сделать выводы о ее законе распределения. Эта задача обычно рассматривается в двух вариантах.

В первом из них закон распределения случайной величины X неизвестен «вообще»; требуется сформулировать и проверить гипотезу о виде (типе, классе) этого закона и, возможно, значениях его параметров.

Во втором случае общий вид (тип, класс) закона распределения случайной величины X предполагается известным. Требуется оценить значения неизвестных параметров, от которых этот закон зависит.

По общей логике решение второй из рассмотренных задач должно предшествовать решению первой. Дело в том, что проверка, например, гипотезы

{Случайная величина X имеет нормальный закон распределения}

фактически сводится к проверке гипотезы

{Случайная величина X имеет

нормальный закон распределения с параметрами m и σ^2 },

что предполагает использование в качестве параметров m и σ^2 значений, более или менее близких к их теоретическим («истинным») значениям. Таким образом, задача оценивания неизвестных параметров имеет ключевое значение для решения многих других задач математической статистики.

В статье рассматривается один из возможных подходов к решению этой задачи, заключающийся в построении точечных оценок.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой зависит от параметра θ , \vec{X} (соответственно \vec{x}) – случайная выборка (соответственно выборка) из генеральной совокупности X . Точечной оценкой параметра θ называют [2-4] такую статистику $\hat{\theta}(\vec{X})$, выборочное значение $\hat{\theta}(\vec{x})$ которой принимается в качестве значения параметра θ .

В математической статистике разработано большое число методов построения точечных оценок [5], однако на практике наиболее часто используются метод моментов, графический метод, метод наименьших квадратов и, разумеется, метод максимального правдоподобия, методическим аспектам которого и посвящена эта работа.

Методология и результаты исследования

Дисциплина «Математическая статистика» входит в программы многих направлений обучения бакалавров. Для некоторых направлений и специальностей в программу курса входит тема «метод максимального правдоподобия».

Идеи, составляющие метод максимального правдоподобия, использовались еще К.Ф. Гауссом и П.С. Лапласом; существенная его проработка и начало широкого использования были осуществлены между 1912 и 1922 годами Р. Фишером [6]. Относительно строгое обоснование метода было предложено в 1938 году С.С. Уилксом (теорема Уилкса). В дальнейшем Уилкс и другие исследователи углубляли этот результат. Наиболее общее доказательство корректности метода было опубликовано в 1962 году [7].

Основная идея метода максимального правдоподобия состоит в подборе таких значений параметров статистической модели, которые доставляют максимальное значение специальной функции, называемой функцией правдоподобия.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ неизвестных параметров. Функцией правдоподобия [8] случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности X называется функция

$$\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta}) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \dots \cdot p(X_n, \vec{\theta}), \quad (1)$$

где

$$p(x, \vec{\theta}) = \begin{cases} P\{X = x\}, & \text{если } X \text{ – дискретная случайная величина,} \\ f(x, \vec{\theta}), & \text{если } X \text{ – непрерывная случайная величина} \end{cases}$$

(здесь f - функция плотности распределения вероятностей случайной величины X).

Замечание 1. Пусть, например, $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m и σ^2 являются неизвестными параметрами. Предположим, что $m = m_0$, $\sigma^2 = \sigma_0^2$ - теоретические ("истинные") значения этих параметров (разумеется, эти значения неизвестны), а $m = m_1$ и $\sigma^2 = \sigma_1^2$ - некоторые подобранные нами значения этих же параметров. При проведении испытаний элементы выборки будут группироваться в районе m_0 (см. рис. 1). Из иллюстрации видно, что чем ближе подобранные значения m_1 и σ_1^2 к m_0 и σ_0^2 соответственно, тем больше значения функции плотности f в точках X_i и, следовательно, тем больше значения функции правдоподобия $\mathcal{L}(\vec{X}, m_1, \sigma_1^2)$.

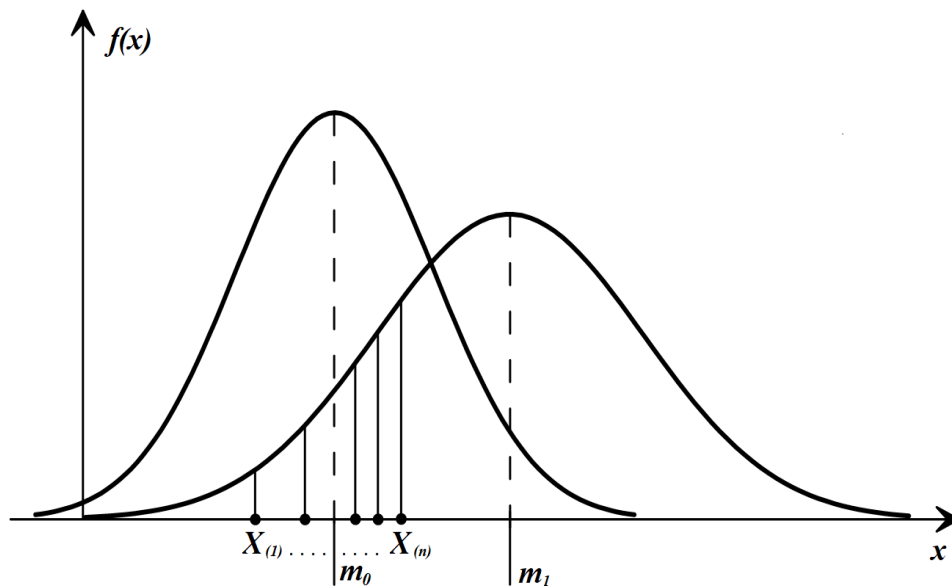


Рис. 1

Можно показать, что результат замечания 1 справедлив для произвольной параметрической модели: чем более удачно выбраны значения неизвестных параметров, тем больше значения функции правдоподобия. По этой причине в методе максимального правдоподобия в качестве точечных оценок неизвестных параметров принимают такие их значения, которые для каждой реализации \vec{x} случайной выборки \vec{X} максимизируют функцию правдоподобия $\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta})$, то есть полагают

$$\hat{\vec{\theta}} = \arg \max_{\vec{\theta}} \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta}).$$

При решении этой задачи оптимизации обычно используют необходимое условие экстремума функции нескольких переменных [9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{X}, \theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{X}, \theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r} = 0. \end{array} \right.$$

Указанные соотношения при этом называют *уравнениями правдоподобия*.

Замечание 2. Функция правдоподобия (1) представляет собой произведение n сомножителей, зависящих от вектора $\vec{\theta}$ неизвестных параметров, поэтому вычисление входящих в уравнения правдоподобия производных не очень удобно. По этой причине вместо задачи

$$\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta}) \rightarrow \max_{\vec{\theta}}$$

обычно рассматривают эквивалентную задачу

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta}) \rightarrow \max_{\vec{\theta}}$$

(задачи и в самом деле эквивалентны, поскольку логарифм является монотонно возрастающей функцией). В этом случае необходимое условие экстремума принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, \theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, \theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r} = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

а указанные соотношения также называют *уравнениями правдоподобия*.

Примеры использования метода моментов

Пример 1. Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром λ , то есть $X \sim \Pi(\lambda)$. Построим с использованием метода максимального правдоподобия точечную оценку параметра λ .

Заметим, что в рассматриваемом случае $r = 1$, так как пуассоновская случайная величина зависит от одного скалярного параметра. При этом она является дискретной и принимает целые неотрицательные значения с вероятностями [10]

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

поэтому функция правдоподобия (1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta}) = P\{X = X_1\} \cdot \dots \cdot P\{X = X_n\} =$$

$$= \left(\frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{-\sum_{i=1}^n X_i}}{X_1! \cdot \dots \cdot X_n!} e^{-n\lambda},$$

а ее логарифм -

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{\theta}) &= \ln \left(\lambda^{-\sum_{i=1}^n X_i} \right) - \ln(X_1! \cdot \dots \cdot X_n!) + \ln e^{-n\lambda} = \\ &= \ln \lambda \sum_{i=1}^n X_i - \ln(X_1! \cdot \dots \cdot X_n!) - n\lambda. \end{aligned}$$

Для построения оценки максимального правдоподобия параметра λ нужно решить задачу оптимизации

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, \lambda) \rightarrow \max_{\lambda}.$$

Использование необходимого условия экстремума (мы рассматриваем $\mathcal{L}(\vec{X}, \lambda)$ как функцию $r=1$ переменного λ) дает единственное уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n X_i - n = 0,$$

из которого находим единственную критическую точку

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X},$$

Осталось доказать, что найденное значение $\hat{\lambda}$ действительно доставляет функции $\mathcal{L}(\vec{X}, \lambda)$ наибольшее значение. Для этого можно использовать одно из достаточных условий локального максимума (вторая производная в стационарной точке должна быть отрицательной). В самом деле,

$$\left. \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{X}, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \left. \left(-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n X_i \right) \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \left. \left(-\frac{n}{\lambda^2} \bar{X} \right) \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\frac{n}{\bar{X}^2} \bar{X} = -\frac{n}{\bar{X}} < 0$$

(так как $X \sim \Pi(\lambda)$, то $X_i \geq 0$, поэтому $\bar{X} \geq 0$), что завершает доказательство. Таким образом, ответ задачи имеет вид

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

Пример 2. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестными параметрами m и θ , то есть $X \sim N(m, \theta)$. Построим с использованием метода максимального правдоподобия точечные оценки этих параметров.

Нормальная случайная величина [11] является непрерывной, а ее функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\theta}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

поэтому в соответствии с (1) в рассматриваемом случае функция правдоподобия принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{X}, m, \theta) &= f(X_1, m, \theta) \cdot \dots \cdot f(X_n, m, \theta) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(X_1-m)^2}{2\theta}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(X_n-m)^2}{2\theta}} \right) = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \theta^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2\right),\end{aligned}$$

а ее логарифм –

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, m, \theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \theta - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2.$$

Для построения оценки максимального правдоподобия нужно решить задачу

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, m, \theta) \rightarrow \max_{m, \theta}.$$

Как и ранее, запишем уравнения правдоподобия (2) теперь уже для $r = 2$ переменных m и θ :

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, m, \theta)}{\partial m} = \frac{2}{2\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - m) = \frac{1}{\theta} \left[\sum_{i=1}^n X_i - nm \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, m, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = 0.$$

Решая эти уравнения относительно m и θ , найдем координаты критической точки:

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X},$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = \hat{\sigma}^2,$$

где статистику $\hat{\sigma}^2$ называют *выборочной дисперсией*. Можно показать, что для найденных значений \hat{m} и $\hat{\theta}$ выполняются достаточные условия локального максимума функции двух переменных, поэтому можно записать ответ задачи:

$$\hat{m}(\vec{X}) = \bar{X}, \quad \hat{\theta}(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}).$$

Пример 3. Пусть случайная величина X имеет равномерное на отрезке $[a, b]$ распределение с неизвестными параметрами a и b , то есть $X \sim R[a, b]$. Построим с использованием метода максимального правдоподобия точечные оценки этих параметров.

Равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$ случайная величина X является непрерывной, а ее функция плотности распределения имеет вид [12]

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

поэтому на первый взгляд в рассматриваемом примере функция правдоподобия записывается как

$$\mathcal{L}(\vec{X}, a, b) = f(X_1, a, b) \cdot \dots \cdot f(X_n, a, b) = \frac{1}{(b-a)^n}, \quad (3)$$

а ее логарифм –

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, a, b) = -n \ln(b-a). \quad (4)$$

Уравнения правдоподобия (2) принимают вид

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, a, b)}{\partial a} = \frac{n}{b-a} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, a, b)}{\partial b} = -\frac{n}{b-a} = 0$$

и приводят к противоречивому результату $n=0$.

Проблема в том, что в настоящем примере границы области, в которой $f > 0$, зависят от значений неизвестных параметров a и b , поэтому выражения (3) и (4) для функции правдоподобия и ее логарифма составлены некорректно. Правильным является выражение (см. рис. 2)

$$\mathcal{L}(\vec{X}, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq X_i \leq b, \quad i = \overline{1; n}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

дифференцирование которого по неизвестным параметрам затруднительно.

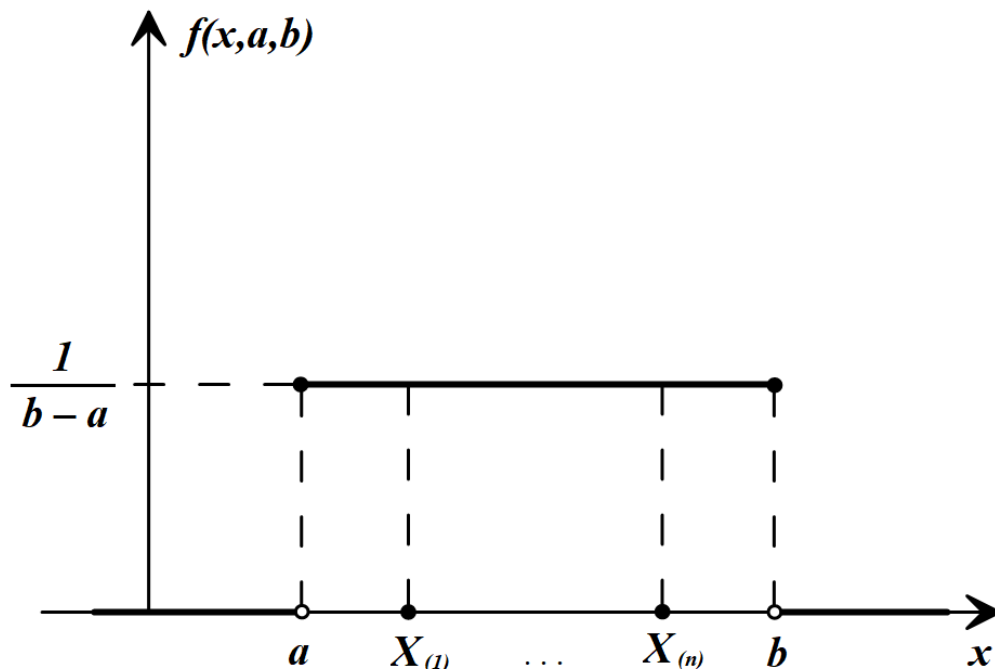


Рис. 2

Попробуем подобрать значения a и b , максимизирующие функцию $\mathcal{L}(\vec{X}, a, b)$, без использования необходимого условия экстремума, выраженного уравнениями правдоподобия. При решении этой задачи параметры a и b являются переменными и их значения можно варьировать. Предположим, что параметр a принял достаточно большое значение и один или несколько элементов выборки оказались меньше a . В

этом случае $f(X_{(1)}, a, b) = 0$ и, следовательно, $\mathcal{L}(\vec{X}, a, b) = 0$. Аналогичный результат получается и в случае, когда параметр b принимает достаточно малое значение, для которого $b < X_{(n)}$. Поскольку функция правдоподобия подлежит максимизации, то a и b следует выбирать так, чтобы

$$a \leq X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)} \leq b, \quad (6)$$

– в этом случае ее значения, определяемые верхней формулой (5), будут положительными. Непосредственный анализ этой формулы показывает, что значения функции $\mathcal{L}(\vec{X}, a, b)$ будут тем больше, чем меньше длина отрезка $[a, b]$. С учетом ограничений (6) заключаем, что максимальное значение функции правдоподобия достигается при

$$a = X_{(1)}, \quad b = X_{(n)},$$

что и дает искомые точечные оценки параметров:

$$\hat{a}(\vec{X}) = X_{(1)}, \quad \hat{b}(\vec{X}) = X_{(n)}.$$

Заметим, что полученный результат количественно и качественно отличается от точечных оценок параметров равномерной модели, полученных ранее в работе [13] с использованием метода моментов. Это лишний раз показывает, что для одного и того же параметра могут быть предложены различные точечные оценки.

Заключение

В работе рассмотрены методические аспекты изложения темы «Метод максимального правдоподобия построения точечных оценок» в курсе математической статистики, который читается для студентов (бакалавров) инженерных специальностей.

Проведено общее изложение метода, даны необходимые сведения о его применимости. В качестве примеров использования метода рассмотрены задачи построения точечных оценок для неизвестных параметров некоторых типовых распределений (пуассоновского, нормального, равномерного). В каждом случае отмечены особенности реализации метода, имеющие методическое значение.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
 2. Там же.
 3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984.
 4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — 12-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2023.
 5. https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_theory
 6. https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation
 7. Там же.
 8. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
 9. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. — М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
 10. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
 11. Там же.
 12. Там же.
 13. Власов П. А., Андреева Т. В., Семенов Ю. С. Изложение метода моментов построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. — Salzburg, 2023. — Т. 1, №1. — Р. 91-97.
-

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

Alexey V. Kavinov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Presentation of the maximum likelihood method for constructing point estimates in the course “Mathematical statistics”

Abstract. The concept of point estimate takes an important place in the course of mathematical statistics. This concept appears when the problem of determining unknown parameters considered. The task is to estimate several parameters on which the law of distribution of a random variable depends. In this case, the general form (type or class) of the distribution law of this random variable is assumed to be known. One of approaches to solve this problem consists in constructing point estimates. The article presents a discussion on the methodology of presenting the topic "maximum likelihood estimation": a description of the method and examples of its use for various distribution laws are analyzed.

Keywords: parameter estimation, point estimate, maximum likelihood estimation, likelihood function.

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ СТУДЕНТАМ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Аннотация

В статье рассматривается одно из возможных изложений студентам курса основ теории распознавания образов, актуальность которого обусловлена широким использованием теории в задачах обработки информации, медицине, социологии и других областях науки и техники. Такой курс включен в учебные планы магистров факультета ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана, но может быть использован также в процессе обучения студентов различных специальностей, в том числе нематематических (технических), освоивших основы теории вероятностей и статистики. В работе рассматриваются различные алгоритмы построения оптимальных решений: байесовский, максимального правдоподобия, оптимальный по критерию Неймана-Пирсона и другие. Работа может быть интересна не только студентам соответствующих специальностей, но и специалистам, занимающимся разработкой систем распознавания.

Ключевые слова

выборочное пространство, пространство решений, байесовский алгоритм, критерий Неймана-Пирсона

АВТОРЫ

Грибов Александр Федорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Краснов Игорь Константинович,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Соколов Денис Николаевич,
студент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
sokolov_den@outlook.com

Введение

В настоящее время распознавание образов используется во многих областях науки и техники: в медицине - при классификации заболеваний, в геологии - при определении горных пород, в геодезии и картографии - при составлении географических карт, в различных областях техники - контроль за состоянием авиационных двигателей, ядерных реакторов, техническая диагностика приборов, узлов и машин.

Распознавание образов представляет собой отношение исследуемого объекта или явления, задаваемого в виде совокупности наблюдений (признаков) к одному из взаимоисключаемых классов. Это означает, что существует однозначное отображение

совокупности наблюдений, являющихся конечным множеством X на множество классов $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, количество которых задано, то есть $X \rightarrow S$.

В большинстве практических задач распознавания множество наблюдений имеет простую структуру и может быть представлено в виде измеренных значений p характеристик (признаков) x_1, x_2, \dots, x_p . В этом случае признаковое пространство может быть представлено в виде $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_p)\}$. Тогда задача о распознавании образов заключается в разбиении признакового пространства X на совокупность непересекающихся подпространств X_1, X_2, \dots, X_N : таких что $\bigcup_{i=1}^N X_i = X$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $i \neq j$. После построения такого разбиения при попадании наблюдения $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ в подпространство X_i принимается решение о том, что $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_p)\}$ принадлежит классу S_i . Важнейшей особенностью реальных задач является то, что наблюдения x_1, x_2, \dots, x_p подвержены случайным возмущениям. Поэтому разработка теории распознавания требует привлечения статистических методов.

Из изложенного следует, что спецкурс «Введение в статистическую теорию распознавания образов» является актуальным и имеет практическое значение. Теоретические основы курса базируются на основе теории статистических решений. Курс построен традиционно: сначала излагаются теоретические основы, которые впоследствии подкрепляются решением задач.

Методология и результаты исследования

Статистическая теория распознавания образов строится на основе теории различения гипотез, а сами гипотезы заключаются в отношении образов к одному из заданных классов. В дальнейшем излагаемый материал основывается в основном на работах [1] и [2]. Начнем рассмотрение задачи распознавания образов с задачи различения двух классов. Пусть наблюдается реализация исследуемого процесса. Результат наблюдения представляется в виде выборки $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ фиксированного размера n . Выдвигается простая гипотеза H_0 о том, что функция правдоподобия выборки равна $W(\bar{x}/H_0)$, против простой альтернативы $W(\bar{x}/H_1)$. Задача состоит в том, чтобы по результату наблюдения - выборке \bar{x} - принять или отвергнуть гипотезу H_0 или, другими словами, отнести объект (процесс) наблюдения к первому или второму классу. Рассмотрим полный комплект данных для решения этой задачи.

Выборочное пространство. При фиксированном размере выборки пространством наблюдений (выборочным пространством) является n -мерное евклидово пространство X^n .

Вероятностная мера на пространстве наблюдений. При дискретной форме регистрации наблюдений вероятностная мера на пространстве наблюдений представляет совместное конечномерное распределение выборочных значений. Плотность этого распределения называют функцией правдоподобия выборки. В рассматриваемой задаче на пространстве X^n заданы две функции правдоподобия $W(\bar{x}/H_0)$ и $W(\bar{x}/H_1)$, $\bar{x} \in X^n$, где $W(\bar{x}/H_i)$ -функция правдоподобия выборки \bar{x} при условии, что верна гипотеза H_i ($i = 0, 1$).

Априорные вероятности гипотез. Известны априорные вероятности гипотезы H_0 и альтернативы H_1 , которые образуют полную группу событий: $p_0 = p\{H_0\} = 1 - p\{H_1\} = 1 - p_1$.

Пространство решений. Пространство решений Γ состоит из двух элементов: γ_0 - решения принять гипотезу H_0 , γ_1 - решения принять альтернативу H_1 (отклонить гипотезу H_0).

Правило выбора решения. Каждый алгоритм из множества алгоритмов D предписывает разделение выборочного пространства X^n на две непересекающиеся области X_0 и X_1 , $X_0 \cup X_1 = X^n$, $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Если наблюдаемая выборка попала в область

X_0 , то принимается решение γ_0 - выборка принадлежит классу 1, а если в область X_1 , то решение γ_1 - выборка принадлежит классу 2. В математической статистике область X_0 принятия гипотезы H_0 называют допустимой, а область X_1 отклонения этой гипотезы - критической.

Плата за принятие решения. Вводится матрица потерь

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{pmatrix},$$

где элемент Π_{ij} представляет собой плату за принятие решения j , когда справедливо решение i . Для элементов матрицы Π должны выполняться соотношения $\Pi_{01} > \Pi_{00} \geq 0$, $\Pi_{10} > \Pi_{11} \geq 0$.

Условные вероятности ошибок и априорные вероятности решений. Вероятность ошибки первого рода - принять гипотезу H_1 , в то время как верна гипотеза H_0 . Вероятность α ошибки первого рода определяется следующим образом

$$\alpha = P\{\gamma_1|H_0\} = P\{\bar{x} \in X_1|H_0\} = \int_{X_1} W(\bar{x}|H_0) d\bar{x} = P\{H_1|H_0\} \quad (1)$$

Вероятность правильного решения, состоящего в принятии верной гипотезы H_0 , дополняет указанную вероятность до единицы, то есть

$$P\{\gamma_0|H_0\} = P\{\bar{x} \in X_0|H_0\} = \int_{X_0} W(\bar{x}|H_0) d\bar{x} = 1 - \int_{X_1} W(\bar{x}|H_0) d\bar{x} = 1 - \alpha$$

Вероятность β ошибки второго рода - принятие гипотезы H_0 , когда верна гипотеза H_1

$$\beta = P\{\gamma_0|H_1\} = P\{\bar{x} \in X_0|H_1\} = \int_{X_0} W(\bar{x}|H_1) d\bar{x} \quad (2)$$

Вероятность правильного решения, состоящего в отклонении ложной гипотезы H_0 , дополняют β до единицы

$$P\{\bar{x} \in X_1|H_1\} = \int_{X_1} W(\bar{x}|H_1) d\bar{x} = 1 - \beta.$$

Вероятность α ошибки первого рода (то есть вероятность отвергнуть правильную гипотезу H_0) в математической статистике называют уровнем значимости, а вероятность $1 - \beta$ отвергнуть ложную гипотезу - мощностью правила выбора решений. Априорные вероятности решений γ_0 и γ_1

$$P\{\gamma_0\} = p_0P\{\gamma_0|H_0\} + p_1P\{\gamma_0|H_1\} = p_0(1 - \alpha) + p_1\beta,$$

$$P\{\gamma_1\} = p_0P\{\gamma_1|H_0\} + p_1P\{\gamma_1|H_1\} = p_0\alpha + p_1(1 - \beta)$$

определяют частоты появления отдельных решений в длинной последовательности принятия решений. Для заданного размера выборки вероятность ошибок и первого и второго рода невозможно одновременно сделать сколь угодно малыми. Например, чтобы ошибки второго рода появлялись редко можно уменьшить критическую

область X_0 , но тогда область X_1 возрастет, что приведет к возрастанию ошибок первого рода и наоборот. Поэтому для того, чтобы сформулировать то или иное правило выбора решения необходимо выработать какие-то разумные подходы.

Байесовский алгоритм. Используя указанный весь комплект априорных данных (полная априорная определенность), запишем выражение среднего риска:

$$R = p_0 r_0 + p_1 r_1, \quad (3)$$

где r_0 - условный риск от принятия решений, когда выполняется гипотеза H_0 ; r_1 - условный риск от принятия решений, когда выполняется гипотеза H_1

$$r_0 = \Pi_{00}P\{\gamma_0|H_0\} + \Pi_{01}P\{\gamma_1|H_0\} = \Pi_{00}(1 - \alpha) + \Pi_{01}\alpha, \quad (4)$$

$$r_1 = \Pi_{10}P\{\gamma_0|H_1\} + \Pi_{11}P\{\gamma_1|H_1\} = \Pi_{10}\beta + \Pi_{11}(1 - \beta). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), после простых преобразований получаем

$$R = p_0\Pi_{00} + p_1\Pi_{10} + p_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})\alpha - p_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})(1 - \beta). \quad (6)$$

За критерий оптимальности алгоритма принятия решения примем минимальное значение среднего риска (байесовский критерий).

