ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 2 (T.1)
2024

Kirov, Russian Federation

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2024) ISSUE 2 (T.1), 118 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,

KIROV, RUSSIAN FEDERATION

PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Printed in Russian Federation, 2024

CONTENTS

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Аннотация

Данная статья будет актуальна и интересна для студентов, которые проходят такие предметы как «Математическая физика» и «Дифференциальные уравнения в частных производных», и для преподавателей, ведущих семинарские и практические занятия по этим дисциплинам. Главным методом решение краевых задач в этих курсах является метод Фурье (метод разделения переменных), который из-за сложности и громоздкости вычислений, вызывает большие трудности при освоении у студентов. В данной статье рассмотрен очень подробный, структурированный алгоритм метода Фурье, который позволит быстро и эффективно приходить к решению поставленной задачи студентам. В работе рассмотрен алгоритм для решения линейной задачи свободного колебания струны с закрепленными концами, приведен пример.

Ключевые слова

метод Фурье, колебание струны, дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа

АВТОРЫ

Береснева Евгения Викторовна,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
доцент ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт»,
г. Москва
jane_gal@mail.ru

Введение

С уравнениями второго порядка гиперболического типа в частных производных можно столкнуться при описании процессов, имеющих связь с различными колебаниями. В этой работе рассмотрим самый простой случай: колебаниях струны без воздействия внешних сил, что математически интерпретируется следующим видом: $U_{tt} - a^2 \cdot U_{xx} = 0$, при этом концы струны зафиксированы. Такое состояние описывается условиями: $U(O,t) = O$ и $U(l,t) = O$. Начальными состояние определяют являются две функции, первая из которых определяет начальное положение струны $U(x,O) = f(x)$, а вторая из них начальное распределение скоростей: $U_t(x,O) = g(x)$.

Главным способом поиска решения сформулированной задачи является метод Фурье, который традиционно вызывает сложности у студентов при освоении. Существует много учебников, таких авторов, как А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [1], Л.К. Мартинсон, Ю.Н. Малов [2], различные учебные и учебно-методических пособия, таких авторов, как В.С. Владимиров, В.В. Жаринов [3] и Т.Н. Михащенко [4] освещающих метод Фурье с различных сторон. Но в этой работе предлагается методика преподавания метода Фурье, основанная на очень подробном, структурированном алгоритме метода, позволяющим студенту пошагово решать поставленную задачу, что уменьшит количество ошибок в сложных вычислениях и упростит освоение метода.

Методология и результаты исследования

С учетом поставленных условий, формулировка задачи выглядит следующим образом:

Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения на отрезке:

$U_{tt} - a^2 \cdot U_{xx} = O,\ t \in [O, +\infty),\ x \in [O, l],$

при
$U(x, O) = f(x)$
$U_t(x, O) = g(x)$

и зафиксированных концах
$U(O, t) = O$
$U(l, t) = O.$

Алгоритм.

1. Решение $u(x,t)$ уравнения $U_{tt} - a^2 \cdot U_{xx} = 0$ будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых только от переменной икс, другая только от переменной те, то есть $u(x,t) = \mathrm{X}(x) \cdot \mathrm{T}(t)$,

При зафиксированных концах, получим $u(O,t) = u(l,t) = 0$, т.е. $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(l) = O$. Для поиска решения подставим, полученное выражение $u(x,t) = \mathrm{X}(x) \cdot \mathrm{T}(t)$ в первоначальное уравнение $U_{tt} - a^2 \cdot U_{xx} = 0$ и произведем операцию разделение переменных.

Тогда получится зависимость:

$$\frac{\mathrm{X}^{//}(x)}{\mathrm{X}(x)} = \frac{\mathrm{T}^{//}(t)}{a^2 \mathrm{T}(t)}$$

Зафиксируем значение t, тогда для всех икс часть рассмотренного тождества с лева остается постоянной, аналогично зафиксируем значение переменной икс , тогда для любого значения t часть зависимости с права остается постоянной. Это возможно, только если $\delta = const$:

$$\frac{\mathrm{X}^{//}(x)}{\mathrm{X}(x)} = \frac{\mathrm{T}^{//}(t)}{a^2 \mathrm{T}(t)} = \delta$$

2. $\mathrm{X}(x)$ и $\mathrm{T}(t)$ являются ответами взаимосвязанных задачей:

а) Штурма-Лиувилля:
$\mathrm{X}^{//}(x) - \delta \mathrm{X}(x) = O$
$\mathrm{X}(O) = \mathrm{X}(l) = O$

б) $T^{//}(t) - \delta \cdot a^2 \cdot T(t) = O$

3. Поищем ответ задачи (а).