Построение оптимального байесовского алгоритма [3]. Тот или иной алгоритм определяется выбором области X_1 в выборочном пространстве. Зависимость среднего риска R от выбора области X_1 в выборочном пространстве определяется формулой

$$R = p_0\Pi_{00} + p_1\Pi_{10} - \int_{X_1} [p_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})W(\bar{x}|H_1) - p_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})W(\bar{x}|H_0)]d\bar{x}.$$

Тогда средний риск достигает минимального значения тогда и только тогда, когда в область интегрирования X_1 включаются все точки выборочного пространства, для которых подинтегральная функция неотрицательная, а в области X_0 принятия гипотезы H_0 - все выборки для которых подсчитывается функция отрицательна. Таким образом, получаем байесовский алгоритм проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1 , который записывается в следующем виде:

$$l(\bar{x}) = \frac{W(\bar{x}|H_1)}{W(\bar{x}|H_0)} \geq \frac{(\Pi_{01} - \Pi_{00}) p_0}{(\Pi_{10} - \Pi_{11}) p_1} \text{ при } \gamma_1 \quad (7)$$

$$\frac{W(\bar{x}|H_1)}{W(\bar{x}|H_0)} < \frac{(\Pi_{01} - \Pi_{00}) p_0}{(\Pi_{10} - \Pi_{11}) p_1} \text{ при } \gamma_0.$$

Достаточная статистика отношения правдоподобия. Функция

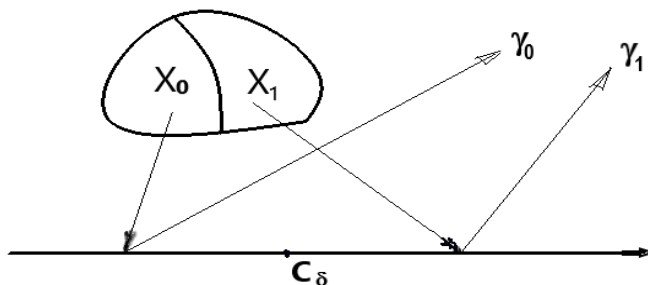
$$l(\bar{x}) = l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W(x_1, \dots, x_n|H_1)}{W(x_1, \dots, x_n|H_0)}$$

называется отношением правдоподобия и представляет неотрицательную случайную величину, получаемую функциональным преобразованием $z = l(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое отображает точки n -мерного пространства выборок на действительную полуось. В этом случае для принятия решения достаточно использовать значение одной случайной величины, а не значения каждого элемента выборки. Байесовский алгоритм (7) проверки простой гипотезы против простой альтернативы состоит в сравнении отношения правдоподобия $l(\bar{x})$ с порогом

$$c_{\delta} = \frac{(\Pi_{01} - \Pi_{00}) p_0}{(\Pi_{10} - \Pi_{11}) p_1},$$

причем принимается решение γ_1 (отклоняется гипотеза H_0), если $l(\bar{x}) \geq c_{\delta}$, и принимается решение γ_0 (принимается гипотеза H_0), если $l(\bar{x}) < c_{\delta}$. Таким образом отношение правдоподобия имеет всю статистическую информацию о проверяемых гипотезах, которая содержится в выборке данного размера. Подобная статистика называется достаточной.

Использование достаточной статистики отношения правдоподобия приводит к редукции наблюдаемых данных: отображению выборочного n -мерного пространства X^n на действительную положительную полуось.



Поверхность в n -мерном выборочном пространстве, разделяющая согласно байесовскому правилу пространство X^n на подпространства X_0 и X_1 , отображается в точку c_{δ} на оси $l \geq 0$. Байесовское правило δ_B теперь состоит в отображении интервала $0 < l < c_{\delta}$ в точку $\gamma_0 \in \Gamma$ и интервала $l \geq c_{\delta}$ в точку $\gamma_1 \in \Gamma$.

Монотонные преобразования достаточной статистики. Любое монотонное преобразование $\psi[l(x_1, \dots, x_n)]$ достаточной статистики отношения правдоподобия также представляет достаточную статистику. В качестве такого преобразования достаточно принять $\psi(l) = \ln l$. Тогда байесовский алгоритм запишется в виде

$$\ln l(\bar{x}) \begin{cases} \geq \ln c_B & \text{при } \gamma_1 \\ < \ln c_B & \text{при } \gamma_0 \end{cases} \quad (8)$$

где c_B определяется согласно формуле

$$c_B = \frac{(\Pi_{01} - \Pi_{00}) \cdot p_0}{(\Pi_{10} - \Pi_{11}) \cdot p_1},$$

причем принимается решение γ_1 (отклоняется гипотеза H_0 и выборка относится к классу 2), если $\ln l(\bar{x}) \geq \ln c_B$, и принимается решение γ_0 (принимается гипотеза H_0 и выборка относится к классу 1), если $\ln l(\bar{x}) < \ln c_B$.

Байесовский риск. Минимальный средний риск (байесовский) определяется по формуле

$$K_B = p_0 + \Pi_{00} + p_1 \Pi_{10} + p_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) \alpha_B - p_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) (1 - \beta),$$

в которой условные вероятности ошибок α и β вычисляются согласно (1) и (2). Редукция данных, то есть отображение выборочного пространства на действительную полуось отношений правдоподобия, позволяет обойти неопределимые трудности, связанные с вычислением n -кратных интегралов (1) и (2). Так как использовании байесовского алгоритма событие $\bar{x} \in X_1$ эквивалентно событию $l(\bar{x}) \geq c_{\delta}$, а событие $\bar{x} \in$

X_0 - событию $l(\bar{x}) < c_\delta$, то в этом случае вероятности ошибок представляются однократными интегралами

$$\alpha_B = P\{l(\bar{x}) \geq c_\delta | H_0\} = \int_{c_\delta}^{\infty} f_l(z|H_0) dz = 1 - F_l(c_\delta | H_0),$$

$$\beta_B = P\{l(\bar{x}) < c_\delta | H_1\} = \int_0^{c_\delta} f_l(z|H_1) dz = F_l(c_\delta | H_1),$$

где $f_l(z|H_0)$, $F_l(z|H_0)$, $f_l(z|H_1)$, $F_l(z|H_1)$ - плотности вероятности и функции распределения статистики отношения правдоподобия при гипотезе H_0 и альтернативе H_1 соответственно. Если используется байесовский алгоритм (7), то

$$\alpha_B = 1 - F_{\ln l}(\ln c_B | H_0),$$

$$\beta_B = 1 - F_{\ln l}(\ln c_B | H_1),$$

где $F_{\ln l}(z|H_0)$, $F_{\ln l}(z|H_1)$ - функции распределения логарифма отношения правдоподобия при гипотезе H_0 и альтернативе H_1 соответственно и $p_0 + p_1 = 1$.

Таким образом, построен байесовский алгоритм классификации, использующий весь комплект априорных данных: функции правдоподобия, априорные вероятности гипотез, платежная матрица (матрица потерь). В случае неполной априорной информации байесовский алгоритм преобразуется в ряд специальных алгоритмов классификации, которые будут изложены ниже.

Минимаксный алгоритм. Предположим теперь, что априорные гипотезы H_0 и альтернатива H_1 неизвестны. Определим оптимальное минимаксное правило выбора решения, которое представляет специальный случай байесовского правила для наименее благоприятного априорного распределения гипотез. Минимаксный алгоритм проверки простой гипотезы против простой альтернативы предписывает сравнение отношения правдоподобия $l(\bar{x})$ с порогом c_M , которое определяется из трансцендентного уравнения относительно c_M :

$$\Pi_{00} + (\Pi_{01} - \Pi_{00})[1 - F_l(c_M | H_0)] = \Pi_{11} + (\Pi_{10} - \Pi_{11})F_l(c_M | H_1).$$

При $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$ уравнение несколько упрощается

$$\Pi_{01}[1 - F_l(c_M | H_0)] = \Pi_{10}F_l(c_M | H_1).$$

Алгоритм максимальной апостериорной вероятности. Предположим, что матрица потерь неизвестна. По формуле Байеса находим апостериорные вероятности гипотезы H_0 и альтернативы H_1 , если в результате наблюдения получена выборка \bar{x} :

$$P\{H_1 | \bar{x}\} = \frac{p_0 W(\bar{x} | H_0)}{p_0 W(\bar{x} | H_0) + p_1 W(\bar{x} | H_1)},$$

$$P\{H_0 | \bar{x}\} = \frac{p_1 W(\bar{x} | H_1)}{p_0 W(\bar{x} | H_0) + p_1 W(\bar{x} | H_1)},$$

откуда

$$\frac{P\{H_1|\bar{x}\}}{P\{H_0|\bar{x}\}} = l(\bar{x}) \frac{p_1}{p_0}. \quad (9)$$

Установим следующее правило выбора решения. Принимается альтернатива H_1 , если $P\{H_1|\bar{x}\} \geq P\{H_0|\bar{x}\}$ (решение γ_1), и отвергается эта гипотеза, если $P\{H_0|\bar{x}\} > P\{H_1|\bar{x}\}$ (решение γ_0). Используя (9), запишем оптимальный алгоритм по критерию максимума апостериорной вероятности в виде

$$l(\bar{x}) \begin{cases} \geq \frac{p_0}{p_1} & \text{при } \gamma_1 \\ < \frac{p_0}{p_1} & \text{при } \gamma_0 \end{cases}$$

или

$$\ln l(\bar{x}) \begin{cases} \geq \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) & \text{при } \gamma_1 \\ < \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) & \text{при } \gamma_0 \end{cases}. \quad (10)$$

Таким образом, в этом случае оптимальный алгоритм простой гипотезы H_0 сводится к вычислению отношения правдоподобия и сравнения его с величиной p_0/p_1 . Сравнивая формулы (10) и (8) можно заметить, что рассматриваемый алгоритм совпадает с байесовским, когда $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0, \Pi_{01} = \Pi_{10} = 1$. При этом средний риск

$$R_\delta = p_0\alpha_\delta + p_1\beta_\delta$$

равен априорной вероятности ошибочного решения (любого рода). Следовательно, алгоритм максимальной априорной вероятности минимизирует априорную вероятность ошибок.

Алгоритм максимального правдоподобия. Если известны и матрица потерь и априорные вероятности гипотезы H_0 и альтернативы H_1 , то можно применить критерий максимального правдоподобия, согласно которому при наблюдении выборки $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимается та из гипотез, которой соответствует большее значение функции правдоподобия выборки. Принимается гипотеза H_0 , если $W(\bar{x}|H_0) > W(\bar{x}|H_1)$ (решение γ_0) и отвергается эта гипотеза, если $W(\bar{x}|H_1) \geq W(\bar{x}|H_0)$ (решение γ_1). Таким образом, оптимальный алгоритм максимального правдоподобия записывается в виде

$$l(\bar{x}) \begin{cases} \geq 1 & \text{при } \gamma_1 \\ < 1 & \text{при } \gamma_0 \end{cases} \text{ или } \ln \bar{x} \begin{cases} \geq 0 & \text{при } \gamma_1 \\ < 0 & \text{при } \gamma_0 \end{cases}.$$

Алгоритм, оптимальный по критерию Неймана-Пирсона. Еще один подход к оптимизации алгоритма принятия решения при отсутствии априорной информации о потерях и вероятностях гипотез указывает критерий Неймана-Пирсона. Согласно этому критерию оптимальный алгоритм обеспечивает минимально возможную вероятность β ошибок второго рода при условии, что вероятность ошибки первого рода не больше заданного значения α . Тогда задача синтеза оптимального алгоритма принятия решения по указанному критерию состоит в определении минимума функционала

$$\Phi = \beta + c\alpha, \quad (11)$$

в котором вероятность β зависит от правила выбора решения, вероятность α фиксирована и c - неопределенный множитель Лагранжа. Сравнивая (11) с (6) замечаем, что функционал Φ совпадает со средним риском при $p_1 = p_0 = \frac{1}{2}$, $\Pi_{00} =$

$\Pi_{11} = 0, \Pi_{10} = 2, \Pi_{01} = 2c$. Тогда из (7) находим следующий оптимальной по критерию Неймана-Пирсона алгоритм проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1 :

$$l(\bar{x}) \begin{cases} \geq c & \text{при } \gamma_1 \\ < c & \text{при } \gamma_0 \end{cases}.$$

Порог c находим из граничного условия (заданного значения вероятности ошибки первого рода)

$$P\{l(\bar{x}) \geq c | H_0\} = \alpha, \text{ или } 1 - F_l(c | H_0) = \alpha.$$

В рассматриваемом случае вместо статистики отношения правдоподобия можно использовать ее логарифм

$$\ln l(\bar{x}) \begin{cases} \geq \ln c & \text{при } \gamma_1 \\ \leq \ln c & \text{при } \gamma_0 \end{cases}$$

и

$$P\{\ln l(\bar{x}) \geq \ln c | H_0\} = \alpha, \text{ или } 1 - F_{\ln l}(\ln c | H_0) = \alpha.$$

Минимальная по критерию Неймана-Пирсона вероятность ошибки второго рода

$$\beta = P\{l(\bar{x}) < c | H_1\} = F_l(c | H_1)$$

или

$$\beta = P\{\ln l(\bar{x}) < \ln c | H_1\} = F_{\ln l}(\ln c | H_1).$$

Рассмотренные алгоритмы принятия решений предполагают известными законы распределения $W(\bar{x}|H_0)$ и $W(\bar{x}|H_1)$, определяющие вероятность принадлежности выборки \bar{x} классам 1 или 2 соответственно. В случае, если распределения неизвестны, то исходной информацией является совокупность результатов наблюдений (выборочных значений) соответствующих классам 1 и 2 соответственно: $\bar{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_{m_1}^1)$, $\bar{x}^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_2}^2)$. В этом случае, на основании этих наблюдений находятся выборочные распределения $\hat{W}(\bar{x}|H_0)$, $\hat{W}(\bar{x}|H_1)$ и найденные распределения применяются в соответствующих алгоритмах принятия решений вместо $W(\bar{x}|H_0)$, $W(\bar{x}|H_1)$.

Более подробно данный подход будет рассмотрен во второй части статьи, где приведены поясняющие примеры (расчеты).

Заключение

В работе изложены учебные материалы для студентов технических специальностей по основам статистической теории распознавания образов - выборочное пространство, вероятностная мера на пространстве наблюдений, байесовский и Неймана-Пирсона алгоритмы, а также построение других оптимальных алгоритмов принятия решений. Может служить учебно-методическим пособием студентам, изучающим методы распознавания образов, а также полезна специалистам, занимающимся разработкой систем распознавания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.
2. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. — М.: Радио и связь, 1986. — 254 с.
3. Местецкий Л.М. Математические методы распознавания образов: Курс лекций – Москва, МГУ, 2004 – 90 с.

Alexander F. Gribov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alexandr-gribov@list.ru

Igor K. Krasnov,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

igorkrsnv@yandex.ru

Denis N. Sokolov,

Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

sokolov_den@outlook.com

Methodology of presentation of the theory of pattern recognition to students of non-mathematical specialties

Abstract. The article considers one of the possible presentations of the basics of pattern recognition theory to students of the course, the relevance of which is due to the widespread use of the theory in information processing problems, medicine, sociology and other fields of science and technology. Such a course is included in the curricula of the masters of the Faculty of the Bauman Moscow State Technical University, but can also be used in the process of teaching students of various specialties, including non-mathematical (technical), who have mastered the basics of probability theory and statistics. The paper considers various algorithms for constructing optimal solutions: Bayesian, maximum likelihood, optimal by the Neumann-Pearson criterion and others. The work may be of interest not only to students of relevant specialties, but also to specialists involved in the development of recognition systems.

Keywords: sample space, solution space, Bayesian algorithm, Neumann-Pearson criterion.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ»: СОСТАВЛЕНИЕ ВАРИАНТОВ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Аннотация

Для проведения текущих и рубежных контрольных работ, выдаче типовых расчётов у преподавателей возникает необходимость составления большого числа вариантов задач различной сложности по их решению в зависимости от учебных планов различных специальностей. В данной работе предлагается методика преподавания темы, позволяющая с помощью единых технических приёмов упростить составление большого числа вариантов для контрольной работы по конформным отображениям. Составленные варианты можно использовать и для соответствующих типовых расчётов. В работе также указывается, как можно усложнять (или упрощать) варианты в зависимости от конкретных условий проведения различных типов контрольных работ.

Ключевые слова

Конформное отображение, дробно-линейное отображение, отображения, осуществляемые элементарными функциями

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.obuhov@outlook.com

Введение

При проведении текущих, рубежных контрольных работ, типовых расчетов желательно, чтобы каждый студент выполнял индивидуальный вариант (в противном случае преподаватель получит для проверки некоторое множество работ, естественным образом распадающееся на классы эквивалентности, причём количество таких классов будет совпадать с количеством предложенных вариантов). Сократить время на составление большого числа вариантов можно с помощью простых методических приёмов, которые подробно рассматриваются ниже.

Методология и результаты исследования

1. Теоретические сведения

Теоретические сведения, относящиеся к рассматриваемым ниже вопросам можно извлечь из первых глав книги [1].

Через \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$ будем обозначать соответственно комплексную плоскость и расширенную комплексную плоскость (т.е. комплексную плоскость, к которой присоединена бесконечно удалённая точка $Z = \infty$).

Определение. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, и пусть точка Z_0 множества E является его предельной точкой. Функция f называется обобщённо-непрерывной в точке Z_0 , если

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in E} f(Z) = f(Z_0).$$

В этом определении допускаются равенства $Z_0 = \infty$ и $f(Z_0) = \infty$. Важную роль в теории конформных отображений играет формулируемая ниже теорема о взаимно однозначных и непрерывных отображениях.

Теорема. Пусть G – область (т.е. связное открытое множество) расширенной комплексной плоскости; $f: G \rightarrow D$, где $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, причём функция f взаимно однозначно отображает G на D и является обобщённо-непрерывной функцией в каждой точке области G . Тогда D также будет областью, и обратная функция $f^{-1}: D \rightarrow G$ будет обобщённо-непрерывной на D . Если предположить дополнительно, что f определена и на границе ∂G области G , и при этом функция f обобщённо-непрерывна на замкнутой области $\overline{G} = G \cup \partial G$, то f отображает границу ∂G области G на границу ∂D области D .

В кратких курсах ТФКП эта теорема обычно не доказывается (или доказывается при некоторых дополнительных предположениях).

Для решения задач контрольной работы, варианты которой мы будем составлять, нам потребуются следующие свойства элементарных функций комплексного переменного:

1) при отображении $w = \frac{1}{z}$ образом прямой (или окружности), проходящей через начало координат является прямая на плоскости w ;

2) функция $w = e^z$ отображает полосу $0 < \text{Im } z < \pi$ плоскости z на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ плоскости w ;

3) функция $w = \cos z$ отображает полуполосу $-\pi < \text{Re } z < 0, \text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость плоскости w ;

4) однозначная непрерывная ветвь функции

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg } z}{2} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{2} \right), 0 < \text{Arg } z < 2\pi \quad (1)$$

отображает плоскость z с разрезом по неотрицательной части вещественной оси на верхнюю полуплоскость плоскости w ;

5) функция $w = z^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{\pi}{\alpha} \ln z}$ отображает область $0 < \text{arg } z < \alpha, 0 < \alpha < \pi$, на верхнюю полуплоскость плоскости w ($\ln z$ – главное значение логарифма);

6) функция

$$w = \sqrt{z^2 + h^2} \quad (2)$$

отображает верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с разрезом по отрезку, соединяющему начало координат с точкой $ih, h > 0$, на верхнюю полуплоскость плоскости w ; под квадратным корнем здесь понимается однозначная функция, определяемая равенством (1).

Во всех задачах контрольной работы, варианты которой мы будем составлять, требуется некоторую область плоскости z отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ плоскости w . Определение конформного отображения мы не приводим, так как в разных руководствах по ТФКП такие определения могут не совпадать (смотри, например, определение конформного отображения в [2] стр. 41-42 и определение этого же понятия в [3] стр. 115).

В задачах контрольной работы под «конформным отображением» фактически понимается такое взаимно однозначное отображение области G плоскости Z на верхнюю полуплоскость плоскости w , при котором в каждой точке $Z \in G$ существует производная $f'(Z) \neq 0$. Нетрудно проверить, что все отображения, указанные в пунктах 1) - 6) являются конформными в этом последнем смысле.

2. Задачи контрольной работы

Первая задача является «утешительной»; её должны решить все студенты (если они вообще готовились к контрольной работе). Она может, например, иметь такой вид: требуется отобразить конформно на верхнюю полуплоскость полуполосу $a < \operatorname{Re} Z < b, \operatorname{Im} Z > c$. Можно усложнить задачу, сообщив дополнительно, что полоса повернута на какой-либо угол φ по (или против) часовой стрелки относительно точки $a + ic$ (или относительно начала координат).

Аналогичные задачи без труда составляются и для других случаев, указанных в пунктах 2) - 6) предыдущего раздела. При этом в зависимости от конкретной ситуации (учитывать время, отведённое на выполнение контрольной работы, а также наличие или отсутствие теоретических вопросов) следует считать угол φ равным нулю (или отличным от нуля). Для случая, когда используется функция $w = \sqrt{Z^2 + h^2}$, следует, по-видимому, всегда считать, что $\varphi = 0$.

Во второй задаче область G , которую требуется отобразить конформно на верхнюю полуплоскость плоскости w , может быть трёх типов:

- 1) $|Z - Z_0| > r_0, \operatorname{Re} Z < r_0 + \operatorname{Re} Z_0$;
- 2) $|Z - Z_1| > r_1, |Z - Z_2| > r_2, |Z_1 - Z_2| = r_1 + r_2$;
- 3) $|Z - Z_1| > r_1, |Z - Z_2| < r_2, |Z_1 - Z_2| = r_2 - r_1, r_2 > r_1$.

В первом случае границей ∂G области G служит объединение окружности и касающейся её прямой. Во втором и третьем случаях граница ∂G является объединением двух касающихся друг друга окружностей (внутренним или внешним образом). Все три типа задач решаются одним и тем же приёмом: точку касания с помощью сдвига перемещают в начало координат и применяют отображение $w = \frac{1}{Z}$.

С помощью теоремы о взаимно однозначных и непрерывных отображениях, а также используя свойство функции $w = \frac{1}{Z}$, указанное в пункте 1) предыдущего раздела, нетрудно установить, что в результате (возможно потребуется ещё поворот и растяжение или сжатие) мы получим вертикальную полосу вида $0 < \operatorname{Im} w < \pi$; затем следует применить отображение $w_1 = e^{w_1}$, что и приведёт к требуемому результату.

Аналогично решаются и задачи типов 2) и 3). Студентов следует призвать решать вторую задачу именно так, как указано выше, поскольку в случае, когда все студенты решают задачи одним и тем же методом, значительно сокращается время на проверку работ. Здесь не требуется также подробно знать свойства дробно - линейных преобразований, что увеличивает количество студентов, решивших на контрольной работе задачи этого типа. Это замечание относится и к последующим задачам. Как и в случае первой задачи здесь также возможно усложнение с помощью подключения поворота исходной области G .

Рассмотрим третью задачу. Здесь в качестве области G предлагается внутренность круга с разрезом по какому-либо отрезку, соединяющему некоторую точку этой внутренности с точкой на границе круга. Другой тип задач получается, если рассмотреть внешность круга и провести разрез по какому-либо отрезку, соединяющему некоторую точку этой внешности с точкой на граничной окружности. В обоих случаях упомянутый отрезок должен быть горизонтальным или вертикальным (если, конечно, не требуется получить усложнённый вариант).

Эти два типа задач решаются одним и тем же приёмом. С помощью отображения сдвига точка пересечения отрезка с граничной окружностью перемещается в начало координат, а затем применяется отображение $w = \frac{1}{z}$. В результате получается область (возможно с точностью до поворота на 90°), которая рассматривается в шестом пункте предыдущего раздела, и которая отображается на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

Для четвёртой задачи выбираем область G чуть более сложной. При пересечении двух окружностей образуются так называемые луночки. Пусть область G есть одна из таких луночек. Можно также рассмотреть различные сегменты круга – их тоже можно взять в качестве области G . И эти типы задач решаются аналогично предыдущим: одна из точек пересечения окружностей (или одна из точек пересечения окружности и прямой в случае сегмента круга) перемещается в начало координат, и затем применяется отображение $w = \frac{1}{z}$. В результате область G конформно отображается на область w , границей которой служит объединение двух лучей, исходящих из одной точки. Осуществив сдвиг и поворот (если нужно) получим область, которая отображается на верхнюю полуплоскость с помощью степенной функции (см. пункт 5) предыдущего раздела).

Можно предложить и такую область:

$$|z - z_1| > r_1, |z - z_2| < r_2, r_2 > r_1, |z_1 - z_2| = r_2 - r_1, \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} z_1.$$

Здесь предполагается дополнительно, что отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2 , параллелен вещественной оси. И эта задача решается тем же приёмом, что и все предыдущие: точка касания окружностей перемещается в начало координат и применяется отображение $w = \frac{1}{z}$. После этого получается полуполоса, которая преобразуется так, чтобы можно было использовать функцию $w_1 = \cos z$ (смотри пункт 3) предыдущего раздела).

Из вышесказанного ясно, как составить вариант из четырёх задач. Он может выглядеть,

например, так:

Вариант 13.

Отобразить конформно указанную область G на верхнюю полуплоскость плоскости w .

1) $G : \operatorname{Re} z > -1, \sqrt{13} < \operatorname{Im} z < 2\sqrt{13}$.

2) $G : |z - 1 - 3i| > 1, \operatorname{Im} z < 4$.

3) Область G есть внутренность круга $|z - 13 - i| < 13$ с разрезом по отрезку, соединяющему точку i с точкой $1 + i$.

4) $G : |z - 1 - 13i| < 1, |z - 2 - 13i| < 1$.

Обычно четырёх задач достаточно, так как в контрольную работу часто включают также и теоретические вопросы. Но если по каким-либо причинам требуется пятая задача то, не выходя за рамки предложенных типов задач, можно задачу 3) предложить в качестве таковой, исключив её из числа задач, предлагаемых под номером 4.

Заключение

Согласно изложенной методике преподавания темы предложены единые технические приёмы решения различных типов задач по конформным отображениям. Они позволяют упростить составление большого числа индивидуальных вариантов для контрольных работ и типовых расчётов по конформным отображениям различной сложности в зависимости от конкретных условий их проведения.

Данная работа будет полезна для студентов и преподавателей, ведущих семинары по конформным отображениям. Студентов следует ознакомить с выше изложенными техническими приёмами решения задач (основанных на использовании свойств функции $w = \frac{1}{z}$) и настоятельно посоветовать им использовать именно этот единый подход при выполнении всех задач контрольной работы или типового расчёта.

Для подготовки к контрольной работе можно также порекомендовать книги [4,5] из списка источников.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Маркушевич А.И. Краткий курс аналитических функций. М.: Наука, 1978.
2. Маркушевич А.И. Указ. соч.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
4. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
5. Теория и практика конформных отображений : учеб. пособие / А.Н. Канатников, Е.Е. Красновский, В.Д. Морозова, К.Ю. Федоровский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.

Pavel L. Ivankov,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ivankovpl@mail.ru

Victor P. Obuhov,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

v.obuhov@outlook.com

Methods of teaching theme “Conformal mappings”: compiling variants for various types of tests

Abstract. For carrying out routine tests and papers, giving out model assignments the teachers should compile many variants of problems of different complexity in accordance with the curriculums of various specializations. In this paper we propose methods of teaching the theme which makes it possible with unanimous technique to simplify the compilation of many variants for the test on conformal mappings. The compiled variants one can use for corresponding model assignments. In the paper we show how to complicate (or to simplify) the variants in accordance with the specific character of maintaining different types of the tests.

Keywords: conformal mapping, linear fractional mapping, mappings by elementary functions.

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ: ПРЕПОДАВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СРЕДЫ MATLAB

Аннотация

Одним из наиболее перспективных направлений развития современной теории управления является использование искусственных нейронных сетей (ИНС). Использование ИНС позволяет внести гибкость в стратегию управления, сократить или вовсе избавиться от этапа аналитического построения математической модели объекта управления, упрощает реализацию адаптивных алгоритмов. Среда разработки Matlab содержит средства для работы с ИНС, которые могут быть использованы для синтеза и моделирования нейросетевых алгоритмов управления. Целью статьи является изложение конспекта возможного занятия со студентами по означенной тематике. Настоящая статья посвящена методическим вопросам изучения практики применения этих средств для моделирования процессов управления.

Ключевые слова

нейронные сети, математическое моделирование, Matlab

АВТОРЫ

Кавинов Алексей Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Введение

Искусственные нейронные сети уже давно успешно применяются при решении задач управления динамическими системами. Нейросетевые алгоритмы позволяют заменять сложные аналитические выкладки компьютерными вычислениями, обходя процедуру построения математической модели объекта управления. Изучение этих алгоритмов удобно осуществлять на примерах, рассматривая программы, моделирующие процессы управления в простых системах. Удобно и просто писать такие программы в среде разработки инженерных приложений Matlab с пакетом расширения Deep learning toolbox (в ранних версиях Matlab - Neural Network Toolbox)[1-5].

В настоящей статье мы на основании опыта преподавания авторами в МГТУ им. Н.Э.Бакмана курса «Программные средства математического моделирования» покажем, как можно изложить материал занятия по обозначенной теме. Рассмотрим два широко известных способа нейросетевого управления, для каждого способа приведём программы, моделирующие процессы обучения нейронных сетей и управления при помощи обученных сетей.

Данная статья является продолжением статьи [6], из которой читатель может почерпнуть знания о базовых средствах пакета Deep learning toolbox.

Методология и результаты исследования

Все рассматриваемые в настоящей статье методы в качестве первого шага подразумевают построение нейросетевой модели объекта управления. Такое построение может происходить как онлайн, в режиме реального времени в процессе управления системой, так и в оффлайн-режиме, подразумевающим серию экспериментов с системой или её моделью при различных управлениях. Результаты этих экспериментов служат исходными данными для обучения нейронной сети, которая в дальнейшем играет роль модели объекта управления. Адаптивный, он же онлайн-вариант управления, привлекателен тем, что позволяет совместить процесс управления с процессом обучения ИНС, однако в методических целях лучше начать знакомство с нейросетевыми средствами управления с оффлайн вариантами алгоритмов. Они проще в реализации и понимании, не требуют много времени на «раскачку» сети в процессе обучения, совмещённого с управлением.

Чтобы построить нейросетевую модель динамической системы с управлением, необходимо обучить ИНС прогнозированию выхода системы при различных значениях состояний и входов. Систему с непрерывным временем при этом надо дискретизировать, выбрав в качестве кванта времени достаточно малый в масштабах системы интервал. Если вектор состояния системы полностью известен в процессе управления, то можно в качестве входных параметров сети выбрать вектор состояния системы и управление в течение следующего кванта времени, а в качестве выхода сети - вектор состояния в следующий момент времени. В случае, когда вектор состояния системы известен не полностью, необходимость в использовании наблюдателей состояния отсутствует, т.к. можно обучить ИНС прогнозировать выход системы по значениям состояния и входа за несколько предшествующих текущему моментов времени.

Авторам видится целесообразным не обрушивать на слушателей весь материал целиком, а привести после изложения приведённой выше информации пример в виде программы на языке MATLAB, прогнозирующей эволюцию простой динамической системы. В качестве такой системы выберем систему «перевернутый маятник» (см. рис. 1).

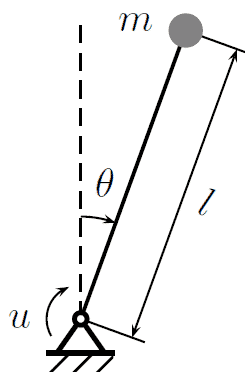


Рис. 1

Система «перевернутый маятник» состоит из точечной массы m , закреплённой на стержне длины l , другой конец которого прикреплен к шарниру с горизонтальной осью вращения, обладающему коэффициентом вязкого трения μ . Через θ обозначен угол отклонения стержня от вертикального положения, через ω - угловая скорость вращения. Управление системой осуществляется приложением момента u . Динамику системы можно описать дифференциальными уравнениями [7]

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{\mu}{ml^2}\omega + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{u}{ml^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Будем предполагать, что известен полный вектор состояния (θ, ω) системы. Задача прогнозирующей нейронной сети будет заключаться в определении состояния системы (1) в момент времени $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ по известному состоянию в момент времени t_i , т.е. $(\theta(t_i), \omega(t_i))$ в предположении, что управление на промежутке времени $[t_i, t_{i+1}]$ постоянно и равно u_i . Для того, чтобы сеть смогла решить эту задачу, надо подготовить для неё достаточно данных с помощью многократного численного интегрирования системы (1) со случайными значениями $\theta(t_i)$, $\omega(t_i)$ и u_i из допустимого диапазона.

Ниже приведена часть программы на MATLAB, осуществляющая обучение прогнозирующей сети. Значение кванта времени при дискретизации выберем как $\Delta t = 0.1$. Параметры системы выбраны следующим образом: $m = 1$; $l = 0.5$; $g = 9.81$; $\mu = 0.01$.

```
close all
m= 1; l= 0.5; g= 9.81; f= 0; mu= 0.01;

function yt= rp(t,y) % правая часть системы
    teta= y(1); omega= y(2);
    yt= [ omega; -mu*omega/m/l^2+g/l*sin(teta)+f/m/l^2];
end

k= 4000; % количество точек для генерации данных обучения
dt= 0.1; % квант времени
% подготовка данных для обучения
data_in= [randn(3,k/4)*3 randn(3,k/4)*1 ...
    randn(3,k/4)*0.1 randn(3,k/4)*0.01 ];
data_out= [];
for i=1:k
    f= data_in(3,i);
    [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],data_in(1:2,i));
    data_out(:,i)= y(end,:);
end
% обучение
net= feedforwardnet(40);
net.trainParam.max_fail = 18;
net= train(net,data_in,data_out);
```

Поясним некоторые моменты работы программы. В матрицу `data_in` записываются случайные числа с нормальным распределением с нулевым матожиданием и различной дисперсией. Это нужно для того, чтобы нейронная сеть хорошо (с малой относительной ошибкой) прогнозировала поведение системы при разных масштабах

отклонений состояния от положения равновесия. Напомним, что входные данные при обучении сети структурированы по столбцам: каждый столбец соответствует одному элементу обучающей выборки. В цикле с помощью функции `ode45` происходит решение серии задач Коши для системы (1) на отрезке времени Δt со случайными начальными условиями для случайных значений управления из созданной ранее матрицы `data_in`. Результаты решения заносятся в матрицу `data_out` по столбцам в порядке, соответствующем расположению входных данных в матрице `data_in`. Далее обе эти матрицы используются для обучения сети.

Для прогнозирования состояния создаётся двухслойная ИНС прямого распространения [1] с 40 нейронами в скрытом слое и двумя нейронами в выходном слое. Значение параметра `max_fail` устанавливается равным 18 для более качественного обучения сети.

График изменения ошибки при обучении сети выглядит следующим образом:

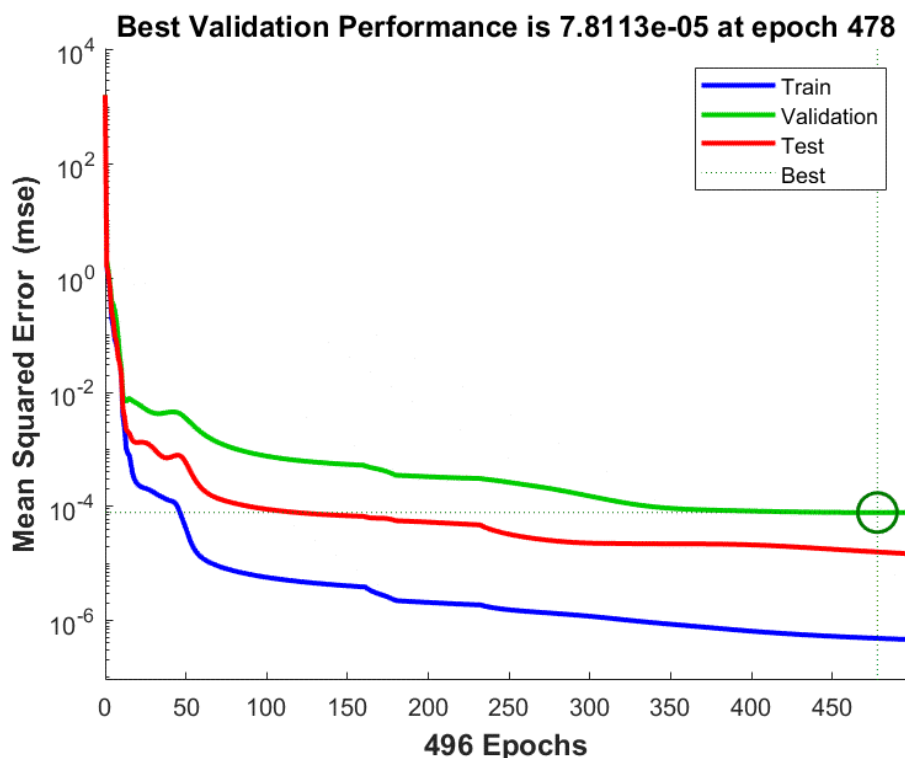


Рис. 1. Изменение ошибки в процессе обучения прогнозирующей ИНС

После того, как нейронная сеть обучена, можно приступить к управлению системой (1). Выберем в качестве цели управления стабилизацию верхнего положения маятника, т.е. синтез управляющего воздействия, возвращающего маятник в верхнее положение равновесия из отклонённого состояния с ненулевыми углом θ и угловой скоростью ω . Для решения этой задачи потребуем, чтобы норма состояния системы уменьшалась под воздействием управления, вычисляемого нейронной сетью. Можно сказать, что мы имеем две цели управления - глобальную (приведение маятника в верхнее положение) и локальную, достигаемую на каждом шаге (минимизация нормы состояния). То, что успешное достижение локальных целей управления приведёт, в конечном счёте, к достижению глобальной цели, не очевидно и не доказано; это лишь наше предположение, впрочем, верное. Не очевидно и то, что на каждом шаге существует управление, уменьшающее норму, и то, что оно может быть найдено с помощью используемых алгоритмов управления. Доказательство этих фактов для какой-то реальной системы с управлением будет, скорее всего, слишком сложным. Если бы оказалось, что минимизация нормы невозможна или не даёт нужного результата, надо

было бы искать другую целевую функцию, что без каких-то дополнительных сведений может быть непросто.

Задача управления динамической системой часто ставится в другом ключе: дана некая траектория, которой должно следовать состояние системы, и требуется с помощью управления обеспечить движение по этой траектории. Здесь возникает проблема, аналогичная предыдущему случаю: чтобы найти траекторию, движение по которой возможно и осуществимо имеющимися возможностями управления, необходимы некоторые «продвинутые» сведения о системе. Если их нет, то результат управления не гарантирован; с другой стороны, если такие сведения имеются, то их может быть достаточно для разработки специализированных для рассматриваемой системы алгоритмов управления, которые, вероятно, превзойдут по своим характеристикам нейросетевые алгоритмы. Это есть «обратная сторона» нейросетевого управления; насколько она снижает его привлекательность, зависит от конкретной системы.

Перейдём к описанию алгоритма управления с прогнозирующей моделью. Его можно описать следующим образом. Для текущего состояния системы $(\theta(t_i), \omega(t_i))$ решается задача оптимизации, целью которой является достижение на следующем этапе состояния $(\theta(t_{i+1}), \omega(t_{i+1}))$ с минимальной целевой функцией. В нашей задаче такой функцией будет, как уже было сказано, являться норма вектора состояния:

$$u_i = \underset{u}{\operatorname{arg\,min}} \| \operatorname{net}(\theta(t_i), \omega(t_i), u) \| \quad (2)$$

В течение следующего кванта времени управление фиксируется равным заданному значению, по истечении же его всё повторяется вновь.

Ниже приведена та часть программы, в которой происходит моделирование процесса стабилизации системы (1) управлением с прогнозирующей моделью с помощью обученной ранее ИНС.

```
x= [-0.7 0.2]; % начальная точка
figure; axes;
hold on
max_time= 1200;
for i=1:max_time
    u= find_u(x); % Находим управление
    x= nextpt(x,u); % Интегрируем систему на промежутке dt
    tstart= (i-1)*dt; % Рисуем график на текущем промежутке
    plot(tstart+t,y(:,1),'b-',tstart+t,y(:,2),'r-');
end

grid on
xlabel 't,c'
ylabel '\omega,\theta'

function xn= nextpt(x,u)
    f= u;
    [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],x);
    xn= y(end,:);
end

function u= find_u(xstart)
    next_square= @(u)norm(net([xstart,u]')).*[1;1]);
    u= fminbnd(next_square,-5,5);
end
```

Функция `find_u` находит решение задачи оптимизации (2) для заданной начальной точки `xstart`. Функция `nextpt` вычисляет движение системы на следующем промежутке времени.

Заметим, что управление, получаемое по этой схеме, будет ограниченным по процедуре его нахождения. Когда в функции `find_u` мы вызываем для решения задачи одномерной оптимизации на отрезке функцию `fminbnd`, мы передаём ей в качестве аргумента границы этого отрезка (в нашем случае это -5 и 5). Если бы мы хотели расширить диапазон возможного управления, следовало бы не только изменить эти значения, но и внести изменения в данные для обучения прогнозирующей ИНС так, чтобы они включали этот диапазон.

Результат работы программы показан на рисунке 2. Синим цветом на рисунке показано изменение угла поворота маятника в процессе стабилизации, красным - изменение угловой скорости.

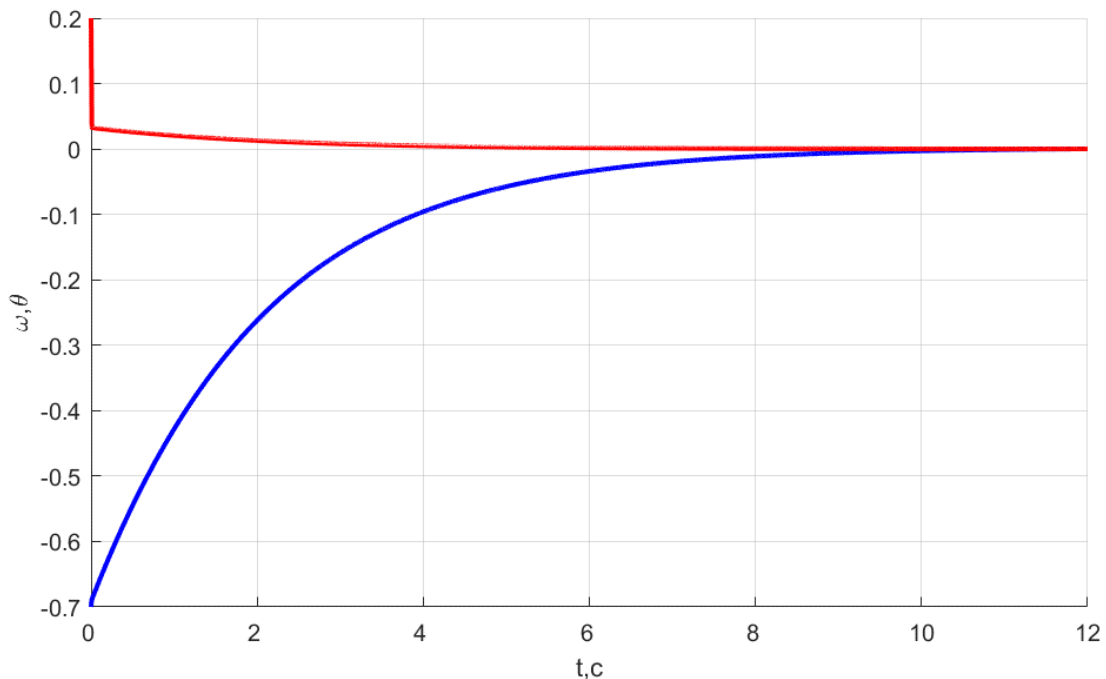


Рис.2. Результат моделирования процесса управления с прогнозирующей моделью

Метод управления с прогнозирующей моделью обладает тем недостатком, что в процессе управления на каждом промежутке времени необходимо искать решение задачи оптимизации (2). Избежать излишних вычислений и, следовательно, затрат времени, позволяет метод управления с эталонной моделью, являющийся развитием метода управления с прогнозирующей моделью. Идея метода состоит в том, чтобы вместо решения задач оптимизации в процессе управления использовать для вычисления управления нейронную сеть, обученную искать решения этих задач. Хотя такой подход и требует суммарно большего объёма вычислений, чем метод с прогнозирующей моделью, но вычисление управления по известному состоянию происходит значительно быстрее, что важно при управлении системами с быстро протекающими процессами.

Ниже приведена часть программы, в которой происходит моделирование процесса стабилизации системы (1) управлением с эталонной моделью с помощью обученной ранее ИНС. Первая часть программы, в которой происходит обучение прогнозирующей сети, совпадает с приведённой ранее для управления с прогнозирующей моделью, поэтому здесь не приводится.

```

% первая нейронная сеть обучена
% обучим вторую сеть
data_in= [randn(2,k/2)*0.1 randn(2,k/2)*0.01];
data_out= [];
for i=1:k
    data_out(:,i)= find_u(data_in(1:2,i));
end
net2= feedforwardnet(40);
net2.trainParam.max_fail = 28;
net2= train(net2,data_in,data_out);

x= [-0.3 0.2]; % начальная точка для моделирования
figure; axes; hold on
for i=1:1200
    u= net2(x');
    x= nextpt(x,u);
    tstart= (i-1)*dt;
    plot((tstart+t)*dt,y(:,1),'b-',...
        (tstart+t)*dt,y(:,2),'r-');
end

grid on
xlabel 't,c'
ylabel '\omega,\theta'

function xn= nextpt(x,u)
    f= u;
    [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],x);
    xn= y(end,:);
end

function u= find_u(xstart)
    next_square= @(u)norm(net([xstart,u]')).*[1;1]);
    u= fminbnd(next_square,-2,2);
end

function yt= rp(t,y)
    teta= y(1); omega= y(2);
    yt= [ omega; -mu*omega/m/l^2+g/l*sin(teta)+f/m/l^2];
end

```

Главное отличие этого кода от соответствующего кода для управления с прогнозирующей моделью кроется в строчке `u= net2(x')`. Вместо того, чтобы на каждом шаге управления вызывать функцию `find_u`, решающую задачу оптимизации, мы вычисляем выход ИНС, заранее обученной по значениям этой функции на обучающей выборке.

Результат работы программы показан на рисунке 3. Синим цветом на рисунке показано изменение угла поворота маятника в процессе стабилизации, красным - изменение угловой скорости.

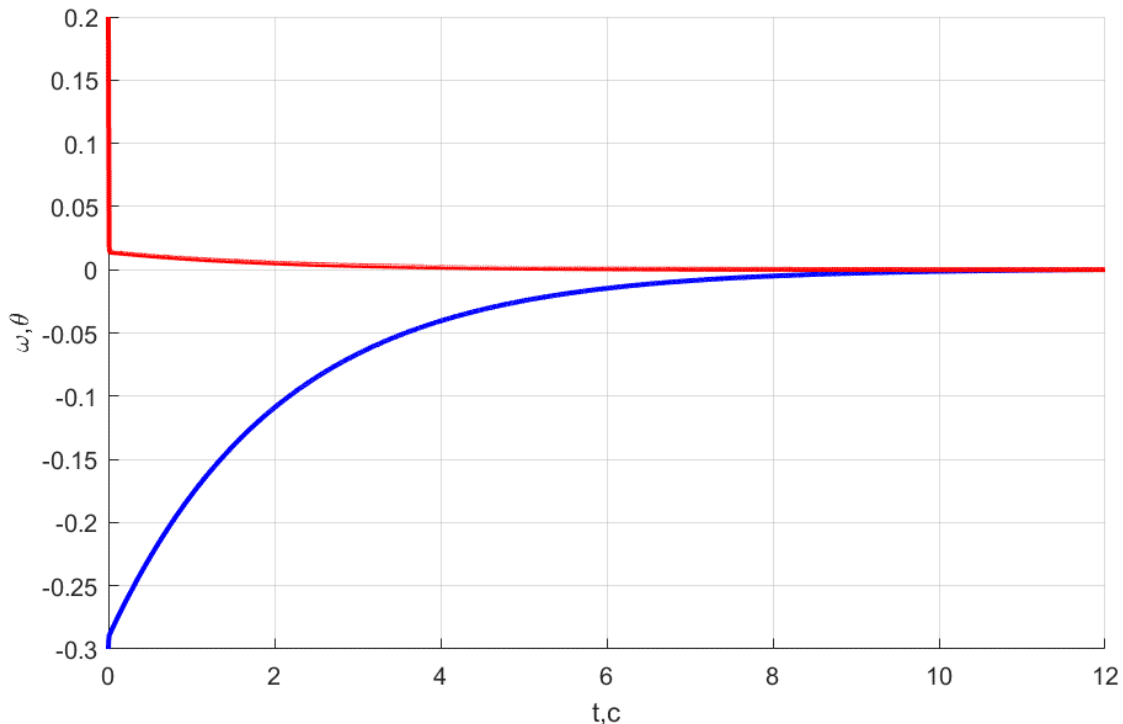


Рис.3. Результат моделирования процесса управления с эталонной моделью

В качестве приложения к статье приведём полный текст программ.

```
function pendulum_mpc
% Model Predictive Control
close all
m= 1; l= 0.5; g= 9.81; f= 0; mu= 0.01;

function yt= rp(t,y) % правая часть системы
    teta= y(1); omega= y(2);
    yt= [ omega; -mu*omega/m/l^2+g/l*sin(teta)+f/m/l^2];
end

k= 4000; % количество точек для генерации данных обучения
dt= 0.1; % квант времени
% подготовка данных для обучения
data_in= [randn(3,k/4)*3 randn(3,k/4)*1 ...
    randn(3,k/4)*0.1 randn(3,k/4)*0.01 ];
data_out= [];
for i=1:k
    f= data_in(3,i);
    [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],data_in(1:2,i));
    data_out(:,i)= y(end,:);
end
% обучение
net= feedforwardnet(40);
net.trainParam.max_fail = 18;
net= train(net,data_in,data_out);
```

```

% нейронная сеть обучена
% теперь будем управлять
% отрезками длины dt
x= [-0.7 0.2]; % начальная точка
figure; axes;
hold on
max_time= 1200;
for i=1:max_time
    u= find_u(x); % Находим управление
    x= nextpt(x,u); % Интегрируем систему на промежутке dt
    tstart= (i-1)*dt; % Рисуем график на текущем промежутке
    plot(tstart+t,y(:,1),'b-',tstart+t,y(:,2),'r-');
end

grid on
xlabel 't,c'
ylabel '\omega,\theta'

function xn= nextpt(x,u)
    f= u;
    [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],x);
    xn= y(end,:);
end

function u= find_u(xstart)
    next_square= @(u)norm(net([xstart,u]')).*[1;1];
    u= fminbnd(next_square,-5,5);
end

end

function pendulum_mrc
    % Model Reference Control
    close all
    m= 1; l= 0.5; g= 9.81; f= 0; mu= 0.01;

    k= 4000; % количество точек для генерации данных обучения
    dt= 0.1; % квант времени
    % подготовка данных для обучения
    data_in= [randn(3,k/4)*3 randn(3,k/4)*1 ...
        randn(3,k/4)*0.1 randn(3,k/4)*0.01 ];
    data_out= [];
    for i=1:k
        f= data_in(3,i);
        [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],data_in(1:2,i));
        data_out(:,i)= y(end,:);
    end
    net= feedforwardnet(40);
    net.trainParam.max_fail = 28;
    net= train(net,data_in,data_out);
    % первая нейронная сеть обучена

```

```

% обучим вторую сеть
data_in= [randn(2,k/2)*0.1 randn(2,k/2)*0.01];
data_out= [];
for i=1:k
    data_out(:,i)= find_u(data_in(1:2,i));
end
net2= feedforwardnet(40);
net2.trainParam.max_fail = 28;
net2= train(net2,data_in,data_out);

x= [-0.3 0.2]; % начальная точка
figure; axes; hold on
for i=1:1200
    u= net2(x');
    x= nextpt(x,u);
    tstart= (i-1)*dt;
    plot((tstart+t)*dt,y(:,1),'b-',...
        (tstart+t)*dt,y(:,2),'r-');
end

grid on
xlabel 't,c'
ylabel '\omega,\theta'

function xn= nextpt(x,u)
    f= u;
    [t,y]= ode45(@rp,[0 dt],x);
    xn= y(end,:);
end

function u= find_u(xstart)
    next_square= @(u)norm(net([xstart,u]')).*[1;1];
    u= fminbnd(next_square,-2,2);
end

function yt= rp(t,y)
    teta= y(1); omega= y(2);
    yt= [ omega; -mu*omega/m/l^2+g/l*sin(teta)+f/m/l^2];
end

end

```

Заключение

В настоящей статье авторы на основании собственного опыта преподавания приводят конспект занятия по теме управления динамическими системами при помощи ИНС средствами Matlab. Рассмотрены методы управления с прогнозирующей моделью и с эталонной моделью. Приведены программы на языке Matlab, моделирующие процесс стабилизации положения равновесия простой динамической системы при помощи рассмотренных методов и возможные результаты их работы. Эта информация может быть использована при проведении занятий со студентами соответствующих специальностей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кавинов А.В., Велищанский М.А. О методологии преподавания основ использования средств для работы с искусственными нейронными сетями прямого распространения среды MATLAB // Modern European Researches – 2022. – №3 (Т.1).
 2. Neural Network Toolbox (ЦИТМ Экспонента). (2022 г.) - URL: <https://exponenta.ru/news/Neural-Network-Toolbox>
 3. Deep Learning Toolbox (Документация Mathworks). (2022 г.) - URL: www.mathworks.com/help/deeplearning/
 4. Медведев В.С. Нейронные сети. Matlab 6 / В.С. Медведев, В.Г.Потёмкин. - М.:Диалог-МИФИ, 2001. - 496 с.
 5. Beale M.H. Matlab Neural Network Toolbox Reference / M. H. Beale, M.T. Hagan, H.B. Demuth. – Natick: The MathWorks, Inc, 2018. – 1146 p.
 6. Кавинов А.В., Велищанский М.А. О методологии преподавания основ... Указ.соч.
 7. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer-Verlag, 2002. 308 p.
-

Alexey V. Kavinov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alekseyvladimirovich1@yandex.ru

Mikhail A. Velishchanskiy,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

velmiha@yandex.ru

Pavel A. Vlasov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

Some aspects of teaching the fundamentals of neural network methods for controlling dynamic systems using the MATLAB environment

Abstract. One of the most promising areas of modern control theory is the use of artificial neural networks (ANN). The use of an ANN makes it possible to introduce flexibility into the control strategy, reduce or completely eliminate the stage of analytical construction of a mathematical model of the control object, and simplify the implementation of adaptive algorithms. The Matlab environment contains tools for working with ANNs, which can be used for the synthesis and modeling of neural network control algorithms. The purpose of the article is to present a summary of a possible lesson with students on the specified topic. This article is devoted to methodological issues of studying the practice of using these tools for modeling control processes.

Keywords: neural networks, mathematical modeling, Matlab.

ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Аннотация

Актуальность темы обусловлена важностью приобретения студентами навыков владения методами решения задач по аналитической геометрии для применения в профессиональной деятельности. Целью работы является обучение студентов приемам решения сложных задач по данной дисциплине. Для этого на конкретном примере показано построение цикла задач, направленного на освоение определенного метода. Все этапы решений рассмотренных задач содержат подробные разъяснения. Приведены задачи для самостоятельной работы студентов. Материалы статьи могут быть рекомендованы студентам для самостоятельного изучения, а также преподавателям при подготовке к проведению семинарских занятий.