Выражение $\mathrm{X}^{//}(x) - \delta \cdot \mathrm{X}(x) = O$ определяет характеристическое тождество $z^2 - \delta = 0$, у которого можно найти два корня $z = \pm\sqrt{\delta}$. Общее решение выражения $\mathrm{X}^{//}(x) - \delta \cdot \mathrm{X}(x) = O$ в зависимости от знака δ может принять несколько видов:

$\delta > 0 \quad : \quad \mathrm{X}(x) = C \cdot e^{\sqrt{\delta}x} + D \cdot e^{-\sqrt{\delta}x}$
$\delta = 0 \quad : \quad \mathrm{X}(x) = C + D \cdot x$
$\delta < 0 \quad : \quad \mathrm{X}(x) = C \cdot sin\sqrt{-\delta}x + D \cdot cos\sqrt{-\delta}x$

Далее отыщем C и D, учитывая $X(O) = X(l) = 0$.

Пусть $\delta > 0$
$X(0) = C \cdot e^{\sqrt{\delta}0} + D \cdot e^{-\sqrt{\delta}0} = C + D = 0 \ \rightarrow D = -C.$
$X(l) = C \cdot e^{\sqrt{\delta}l} + D \cdot e^{-\sqrt{\delta}l} = C\left(e^{\sqrt{\delta}l} - e^{-\sqrt{\delta}l}\right) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow D = C = 0.$
Если $\delta > 0$ то существует только нулевой ответ выражения $\mathrm{X}^{//}(x) - \delta \cdot \mathrm{X}(x) = O$.

Пусть $\delta = 0$
$\text{X}(O) = C + D \cdot 0 = C = 0$
$\text{x}(l) = C + D \cdot l = D \cdot l = O \to D = 0$
Если $\delta = 0$ то можно найти единственный нулевой ответ выражения $\text{X}^{//}(x) - \delta \cdot \text{X}(x) = O$.

Пусть $\delta < 0$
$\text{X}(O) = C \cdot sin\sqrt{-\delta}0 + D \cdot cos\sqrt{-\delta}0 = D = 0$
$\text{X}(l) = C \cdot sin\sqrt{-\delta}l + D \cdot cos\sqrt{-\delta}l = C \cdot sin\sqrt{-\delta}l = O \to sin\sqrt{-\delta}l = 0 \to \sqrt{-\delta}l = \pi n$

$$\to -\delta = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \to \delta = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

Ненулевые соотношения $X_n = C_n \, sin(\frac{\pi n}{l}x),\ n \in N$, которые обзываются собственные функциями задачи Штурма-Лиувилля, существующие только при $\delta_n = -(\frac{\pi n}{l})^2$, $n \in N$, которые обзываются собственными значениями сформулированной задачи.

4. Отыщем ответ для (б). При определенных в пункте (а) $\delta = \delta_n = -(\frac{\pi n}{l})^2$ получим $\text{T}(t) + (\frac{\pi n}{l})^2 \cdot a^2 \cdot \text{T}_n(t) = 0$, характеристическое выражение: $z^2 + (\frac{\pi n}{l})^2 \cdot a^2 = 0$. Корни которого $z = \pm\left(\frac{\pi n}{l}a\right)i$, а в следствии этого:

$$\text{T}_n = \bar{A}_n \, cos(\frac{\pi n}{l}at) + \bar{B}_n \, sin(\frac{\pi n}{l}at).$$

5. В результате $v_n = \text{X}_n \cdot \text{T}_n$ получатся такого вида

$$v_n(x,t) = C_n(\bar{A}_n \cos(\frac{\pi n}{l}at) + \bar{B}_n \sin(\frac{\pi n}{l}at)) \cdot \sin(\frac{\pi n}{l}x) =$$

$$= (A_n \cos(\frac{\pi n}{l}at) + B_n \sin(\frac{\pi n}{l}at)) \cdot \sin(\frac{\pi n}{l}x),$$

В котором $A_n = \bar{A}_n \cdot C_n$, $B_n = \bar{B}_n \cdot C_n$ - постоянные, которые нужно отыскать.

6. Ответ для сформулированной задачи получается:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{\pi n}{l}at) + B_n \sin(\frac{\pi n}{l}at)) \cdot \sin(\frac{\pi n}{l}x).$$

Это выражение является ответом для соотношения $U_{tt} - a^2 \cdot U_{xx} = O$ и удовлетворяет условию зафиксированных концов при любых A_n и B_n, при которых ряд сходится.

7. Отыщем A_n и B_n, для $U(x,t)$, так что бы оно удовлетворяло начальному положению и скоростям. Для этого положим $t = O$:

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\frac{\pi n}{l}x) = f(x).$$

Это знакомое нам разложение Фурье по синусам $f(x)$ на отрезке $[O; l]$, рассмотренное в книге И.К. Волков, А.Н. Канатников «Интегральные преобразования и операционное исчисление» [5]. Используем выражения, полученные для коэффициентов:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot sin(\frac{\pi n}{l}x)dx$$
.

Отыщем распределение скоростей для $U(x,t)$:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\pi n}{l} a\, A_n \sin(\frac{\pi n}{l} at) + \frac{\pi n}{l} a\, B_n \cos(\frac{\pi n}{l} at)) \cdot \sin(\frac{\pi n}{l} x).$$

Подставим ноль вместо t в полученное соотношение и учтя $U_t(x,O) = g(x)$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \cdot \sin(\frac{\pi n}{l} x) = g(x)$$
.

Замети, что это разложение Фурье по синусам зависимости $g(x)$ на отрезке $[O;l]$. Тогда коэффициенты B_n:

$$B_n = \frac{l}{\pi n a}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cdot sin(\frac{\pi n}{l}x)dx$$
.

Используем коэффициенты, подставляя их в ряд:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{\pi n}{l} at) + B_n \sin(\frac{\pi n}{l} at)) \cdot \sin(\frac{\pi n}{l} x).$$

Где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot sin(\frac{\pi n}{l}x)dx$$
и
$$B_n = \frac{l}{\pi n a}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cdot sin(\frac{\pi n}{l}x)dx$$

Пример №1

Найти $U(\mathrm{x},t)$, если

$U_{tt} - 4 \cdot U_{xx} = 0$, $t \in [0,+\infty)$, $x \in [0,1]$,

при

$U(x,0) = 0$ $\qquad$ $U(0,t) = 0$

$U_t(x,0) = \mathrm{x}(1-\mathrm{x})$ $\qquad$ $U(1,t) = 0.$

Воспользуемся алгоритмом.

1. Находим вспомогательные решения $v(x,t)$ уравнения $U_{tt} - 4 \cdot U_{xx} = O$ в виде $v(x,t) = \mathrm{X}(x)\cdot\mathrm{T}(t)$,
причем $v(O,t) = v(1,t) = O$, т.е. $\mathrm{X}(O) = X(1) = O$. Для этого подставляем $v(x,t) = \mathrm{X}(x)\cdot\mathrm{T}(t)$ в уравнение $U_{tt} - 4\cdot U_{xx} = 0$ и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\mathrm{X}^{//}(x)}{\mathrm{X}(x)} = \frac{\mathrm{T}^{//}(t)}{4\mathrm{T}(t)} = \delta = const.$$

2. Поэтому функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями двух задач:

а) Штурма-Лиувилля:

$\mathrm{X}^{//}(x) - \delta\cdot\mathrm{X}(x) = 0,$

$\mathrm{X}(O) = \mathrm{X}(1) = O$

б) $\mathrm{T}^{//}(t) - \delta\cdot 4\cdot\mathrm{T}(t) = O$

3. Решением задачи Штурма-Лиувилля являются собственные функции при определенных собственных значениях:

$$\delta_n = -(\pi n)^2, \quad \mathrm{X}_n = C_n \, sin(\pi n x).$$

4. Решаем задачу (б). При $\delta = \delta_n = -(\pi n)^2$ имеем $\mathrm{T}^{//}{}_n(t) + 4(\pi n)^n \cdot \mathrm{T}_n(t) = 0$, общее решение этого уравнения:

$$T_n = \bar{A}_n \cos(2\pi n t) + \bar{B}_n \sin(2\pi n t).$$

5. Итак, вспомогательное выражение $v_n = \mathrm{X}_n \cdot \mathrm{T}_n$ имеют вид

$$v_n(x,t) = C_n(\bar{A}_n \cos(2\pi n t) + \bar{B}_n \sin(2\pi n t)) \cdot \sin(\pi n x) =$$

$$= (A_n \cos(2\pi n t) + B_n \sin(2\pi n t)) \cdot \sin(\pi n x),$$

Где $A_n = \bar{A}_n \cdot C_n$, $B_n = \bar{B}_n \cdot C_n$ - постоянные, которые надо найти.

6. Решение задачи ищем в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n t) + B_n \sin(2\pi n t)) \cdot \sin(\pi n x).$$

Эта функция является ответом для соотношения $U_{tt} - a^2 \cdot U_{xx} = 0$ и удовлетворяет условию зафиксированных концов при любых A_n и B_n, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

7. Находим A_n и B_n, при которых $U(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям. Полагая в найденном решении $t = 0$ получаем

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\pi n x) = 0.$$

Отсюда

$$A_n = 2\int_0^1 0 \cdot sin(\pi n x) dx = 0.$$

Дифференцируя найденное решение, получаем

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} -2\pi n A_n \sin(2\pi n t) + 2\pi n B_n \cos(2\pi n t)) \cdot \sin(\pi n x).$$

Полагая $t = 0$ и используя начальное условие, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi n B_n \cdot \sin(\pi n x) = x(1-x).$$

Отсюда

$$B_n = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 x(1-x) sin(\pi n x) dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 x \sin(\pi n x) dx - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 x^2 \sin(\pi n x) dx$$

Найдем интегралы:

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^1 x\sin(\pi nx)dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \sin(\pi nx)dx & V = -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) \end{vmatrix} = -\frac{1}{(\pi n)^2}x\cos(\pi nx)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{(\pi n)^2}\int_0^1 \cos(\pi nx)dx = -\frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n) + \frac{1}{(\pi n)^3}\sin(\pi nx)\Big|_0^1 = -\frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n).$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_0^1 x^2\sin(\pi nx)dx = \begin{vmatrix} U = -x^2 & dU = -2xdx \\ dV = \sin(\pi nx)dx & V = -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) \end{vmatrix} = +\frac{1}{(\pi n)^2}x^2\cos(\pi nx)\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{2}{(\pi n)^2}\int_0^1 x\cos(\pi nx)dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \cos(\pi nx)dx & V = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) \end{vmatrix} = \frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n) -$$

$$-\frac{2x}{(\pi n)^3}\sin(\pi nx)\Big|_0^1 + \frac{2}{(\pi n)^3}\int_0^1 \sin(\pi nx)dx = \frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n) - \frac{2\cos(\pi nx)}{(\pi n)^4}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n) - \frac{2\cos(\pi n)}{(\pi n)^4} + \frac{2}{(\pi n)^4}$$

Тогда получаем:

$$B_n = -\frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n) + \frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n) - \frac{2\cos(\pi n)}{(\pi n)^4} + \frac{2}{(\pi n)^4} = \frac{2}{(\pi n)^4} - \frac{2\cos(\pi n)}{(\pi n)^4},$$

Учитывая, что $\cos(\pi n) = 1$, если n - четное и $\cos(\pi n) = -1$, если n -нечетное, получаем окончательные значения коэффициентов:

$$B_{2n} = 0,$$

$$B_{2n+1} = \frac{4}{\pi^4(2n+1)^4}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в пункт 6, получаем ответ:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^4(2n+1)^4}\sin(2\pi(2n+1)t))\cdot\sin(\pi(2n+1)x).$$

Заключение

Отметим, что метод Фурье является основным аналитическим методом решения дифференциальных уравнений в частных производных не только гиперболического типа, но и параболического, и эллиптического типа с заданными граничными условиями, которые описываю множество физических процессов. Громоздкость метода, сложность вычислений, требует четкого алгоритма, позволяющего не допустить ошибок при решение поставленных задач.