Ключевые слова

прямая, плоскость, нормальный вектор плоскости, направляющий вектор прямой, параллельные прямые, пересекающиеся прямые, скрещивающиеся прямые, общий перпендикуляр, взаимное расположение прямой и плоскости

АВТОРЫ

Кандаурова Ирина Евгеньевна,
старший преподаватель

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
iriskan07@gmail.com

Чигирёва Ольга Юрьевна,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Введение

Данную статью можно рассматривать как продолжение публикации [1]. В настоящей работе представлены иные аспекты изучения темы о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве, предлагаемой студентам младших курсов. Необходимый для решения задач теоретический материал изложен в конспективной форме в соответствии с материалами, представленными в учебниках по аналитической геометрии [2,3]. При рассмотрении примеров, а также составлении заданий для самостоятельной работы были использованы сборники задач [4-6]. Основное внимание уделено методике обучения студентов решению сложных задач. С этой целью, на примере задачи о нахождении общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым, продемонстрировано построение цикла задач на освоение данного метода. Приведены подробные решения базовых задач и задача-метод, сводящаяся к последовательному их решению. Для усвоения нового материала, а также для закрепления приобретенных знаний предлагается перечень задач.

Методология и результаты исследования

В результате освоения темы «Прямая и плоскость в пространстве» студент должен *знать* определения базовых понятий и формулировки основных теорем; *уметь* решать типовые задачи, составлять и реализовывать план решения сложной задачи, выполнять пошаговую запись решения задачи с обоснованием; *владеть* методами решения задач по аналитической геометрии.

Актуализация знаний

Для повторения ранее пройденного материала можно предложить студентам выполнить следующие задания:

1. напишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, 1)$ и $M_2(3, 1, 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3, 1, 5\}$;

2. напишите канонические уравнения прямой L , проходящей через точки $M_1(1, -1, 1)$ и $M_2(0, 1, 2)$.

Основные теоретические сведения

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Обозначения: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_1 \in L_1$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_2 \in L_2$;

$\vec{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\vec{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 .

Далее приведем критерии, позволяющие установить взаимное расположение двух прямых в пространстве (см. табл. 1), а также прямой и плоскости в пространстве (см. табл. 2).

Таблица 1

Взаимное расположение прямых в пространстве

Критерий	Краткая запись критерия
Прямые совпадают: векторы \vec{q}_1, \vec{q}_2 и $\overline{M_1M_2}$ коллинеарны.	$\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2$ и $\overline{M_1M_2} \parallel \vec{q}_1$
Прямые параллельны: векторы \vec{q}_1 и \vec{q}_2 коллинеарны и точка M_2 не принадлежит прямой L_1 .	$\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2$ и $\overline{M_1M_2} \not\parallel \vec{q}_1$.
Прямые пересекаются: векторы \vec{q}_1 и \vec{q}_2 неколлинеарны и векторы \vec{q}_1, \vec{q}_2 и $\overline{M_1M_2}$ компланарны.	$\vec{q}_1 \not\parallel \vec{q}_2$ и $\vec{q}_1 \vec{q}_2 \overline{M_1M_2} = 0$
Прямые скрещиваются: векторы \vec{q}_1, \vec{q}_2 и $\overline{M_1M_2}$ некопланарны.	$\vec{q}_1 \vec{q}_2 \overline{M_1M_2} \neq 0$

Пусть прямая L и задана каноническими уравнениями

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

а плоскость P – общим уравнением $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

Обозначения: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in L$; $\vec{q} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой L ;
 $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости P .

Таблица 2

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Критерий	Краткая запись критерия
Прямая принадлежит плоскости: векторы \vec{q} и \vec{n} ортогональны и точка M_0 принадлежит плоскости P .	$\vec{q} \perp \vec{n}$ и $M_0 \in P$
Прямая параллельна плоскости: векторы \vec{q} и \vec{n} ортогональны и точка M_0 не принадлежит плоскости P .	$\vec{q} \perp \vec{n}$ и $M_0 \notin P$
Прямая пересекает плоскость: векторы \vec{q} и \vec{n} не ортогональны.	$\vec{q} \vec{n} \neq 0$

Для усвоения теоретического материала данного раздела можно предложить студентам решить следующие задачи:

- ✓ на распознавание объектов (задача 1);
- ✓ на прямое применение критериев (задача 2 и задача 3).

Задача 1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 10 (см. рис. 1). Прямая L_1 проходит через середины ребер AB и AA_1 , прямая L_2 проходит через середины ребер CC_1 и $C_1 D_1$, а прямая L_3 проходит через середины ребер BC и CC_1 . Исследуйте взаимное расположение: 1) прямых L_1 и L_2 ; 2) прямых L_1 и L_3 ; 3) прямой L_1 и плоскости $AA_1 B_1 B$; 4) прямой L_1 и плоскости $CC_1 D_1 D$; 5) прямой L_1 и плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$.

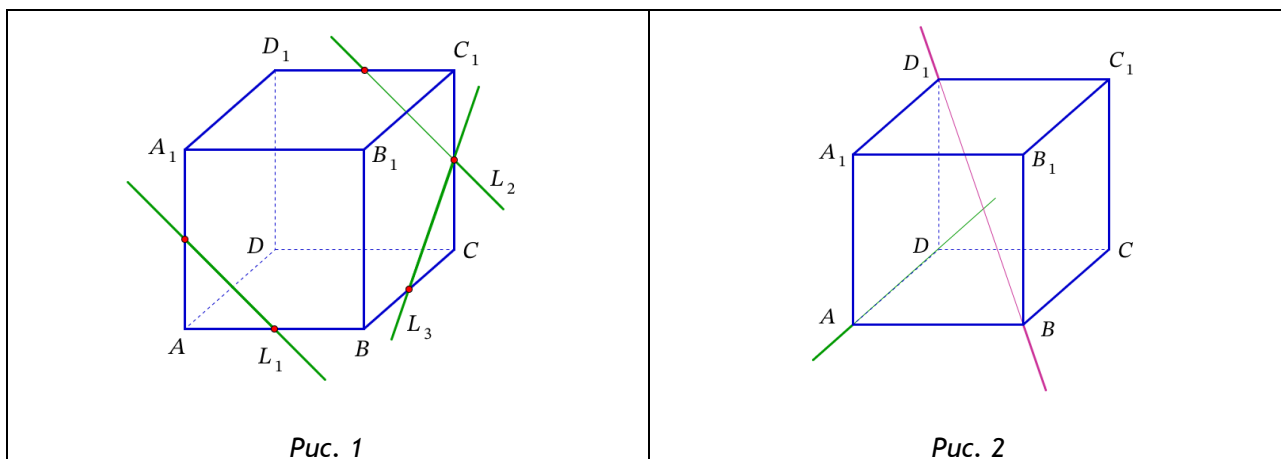


Рис. 1

Рис. 2

Задача 2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 5 (см. рис. 2). Докажите, что прямая, содержащая ребро AD , и прямая, содержащая диагональ BD_1 , являются скрещивающимися.

Задача 3. Напишите канонические уравнения прямой L , проходящей через точку $M(2, -3, -5)$, перпендикулярную плоскости $P: 6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

Обучение решению сложных задач

Выделим основные этапы решения задачи.

На начальном этапе осуществляется *анализ условия и требования задачи*.

Для этого необходимо изучить условие, выделить требование задачи, сделать рисунок.

Второй этап состоит в *поиске способа или плана решения задачи*.

Необходимо установить связи между данными и неизвестными задачи, определить тип задачи, возможность ее преобразования в известную (ранее решенную) или разделить на несколько базовых задач.

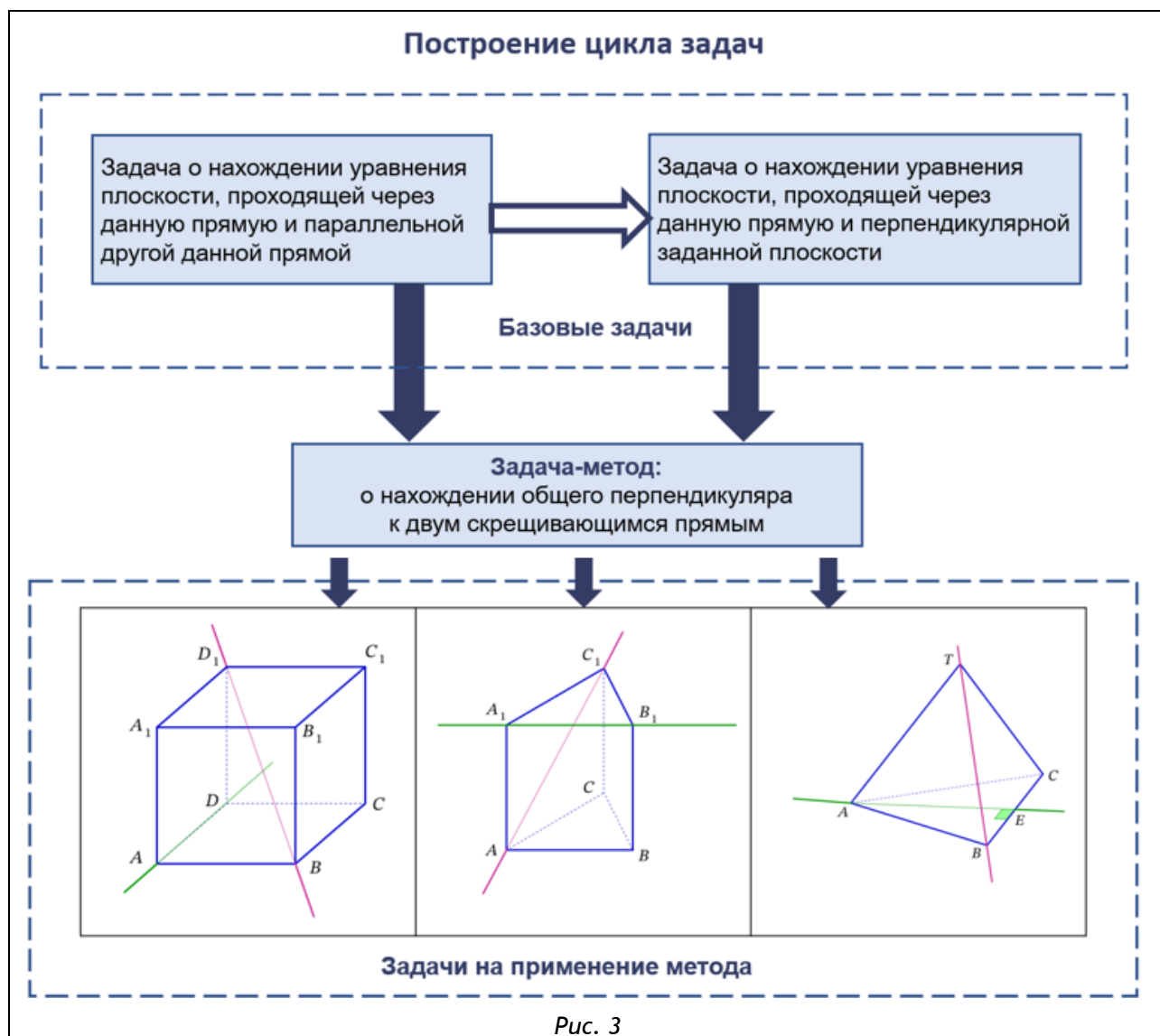
На третьем этапе осуществляется *решение задачи*.

Заключительный этап сводится к *анализу решения задачи*. Перед студентами можно поставить следующие вопросы: как можно применить полученный результат? можно ли составить алгоритм для решения подобных задач? можно ли решить задачу другим способом?

Для оценивания уровня сложности задачи необходимо учитывать соотношение между известными и новыми знаниями студентов, так как это имеет важное значение при составлении системы задач.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере задачи о нахождении общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым. На рис. 3 представлен цикл задач, включающий:

- ✓ базовые задачи (задача 4 и задача 5);
- ✓ задачу-метод (задача 6);
- ✓ задачи на применение данного метода (задачи 7, 8 и 9).



Задача 4 (о нахождении уравнения плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой данной прямой).

Найти общее уравнение плоскости, проходящей через прямую $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$ и параллельной прямой $L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

Дано:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Найти: уравнение плоскости P такой, что L_1 принадлежит P и L_2 параллельна P .
Анализ условия и требования задачи:

1) прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями; следовательно, известны координаты точек, принадлежащих этим прямым и направляющие векторы прямых

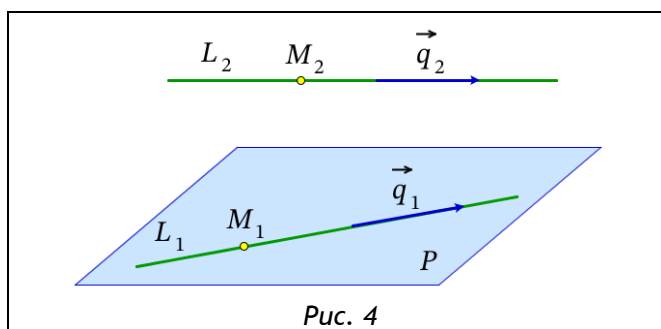
$$L_1: M_1(1, -1, 7), \quad \vec{q}_1 = \{2, -3, 3\};$$

$$L_2: M_2(-5, 2, -3), \quad \vec{q}_2 = \{3, -2, -1\};$$

2) так как \vec{q}_1 и \vec{q}_2 неколлинеарны, то прямые L_1 и L_2 не являются параллельными;

3) для написания общего уравнения плоскости требуется знать координаты точки, принадлежащей этой плоскости и нормальный вектор плоскости;

4) выполним рисунок к задаче (см. рис. 4).



Поиск способа решения задачи сводится к установлению связи между данными и неизвестными задачи. На этапе обучения преподаватель, ставя перед студентами вопросы: «как использовать требование задачи: прямая L_1 принадлежит плоскости P , прямая L_2 параллельна плоскости P ?», помогает строить логические рассуждения и подводит к составлению плана решения задачи.

План решения задачи:

- 1) так как прямая L_1 принадлежит плоскости P , то $\vec{q}_1 \perp \vec{n}$ и $M_1 \in P$;
- 2) так как прямая L_2 параллельна плоскости P , то $\vec{q}_2 \perp \vec{n}$ и $M_2 \notin P$;
- 3) так как $\vec{q}_1 \perp \vec{n}$ и $\vec{q}_2 \perp \vec{n}$ и $\vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2$, то нормальный вектор \vec{n} искомой плоскости коллинеарен векторному произведению направляющих векторов \vec{q}_1 и \vec{q}_2 заданных прямых, то есть $\vec{n} \parallel (\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$;
- 4) зная $M_1 \in P$ и \vec{n} , можем записать уравнение искомой плоскости.

Решение:

- 1) так как \vec{q}_1 и \vec{q}_2 неколлинеарны (координаты непропорциональны: $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{-2}$), то прямые L_1 и L_2 не являются параллельными;
- 2) так как прямая L_1 принадлежит плоскости P , то $\vec{q}_1 \perp \vec{n}$ и $M_1 \in P$;
- 3) так как прямая L_2 параллельна плоскости P , то $\vec{q}_2 \perp \vec{n}$ и $M_2 \notin P$;
- 4) так как $(\vec{q}_1 \perp \vec{n})$ и $(\vec{q}_2 \perp \vec{n})$ и $(\vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2)$, то $\vec{n} \parallel (\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$;
- 5) вычислим векторное произведение векторов \vec{q}_1 и \vec{q}_2 :

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 11\vec{j} + 5\vec{k};$$

- 6) нормальный вектор плоскости P : $\vec{n} = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = 9\vec{i} + 11\vec{j} + 5\vec{k}$;

7) запишем векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, -1, 7)$ и перпендикулярной вектору \vec{n} : $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$,

или, в координатной форме $(x - 1) \cdot 9 + (y + 1) \cdot 11 + (z - 7) \cdot 5 = 0$;

выполнив преобразования, получим общее уравнение искомой плоскости P : $9x + 11y + 5z - 33 = 0$.

Ответ: общее уравнение плоскости P : $9x + 11y + 5z - 33 = 0$.

Анализ решения задачи: на основе полученных результатов можно предложить студентам составить алгоритм для решения подобных задач; следует обратить внимание обучающихся на важность данной задачи, так как она является базовой для решения других сложных задач по данной теме.

Задача 5 (о нахождении уравнения плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной заданной плоскости).

Найти общее уравнение плоскости, проходящей через прямую $L_1: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ и перпендикулярной плоскости $P: x + y - z + 1 = 0$.

Дано:

$$L_1: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}, \quad P: x + y - z + 1 = 0.$$

Найти: уравнение плоскости Q такой, что L_1 принадлежит Q и P перпендикулярна Q .

Анализ условия и требования задачи:

1) прямая L_1 задана каноническими уравнениями; следовательно, известны координаты точки, принадлежащей этой прямой и направляющий вектор прямой L_1 : $M_1(1,0,-1)$, $\vec{q}_1 = \{0,2,1\}$;

2) плоскость P задана общим уравнением; следовательно, известны координаты нормального вектора этой плоскости: $\vec{n} = \{1,1,-1\}$;

3) для написания общего уравнения плоскости требуется знать координаты точки, принадлежащей этой плоскости и нормальный вектор плоскости;

4) выполним рисунок к задаче (см. рис. 5).

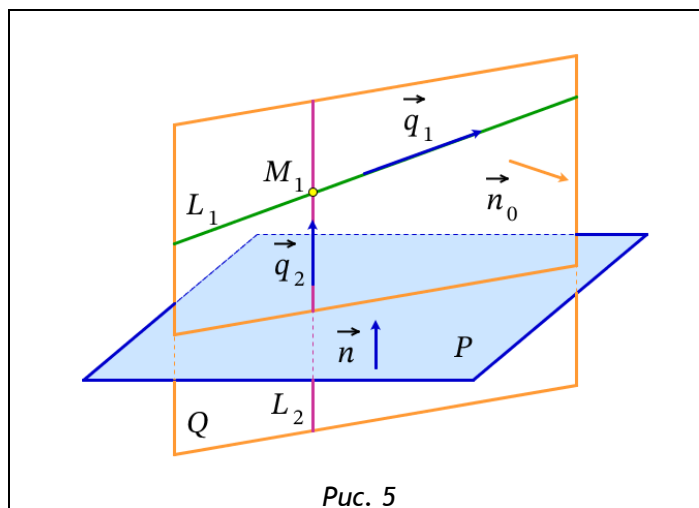


Рис. 5

Поиск способа решения задачи: покажем на данном примере, как исходную задачу можно преобразовать в известную. Для этого проведем через точку $M_1 \in L_1$ прямую L_2 , перпендикулярную плоскости P . Найдем уравнение плоскости, проходящей через прямую L_1 и параллельной прямой L_2 (задача 4). В результате получим уравнение искомой плоскости Q .

План решения задачи:

1) дополнительное построение: через точку $M_1 \in L_1$ проведем прямую L_2 , перпендикулярную плоскости P ;

2) так как прямая L_2 перпендикулярна плоскости P , то $\vec{q}_2 \parallel \vec{n}$;

3) нормальный вектор \vec{n}_0 искомой плоскости коллинеарен векторному произведению направляющих векторов \vec{q}_1 и \vec{q}_2 (см. решение задачи 4), но так как $\vec{q}_2 \parallel \vec{n}$, то $\vec{n}_0 \parallel (\vec{q}_1 \times \vec{n})$;

4) так как $M_1 \in L_1$ и прямая L_1 принадлежит плоскости Q , то $M_1 \in Q$;

5) зная $M_1 \in Q$ и \vec{n}_0 , можем записать уравнение искомой плоскости.

Решение:

1) дополнительное построение: через точку $M_1 \in L_1$ проведем прямую L_2 , перпендикулярную плоскости P (см. рис. 5);

2) так как прямая L_2 перпендикулярна плоскости P , то $\vec{q}_2 \parallel \vec{n}$;

3) так как прямая L_1 принадлежит плоскости Q , то $\vec{q}_1 \perp \vec{n}_0$ и $M_1 \in Q$;

4) так как прямая L_2 параллельна плоскости Q , то $\vec{q}_2 \perp \vec{n}_0$;

5) так как $(\vec{q}_1 \perp \vec{n}_0)$ и $(\vec{q}_2 \perp \vec{n}_0)$ и $(\vec{q}_1 \neq \vec{q}_2)$, то $\vec{n}_0 \parallel (\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$;

6) так как $(\vec{n}_0 \parallel (\vec{q}_1 \times \vec{q}_2))$ и $(\vec{q}_2 \parallel \vec{n})$, то $\vec{n}_0 \parallel (\vec{q}_1 \times \vec{n})$;

7) определим нормальный вектор \vec{n}_0 искомой плоскости Q :

$$\vec{n}_0 = \vec{q}_1 \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k};$$

8) запишем векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1,0,-1)$ и перпендикулярной вектору \vec{n}_0 : $\overline{M_1M} \vec{n}_0 = 0$,
или, в координатной форме $(x-1) \cdot (-3) + y \cdot 1 + (z+1) \cdot (-2) = 0$;
в результате преобразований, приходим к общему уравнению искомой плоскости $Q: 3x - y + 2z - 1 = 0$.

Ответ: общее уравнение плоскости $Q: 3x - y + 2z - 1 = 0$.

Анализ решения задачи: следует обратить внимание обучающихся на прием решения задачи – преобразование исходной задачи в известную; для формирования умений строить логические рассуждения можно предложить студентам самостоятельно составить алгоритм решения данной задачи.

Далее перейдем к рассмотрению задачи-метода.

Задача 6 (о нахождении общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым).

Найти уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым L_1 и L_2 .

Поиск способа решения задачи: данную задачу можно разделить на несколько базовых задач.

Алгоритм:

1) проведем через прямую L_1 плоскость P , параллельную прямой L_2 (базовая задача 4);

2) проведем через прямую L_1 плоскость P_1 , перпендикулярную построенной плоскости P (базовая задача 5);

3) проведем через прямую L_2 плоскость P_2 , перпендикулярную построенной плоскости P (базовая задача 5);

4) найдем линию пересечения L плоскостей P_1 и P_2 , которая представляет собой искомый общий перпендикуляр к прямым L_1 и L_2 .

Пояснения к алгоритму проиллюстрированы на рис. 6.

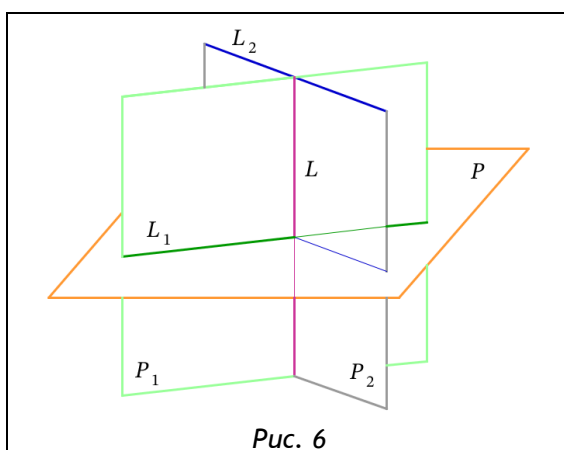


Рис. 6

Далее приведена задача, которая может быть предложена студентам для усвоения нового материала. Работа с алгоритмом позволит обучающимся запомнить правильную последовательность действий и сформировать навыки пошаговой записи решения с обоснованием [7].

Задача 7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 5 (см. рис. 3). Прямая L_1 содержит ребро AD , а прямая L_2 – диагональ BD_1 . Напишите (общие) уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым L_1 и L_2 .

Для закрепления нового материала можно рекомендовать следующие задачи.

Задача 8. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 3, а боковое ребро равно 4 (см. рис. 3). Прямая L_1 содержит сторону основания A_1B_1 , а прямая L_2 – диагональ AC_1 боковой грани. Докажите, что прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимся и напишите (общие) уравнения общего перпендикуляра к этим прямым.

Задача 9. Дана правильная треугольная пирамида $TABC$ с вершиной в точке T , у которой сторона основания равна 3, а высота равна 6 (см. рис. 3). Прямая L_1 содержит боковое ребро TB , а прямая L_2 – содержит перпендикуляр AE , проведенный из точки A к стороне BC основания. Докажите, что прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимся и напишите (общие) уравнения общего перпендикуляра к этим прямым.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 10. Напишите канонические уравнения прямой, симметричной данной прямой L , заданной параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = 16 + 5t, \\ y = 24 + 13t, \\ z = 24 + 13t, \end{cases}$$
 относительно плоскости $P: 2x + 3y + 3z - 88 = 0$.

Задача 11. Напишите параметрические уравнения прямой L , проходящей через точку $M(1, -1, -1)$ и пересекающей прямые $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{2}$ и $L_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$.

Задача 12. Найдите точку Q , симметричную точке $P(-9, 13, 1)$ относительно прямой $L: \frac{x}{2} = \frac{y-11}{2} = \frac{z}{-3}$.

Задача 13. Напишите канонические уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 3t, \\ y = 9 + 7t, \\ z = -8 - 10t, \end{cases} \text{ и } L_2: \begin{cases} x = 2t, \\ y = -5 - 3t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Задача 14. Найдите точку пересечения прямой $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $P: 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Задача 15. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, -4, -1)$ и середину отрезка прямой $L: \begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $P_1: 5x + 3y - 4z + 11 = 0$ и $P_2: 5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

Задача 16. Докажите, что прямые $L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-5}{-1}$ и $L_2: \frac{x-5}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-3}$ пересекаются, найдите точку пересечения и составьте уравнение плоскости, которой они принадлежат.

Заключение

Преимуществом векторного метода при решении задач по аналитической геометрии является его наглядность. В статье изложены основные теоретические сведения по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве». Предложенные задачи рассматриваются не отдельно, а как составная часть некоторого цикла, направленного на формирование у студентов навыков применения конкретного метода. Работа написана на основе многолетнего преподавания авторами обозначенной темы.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кандаурова И.Е., Чигирёва О.Ю. Методические аспекты изложения темы «Плоскость в пространстве» // Modern European Researches. 2023. Т.1, №1. С.120-130.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов, 8-е изд. стер. М.: Физматлит, 2019. 224 с.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов, 3-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 388 с.
4. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 6-е изд., стер. Перепечатка с 3-го изд. 1993г. М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. 480 с.
5. Беклемишев Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева. М.: Наука, 1987. 496 с.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. 14-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 222 с.
7. Гальперин П.Я. Введение в психологию. М.: Книжный дом «Университет», 1999. 332 с.

Irina E. Kandaurova,

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

iriskan07@gmail.com

Olga Yu. Chigiryova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

mkfn12@yandex.ru

Learning to solve complex problems on the example of studying the topic "Line and Plane in Space"

Abstract. The relevance of the topic is due to the importance of students acquiring skills in the methods of solving problems in analytical geometry for use in professional activities. The purpose of the work is to teach students techniques for solving complex problems in this discipline. To do this, a concrete example shows the construction of a cycle of tasks aimed at mastering a certain method. All stages of the solutions of the considered tasks contain detailed explanations. The tasks for independent work of students are given. The materials of the article can be recommended to students for independent study, as well as to teachers in preparation for conducting seminars.

Keywords: line, plane, normal vector of the plane, directing vector of the line, parallel lines, intersecting lines, skew lines, common perpendicular, relative position of the line and the plane.

КУРС СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Аннотация

В работе, используя теоретический материал, рассматриваются решения задач параметрического распознавания с обучением. Актуальность таких задач обусловлена широким использованием их при обработке информации, в медицине, социологии и других областях. Решение этих задач, как и теория распознавания образов включены в учебные планы магистров факультета ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана. Такие задачи позволяют студентам глубже понять суть понятия распознавание образов и способствуют освоению теории. В статье рассматриваются задачи распознавание одномерных нормальных совокупностей и распознавание многомерных нормальных совокупностей. Работа может быть полезна студентам, желающим научиться применять теорию для решения задач распознавания образов.

Ключевые слова

достаточная статистика, оптимальные алгоритмы, ошибки первого и второго рода

АВТОРЫ

Краснов Игорь Константинович,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Грибов Александр Федорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Жидков Евгений Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
enzhidkov@yandex.ru

Введение

Как отмечено в первой части статьи, распознавание образов используется во многих областях науки и техники: в медицине - при классификации заболеваний, в геологии - при определении горных пород, в геодезии и картографии - при составлении географических карт, в различных областях техники - контроль за состоянием авиационных двигателей, ядерных реакторов, техническая диагностика приборов, узлов и машин. Теоретические основы теории рассмотрены в первой части.

Как показывают различные исследования [1], лучшие результаты достигаются студентами, которые сначала прослушивают лекции, затем рассматривают примеры, а затем уже самостоятельно решают задачи. Теоретические основы были представ-

лены в первой части. В настоящей статье приводятся решения различных задач параметрического распознавания с обучением, основанные на изложенных в первой части алгоритмах.

Методология и результаты исследования

Распознавание одномерных нормальных совокупностей с неизвестными средними и общей известной дисперсией.

Рассмотрим задачу определения принадлежности выборки, состоящей из n независимых нормально распределенных наблюдений к одному из двух классов S_1 и S_2 , характеризующихся неизвестными средними значениями a_1 и a_2 и общей дисперсией σ^2 .

Решение. Шаг 1. Предположим, что a_1 и a_2 априорно известны, тогда рассматриваемая задача решается в рамках теории проверки статистических гипотез как проверка простой гипотезы $H_0 (S_1)$ о том, что среднее значение нормально распределенных наблюдений равно a_1 против простой альтернативы $H_1 (S_2)$, что среднее значение равно a_2 при известной общей дисперсии σ^2 .

Задача состоит в том, чтобы, используя эту выборку, принять или отклонить гипотезу H_0 . Так как элементы выборки независимы и подчиняются нормальному закону распределения, то на выборочном пространстве X^n функция правдоподобия

$$W(x|H_0) = \prod_{k=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x_k - a_1)^2}{2\sigma^2}\right] = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a_1)^2\right],$$

$$W(x|H_1) = \prod_{k=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x_k - a_2)^2}{2\sigma^2}\right] = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a_2)^2\right],$$

где σ^2 - дисперсия гауссовской величины. Возможными решениями являются

$$\gamma_0: a = m\{\xi|H_0\} = a_1, \quad \gamma_1: a = m\{\xi|H_1\} = a_2,$$

где $m\{\xi|H_k\}$ - математическое ожидание случайной величины ξ при выполнении гипотезы H_k , $k = 0, 1$.

Достаточная статистика. В [2] было отмечено, что достаточной статистикой для проверки простой гипотезы против простой альтернативы является любое монотонное преобразование отношения правдоподобия. Для рассматриваемой задачи получим

$$\ln l(x) = \frac{a_2 - a_1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n(a_2^2 - a_1^2)}{2\sigma^2}.$$

Так как линейное преобразование - монотонное, то достаточной статистикой будет также

$$y_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

то есть среднее арифметическое выборочных значений.

Оптимальные алгоритмы. Из приведенных выше результатов и работы [3] и [4] следует, что оптимальные алгоритмы принятия решения при проверке простой гипотезы $H_0: a = a_0$ против простой альтернативы $H_1: a = a_1 > a_0$ состоит в сравнении с порогом достаточной статистики

$$y_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \begin{cases} > k & \text{при } \gamma_1 \\ < k & \text{при } \gamma_0' \end{cases} \quad (1)$$

где порог k определяется выбранным критерием качества. Для байесовского алгоритма, а также для алгоритмов максимальной апостериорной вероятности и максимального правдоподобия

$$k = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sigma^2 \ln c}{n(a_1 - a_0)}, \quad (2)$$

где для байесовского алгоритма константа

$$c = c_\delta = \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} \cdot \frac{p_0}{p_1}.$$

Вычисление ошибок первого и второго рода. Для того чтобы определить ошибки первого и второго рода необходимо определить распределение случайной величины $y_n(\bar{x})$. Статистика $y_n(\bar{x})$ как линейная функция гауссовских случайных величин подчиняется нормальному закону распределения. Математические ожидания этого распределения при гипотезе H_0 и альтернативе H_1 определяются по формулам

$$m\{y_n(\bar{x})|H_0\} = a_1, \quad m\{y_n(\bar{x})|H_1\} = a_2.$$

Дисперсии из условия независимости выборочных значений определяются по формулам

$$\mu_1\{y_n(\bar{x})|H_0\} = \mu_2\{y_n(\bar{x})|H_1\} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

При использовании оптимальных по указанным трем критериям алгоритмов вероятности ошибок первого и второго рода

$$\alpha = P\{y_n(\bar{x}) \geq k|H_0\} = 1 - F\left(\frac{k - a_1}{\sigma} \sqrt{n}\right),$$

$$\beta = P\{y_n(\bar{x}) < k|H_1\} = 1 - F\left(\frac{k - a_2}{\sigma} \sqrt{n}\right),$$

где $F(z)$ - интеграл Лапласа (функция распределения стандартной гауссовской случайной величины). После того как найдены искомые ошибки, байесовский риск может быть найден по формуле

$$R = p_0 \Pi_{00} + p_1 \Pi_{10} + p_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) \alpha - p_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) (1 - \beta).$$

Шаг 2. Пусть теперь априорные значения параметров a_1 и a_2 неизвестны. В этом случае классы S_1 и S_2 задаются обучающими классифицированными выборками $\bar{x}^k = (x_1^k, \dots, x_{m_k}^k)$; $k = 1, 2$, распределенными по нормальному закону с неизвестными математическими ожиданиями и известной дисперсией σ^2 . В этом случае выполняются выборочные средние

$$\widehat{a}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{m_k} x_i^k, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

которые представляют оценки максимального правдоподобия.

В рассматриваемом случае априорно неизвестных a_1 и a_2 для получения решающей распознающей процедуры можно использовать правило (1), (2), в котором следует заменить значения параметров a_1 и a_2 их оценками \widehat{a}_1 и \widehat{a}_2 . Достоверность распознавания при замене параметров a_1 и a_2 их оценками определяется просто лишь в асимптотическом случае неограниченно возрастающих размеров в обучающих выборках, когда оценки \widehat{a}_1 и \widehat{a}_2 сходятся по вероятности соответственно к a_1 и a_2 . Тогда оценка логарифма отношения правдоподобия и оценки вероятностей ошибок первого и второго рода сходятся к соответствующим величинам при априорно известных средних a_1 , a_2 и σ^2 .

В общем случае произвольных размеров m_1 и m_2 обучающих выборок получение оценки достоверности распознавания в конечном аналитическом виде практически затруднено, поскольку для этого требуется найти распределение сумм, разностей, произведений и частных различных комбинаций случайных величин, распределенных по нормальному и χ^2 законам. Вследствие этого для вычисления оценки вероятностей ошибок α и β распознавания при произвольных m_1 и m_2 целесообразно воспользоваться статистическим экспериментом по методу Монте-Карло со следующей методологией.

Из нормальных совокупностей с параметрами (a_1, σ^2) и (a_2, σ^2) извлекается M обучающих выборок m_1 и m_2 , после чего по формуле (3) вычисляются выборочные оценки $(\widehat{a}_{1i})_1^M$, $(\widehat{a}_{2i})_2^M$. Затем из совокупностей S_1 и S_2 для каждого фиксированного i генерируется K контрольных выборок объема n :

$$x_k^{(1)} = (x_{1k}^1, x_{2k}^1, \dots, x_{nk}^1), \quad x_k^{(2)} = (x_{1k}^2, x_{2k}^2, \dots, x_{nk}^2), \quad k = 1, \dots, K.$$

Для каждого фиксированного i вычисляется K значений логарифма отношения правдоподобия \widehat{L} по формуле

$$\widehat{L} = \frac{\widehat{a}_2 - \widehat{a}_1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - n(\widehat{a}_2^2 - \widehat{a}_1^2)}{2\sigma^2}, \quad \widehat{a}_2 > \widehat{a}_1,$$

соответствующих различным контрольным выборкам из совокупности S_1 , после чего подсчитывается число A_i нарушений неравенства

$$\widehat{L}_{ik} < \ln C, \quad k = 1, \dots, K,$$

то есть число ошибок классификации. Тогда частота ошибочной классификации выборок из совокупности S_1 к классу S_2 примет вид $\widehat{\alpha}_i = A_i/K$. Усредняя полученные оценки $\widehat{\alpha}_i$ по всему множеству обучающих выборок, находим оценку вероятности ошибок распознавания первого рода

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\alpha}_i.$$

Аналогично, классифицируя контрольные $x_k^{(2)}$ из совокупности S_2 и подсчитывая частоты ошибок классификации $\widehat{\beta}_i$ для i -ой обучающей выборки, получим оценку вероятности ошибки распознавания второго рода.

Примечание. Изложенный подход может быть применен к решению задачи распознавания одномерных нормальных совокупностей с неизвестными средними и неизвестной общей дисперсией, а также задачи распознавания с неизвестными средними и неизвестными дисперсиями.

Распознавание многомерных нормальных совокупностей с неизвестными векторами средних и общей ковариационной матрицей. Рассмотрим задачу определения принадлежности выборки независимых многомерных нормально распределенных наблюдений к одному из двух классов S_1 и S_2 с неизвестными и различными векторами средних \bar{a}_1 и \bar{a}_2 и известной общей ковариационной матрицей K .

При известных \bar{a}_1 и \bar{a}_2 решающее правило для выборки $(\bar{x}_i)^n = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, \bar{x}_i - p -мерный вектор, $i = 1, 2, \dots, n$ строится на основе логарифма отношения правдоподобия E

$$E = \sum_{i=1}^n \left\{ (1/2) [(\bar{x}_i - \bar{a}_1)^T K^{-1} (\bar{x}_i - \bar{a}_1) - (\bar{x}_i - \bar{a}_2)^T K^{-1} (\bar{x}_i - \bar{a}_2)] \right\}.$$

С помощью преобразований данное выражение преобразуется к виду

$$E = (n/2) (\bar{a}_2 - \bar{a}_1)^T K^{-1} \left[(2/n) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i - a_1 - a_2 \right].$$

Чтобы воспользоваться выражением при априорно неизвестных \bar{a}_1 и \bar{a}_2 можно вместо них подставить оценки максимального правдоподобия

$$\widehat{a}_1 = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} x_i^{(1)}, \quad \widehat{a}_2 = \frac{1}{m_2} \sum_{i=1}^{m_2} x_i^{(2)},$$

полученные по обучающим выборкам

$$X_{m_1}^{(1)} = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \dots, \bar{x}_{m_1}^1), \quad X_{m_2}^{(2)} = (\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2, \dots, \bar{x}_{m_2}^2)$$

из класса S_1 и класса S_2 соответственно. Наблюдаемая выборка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ относится к классу S_2 , если

$$\widehat{E} = (n/2) (\widehat{a}_2 - \widehat{a}_1)^T K^{-1} \left[(2/n) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i - a_1 - a_2 \right] \geq k$$

и к классу S_1 , если выполняется неравенство противоположное данному; $k = \ln C$ - выбранный порог. Известно, что при неограниченно возрастающих объемах обучающих выборок ($m_1, m_2 \rightarrow \infty$) вероятности ошибок распознавания первого рода α и второго рода β сходятся к соответствующим вероятностям ошибок α_0 и β_0 при априорно известных a_1 и a_2 .

$$\alpha_0 = 1 - F \left[\frac{k + \frac{nd}{2}}{\sqrt{nd}} \right], \quad \beta_0 = F \left[\frac{k - \frac{nd}{2}}{\sqrt{nd}} \right],$$

где $F(z)$ - табулированный интеграл вероятности, а $d = (\bar{a}_2 - \bar{a}_1)^T K^{-1} (\bar{a}_2 - \bar{a}_1)$. Однако на практике часто оказывается необходимым знать оценки вероятностей

ошибок для произвольных (в том числе и малых) объемов m_1 и m_2 обучающих выборок, либо уметь рассматривать величины m_1 и m_2 обучающих выборок, достаточные для достижения требуемой достоверности $1 - \alpha$ и $1 - \beta$ применяемых решений о принадлежности контрольной выборки к классам S_1 и S_2 . Универсальным способом вычисления оценок вероятностей ошибок распознавания $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ при произвольных (в том числе и малых) объемах обучающих выборок является статистическое моделирование на ЭВМ. Оно осуществляется по следующему алгоритму. Из совокупностей S_1 и S_2 , многомерные параметры которых (\bar{a}_1, k) и (\bar{a}_2, k) полагаются известными, извлекаются по L обучающих выборок

$$X_l^{(1)} = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \dots, \bar{x}_{m_1}^1)_l, \quad X_l^{(2)} = (\bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2, \dots, \bar{x}_{m_2}^2)_l, \quad l = 1, 2, \dots, L,$$

объемов m_1 и m_2 соответственно. Для каждого $l = 1, 2, \dots, L$ вычисляются оценки \widehat{a}_1 и \widehat{a}_2 величин \bar{a}_1 и \bar{a}_2 , и генерируются по Q контрольных выборок

$$X_{lq}^{(1)} = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)_{lq}; \quad X_{lq}^{(2)} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)_{lq}; \quad q = 1, \dots, Q; \quad l = 1, \dots, L$$

из совокупностей S_1 и S_2 . После этого подсчитываются количество случаев ошибочного отнесения контрольной выборки из класса S_1 к классу S_2 (A_{lq}) и из класса S_2 к классу S_1 (B_{lq}) по всем экспериментам $l = 1, \dots, L$; $q = 1, \dots, Q$ и относительной частоты ошибочной классификации

$$\alpha_h = \frac{\sum_l \sum_q A_{lq}}{LQ}, \quad \beta_h = \frac{\sum_l \sum_q B_{lq}}{LQ}.$$

Повторяя указанную процедуру $H + 1$ раз, получаем итерированные оценки вероятности ошибочной классификации

$$\alpha_h^* = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \alpha_h, \quad \beta_h^* = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \beta_h,$$

$$\alpha_{H+1}^* = \frac{1}{H+1} (\alpha_H^* H + \alpha_{H+1}), \quad \beta_{H+1}^* = \frac{1}{H+1} (\beta_H^* H + \beta_{H+1}).$$

Далее, если теперь логическое выражение

$$G_{N+1} = (|\alpha_{H+1}^* - \alpha_H^*| < \varepsilon^*) \wedge (|\beta_{H+1}^* - \beta_H^*| < \varepsilon^*)$$

истинно, то заданная точность ε^* вычисления оценок α^* , β^* считается достигнутой. Полученные оценки α_{H+1}^* , β_{H+1}^* - состоятельные оценки величин α и β в силу того, что функция E^* непрерывна по векторным параметрам α_1^* и α_2^* и имеет конечную дисперсию.

Заключение

В работе на основе статистической теории распознавания образов - выборочное пространство, вероятностная мера на пространстве наблюдений, байесовский и Неймана-Пирсона алгоритмы, рассмотрены решения задач распознавания одномерных и многомерных нормальных совокупностей. Может служить учебно-методическим пособием студентам, изучающим методы распознавания образов, а также полезна специалистам, занимающимся разработкой систем распознавания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горбунова А. Педагогическая поддержка при решении задач и последовательность учебных заданий. – XIII Международная российская конференция исследователей высшего образования, 1922. НИУ ВШЭ.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.
3. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. — М.: Радио и связь, 1986. — 254 с.
4. Местецкий Л.М. Математические методы распознавания образов: Курс лекций – Москва, МГУ, 2004 – 90 с

Igor K. Krasnov,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
igorkrsnv@yandex.ru

Alexander F. Gribov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

alexandr-gribov@list.ru

Evgeny N. Zhidkov,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

enzhidkov@yandex.ru

Course of statistical theory of pattern recognition: problem solving

Abstract. In the paper, using theoretical material, the solutions of parametric recognition problems with training are considered. The relevance of such tasks is due to their widespread use in information processing, in medicine, sociology and other fields. The solution of these problems, as well as the theory of pattern recognition, are included in the curricula of the masters of the Faculty of the Bauman Moscow State Technical University. Such tasks allow students to better understand the essence of the concept of pattern recognition and contribute to the development of theory. The article deals with the tasks of recognizing one-dimensional normal aggregates and recognizing multidimensional normal aggregates. The work can be useful for students who want to learn how to apply theory to solve image recognition problems.

Keywords: sufficient statistics, optimal algorithms, errors of the first and second kind.

МЕТОДИКА ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ «ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ» И «ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ» ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА НА ЛЕКЦИИ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

Актуальность данного исследования определена необходимостью разработки методических материалов для введения понятия экспоненциальная форма комплексного числа и формул Эйлера, используемых в математике, механике и физике; актуальностью детерминирована цель исследования, состоящая в подготовке материалов, способствующих освоению студентами этих тем. Методический материал, представленный в исследовании может быть использован на занятиях по аналитической геометрии, во-первых, для снятия тех трудностей, с которыми студенты сталкиваются при изучении разных форм комплексных чисел (трудности ранжирования математического материала по степени его практической необходимости в дальнейшем изучении других дисциплин), а во-вторых, для расширения математического кругозора.

Ключевые слова

показательная форма комплексного числа, экспоненциальная форма записи, Леонард Эйлер, комплексные числа

АВТОР

Нараленкова Ирина Игоревна,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана»,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова», г. Москва
i.i.naralenkova@gmail.com

Введение

Согласно учебному плану по дисциплине «Аналитическая геометрия» на тему «Комплексные числа» отводится два 2 лекционных часа, которые необходимо рассмотреть алгебраическую, тригонометрическую и экспоненциальную форму записи, действия над комплексными числами, возведение в степень комплексного числа и извлечение корня из него, формулы Эйлера, основную теорему алгебры. Знание этого теоретического материала в дальнейшем используется при изучении теории чисел, в комплексном анализе, в механике разрушения твердых тел и других разделах математики и механики.

Актуальность исследования обусловлена методической необходимостью разработки материалов, предназначенных для освоения студентами важного понятия экспоненциальная форма комплексного числа и формулами Эйлера, которые используются во многих разделах современной математики, механики и физики.

Цель состоит в подготовке материалов, способствующих освоению студентами таких важных понятиях, как показательная и экспоненциальная форма комплексного числа и формулами Эйлера.

Методология и результаты исследования

Определение комплексных чисел

Определение. Выражение вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, а i - мнимая единица, удовлетворяющая отношению $i^2 = -1$, называется *комплексным числом* с действительной частью x и мнимой частью y . Для этого выражения следующим образом определены понятия равенства и операции сложения и умножения:

1. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ (понятия больше и меньше не определены).

2. *Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

3. *Произведением* двух комплексных чисел $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ называется комплексное число вида $(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

Комплексное число принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z)

$$z = x + iy. \quad (1)$$

Запись (1) принято называть *алгебраической формой* комплексного числа [1].

Каждое действительное число x содержится во множестве комплексных чисел, а именно $x = x + i \cdot 0$. Числа вида $0 + i \cdot y$ называются *мнимыми числами* (или *чисто мнимыми*) и обозначаются следующим образом $0 + i \cdot y = i \cdot y$.

Разность двух комплексных чисел определяется однозначно с помощью формулы:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Чтобы привести частное

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

к виду (1), нужно избавиться от мнимой единицы в знаменателе. Для этого домножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, т.е. на $x_2 - iy_2$. В результате получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, сумма, произведение, разность и частное двух комплексных чисел есть комплексное число вида (1).

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = x + iy$ называется число $\sqrt{x^2 + y^2}$, т.е. $|z|$

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Модуль комплексного числа $|z|$ всегда действительное неотрицательное число, т.е. $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Определение. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = x + iy$:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Комплексное число как вектор

С современной точки зрения, формальные операции с комплексными числами вполне оправдываются формальными определениями, так что их геометрическое представление логически не является необходимым. Однако это позволяет рассматривать комплексные числа и действия над ними как нечто вполне естественное с интуитивной точки зрения и, кроме того, имеет большое значение в приложениях комплексных чисел как в математике, так и в математической физике [2].

Обозначим через P плоскость нашего чертежа и выберем на ней прямоугольную систему координат xOy (рис. 1). Комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку z на плоскости P с координатами x, y . Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости P .

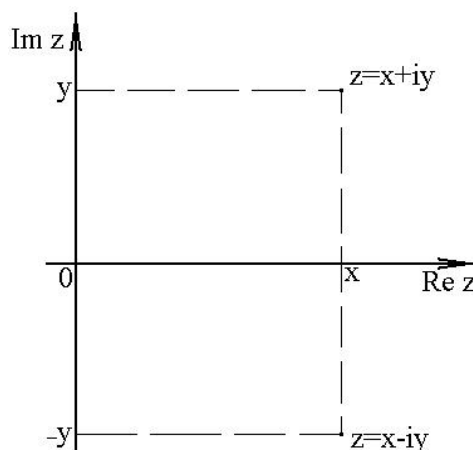


Рис. 1

Обозначим также через z вектор, идущий из начала координат O в точку z . При этом изображении действительные числа попадают на ось абсцисс - поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* плоскости P комплексного переменного ($\text{Re } z$), а чисто мнимые числа попадают на ось ординат - поэтому ось ординат называется *мнимой осью* плоскости P комплексного переменного ($\text{Im } z$). Нуль попадает в начало координат.

Пример 1. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа z , для которых

$$|z - 1| = 2 \quad (2)$$

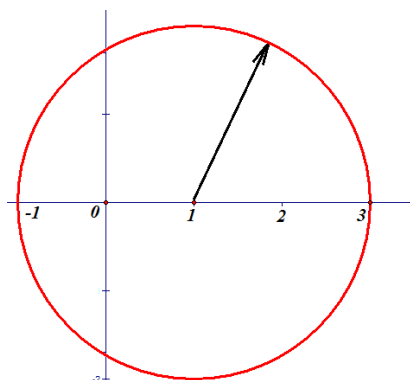


Рис. 2

Вспоминая геометрический смысл модуля разности комплексных чисел, условие (1) можно записать следующим образом: найти множество точек z , которые удалены от точки 1 на расстояние, равное двум. Как известно, геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки, является окружность. В нашем случае множество искомых точек лежит на окружности с центром в точке $(1, 0)$ и радиусом $r = 2$ (рис. 2).

Решим эту же задачу другим способом, который можно назвать аналитическим. Пусть точка $z = x + iy$ - произвольная точка искомого геометрического места. Тогда

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

Представление комплексных чисел в тригонометрической форме

Наряду с декартовой системой координат xOy введем полярную систему координат с полюсом O и полярной осью Ox . В этой полярной системе координат точка z (рис. 3), имеет координаты r, φ , которые связаны с декартовыми координатами следующим образом:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (3)$$

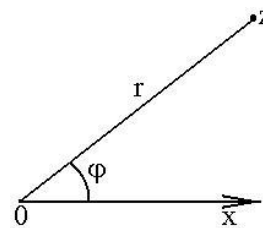


Рис. 3

И обратно:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Пользуясь (3), комплексное число $z = x + iy$ ($z \neq 0$) можно представить в следующем виде:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (4)$$

Такое представление комплексных чисел $z = x + iy$ ($z \neq 0$) в виде (4) называется *тригонометрической формой комплексного числа*. Величина r называется *модулем комплексного числа z* и обозначается $|z|$; *геометрически r есть длина вектора \overrightarrow{Oz}* (рис. 3). Угол φ называется *аргументом комплексного числа z* ; это - угол, который образует вектор \overrightarrow{Oz} с положительным направлением оси Ox . Понятно, что наряду с углом φ то же самое комплексное число z определяет и каждый из углов вида $\varphi + 2\pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (любое целое число). Следовательно, аргумент есть функция многозначная. Определим φ как угол, удовлетворяющий условию

$$0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (5)$$

Тогда каждому комплексному числу соответствует один угол вида (3); он называется *главным значением аргумента* и обозначается

$$\varphi = \arg z.$$

Выделение такого единственного угла φ часто полезно при решении задач. Все другие значения аргумента z условимся обозначать как

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Если $z = 0$, то $r = 0$, а аргумент φ не определен.

Если комплексные числа представлены в тригонометрической форме, то выполнение операций умножения, деления и извлечение корня значительно облегчается.

$$\text{Пусть } z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тригонометрическим представлением очень полезно воспользоваться, чтобы уяснить геометрический смысл умножения двух комплексных чисел:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Следовательно, для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеем

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

В частности для любого целого n и $r=1$ приходим к формуле, открытой французским математиком Абрахамом де Муавром

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что если $z_2 \neq 0$, то для частного двух чисел z_1 и z_2 получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Извлечение корня из комплексного числа

Определение. Комплексное число ω называется *корнем n -ой степени из z* , если

$$\omega^n = z. \quad (7)$$

Теорема. Если, $z \neq 0$ то существует n различных комплексных чисел ω_k , являющихся корнями n -й степени из z . При $z = 0$ существует единственное значение $\omega = 0$.

Для $z \neq 0$, $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) \right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Можно показать, что среди бесконечного множества значений ω_k имеется лишь n отличных друг от друга чисел. А именно это те числа, которые получаются из (8) при значениях $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Показательная форма комплексного числа

Впервые понятие степени с комплексным показателем введено Леонардом Эйлером, который показал в 1743 г., что любое комплексное число вида $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \neq 0$ может быть представлено в виде $z = e^{i\varphi}$. $e = 2,71828 \dots$ - знаменитое число Эйлера, а i - мнимая единица. То есть справедлива *формула Эйлера*:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (9)$$

Доказательство.

Известно, функции $\sin x$, $\cos x$ и e^x представить степенными рядами, разложив в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \cos x &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Если в последнюю формулу вместо x подставить ix , получим

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \cos x + i \sin x$$

Что и требовалось доказать.

Определение. Запись $z = e^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа [3].

Если в формулу (9) подставить $\varphi = \pi$ и учесть, что $\cos \pi = -1$, а $\sin \pi = 0$, получим

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Это замечательное соотношение между фундаментальными константами в математике: нулем, единицей, мнимой единицей, числами π и e . Эту формулу называют *самой красивой математической формулой*. По словам академика А.Н.Крылова «в ней таинственным образом воссоединились числа, символизирующие арифметику (0 и 1), алгебру (i), анализ (e) и геометрию (π)».

Используя формулу Эйлера можно дать новые определения для функций $\sin x$, $\cos x$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Из этих формул можно вывести все свойства тригонометрических функций.

Из формулы Эйлера (9) следует, что

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \quad (10)$$

Определение. Запись $z = re^{i\varphi}$ называется *экспоненциальной формой* комплексного числа.

Арифметические действия со степенями с комплексными показателями выполняются так же, как и со степенями с действительными показателями:

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$2) z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i};$$

$$3) z^n = r^n \cdot e^{n\varphi i};$$

$$4) \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}.$$

Можно извлечь из числа z корень n -ой степени (n - натуральное)

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right).$$

Но, так как аргумент комплексного числа определен с точностью до $2\pi k$, где k - целое

$$\sqrt[n]{re^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$$

Пример 1. Запишите в показательной форме число $z = -1 + i$.

Решение. Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \operatorname{arg} z = \pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{-1} \right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Получим: $z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}$.

Ответ: $z = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi i}{4}}$.

Пример 2. Представьте в алгебраической форме число $z = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$.

Решение. По формуле (10) получаем:

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i.$$

Ответ: $z = \sqrt{3} + i$.

Пример 3. Найдите произведение комплексных чисел $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{6}}$ и $z_2 = e^{\frac{\pi i}{2}}$. Результат представьте в алгебраической форме.