Данная работа будет интересна студентам второго курса МГТУ Баумана на занятиях «Математической физики», а также преподавателям, которые ведут этот курс.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А.: Уравнение математической физики. - М: наука. Изд. 7-е, 2004 г, 735 с.

2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.Н.: Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник для студентов вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко, - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996 г. 364 с.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В.: Уравнения математической физики. - М: Главная редакция физико-математической литературы, 2004 г. - 512 с.
4. Михащенко Т.Н.: Уравнение с частными производными: Учебное пособие. Изд-во Курганского гос. ун-та. - 2022 г. - 76 с.
5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996 г. - 288 с.

Evgenia V. Beresneva,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman; Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow
jane_gal@mail.ru

The methodology of teaching the Fourier method for solving a homogeneous wave equation on a segment

Abstract. This article will be relevant and interesting when studying the disciplines "Mathematical Physics" and "Partial differential equations". The paper considers the Fourier method for a homogeneous linear partial differential equation of the second order of hyperbolic type with constant coefficients with zero boundary conditions. The purpose of this work is to describe the methodology of teaching the Fourier method, which will allow you to quickly and effectively learn how to solve problems about the free oscillation of a string. To achieve this goal, the paper considers a structured algorithm of the Fourier method and considers an example of the application of this algorithm.

Keywords: Fourier method, string oscillation, partial differential equation of hyperbolic type.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ СЕМИНАРА ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Аннотация

Одним из разделов теории вероятностей является теория функций от случайных величин. И основная задача, рассматриваемая в этом разделе, – по заданному распределению вероятностей случайной величины уметь находить распределение вероятностей для функции от данной случайной величины. Целью работы является обсуждение методики проведения семинара по теме «Функции от случайных величин». В работе рассматриваются основные теоретические понятия и формулы, необходимые для нахождения распределений функций от случайных величин, и подробно разбираются основные типы заданий.

Ключевые слова

случайные величины, функции от случайных величин,
плотность распределения вероятностей

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Введение

Одним из разделов теории вероятностей является теория функций от случайных величин. Основной задачей, рассматриваемой в этом разделе, является по заданному распределению вероятностей случайной величины уметь находить распределение вероятностей для функции от данной случайной величины. Достаточно подробное изложение этой теории можно найти в учебнике А.В. Печинкина [1], а примеры задач, в том числе с решениями, – в учебниках Г.И. Агапова [2], В.А. Ватутина [3], А.В. Лебедева [4] и Д.Т. Письменного [5].

Целью данной работы является обсуждение методики проведения семинара по теме «Функции от случайных величин». В работе рассматриваются основные теоретические понятия и формулы, необходимые для нахождения распределений функций от случайных величин, и подробно разбираются основные типы заданий.

Работа будет полезна преподавателям вузов для подготовки к семинарам по теории вероятностей, а также студентам, желающим самостоятельно разобраться в способах решения задач по рассматриваемой теме.

Методология и результаты исследования

Пусть заданы непрерывные случайные величины X и Y, и $Y = \varphi(X)$, где функция φ непрерывно дифференцируема и монотонна. Тогда существует обратная функция $\psi = \varphi^{-1}$ и для функции распределения величины Y можно записать:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = \int_{\varphi(x)<y} p_X(x)\,dx.$$

Здесь интегрирование ведётся по всем промежуткам, являющимся решением неравенства $\varphi(x) < y$.