Решение. По формуле $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i}$ получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)i} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

По формуле (10) получаем:

$$2e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

Ответ: $z_1 \cdot z_2 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$.

Используя показательную форму комплексного числа, можно определить показательную функцию комплексного аргумента.

Определение. Показательной функцией комплексного аргумента называется функция, которая каждому комплексному числу z , кроме нуля, ставит в соответствие e^z : $f(z) = e^z$.

Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

Пример 4. Найдите e^z , если $z = 2 - \frac{\pi}{2}i$.

Решение. $e^{2 - \frac{\pi}{2}i} = e^2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -ie^2$.

Ответ: $-ie^2$.

Пример 5. Вычислите приближенно с точностью до сотых $\cos(5i)$.

Решение. $\cos(5i) = \frac{e^{i(5i)} + e^{-i(5i)}}{2} = \frac{e^{-5} + e^5}{2} \approx 74,21$.

Ответ: $\cos(5i) \approx 74,21$.

Заключение

В статье рассматривается методический материал по теме «Комплексные числа», который может быть использован на занятиях по аналитической геометрии. Необходимость разработки данного материала прежде всего обусловлена трудностями, с которыми студенты сталкиваются при изучении разных форм комплексных чисел. Им трудно ранжировать математический материал по степени его практической необходимости в дальнейшем изучении других дисциплин. Кроме того, необходимо для расширения математического кругозора учащихся знакомить их с величайшими достижениями в области математики. Именно этим обусловлено введение формулы Л.Эйлера, которую многие ученые называют само красивой математической формулой.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. – М.: Физматгиз, 1963. – 856 стр.
 2. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2009.
 3. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. А.В.Ефимова и б.П. Демидовича. 2-е изд. М.: Наука. 1986. 428 с.
-

Irina I. Naralenkova,

Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Moscow State University named after M.V. Lomonosov Moscow, Russia

i.i.naralenkova@gmail.com

Introducing the notion «exponential» form of complex number during the lecture on Analytic Geometry on the topic «Complex numbers»

Abstract. The relevance of the current research is based on the necessity to design teaching materials to introduce the notion ‘exponential’ form of complex numbers and L. Euler’s formulas used in Mathematics, Mechanics and Physics. The aim of the research is determined by its relevance and is implemented in the design of the teaching materials which simplify acquisition of Analytic Geometry topics. The teaching materials presented in the article might be used during Analytic Geometry classes to help student overcome some difficulties which they face while studying complex numbers as well as expand their horizons.

Keywords: exponential form of complex number, complex numbers, Leonhard Euler.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Аннотация

Теории вероятностей анализируют математические представления детерминированных и вероятностных закономерностей. Важно научить студентов пониманию основ теории вероятностей, которые приводят к пониманию математического моделирования сложных процессов и умению проводить вероятностные расчеты. При изучении дисциплины важен подбор заданий для практических, семинарских и лабораторных занятий. В статье рассмотрена методика применения статистического метода дисперсионного анализа для исследования влияния полисахаридных соединений на пенообразующую способность молочной сыворотки с применением. Таким образом, сочетание разнообразных методов обучения и использование решения прикладных задач приведет к оптимальным результатам обучения.

Ключевые слова

теория вероятностей, методика преподавания теории вероятностей, вероятностные закономерности, дисперсионный анализ, статистический метод, математическое моделирование, практические занятия, полисахаридные соединения, молочная сыворотка, пенообразование

АВТОРЫ

Санаева Татьяна Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Российский биотехнологический университет (РОСБИОТЕХ)»,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
tatyanasanaeva@yandex.ru

Степанова Юлия Константиновна,
магистрант
ФГБОУ ВО «Российский биотехнологический университет (РОСБИОТЕХ)», г. Москва
juliack@mail.ru

Введение

Чтобы оставаться актуальным в быстро меняющемся мире, выпускники высшей школы должны быть подготовлены. Студентам важно научиться развивать навыки аналитического и критического мышления, самостоятельно приобретать знания и воспринимать информацию, самостоятельно заниматься творческой деятельностью.

Профессиональное образование направлено на подготовку квалифицированных работников, которые обладают необходимыми навыками для достижения успеха на рынке труда, способны хорошо работать в своей профессии, демонстрируя хорошую трудовую этику в смежных областях и готовы к постоянному профессиональному развитию. Приобретение и использование соответствующих математических инструментов для обработки, анализа и систематизации информации по темам исследований в различных областях деятельности имеют решающее значение для успеха будущих специалистов [1].

В современном мире математическое моделирование является неотъемлемой частью многих сфер деятельности. Оно позволяет предсказывать и анализировать причинно-следственные связи, оптимизировать процессы и принимать обоснованные ре-

шения. Особое значение имеют вероятностные и статистические методы, которые позволяют учитывать случайность и неопределенность, присущую многим явлениям. Применение вероятностных и статистических методов широко распространено в различных областях, начиная от промышленности и экономики до науки и медицины. Например, в производственных процессах с их большим количеством переменных и факторов, статистический анализ позволяет выявлять зависимости и устанавливать оптимальные параметры работы. В экономике вероятностные методы используются для оценки рисков и прогнозирования поведения рынка. В науке статистика помогает обрабатывать и интерпретировать полученные результаты экспериментов. В медицине статистические методы используются для анализа эффективности лекарственных препаратов и прогнозирования заболеваемости. Важно отметить, что развитие экспериментальной техники и возможность получения большого количества данных привели к необходимости проведения более тонкого и детального анализа результатов экспериментов.

Методология и результаты исследования

Теория вероятностей является одной из важнейших математических дисциплин, которая изучает математические модели вероятностных явлений и закономерностей. Одной из целей теории вероятностей является разработка математических инструментов и моделей для оценки вероятности возникновения определенных событий. Изучение данной дисциплины позволяет студентам углубить знания об основных законах случайных явлений и их распределениях. Студенты познают, как оценивать вероятность возникновения определенного события, и как связаны между собой различные вероятности. Кроме того, она помогает выпускникам высшей школы решать задачи, связанные с прогнозированием и оптимизацией. При изучении теории вероятностей они также учатся строить математические модели, которые позволяют описывать и анализировать сложные процессы. Моделирование вероятностных явлений позволяет предсказывать и понимать поведение систем в различных ситуациях.

Одним из методов анализа процессов является дисперсионный анализ. Дисперсионный анализ является статистическим методом, позволяющий выяснить, существует ли значимое влияние каких-либо качественных или количественных факторов на изменение изучаемых результативных признаков. Вы можете выбрать, будут ли средние значения различаться в зависимости от группы или они обусловлены случайностью. Однако дисперсионный анализ не ограничен в своем применении. Это мощный статистический метод, который можно использовать для определения влияния различных факторов на зависимые переменные в статистическом анализе. Благодаря этому становится возможной и идентификация переменных, и определение их значимости. Определение величины групповых различий с помощью дисперсионного анализа может оказаться полезным при выборе методов манипулирования факторами. Правильное применение рассматриваемого анализа может повысить продуктивность исследований. В основе данного метода лежит следующее: кумулятивная дисперсия F-критерия разлагается на внутрigrupповую дисперсию и межгрупповую дисперсию.

В предыдущих статьях [2] рассмотрены особенности преподавания теории вероятностей. Освоение дисциплины требует предварительного знания использования аксиом и теорем теории вероятностей, а также методов их применения посредством вероятностного теоретического моделирования.

Кроме того, для обеспечения интеграции теоретических знаний, полученных по теории вероятностей, с практическими занятиями проводятся занятия в компьютерном классе. Включение примеров и реальных расчетов, таких как моделирование и численные эксперименты, способствует развитию теории. Лабораторная работа должна носить прикладной характер и иметь практическую цель.

Приведем пример применения статистического метода в однофакторном дисперсионном анализе к задаче прикладного характера, имеющей практическую направленность. Применим данный метод для исследования влияния смесей полисахаридов на пенообразующую способность молочной сыворотки [3].

Для усовершенствования качества сахаристых кондитерских изделий применяют добавление в рецептуру молочной сыворотки. Основными компонентами сывороточных продуктов являются лактоза, белки и минералы. Сывороточные продукты, имеющие особенный состав сыворотки и ее уникальные свойства, являются совершенным компонентами в различных диетах. Они значительно повышают биологическую ценность готового продукта.

Молочная сыворотка является важным продуктом в пищевой промышленности, и ее свойства могут быть улучшены путем добавления различных компонентов. Одним из таких компонентов являются полисахаридные соединения, которые могут влиять на пенообразующую способность сыворотки.

Проведены исследования пенообразующей способности сухой молочной сыворотки (СМС) в водном растворе с различными полисахаридами. С целью определения оптимального соотношения составляющих смеси, времени взбивания и максимального значения пенообразующей способности.

К полученным результатам эксперимента применили статистические методы дисперсионного анализа, показывающие влияния тройных смесей полисахаридов на пенообразующую способность молочной сыворотки.

В качестве предмета исследования использовали четыре вида тройных смесей полисахаридов: 1 смесь - КМЦ, альгинат натрия, гуммиарабик (К+А+G); 2 смесь - пектин, КМЦ, альгинат натрия (Р+К+А); 3 смесь - пектин, КМЦ, гуммиарабик (Р+К+G); 4 смесь - пектин, альгинат натрия, гуммиарабик (Р+А+G).

В качестве независимой переменной x будем рассматривать тройные смеси полисахаридов: К+А+G, Р+К+А, Р+К+G, Р+А+G. В исследовании четыре уровня изменения фактора. В виде функции y выберем пенообразующую способность молочной сыворотки. Для каждого уровня варьирования фактора проводили 3 параллельных испытания. Результаты исследования пенообразующей способности в трех различных испытаниях при всех уровнях варьирования, представлены таблице 1.

Таблица 1

Смеси	Уровень варьирования фактора	Значение функции y в параллельных испытаниях			Среднее арифметическое значение функции y в параллельных испытаниях
		1	2	3	
К+А+G	1	160	158	162	160
Р+К+А	2	165	164	167	165,33
Р+К+G	3	205	204	202	203,67
Р+А+G	4	180	177	179	178,67

С помощью однофакторного дисперсионного анализа произведем статистическую обработку результатов эксперимента. Получили следующие результаты:

1) Результаты исследования показывают, что наблюдения подвержены влиянию двух факторов, которые вносят вклад общую сумму квадратов отклонений от среднего значения.

Общая сумма квадратов отклонений составляет 3439;

2) Также было выявлено, что случайные погрешности испытаний приводят к остаточному рассеиванию.

Сумма квадратов отклонений «внутри серий» составляет 23;

3) Дополнительно, было обнаружено, что фактор x также вносит вклад в рассеивание.

Сумма квадратов отклонений «между сериями» составляет 3416;

4) Остаточная оценка общей дисперсии $S_0^2 = 312$, при этом число степеней свободы $f_0 = 11$;

5) Для остаточной дисперсии воспроизводимости по всем наблюдениям S_ε^2 , было получено значение равное 2, а число степеней свободы f_0 равно 8;

6) Также была оценена выборочная дисперсия рассеивания «между сериями», где S_x^2 равняется 1138, а число степеней свободы f_0 равно 3;

Для проверки нуль-гипотез об однородности выборочных дисперсий использовался критерий Фишера, где полученное значение F_p составило 32361. Таким образом, результаты исследования позволяют сделать вывод о влиянии различных факторов на рассеивание наблюдений и оценить дисперсию внутри и между сериями.

Табличное значение критерия Фишера для принятого уровня значимости $p = 5\%$ и числа степеней свободы числителя $f_1 = 3$ и знаменателя $f_2 = 8$ составляет $F_{\text{табл}} = 8,84$. Так как $F_p > F_{\text{табл}}$, при доверительной вероятности 95% влияние фактора x (вид смеси) на (пенообразующую способность) следует признать существенным.

С помощью проведенного дисперсионного анализа можно сделать следующие выводы: тройные смеси полисахаридов существенно влияют на пенообразующую способность молочной сыворотки.

При изучении дисциплины важен подбор заданий для практических, семинарских и лабораторных занятий. Расчеты прикладных задач можно проводить на лабораторных занятиях. Важно научить студентов делать правильные выводы.

Заключение

Таким образом, наиболее благоприятный результат в обучении позволит получить сочетание различных методов преподавания с применением решения прикладных задач. Изучение теории вероятностей является неотъемлемой частью математического образования. Изучение данной дисциплины предполагает разработку математических моделей, которые позволяют рассматривать, подвергать анализу различные процессы реальной жизни. Моделируя вероятностные явления, можем предвидеть и понять поведение систем в различных контекстах. Также оно помогает развивать у студентов аналитическое мышление, умение работать с вероятностными моделями и применять их для решения различных задач.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Санаева Т.А. Особенности построения эконометрических моделей / Modern European Researches. - Salzburg, 2022 - Т. 1 №3. - P. 197-201.
2. Санаева Т.А. Особенности преподавания теории вероятностей / М.: РОСБИОТЕХ, - Изд-во., Перо, 2023. - 80с. М6, - <https://elibrary.ru/item.asp?id=50045843>
3. Ларионова М.Е., Степанова Ю.К., Бутин С.А., Васькина В.А. Использование эмульсионного геля в технологии шоколадно-ореховой начинки для кондитерских изделий / Материалы XIV Международной научно-технической конференции. - 2022 - Т.1. - С. 192-194.

Tatyana A. Sanaeva,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Russian Biotechnological University (ROSBIOTECH); Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
tatyanasanaeva@yandex.ru

Julia K. Stepanova,

Master, Russian Biotechnological University (ROSBIOTECH), Moscow, Russia
juliack@mail.ru

Methodology of teaching the statistical method of variance analysis for students of technological profile

Annotation. Probability theories analyze mathematical representations of deterministic and probabilistic patterns. It is important to teach students to understand the basics of probability theory, which lead to an understanding of mathematical modeling of complex processes and the ability to carry out probabilistic calculations. When studying the discipline, the selection of tasks for practical, seminar and laboratory classes is important. The article discusses the methodology of applying the statistical method of dispersion analysis to study the effect of polysaccharide compounds on the foaming ability of whey with the use of. Thus, the combination of various teaching methods and the use of solutions to applied problems will lead to optimal learning outcomes.

Keywords: probability theory, methods of teaching probability theory, probabilistic patterns, analysis of variance, statistical method, mathematical modeling, practical exercises, polysaccharide compounds, whey, foaming.

ПРОВЕДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО ЗАДАЧАМ СНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ. МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

Аннотация

В предложенной работе отражена методика преподавания одной из наиболее важных задач обучения без учителя (unsupervised learning) - понижение размерности пространства признаков при помощи метода главных компонент (РСА - principal component analysis). Актуальность данной работы заключается в сложности восприятия этой темы студентами разных направлений подготовки и специальностей. Основная цель работы - предложить возможную методику изложения темы с практикоориентированным подходом, который был опробован на семинаре. Результатом проведения семинара стала успешная самостоятельная работа студентов с новым набором данных.

Ключевые слова

метод главных компонент, дисперсия, ковариационная матрица, машинное обучение, кластеризация

АВТОРЫ

Тверская Елена Сергеевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
e_tverskaya@bmstu.ru

Панкратов Владимир Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
v.a.pankratov@bmstu.ru

Введение

При проведении практических семинаров по решению задач машинного обучения, в частности, решению задач снижения размерности, основной проблемой для студентов становится не только реализация метода на ЭВМ, но и восприятие математического подхода работы этого метода. В связи с чем, особое значение имеет методика проведения такого семинара. При проведении занятия необходимо заинтересовать студентов актуальностью и, как следствие, необходимостью освоения этой темы.

На семинаре следует отметить то, что во многих современных исследованиях при различной статистической обработке данных решаются задачи, в которых общее количество признаков, описывающих объект исследования, превышает одну или несколько сотен. В этом случае возникает необходимость представления наблюдений в виде некоторого вектора с существенно меньшим количеством показателей [1]. Данная необходимость обусловлена многими причинами, а именно:

- наглядное представление (визуализация) исходных данных. В этом случае происходит проецирование на специально сконструированное трехмерное пространство, плоскость или прямую,
- упрощение счета и интерпретации результатов,

- сжатие информации без видимых потерь информативности, например, при необходимости ее хранения.

Как правило, набор данных, полученных для исследования, содержит такие недостатки как

- дублирование данных, которое появляется в связи с тем, что признаки могут быть сильно взаимосвязанными,
- некоторые отдельные признаки мало меняются при переходе от одного объекта к другому,
- по некоторым признакам есть возможность произвести объединение или суммирование.

Все это является предпосылками для того, чтобы имела место задача снижения размерности.

Формально, необходимо поставить задачу о переходе к новому набору данных с наименьшими потерями в информативности. Для этого придется задать некоторое выражение, имеющее понятие меры информативности.

Далее, студентам необходимо сформулировать план семинара, а именно:

1. вывод и математическое обоснование метода главных компонент;
2. примеры применения метода главных компонент [2, 3].

Методология и результаты исследования

Математическое описание метода главных компонент (PCA – principal component analysis)

Для дальнейшей практической реализации необходимо начать с математического обоснования метода PCA. Приведем один из возможных вариантов обоснования.

Для описания метода главных компонент введем p -мерный случайный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$, который имеет ковариационную матрицу Σ . Будем также предполагать для простоты изложения, что $M[X] = 0$.

На практике, в реальных задачах, исследователь может располагать лишь оценками математического ожидания $\hat{\mu}$ и ковариационной матрицы $\hat{\Sigma}$, тогда, соответственно, используются выборочное среднее и выборочная ковариация.

Для реализации цели работы, будем искать ортогональные нормированные линейные комбинации исходных показателей $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$, то есть требуется определить p нормированных линейных комбинаций y_1, \dots, y_p переменных x_1, \dots, x_p таких, что для каждого $k = 1, \dots, p$, y_k имеет наибольшую дисперсию среди всех нормированных линейных комбинаций при условии некоррелированности с предыдущими комбинациями y_1, \dots, y_{k-1} .

Такие линейные комбинации называются **главными компонентами** системы случайных величин x_1, \dots, x_p .

Первой главной компонентой переменных x_1, \dots, x_p называется нормированная линейная комбинация этих переменных, обладающая максимальной дисперсией.

Второй главной компонентой переменных x_1, \dots, x_p называется нормированная линейная комбинация этих переменных, обладающая максимальной дисперсией при условии некоррелированности с первой главной компонентой.

Третьей главной компонентой переменных x_1, \dots, x_p называется нормированная линейная комбинация этих переменных, обладающая максимальной дисперсией при условии некоррелированности с первой и второй главными компонентами и так далее.

При проведении практических исследований наибольший интерес представляют переменные или их линейные комбинации, имеющие максимальную дисперсию. Такие комбинации несут в себе максимальную информацию о том или ином показателе или признаке.

Пусть U - ортогональная матрица, с помощью которой Σ приводится к диагональному виду Λ , то есть

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix},$$

причем, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0$. На практике, как правило, все $\lambda_i, i = 1, \dots, p$, различны и положительны, поэтому в дальнейшем будем придерживаться этих соображений.

Тогда

$$\Lambda = U^T \Sigma U.$$

Следовательно, λ_k - k -ое по величине собственное значение матрицы Σ , а u_k - k -ый столбец матрицы U , являющийся собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_k , т.е.

$$\Sigma u_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, \dots, p.$$

Как было сказано выше, будем искать нормированные линейные комбинации. Для этого введем в рассмотрение вектор $Y = (y_1, \dots, y_p)$, который задается равенством

$$Y = U^T X.$$

Вычислим соответствующую ковариационную матрицу. Так как $Mx_i = 0$, то

$$My_1 = My_2 = \dots = My_p = 0.$$

Следовательно,

$$\Sigma_Y = M[YY^T] = M[U^T X X^T U] = U^T M[XX^T] U = U^T \Sigma U = \Lambda.$$

Из полученного соотношения следует, что y_1, \dots, y_p некоррелированы и $Dy_i = \lambda_i, i = 1, \dots, p$.

Осталось показать, что y_1 нормированная линейная комбинация с максимальной дисперсией. Для этого запишем произвольную нормированную линейную комбинацию вида

$$y^* = c_1 x_1 + \dots + c_p x_p = c^T X, \quad c = (c_1, \dots, c_p),$$

и $c^T c = c_1^2 + \dots + c_p^2 = 1$. Тогда

$$y^* = c^T X = c^T U Y = c^{*T} Y = c_1^* y_1 + \dots + c_p^* y_p, \quad c^* = U^T c.$$

При этом $c^{*T} c^* = 1$, так как преобразование является ортогональным.

Тогда

$$Dy^* = \sum_{i=1}^p c_i^{*2} \lambda_i = \lambda_1 + \sum_{i=2}^p c_i^{*2} (\lambda_i - \lambda_1), \quad \text{так как } c_1^{*2} = 1 - \sum_{i=2}^p c_i^{*2}.$$

Данное выражение достигает максимума при $c_2^* = \dots = c_p^* = 0$, так как $\lambda_1 > \lambda_i$ при $i \geq 2$.

Аналогично, y_2 представляет собой нормированную линейную комбинацию, некоррелированную с y_1 и имеющую наибольшую дисперсию (из того, что $y^* = \sum_{i=1}^p c_i^* y_i$ некоррелирована с y_1 , следует $c_1^* = 0$, далее применяются те же рассуждения).

Таким образом, **первая главная компонента**

$$y_1 = u_1^T x = u_{11} x_1 + u_{21} x_2 + \dots + u_{p1} x_p \quad \text{и} \quad Dy_1 = \lambda_1.$$

Вторая главная компонента

$$y_2 = u_2^T x = u_{12} x_1 + u_{22} x_2 + \dots + u_{p2} x_p \quad \text{и} \quad Dy_2 = \lambda_2.$$

К-я главная компонента

$$y_k = u_k^T x = u_{1k} x_1 + u_{2k} x_2 + \dots + u_{pk} x_p \quad \text{и} \quad Dy_k = \lambda_k.$$

Замечание: нахождение главных компонент и их значений сводится, по существу, к нахождению собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы.

Если рассмотреть вопрос, связанный с информативностью метода главных компонент, то можно ввести параметр, который даст критерий информативности

$$q_k = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}.$$

Проиллюстрируем на простом численном примере предложенный метод снижения размерности.

Пример. По данным измерений длины - \tilde{x}_1 , ширины - \tilde{x}_2 и высоты - \tilde{x}_3 панциря 24 особей одного из видов черепах определена выборочная ковариационная матрица [4]

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 451,39 & 271,17 & 168,70 \\ 271,17 & 171,73 & 103,29 \\ 168,70 & 103,29 & 66,65 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы данной матрицы. Для этого найдем корни уравнения:

$$\det \left| \widehat{\Sigma} - \lambda E \right| = \begin{vmatrix} 451,39 - \lambda & 271,17 & 168,70 \\ 271,17 & 171,73 - \lambda & 103,29 \\ 168,70 & 103,29 & 66,65 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления эти корни в порядке возрастания можно записать

$$\lambda_1 = 680,40, \quad \lambda_2 = 6,50, \quad \lambda_3 = 2,86.$$

После этого вычислим собственные векторы

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0,8126 \\ 0,4955 \\ 0,3068 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -0,5454 \\ 0,8321 \\ 0,1006 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -0,2054 \\ -0,2491 \\ 0,9465 \end{pmatrix}.$$

Тогда в качестве главных компонент получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1^T x = 0,81x_1 + 0,50x_2 + 0,31x_3, \\ y_2 &= u_2^T x = -0,55x_1 + 0,83x_2 + 0,10x_3, \\ y_3 &= u_3^T x = -0,21x_1 - 0,25x_2 + 0,95x_3. \end{aligned}$$

Под x_1 , x_2 и x_3 подразумеваются отклонения размеров длины, ширины и высоты панциря от своих средних значений.

Рассмотрим критерий информативности метода главных компонент. Для этого вычислим относительную долю суммарной дисперсии, обусловленную одной, двумя и тремя главными компонентами

$$q_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 0,9864,$$

$$q_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 0,9958,$$

$$q_3 = 1.$$

После проделанных вычислений можно сделать вывод, что почти вся информация о специфике размеров панциря данного вида черепах содержится в одной лишь

первой компоненте, которую естественно использовать при классификации исследуемых особей черепах.

Продемонстрируем работу метода главных компонент с использованием языка Python и его библиотеки Scikit-learn [5]. Для этого используем известный набор данных - Ирисы Фишера. Ирисы Фишера состоят из данных о 150 экземплярах ириса трех видов: Ирис щетинистый (*Iris setosa*), Ирис виргинский (*Iris virginica*) и Ирис разноцветный (*Iris versicolor*). Для каждого экземпляра измерялись четыре характеристики (в сантиметрах):

- Длина наружной доли [околоцветника](#) ([англ. sepal length](#)).
- Ширина наружной доли околоцветника ([англ. sepal width](#)).
- Длина внутренней доли околоцветника ([англ. petal length](#)).
- Ширина внутренней доли околоцветника ([англ. petal width](#)).

```
import sklearn
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn import manifold, datasets

from sklearn import decomposition
from sklearn import datasets

#скачивание данных с ирисами Фишера
# 1. Длина наружной доли околоцветника (англ. sepal length);
# 2. Ширина наружной доли околоцветника (англ. sepal width);
# 3. Длина внутренней доли околоцветника (англ. petal length);
# 4. Ширина внутренней доли околоцветника (англ. petal width).
iris= datasets.load_iris()

# Целевая переменная – это сорт Ириса:
# 0 – Setosa, 1 – Versicolor, 2 – Virginica.
X = iris.data
Y = iris.target

# Применяем алгоритм PCA
pca = decomposition.PCA()
pca.fit(X)

# Вычисляем дисперсии
explained_variance = pca.explained_variance_
explained_variance
```

Результат работы скрипта:

```
array([4.22824171, 0.24267075, 0.0782095 , 0.02383509])
```

```
# Критерий информативности. Вычисляем относительную долю суммарной дисперсии,
# обусловленную одной, двумя, тремя и четырьмя главными компонентами
explained_variance_ratio = pca.explained_variance_ratio_
explained_variance_ratio
```

Результат работы скрипта:

```
array([0.92461872, 0.05306648, 0.01710261, 0.00521218])
```

```
# Проверим с помощью приведенной ранее теории и пипру полученные результаты
X = np.transpose(X)
# Вычисляем ковариационную матрицу
covmat = np.cov(X)
covmat
# Находим собственные значения и собственные векторы ковариационной матрицы
A = np.linalg.eig(covmat)
A
```

Результат работы скрипта:

```
(array([4.22824171, 0.24267075, 0.0782095 , 0.02383509]),
array([[ 0.36138659, -0.65658877, -0.58202985, 0.31548719],
       [-0.08452251, -0.73016143, 0.59791083, -0.3197231],
       [ 0.85667061, 0.17337266, 0.07623608, -0.47983899],
       [ 0.3582892 , 0.07548102, 0.54583143, 0.75365743]]))
```

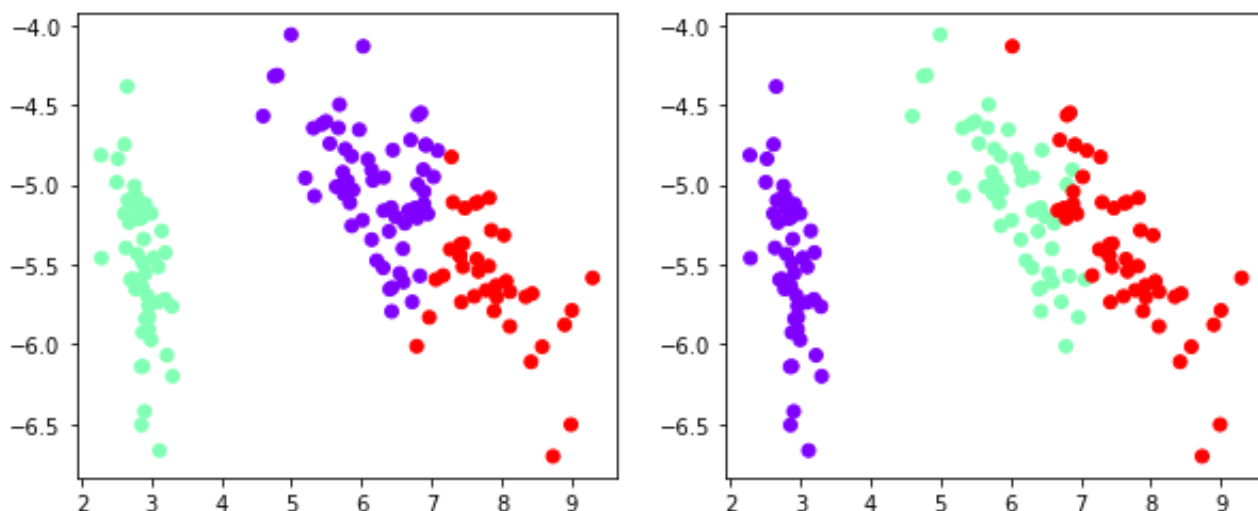
```
Eigvect = A[1]
# Выбираем первую и вторую главные компоненты
MainComp = np.transpose(Eigvect[:,0:2])
# Строим массив данных для кластеризации
X_new = np.dot(MainComp,X)
X_new = np.transpose(X_new)
```

Проведем процесс кластеризации с помощью алгоритма K-means [6, 7].

```
from sklearn.cluster import KMeans
k_means = KMeans(n_clusters = 3).fit(X_new)

fig = plt.figure(figsize=(10, 4))
ax = fig.add_subplot(121)
plt.scatter(X_new[:, 0], X_new[:, 1], c = k_means.labels_,
           marker = 'o', cmap = 'rainbow')
ax = fig.add_subplot(122)
plt.scatter(X_new[:, 0], X_new[:, 1], c = Y, marker = 'o', cmap = 'rainbow')
```

На рисунках ниже приведен результат работы алгоритма K-means (левый рисунок) и множество точек с изначально известными метками кластеров (правый рисунок). Следует обратить внимание, что для кластеризации понадобились не все четыре признака, определяющие сорт ириса, а только две линейные нормированные комбинации, что дает возможность более наглядно представить результат кластеризации.



Заключение

В работе был предложен материал для проведения занятия по методу главных компонент. Данное занятие является практикоориентированным, но, вместе с тем, на нем предложено математическое обоснование метода и приведены примеры его использования. А также наглядно продемонстрирована и обоснована актуальность данного метода. Успешным результатом работы на семинаре является самостоятельное выполнение задания студентами для нового набора данных.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 607 с.
2. Андерсен Т. Введение в многомерный статистический анализ. — М.: Физматгиз, 1963. -500 с.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. А. Введение в математическую статистику. — М.: ЛЕНАНД, 2017. -608 с.
4. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Указ. соч.
5. <https://scikit-learn.org/stable/index.html>.
6. Панкратов В. А., Тверская Е. С. Детерминистский подход в теории распознавания образов и его внедрение в учебный процесс / Modern European Researches. 2021. Т 1. № 2. С. 122-131.
7. Дж. Ту, Горсалес Р. Принципы распознавания образов. -М.: Мир 1978. - 411 с.

Elena S. Tverskaya,

Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

e_tverskaya@bmstu.ru

Vladimir A. Pankratov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ivankovpl@mail.ru

Reducing the dimension of the feature space. the principal component analysis (PCA).

Abstract. The proposed work reflects the teaching methodology of one of the most important tasks of unsupervised learning - lowering the dimension of the feature space using the principal component analysis method (PCA - principal component analysis). The relevance of this work lies in the complexity of the perception of this topic by students of different areas of training and specialties. The main purpose of the work is to propose a possible methodology for presenting the topic with a practice-oriented approach, which was tested at the seminar. The result of the seminar was the successful independent work of students with a new set of data.

Keywords: the principal component analysis (PCA), variance, covariance matrix, machine learning, clustering.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ «РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ»

Аннотация

С целью повышения уровня математической подготовки студентов технических специальностей необходимо особое внимание уделять базовым вопросам математики, без прочного знания и понимания которых невозможно успешное освоение многих разделов высшей математики, необходимых для успешного обучения в высшем учебном заведении. В данной статье на примере организации работы студентов по решению задач по теме «разложение функций в тригонометрический ряд Фурье», демонстрируются особенности изучения данного вопроса. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей и студентов специальностей технического и математического направлений.

Ключевые слова

методические особенности преподавания отдельных вопросов высшей математики, тригонометрические ряды Фурье

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Бирюков Олег Николаевич,

кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Введение

Одним из важных навыков для студента, приобретаемого в процессе изучения высшей математики, является навык решения задач разложения функций в тригонометрические ряды Фурье. Эта тема является обязательной в курсе математического анализа для студентов математических и технических специальностей. Данный раздел предоставляет хороший материал для совершенствования навыка работы с теоретическим материалом. Успешное освоение этой темы помогает студентам осваивать также и другие математические и прикладные дисциплины.

Данная статья является логическим продолжением работы [1], в которой рассмотрены методические аспекты проведения занятий на тему «разложение функций в степенные ряды».

Методология и результаты исследования

Тема «разложение функций в тригонометрический ряд Фурье» обычно идет в курсе математического анализа. На нее выделяется в зависимости от сложности и продолжительности курса от двух до четырёх часов. При этом предполагается, что

студенты уже знают основные способы интегрирования, умеют раскладывать функции в степенные ряды.

Теоретический материал [2,3], примеры решения задач [4-5], задачи для самостоятельного решения преподаватель может разместить на своем сайте, персональной странице официального сайта вуза или использовать облачные технологии, чтобы любой из студентов имел доступ ко всем материалам в любое удобное время. Делать это следует за некоторое время до проведения практических занятий.

Перед изучением данного вопроса преподаватель организует подготовительную работу аудиторного или внеаудиторного характера по активизации знаний ранее изученных вопросов, необходимых для успешного освоения данной темы. В результате подготовительной работы студент должен знать следующие определения и теоремы: числовой ряд, необходимый признак сходимости числового ряда, достаточные признаки сходимости рядов, функциональный ряд, степенной ряд, равномерная сходимость рядов, основные способы интегрирования.

Раскрытие основной темы занятий

Условия Дирихле. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[a, b]$, если выполнены следующие три условия:

- 1) $f(x)$ равномерно ограничена на $[a, b]$;
- 2) имеет не более, чем конечное число точек разрыва, и все они 1-го рода;
- 3) имеет не более, чем конечное число точек строгого экстремума.

Тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$

Теорема Дирихле:

Если в интервале $(-\pi, \pi)$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то на отрезке $[-\pi, \pi]$ она разложима в тригонометрический ряд Фурье:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (1)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (3)$$

При этом $f(x) = S(x)$ во всякой точке x этого интервала, в которой $f(x)$ непрерывна. Если x - точка разрыва функции $f(x)$, принадлежащая $(-\pi, \pi)$, то значение суммы ряда Фурье $S(x)$ равно среднему арифметическому левого и правого пределов функции:

$$S(x) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)).$$

В концах интервала $x = -\pi$ и $x = \pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi+0) + f(\pi-0)).$$

Замечания к теореме Дирихле:

1) Если функция $f(x)$ определена на $(-\pi, \pi)$, то $S(x)$ определена на $(-\infty, \infty)$ и является периодической с периодом 2π ;

2) Функции $f(x)$ и $S(x)$ могут отличаться на отрезке $[-\pi, \pi]$ не более, чем в конечном числе точек (в точках разрыва функции $f(x)$ и на границах отрезка).

Пример 1. Найдем разложение на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} C_1, & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ C_2, & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Имеем, согласно формулам (2) и (3):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 C_1 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_2 dx = C_1 + C_2;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 C_1 \cos kx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_2 \cos kx dx = 0;$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 C_1 \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_2 \sin kx dx = \frac{1}{\pi k} (-C_1 \cos kx|_{-\pi}^0 - C_2 \cos kx|_0^{\pi}) = \\ &= \frac{1}{\pi k} (-C_1 + C_1 \cos k\pi - C_2 \cos k\pi + C_2) = \frac{C_2 - C_1}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ 2, & \text{при } k = 2n + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, согласно формуле (1), окончательно имеем:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{2(C_2 - C_1)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $(-\pi, \pi)$ и является четной на этом интервале, то функция $f(x) \cos kx$ также является четной на $(-\pi, \pi)$, а функция $f(x) \sin kx$ - нечетной на этом интервале. Откуда получаем:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0. \end{aligned}$$

Если же $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $(-\pi, \pi)$ и является нечетной на этом интервале, то функция $f(x) \cos kx$ также является нечетной на $(-\pi, \pi)$, а функция $f(x) \sin kx$ - четной на этом интервале. Откуда получаем:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем разложение функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Функция $f(x) = x^2$ является четной, поэтому $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi k} (x^2 \sin kx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin kx dx) = \frac{4}{\pi k^2} x \cos kx|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k^3} \sin kx|_0^{\pi} = \frac{4}{k^2} (-1)^k$$

Откуда, согласно формуле (3), окончательно получаем:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

Разложение следующих функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [4,5]:

$$1) f(x) = x; \quad 2) f(x) = \cos ax; \quad 3) f(x) = \sin ax; \quad 4) f(x) = e^{ax}.$$

Тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[-L, L]$

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $(-L, L)$, то на отрезке $[-L, L]$ она разложима в тригонометрический ряд Фурье:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L}, \quad (4)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi k x}{L} dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (6)$$

Пример 3. Найдем разложение функции $f(x) = e^x$ в ряд Фурье на отрезке $[-L, L]$.
Имеем, согласно формулам (5) и (6):

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L e^x dx = \frac{e^L - e^{-L}}{L},$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L e^x \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \left(e^x \cos \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{k\pi}{L} \int_{-L}^L e^x \sin \frac{k\pi x}{L} dx \right) = \frac{e^L - e^{-L}}{L} (-1)^k + \frac{k\pi}{L^2} e^x \sin \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^L -$$

$$- \frac{k^2 \pi^2}{L^3} \int_{-L}^L e^x \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{e^L - e^{-L}}{L} (-1)^k - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} a_k.$$

Откуда получаем: $a_k = \frac{e^L - e^{-L}}{L^2 + \pi^2 k^2} (-1)^k$.

Аналогичными рассуждениями находим:

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L e^x \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{\pi k (e^L - e^{-L})}{L^2 + \pi^2 k^2} (-1)^{k+1}.$$

Откуда, согласно формуле (4), окончательно получаем:

$$S(x) = \frac{e^L - e^{-L}}{2L} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^L - e^{-L}}{L^2 + k^2 \pi^2} \cos \frac{\pi k x}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k\pi) e^L - e^{-L}}{L^2 + k^2 \pi^2} \sin \frac{\pi k x}{L}.$$

Разложение следующих функций на указанных отрезках также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [4,5]:

$$1) f(x) = |x|, \quad (-1 < x < 1); \quad 2) f(x) = 15 - x, \quad (-5 < x < 5);$$

$$3) f(x) = x \cos x, \quad (-\pi/2 < x < \pi/2); \quad 4) f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad (-2\pi < x < 2\pi).$$

Тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[A, B]$

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на (A, B) , то на отрезке $[A, B]$ она разложима в тригонометрический ряд Фурье:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kx}{B-A} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi kx}{B-A}, \quad (7)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{2}{B-A} \int_A^B f(x) \cos \frac{2\pi kx}{B-A} dx \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad (8)$$

$$b_k = \frac{2}{B-A} \int_A^B f(x) \sin \frac{2\pi kx}{B-A} dx \quad (k=1, 2, 3, \dots); \quad (9)$$

Пример 4. Найдем разложение функции $f(x) = x^2 + x$ в ряд Фурье на отрезке $[1, 3]$.

Имеем, согласно формулам (8) и (9):

$$a_0 = \frac{2}{B-A} \int_A^B f(x) dx = \frac{2}{2} \int_1^3 (x^2 + x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \frac{38}{3};$$

$$a_k = \int_1^3 (x^2 + x) \cos \pi kx dx = -\frac{x^2 + x}{\pi k} \sin \pi kx \Big|_1^3 + \frac{1}{\pi k} \int_1^3 (2x + 1) \sin \pi kx dx =$$

$$= \frac{2x+1}{\pi^2 k^2} \cos \pi kx \Big|_1^3 - \frac{2}{\pi^3 k^3} \sin \pi kx \Big|_1^3 = \frac{1}{\pi^2 k^2} (7 \cos 3\pi k - 3 \cos \pi k) = \frac{(-1)^k 4}{\pi^2 k^2};$$

$$b_k = \int_1^3 (x^2 + x) \sin \pi kx dx = \frac{x^2 + x}{\pi k} \cos \pi kx \Big|_1^3 + \frac{2x+1}{\pi^2 k^2} \sin \pi kx \Big|_1^3 - \frac{2}{\pi^3 k^3} \cos \pi kx \Big|_1^3 = (-1)^k \left(\frac{10}{\pi k} - \frac{4}{\pi^3 k^3} \right)$$

Откуда, согласно формуле (7), окончательно получаем:

$$S(x) = \frac{19}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2 \pi^2} \cos \pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{10}{k\pi} - \frac{4}{k^3 \pi^3} \right) \sin \pi kx.$$

Разложение следующих функций на указанных отрезках также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [4,5]:

- 1) $f(x) = x^2, (2\pi < x < 3\pi);$
- 2) $f(x) = 2x, (0 < x < 1);$
- 3) $f(x) = \begin{cases} 2x, x \in (0, 2) \\ 6-x, x \in (2, 3) \end{cases};$
- 4) $f(x) = \begin{cases} x, x \in (0, 1) \\ 1, x \in (1, 2) \end{cases}.$

Неполные ряды Фурье

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $(0, L)$, то ее можно продолжить на интервал $(-L, L)$ следующими способами:

- 1) $f_1(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, L) \\ f(-x), x \in (-L, 0) \end{cases};$
- 2) $f_2(x) = \begin{cases} f(x), x \in (0, L) \\ -f(-x), x \in (-L, 0) \end{cases}.$

Эти функции удовлетворяют на $(-L, L)$ условиям Дирихле, а следовательно, они разложимы в тригонометрический ряд Фурье. При этом $f_1(x)$ - четная функция на интервале $(-L, L)$, а функция $f_2(x)$ - нечетная. Поэтому тригонометрические ряды Фурье $S_1(x)$ и $S_2(x)$ этих функций имеют вид:

$$S_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{L}, \text{ где } a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{\pi k x}{L} dx \quad (k=0,1,2,\dots);$$

$$S_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L}, \text{ где } b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx \quad (k=1,2,3,\dots).$$

Эти ряды Фурье на отрезке $[0, L]$ являются также и рядами Фурье исходной функции $f(x)$. При этом разложение $S_1(x)$ называется разложением функции $f(x)$ в неполный ряд Фурье по косинусам кратных дуг, а разложение $S_2(x)$ - разложением функции $f(x)$ в неполный ряд Фурье по синусам кратных дуг.

Пример 5. Найдем разложения функции $f(x) = x$ в неполные ряды Фурье на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам и синусам кратных дуг.

Функция $f_1(x) = |x|$ является четным продолжением исходной функции на интервал $(-\pi, \pi)$, а функция $f_2(x) = x$ - нечетным. Имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi k} (x \sin kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin kx dx) = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n \\ -\frac{4}{k^2 \pi}, & \text{при } k = 2n + 1 \end{cases}$$

Откуда получаем $S_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2k+1)x$ - искомое разложение функции $f(x) = x$ в неполный ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{\pi k} (x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kx dx) = -\frac{2 \cos k\pi}{k} + \frac{2}{k^2 \pi} \sin kx \Big|_0^{\pi} = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Откуда получаем $S_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ - искомое разложение функции $f(x) = x$ в неполный ряд Фурье по синусам кратных дуг.

Разложение следующих функций на указанных отрезках в неполные ряды Фурье также следует разобрать или дать студентам для самостоятельного выполнения [4,5]:

$$1) f(x) = x^2, (0 < x < 1); \quad 2) f(x) = e^{ax}, (0 < x < \pi); \quad 3) f(x) = \sin \frac{x}{2}, (0 < x < \pi);$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, L/2) \\ 0, & x \in (L/2, L) \end{cases}; \quad 5) f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi/2) \\ \pi - x, & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}; \quad 6) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 2) \\ 3 - x, & x \in (2, 3) \end{cases}.$$

Заключение

При организации аудиторной и внеаудиторной работы студентов по теме «разложение функций в тригонометрический ряд Фурье» можно руководствоваться изложенным материалом. В работе разобраны примеры, указаны наглядные алгоритмы, даны пояснения по организации учебного процесса и решению задач, что позволяют в сжатые сроки и в полном объеме успешно усвоить учебный материал.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Хасанов Н.А., Бирюков О.Н. Методические особенности проведения занятий для студентов технических специальностей по теме «Разложение функций в степенные ряды» // Modern European Researches, 2021. - Т. 1, № 2. - Р. 131-136.
2. Власова Е.А. Ряды. - М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002. - 612 с.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984, - 640 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу для вузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений. - М.: Изд-во Астрель, 2004. - 495 с.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московского ун-та, ЧеРо, 1997. - 624 с.

Nail A. Khasanov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

nail_khasanov@mail.ru

Oleg N. Biryukov,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

onbiryukov@bmstu.ru

Methodological aspects of conducting classes on the topic "decomposition of functions into a trigonometric Fourier series"

Abstract. In order to increase the level of mathematical training of students of technical specialties, it is necessary to pay special attention to basic questions of mathematics, without a solid knowledge and understanding of which it is impossible to successfully master many sections of higher mathematics necessary for successful study at a higher educational institution. In this article, using the example of the organization of students' work on solving problems on the topic "decomposition of functions into a trigonometric Fourier series", the features of studying this issue are demonstrated. The content of the article is of interest to teachers and students of technical and mathematical specialties.

Keyword: methodological features of teaching certain issues of higher mathematics, trigonometric Fourier series.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Аннотация

Актуальность проблемы обусловлена необходимостью приобретения студентами навыков владения математическими методами для решения прикладных задач. Целью работы является продемонстрировать основные этапы математического моделирования в доступной форме для студентов младших курсов инженерных специальностей. Для этого на примере изучения темы «Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений» рассмотрены задачи механики, при решении которых реализован данный метод. Все этапы решений предложенных задач содержат пояснения. В работу включено задание для самостоятельной работы. Данная статья может быть полезна студентам при изучении дисциплин «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Операционное исчисление», а также преподавателям при подготовке к проведению практических занятий.

Ключевые слова

математическое моделирование, физическая модель, математическая модель, задача Коши, обыкновенные дифференциальные уравнения, механика

АВТОР

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Введение

Математическое моделирование широко применяется при исследовании многих физических процессов и явлений [1]. Это связано с тем, что различные по природе процессы описываются одними и теми же типами уравнений в частных производных [2-4]. При изучении дисциплины «Уравнения математической физики», читаемой студентам старших курсов, особое место отведено методам математической физики [5,6], применяемых при моделировании различных физических процессов. Поэтому важно, на начальном этапе обучения теории дифференциальных уравнений, продемонстрировать студентам младших курсов примеры применения математического моделирования [7]. С этой целью, при изложении темы «Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений» рассмотрены задачи, при решении которых реализуется данный метод.

Методология и результаты исследования

Перечислим планируемые результаты освоения темы «Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений». Студенты должны *знать*

- основные этапы математического моделирования,

– методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами;

уметь

– использовать основные законы естественнонаучных и инженерных дисциплин,

– применять методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами;

владеть

– методами высшей математики и их применением к решению прикладных задач.

При организации проведения практических занятий по теме «Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений» преподавателю необходимо учитывать будущую инженерную специальность студентов. Для этого можно предложить задания с учетом междисциплинарных связей и проиллюстрировать основные этапы математического моделирования на примере решения задач механики, теплофизики, электротехники или сопротивлении материалов [8,9].

Далее будут рассмотрены примеры применения данного метода к решению задач механики. С этой целью в табл.1 приведены задания для повторения некоторых разделов ранее освоенных дисциплин.

Таблица 1

Актуализация знаний по ранее изученным разделам дисциплин

Дисциплина	Задание
Физика: Механика	Сформулируйте: – второй закон Ньютона; – закон Гука; – закон Архимеда.
Обыкновенные дифференциальные уравнения Операционное исчисление	Решите задачу Коши: $\begin{cases} x''(t) + k^2x(t) = 0, & t > 0; \\ x(0) = x_0, & x'(0) = 0. \end{cases}$

Для иллюстрации основных этапов математического моделирования приводится подробный разбор решения задачи преподавателем (задача №1).

На этапе обучения можно предложить студентам выполнить следующее задание (задача №2):

1) для данной физической модели (без учета сопротивления среды) преподаватель формулирует математическую модель, осуществляет выбор метода решения задачи и его реализацию;

2) перед студентами ставится задача: уточнить математическую модель (учесть сопротивление среды), получить решение задачи выбранным методом; провести сравнительный анализ полученных решений для рассмотренных моделей.

Результат выполнения домашнего задания (задача №3) студенты представляют в виде отчета.

Следует отметить, что материалы данной статьи могут быть использованы при проведении практических занятий как для студентов 1-го курса при изучении дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения», так и для студентов 2-го курса при изучении дисциплины «Операционное исчисление». При этом уровень сложности прикладной задачи необходимо учитывать исходя из того, какие естественнонаучные и инженерные дисциплины были изучены студентами.

Основные этапы математического моделирования

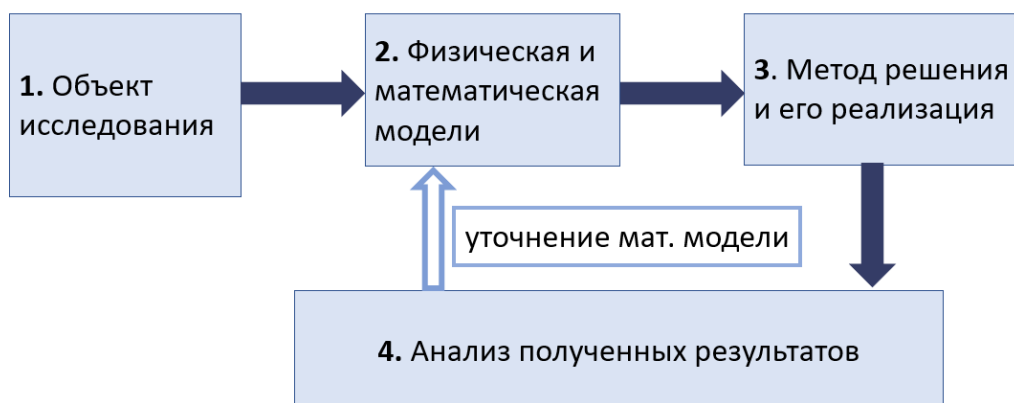


Рис. 1

Описание основных этапов математического моделирования в соответствии с приведенной схемой (см. рис. 1):

на 1-м этапе осуществляется конкретизация постановки задачи и формулируется цель исследования;

на 2-м этапе выбирают физическую модель процесса (принимают допущения: какими факторами можно пренебречь);

далее физической модели ставится в соответствие математическая модель – математическое описание физического процесса с помощью алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений, которые выражают физические законы [10,11];

на 3-м этапе осуществляется выбор метода решения и его реализация;

следует отметить, что в данной работе применяются только аналитические методы решения, известные обучающимся; для решения сложных задач математической физики могут применяться и другие методы [12,13];

на 4-м этапе проводится анализ полученных результатов (соответствие экспериментальным данным) и при необходимости уточняется математическая модель.

Примеры решения задач

Приведем подробное решение задачи, предложенной для самостоятельной работы, из сборника [14].

Задача №1. Мяч массы $m = 400$ г брошен вверх со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча и равно $0,0048$ Н при скорости 1 м/с. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение. Целью исследования в данной задаче является нахождение времени подъема мяча и наибольшей высоты подъема. Для этого необходимо получить зависимости скорости движения и высоты подъема мяча от времени.

В рассматриваемой физической модели учитывается сопротивление воздуха. Перейдем к построению математической модели.

Поскольку движение мяча происходит вдоль вертикальной прямой, то направим ось Oy вверх, поместив начало координат O в точке бросания (см. рис. 2). На мяч действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха \vec{Q} .

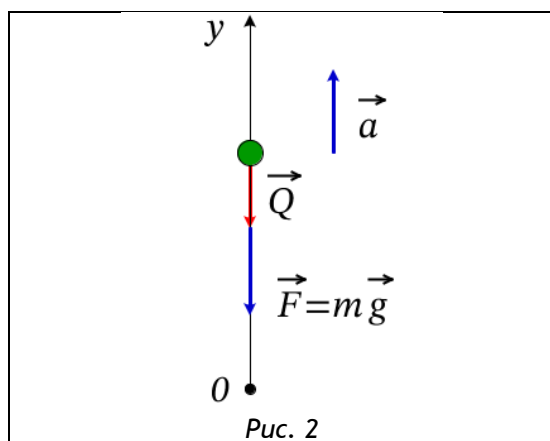


Рис. 2

Согласно второму закону Ньютона, имеем $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$. Так как в начальный момент времени $t = 0$ скорость мяча равна v_0 , то приходим к задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v^2, & 0 < t < T; \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

где k – коэффициент пропорциональности, который следует определить из условия задачи, T – время подъема мяча на наибольшую высоту.

В результате получена *математическая модель* рассматриваемого процесса. *Метод решения задачи Коши*: разделим переменные [15]

$$\frac{dv}{g + \frac{k}{m}v^2} = -dt;$$

затем проинтегрируем дифференциальное уравнение [16] и в результате получим соотношение $\sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{arctg}\left(v \sqrt{\frac{k}{mg}}\right) = C - t$.

Определим константу C из начального условия: $v(0) = v_0$, откуда находим

$$C = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{arctg}\left(v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}}\right).$$

В результате получена зависимость скорости движения мяча от времени:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{tg}\left[\sqrt{\frac{kg}{m}}(C - t)\right],$$

где значение константы C определено выше.

Найдем время T подъема мяча из условия $v(T) = 0$: $T = C$.

Зависимость высоты подъема мяча от времени будет равна:

$$y(t) = \int v(t)dt = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int \operatorname{tg}\left[\sqrt{\frac{kg}{m}}(C - t)\right] dt = \frac{m}{k} \ln \cos\left[\sqrt{\frac{kg}{m}}(C - t)\right] + B,$$

где константа B определяется из условия: $y(0) = 0$, откуда $B = -\frac{m}{k} \ln \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}C\right)$;

следовательно, $y(t) = \frac{m}{k} \ln \frac{\cos\left[\sqrt{\frac{kg}{m}}(C-t)\right]}{\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}C\right)}$, где $C = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{arctg}\left(v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}}\right)$.

Вычислим наибольшую высоту подъема мяча, учитывая найденное значение $T = C$:

$$h = y(T) = \frac{m}{k} \ln \frac{\cos \left[\sqrt{\frac{kg}{m}} (C - T) \right]}{\cos \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} C \right)} = \frac{m}{k} \ln \frac{1}{\cos \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} C \right)} = -\frac{m}{k} \ln \cos \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} C \right) =$$

$$= -\frac{m}{k} \ln \cos \operatorname{arctg} \left(v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} \right) = -\frac{m}{k} \ln \frac{1}{\sqrt{1 + v_0^2 \frac{k}{mg}}} = \frac{m}{2k} \ln \left(1 + v_0^2 \frac{k}{mg} \right).$$

Результаты вычислений: так как по условию задачи сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $Q = 0,0048$ Н при скорости $v' = 1$ м/с, то значение коэффициента k равно $0,0048$ кг/м. Подставляя в полученные формулы для T и h известные величины (v_0, m, k, g), находим значения искомых величин: $T \approx 1,75$ с, $h \approx 16,3$ м.

Анализ полученных результатов: на рис. 3 и 4 соответственно построены графики зависимостей скорости движения и высоты подъема мяча от времени. Проведено сопоставление полученных результатов для двух моделей при заданных значениях v_0, m, k, g :

- 1) без учета сопротивления воздуха $v(t) = 20 - 10t$, $y(t) = 20t - 5t^2$;
 (модель известна из курса физики [17]: $v(t) = v_0 - gt$, $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$);

искомые величины определяются по формулам: $T = \frac{v_0}{g}$, $h = \frac{v_0^2}{2g}$, и их значения равны $T = 2$ с, $h = 20$ м;

- 2) с учетом сопротивления воздуха $v(t) = \frac{50}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{3}}{5} (C - t) \right]$,

$$y(t) = \frac{250}{3} \ln \frac{\cos \left[\frac{\sqrt{3}}{5} (C - t) \right]}{\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{5} C \right)}, \quad \text{где } C = \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{5} \sqrt{3} \right).$$

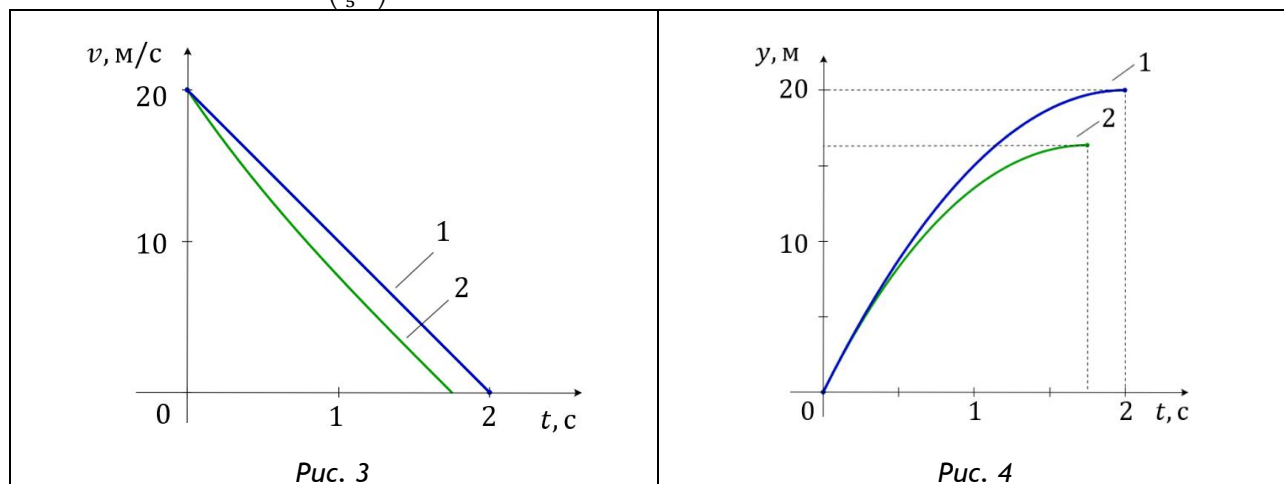


Рис. 3

Рис. 4

Сравнение результатов расчетов, проведенных для двух моделей, описывающих движение мяча, показало, что полученные значения времени подъема мяча и наибольшей высоты подъема отличаются более чем на 10%.

Далее перейдем к рассмотрению задачи из сборника [18].

Задача №2. Цилиндр массой m , радиусом r и высотой h подвешен на пружине, верхний конец которой закреплен. Цилиндр погружен в воду. В положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину своей высоты. В начальный момент времени цилиндр был погружен в воду на $2/3$ своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Считая жесткость пружины равной s и предполагая, что действие воды сводится к добавочной архимедовой силе, определить движение цилиндра относительно положения равновесия. Принять удельный вес воды равным γ .

Определить, как изменится колебательное движение цилиндра, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости и равно αv .

Решение. Целью исследования в данной задаче является получение закона движения цилиндра.

Сначала рассмотрим физическую модель, в которой не учитывается сопротивление воды.

Перейдем к построению *математической модели*.

Так как движение цилиндра происходит вдоль вертикальной прямой, то направим ось Oy вниз, поместив начало координат O в точке положения равновесия. На цилиндр действуют: сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, сила Архимеда \vec{F}_A и сила упругости пружины \vec{N} (см. рис. 5).

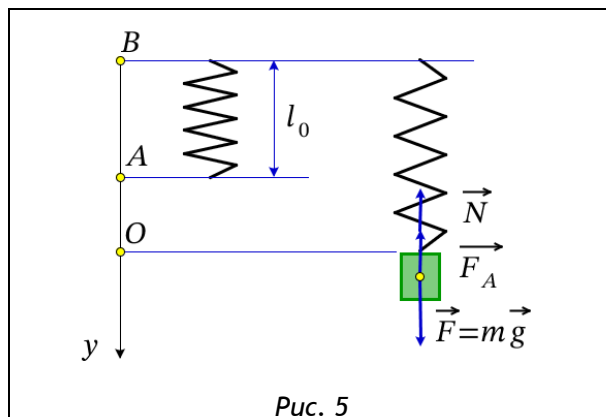


Рис. 5

Пусть $AB = l_0$ – длина нерастянутой пружины, тогда $AO = \lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины, которое может быть найдено из условия равновесия цилиндра: $m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} = 0$, или, в проекции на ось Oy , $mg = \gamma\pi r^2 \frac{h}{2} + c\lambda_{ст}$. Здесь учтено, что в положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину своей высоты. Отсюда получаем $\lambda_{ст} = \frac{1}{c} \left(mg - \gamma\pi r^2 \frac{h}{2} \right)$. При движении цилиндра, согласно второму закону Ньютона, имеем $m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - \gamma\pi r^2 \left(\frac{h}{2} + y \right) - c(\lambda_{ст} + y)$. Тогда, с учетом условия равновесия, получим $m \frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma\pi r^2 y - cy$, или $y''(t) + \frac{\gamma\pi r^2 + c}{m} y(t) = 0$. Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ цилиндр был погружен в воду на $2/3$ своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой, то $y(0) = \frac{h}{6}$, $y'(0) = 0$.

В результате приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} y''(t) + \frac{\gamma\pi r^2 + c}{m} y(t) = 0, & t > 0; \\ y(0) = \frac{h}{6}, & y'(0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получена *математическая модель* рассматриваемого процесса.

Метод решения задачи: при проведении практического занятия для студентов 1-го курса, как и в предыдущем примере, можно применить метод решения обыкновенного дифференциального уравнения, описанный в [19]; для студентов 2-го курса целесообразно воспользоваться методом операционного исчисления решения задачи Коши, приведенный в [20,21]. Выпишем основные результаты:

$$y(t) = \frac{h}{6} \cos \omega t, \quad \text{где } \omega^2 = \frac{\gamma\pi r^2 + c}{m}.$$

Уточнение математической модели: на цилиндр действуют сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, сила Архимеда \vec{F}_A , сила упругости пружины \vec{N} и сила сопротивления воды \vec{Q} .

Приведем основные этапы решения. Применяя второй закон Ньютона и учитывая начальные условия, приходим к задаче Коши:

$$\begin{cases} y''(t) + \frac{\alpha}{m}y'(t) + \frac{\gamma\pi r^2 + c}{m}y(t) = 0, & t > 0; \\ y(0) = \frac{h}{6}, & y'(0) = 0. \end{cases}$$

Следует обратить внимание студентов, что движение цилиндра будет колебательным при выполнении условия: дискриминант характеристического уравнения, соответствующего данному дифференциальному уравнению, отрицателен, то есть характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней [22,23]. Таким образом, параметры задачи должны удовлетворять неравенству:

$$\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{\gamma\pi r^2 + c}{m} < 0.$$

В результате решения задачи Коши, получим закон движения цилиндра:

$$y(t) = \frac{h}{6} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right) \sin\left(\varphi + \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}t\right),$$

где $\omega^2 = \frac{\gamma\pi r^2 + c}{m}$, а значение φ определяется из соотношения $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2m\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}}{\alpha}$.

Анализ полученных результатов: при рассмотрении модели, не учитывающей сопротивление воды, движение цилиндра представляет собой гармонические колебания относительно положения равновесия, а с учетом сопротивления воды – затухающие колебания.

Для самостоятельной работы студентов можно рекомендовать задачи из сборника [24]. Приведем один из вариантов домашнего задания.

Задача №3. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик массы m , находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения $r(t)$ шарика относительно трубки, если в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения. Начальная скорость шарика равна нулю. Требуется:

1) записать математическую модель для данной физической задачи и найти ее решение;

2) провести уточнение математической модели с учетом того, что шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней с трением, величина которого $R = 2m\mu\omega \frac{dr}{dt}$, где μ – коэффициент трения скольжения;

3) провести сравнительный анализ полученных решений для рассмотренных моделей; варьируя значения коэффициента μ , сделать выводы о его влиянии на решение задачи.

Заключение

В статье рассмотрены методические аспекты изложения темы «Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений» при изучении дисциплин «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Операционное исчисление». Приведены задачи механики, на примере решения которых продемонстрированы основные этапы математического моделирования. Показано, как выбор математической модели исследуемого физического процесса влияет на полученный результат.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 496 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебник. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 798 с.
3. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 416 с.
4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
5. Феоктистов В.В., Чигирёва О.Ю. Уравнения математической физики и специальные функции: методические указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 45 с.
6. Попова Е. М., Чигирёва О. Ю. Методика изложения темы «Решение краевых задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике методом Фурье» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». - 2018. - № V9 - С. 40-44. - URL: <http://e-koncept.ru/2018/186085.htm>
7. Егупова М.В. Математическое моделирование как необходимый компонент математического образования школьников // В книге: Практико-ориентированный подход в условиях трансформации образования, Саранск, 2022. С. 6.
8. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 272 с.
9. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Указ. соч.
11. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Указ. соч.
12. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. 636 с.
14. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Ч.2. Специальные разделы математического анализа: Учебное пособие для вузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 3-е изд., исправл., стер. М.: Альянс, 2016. 368 с.
15. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения: Учебник. М.: Изд-во ЛКИ, 2020. 312 с.
16. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Изд-во АСТ, 2020. 703 с.
17. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. Т1. Механика. Теплота. Молекулярная физика / Под ред. Г.С. Ландсберга. 14-е изд. М.: Физматлит, 2020. 608 с.
18. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1972. 448 с.
19. Эльсгольц Л.Э. Указ. соч.
20. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 228 с.
21. Ахметова Ф.Х., Чигирёва О.Ю. Методика изложения темы «Применение операционного исчисления к решению задачи Коши» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2017. №2. С. 154–164. URL: <http://e-koncept.ru/2017/170047.htm>
22. Эльсгольц Л.Э. Указ. соч.
23. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Указ. соч.
24. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Указ. соч.

Olga Yu. Chigiryova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
mkfn12@yandex.ru

Methodological aspects of the presentation of the topic "Applications of ordinary differential equations"

Abstract. The relevance of the problem is due to the need for students to acquire skills in mathematical methods for solving applied problems. The purpose of the work is to demonstrate the main stages of mathematical modeling in an accessible form for undergraduate students of engineering specialties. To do this, using the example of studying the topic "Applications of ordinary differential equations", the problems of mechanics are considered, in solving which this method is implemented. All stages of solving the proposed tasks contain explanations. The work includes a task for independent work. This article may be useful for students studying the disciplines "Ordinary differential equations" and "Operational calculus", as well as for teachers in preparation for practical classes.

Keywords: mathematical modeling, physical model, mathematical model, Cauchy problem, ordinary differential equations, mechanics.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕМ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Аннотация

Прикладные задачи в процессе обучения математики играют первостепенную роль, они могут использоваться с разной дидактической целью. В данном исследовании рассмотрен процесс изучения теорем школьного курса математики с позиции включения в него задач прикладного характера. Показана эффективность их использования на этапах мотивации, ознакомления с закономерностью, усвоения содержания теоремы, применения теоремы. Для каждого этапа работы с теоремой представлены примеры задач прикладного характера и некоторые методические рекомендации.

Ключевые слова

прикладные задачи, теорема, геометрия, прикладная направленность

АВТОРЫ

Шилова Зоя Вениаминовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
zoya_shilova@mail.ru

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

Введение

В психологической, педагогической и методико-математической литературе понятие прикладной задачи трактуется по-разному. Одни исследователи ([1] и др.) прикладной называют задачу, требующую перевода с естественного языка на математический. Другие исследователи ([2], [3], [4] и др.) считают, что прикладная задача должна быть по своей постановке и методам решения более близкой к задачам, возникающим на практике.

Н. А. Терешин прикладную задачу определяет как задачу, поставленную вне математики и решаемую математическими средствами [5, с. 7].

Прикладным задачам уделено большое внимание в работах Ю. М. Колягина, Л. М. Фридмана ([6], [7] и др.). Поскольку «прикладная и практическая направленность неразрывно переплетаются в реальном учебно-воспитательном процессе» [8], мы будем вкладывать в прикладную задачу и задачу с практическим содержанием одинаковый смысл.

Отметим, что прикладные задачи могут быть использованы при формировании понятий, изучении теорем и методов решения задач в основной школе. При этом намного продуктивнее будут уроки, если удастся органично «вкраплять» прикладные задачи в их структуру.

При этом следует отдавать предпочтение материалу прикладного характера, отражающему существенные моменты изучаемого, а также прикладным задачам неоднократного использования.

По мнению Ю. М. Колягина каждая задача прикладного характера, которая предполагается к использованию на уроке, должна удовлетворять следующим требованиям:

- соответствие запросам общества и интересам учащихся;
- доступность используемого нематематического материала;
- реальность описываемой в условии ситуации, числовых значений данных, постановки вопроса и полученного решения;
- соответствие структуре урока;
- эффективность использования [9].

Содержание задач, представленных в школьных учебниках, нуждается в существенном обогащении. Это может быть достигнуто, в частности, включением в их число задач:

- на вычисление значений величин, встречающихся в практической деятельности ([10], [11] и др.);
- на обоснование и применение эмпирических формул ([12] и др.);
- на составление расчетных таблиц ([13] и др.);
- на вывод формул зависимостей, встречающихся на практике ([14] и др.).

Остановимся на аспектах подбора и использования задач прикладного характера при изучении такой дидактической единицы, как теоремы.

Методология и результаты исследования

Логические аспекты, связанные с понятием теоремы, доказательством, достаточно подробно освещены в математической и методической литературе, здесь мы на этом специально останавливаться не будем. Рассмотрим процесс изучения теорем школьного курса математики с позиции включения в него задач прикладного характера.

Процесс изучения теоремы включает следующие этапы: мотивация изучения теоремы; ознакомление с фактом, отраженным в теореме; формулировка теоремы; выяснение понимания смысла каждого слова в формулировке теоремы; усвоение содержания теоремы; запоминание формулировки теоремы; доказательство теоремы; применение теоремы; установление связей данной теоремы с другими теоремами.

Введение теорем начинается с *мотивационного этапа*, в который можно вставить обсуждение вопросов прикладного характера. Например, теорема о перпендикулярности двух плоскостей может «возникнуть» в связи с задачей на проверку вертикальности кирпичной кладки. Теореме о касательной к окружности может предшествовать задача на движение автомобиля по мокрой дороге (рассмотреть направление движения брызг из-под колеса) и др.

Ознакомление с закономерностью может быть осуществлено посредством решения прикладных задач. Так, ознакомление с теоремой: «В треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр описанной около треугольника окружности принадлежат одной прямой» — осуществляется путем выполнения следующих задач на выполнение построений, измерений:

Задача 1. Постройте треугольник, гомотетичный данному треугольнику ABC относительно точки пересечения его медиан с коэффициентом гомотетии k .

Задача 2. Постройте отрезок, в который переходит высота BO треугольника ABC при указанной гомотетии. Чем является для треугольника ABC построенный отрезок? Чем является для треугольника ABC точка, в которую указанная гомотетия переведет точку пересечения его высот?

На этапе усвоения содержания теоремы можно использовать задачи и упражнения на выделение условия и заключения теоремы; на вычленение на чертежах и моделях фигур, удовлетворяющих условию теоремы; на выполнение чертежа, моделирующего условие и заключение теоремы. Например, усвоению формулировки теоремы: «Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны» - будет способствовать решение задачи на измерение углов нескольких моделей треугольных площадок; усвоению теорем о площадях четырехугольников - выполнение задач на разрезание исходных фигур и составление «удобных» (прямоугольник \rightarrow квадрат, параллелограмм \rightarrow прямоугольник и др.).

Важнейшим этапом в изучении теоремы является ее *доказательство*. Особое внимание необходимо уделить, во-первых, восприятию идеи доказательства, во-вторых, осознанию возможности различных доказательств одного и того же теоретического предложения, что может быть осуществлено в процессе решения прикладных задач. В качестве примера можно рассмотреть варианты доказательства теоремы Пифагора, включающие, помимо аналитического, геометрические идеи (с помощью разрезания фигур, дополнения до равных фигур).

В ходе объяснения учителю важно объяснить учащимся, что немало формул и теорем в геометрии доказывается с помощью разрезания фигур, а затем перекладывания их частей. Эту идею можно воплотить в жизнь в ходе доказательства теоремы Пифагора. В результате довольно сложное доказательство может быть заменено разрезанием первого квадрата на такие куски, из которого составляются два других квадрата (рис. 1).

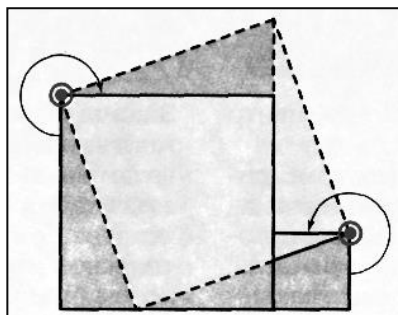


Рис. 1.

Его называют «шарнирным», потому что здесь меняют своё положение только две части, равные исходному треугольнику, причём они как бы прикреплены к остальной фигуре на шарнирах, вокруг которых поворачиваются.

Другой чисто геометрической идеей прямого доказательства теоремы Пифагора является дополнение квадратов до равных фигур равными же фигурами. Обращение к исторической справке доказательств, данных Леонардо да Винчи (рис. 2), Бхаскары (рис. 3) усилит мотивационную составляющую данного этапа обучения.

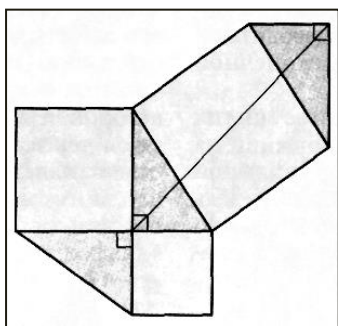


Рис. 2

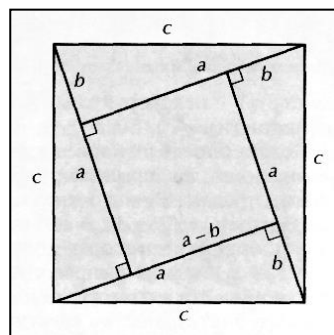


Рис. 3.

Покажем использование прикладных задач на этапе *применения теоремы*.

Рассмотрим применение теоремы курса алгебры 9-го класса:

«Если $a > 0$, то квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ убывает в интервале $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ от $+\infty$ до m и возрастает в интервале $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ от m до $+\infty$, а в точке $x = -\frac{b}{2a}$ имеет минимум: $y_{min} = m = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Если $a < 0$, то квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ возрастает в интервале $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ от $-\infty$ до m и убывает в интервале $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ от m до $-\infty$, а в точке $x = -\frac{b}{2a}$ имеет максимум: $y_{max} = m = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ».

Задача 3. Отрезок $AB = d$ разделили точкой C на два отрезка, затем на каждом из отрезков AC , CB и AB построили полуокружности (рис. 4). Требуется исследовать зависимость площади фигуры, ограниченной полуокружностями, от положения делящей точки C .

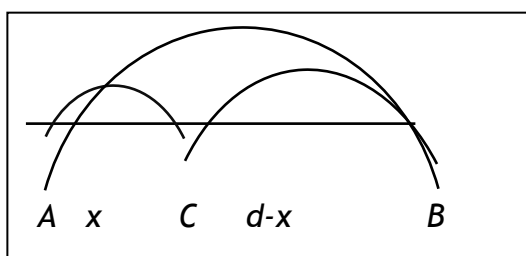


Рис. 4.

Решение. Положив $AC = x$ и, следовательно, $CB = d - x$, можно получить квадратичную функцию $S = \frac{\pi}{4}(dx - x^2)$, выражающую площадь указанной фигуры. Теперь надо исследовать эту функцию, для этого запишем ее так: $S = -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi d}{4}x$; видно, что коэффициенты: $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi d}{4}$, $c = 0$. По доказанной теореме она имеет максимум при $x = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{1}{4}\pi d}{2\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{d}{2}$, следовательно, фигура будет иметь наибольшую площадь, когда точка C разделит отрезок AB пополам: $S_{max} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{\pi d}{4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d^2}{16}$.

Так как точка C может занимать любое положение на отрезке AB , то x изменяется от 0 до d , и, следовательно, область определения функции $0 \leq x \leq d$. Значение $x = \frac{d}{2}$ делит эту область на два интервала $\left[0; \frac{d}{2}\right)$ и $\left(\frac{d}{2}; d\right]$; при $x = 0 \cdot S = 0$ и при $x = d \cdot S = \frac{\pi}{4}(d \cdot d - d^2) = 0$, следовательно, в интервале $\left[0; \frac{d}{2}\right)$ функция S возрастает от 0 до $\frac{\pi d^2}{16}$, а в интервале $\left(\frac{d}{2}; d\right]$ убывает от $\frac{\pi d^2}{16}$ до 0 .

Задача 4. На учебном полигоне произведен выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении неразрывающимся снарядом (болванкой). Требуется определить наибольшую высоту подъема снаряда, время подъема и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/сек. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Из физики известен закон движения снаряда, который выражается функцией $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где t – время, протекшее с момента выстрела, h – высота подъема снаряда, $g = 9,8$ м/сек² – ускорение силы тяжести. Подставив числовые данные, получим квадратичную функцию $h = 400t - 4,9t^2$, с коэффициентами $a = -4,9$, $b = 400$ и $c = 0$. По доказанной теореме эта функция принимает наибольшее

значение при $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{400}{2(-4,9)} \approx 41$ (сек), следовательно, наибольшая высота подъема снаряда $h_{max} = 400 \cdot 41 - 4,9 \cdot 41^2 \approx 8160$ (м) = 8,16 (км).

Время подъема снаряда соответствует интервалу возрастания функции $0 < t < 41$ и равно 41 сек. Время падения снаряда соответствует интервалу убывания функции и равно времени подъема, так как график функции симметричен относительно прямой, проходящей через точку $t = -\frac{b}{2a} = 41$.

Можно рекомендовать учащимся решить эту задачу в предположении, что выстрел произведен на Луне, и сравнить результаты.

Заключение

Таким образом, эффективному усвоению содержания теорем способствует решение задач по чертежам и моделям фигур, удовлетворяющих условию теоремы, а также выполнение чертежа, моделирующего условие. Задачи прикладного характера эффективны в аспектах воспитания: потребности в обосновании утверждений, навыков дедуктивного мышления, а также в привитии взгляда на то, что справедливость утверждений выясняется рассуждением.

Исходя из того, что основу усвоения знаний составляет овладение действиями, адекватными деятельности оперирования знаниями в конкретных ситуациях, нами определено место и содержание задач прикладного характера при изучении теорем. Показано, что прикладные задачи используются не на всех этапах, а как бы «вкрапляются» в процесс изучения теорем. Задачи рассматриваемого типа эффективно использовать на этапах мотивации, ознакомления с закономерностью, усвоения содержания теоремы, применения теоремы.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Возняк, Г. М., Гусев, В. А. Прикладные задачи на экстремумы в курсе математики 4-8 классов : кн. для учителя / Г. М. Возняк, В. А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985 – 144 с.
2. Богданович, М. В., Козак М. В., Король Я. А. Методика викладання математики в початкових класах : Навч. Посібник / М. В. Богданович, М. В. Козак, Я. А. Король. – 2-е вид., перероб. і доп. – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2001. – 368 с.
3. Петров, В. А. Прикладные задачи на уроках математики [Текст]: Кн. для учителей математики и студентов мат. фак. педвузов / В. А. Петров. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 2001. – 268 с.
4. Фоминых, Ю. Ф. Прикладные задачи по алгебре для 7-9 классов : Кн. для учителя / Ю. Ф. Фоминых. – М.: Просвещение, 1999. – 112 с.
5. Терешин, Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя / Н. А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
6. Луканкин Г.Л., Колягин Ю.М., Короткова Л.М. О прикладной и практической направленности обучения математике // Народное образование. - 1988. - № 12.
7. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся старших классов сред. шк. / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
8. Тихонов, А. Н., Костомаров, Д. П. Рассказы о прикладной математике / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. – М.: Наука, 1974.
9. Оганесян, В. А., Колягин, Ю. М., Луканкин, Г. Л., Саннинский, В. Я. Методика преподавания математике в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А.Оганесян, Ю.М.Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
10. Бегенина, Л. Ю. Реализация прикладной направленности обучения математике в средних специальных учебных заведениях с использованием информационных технологий : Автореф. дис. ...к-та пед. Наук. – Самара, 2003. – 18 с.
11. Груденов, Я. И. Совершенствование работы учителя математики : Кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
12. Иванова, Т. А., Перевощикова, Е. Н., Григорьева, Т. П., Кузнецова Л. И. Теоретические основы обучения математике в средней школе : Учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. проф. Т.А. Ивановой. – Н. Новгород: НГПУ, 2003. – 320 с.

13. Возняк, Г. М., Гусев, В. А. Прикладные задачи на экстремумы в курсе математики 4-8 классов : кн. для учителя / Г. М. Возняк, В. А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985 – 144 с.
14. Епишева, О. Б., Крупич, В. И. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учеб. деятельности : Кн. для учителя / О. Б. Епишева. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

Zoia V. Shilova,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

zoya_shilova@mail.ru

Svetlana B. Zabelina,

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

zabelina_sb@mail.ru

The use of applied problems in the study of school mathematics course theorems

Annotation. Applied problems in the process of teaching mathematics play a primary role, they can be used for different didactic purposes. In this study, the process of studying the theorems of the school course of mathematics is considered from the position of including applied problems in it. The effectiveness of their use at the stages of motivation, familiarization with the regularity, assimilation of the content of the theorem, application of the theorem is shown. For each stage of work with the theorem, examples of applied tasks and some methodological recommendations are presented.

Keywords: applied problems, theorem, geometry, applied orientation.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 3 (T.1), 2023
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER

Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE

Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
"Inter-regional center of innovative techniques in education"

Sent for printing 09-10-2023
Circulation 1000
Order 013120/125

© All Rights Reserved, 2023