В частности, если функция φ монотонно возрастает и E_φ - множество значений функции φ, то

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le \inf E_\varphi, \\ F_X(\psi(y)), & \text{если } y \in E_\varphi, \\ 1, & \text{если } y \ge \sup E_\varphi. \end{cases}$$

Аналогично, если функция φ монотонно убывает, то

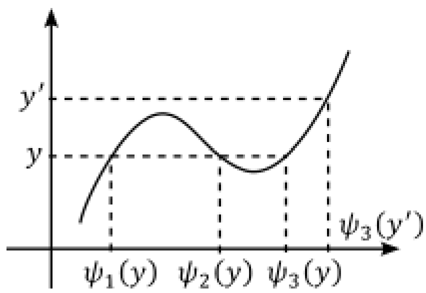
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le \inf E_\varphi, \\ 1 - F_X(\psi(y)), & \text{если } y \in E_\varphi, \\ 1, & \text{если } y \ge \sup E_\varphi. \end{cases}$$

Если продифференцировать два последних выражения, то получим связь для плотностей величин X и Y, где $Y = \varphi(X)$ и функция φ монотонна:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|, & \text{если } y \in E_\varphi, \\ 0, & \text{если } y \notin E_\varphi. \end{cases}$$

В случае, если φ кусочно монотонна, обозначим через φ_i - ограничения функции φ на её промежутки монотонности и рассмотрим обратные функции $\psi_i = \varphi_i^{-1}$.Тогда

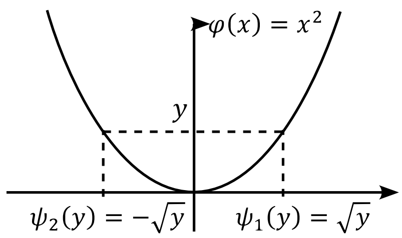
$$p_Y(y) = \begin{cases} \sum_i p_X(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)|, & \text{если } y \in E_\varphi, \\ 0, & \text{если } y \notin E_\varphi. \end{cases}$$



Здесь суммирование выполняется по всем ψ_i, определённым для данного y.

На рисунке показано, как для одного значения y может быть определено сразу три прообраза $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и $\psi_3(y)$, а для другого значения y' определён только прообраз $\psi_3(y')$.

Пример. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение и $Y = X^2$. Найдём плотность распределения величины Y, т.е. найдём плотность распределения квадрата стандартного нормального распределения.



В данном случае $\varphi(x) = x^2$. Эта функция принимает только неотрицательные значения ($E_\varphi = [0; +\infty)$) и имеет два промежутка монотонности: на $(-\infty; 0]$ она убывает, а на $[0; +\infty)$ возрастает. Так что у каждого $y > 0$ есть два прообраза $\psi_1(y) = \sqrt{y}$ и $\psi_2(y) = -\sqrt{y}$. Найдём производные

$$\psi_{1,2}'(y) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{y}}.$$

Как известно, стандартное нормальное распределение имеет следующую плотность:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Подставим сюда вместо x сначала $\psi_1(y)$ и умножим на $|\psi_1'(y)|$, а затем подставим вместо x функцию $\psi_2(y)$ и умножим на $|\psi_2'(y)|$. Так что для $y > 0$ имеем

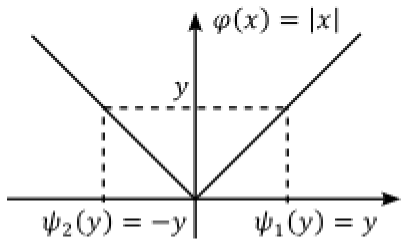
$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\sqrt{y}^2/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(-\sqrt{y})^2/2} \cdot \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-y/2}.$$

Если же $y < 0$, т.е. $y \notin E_\varphi$, то по формуле $p_Y(y) = 0$.

Таким образом, окончательно получаем:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-y/2}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y \le 0. \end{cases}$$

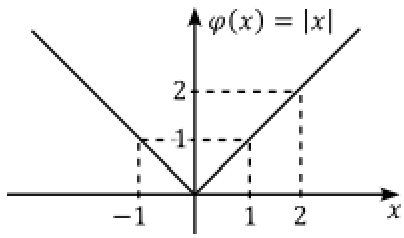
Пример. Найдём плотность и функцию распределения для случайной величины $Y = |X|$, где величина X распределена равномерно $[-1; 2]$.



В данном случае $\varphi(x) = |x|$. Эта функция принимает только неотрицательные значения и имеет два промежутка монотонности: на $(-\infty; 0]$ она убывает, а на $[0; +\infty)$ возрастает. Так что у каждого $y > 0$ есть два прообраза $\psi_1(y) = y$ и $\psi_2(y) = -y$. Найдём производные $\psi_{1,2}'(y) = \pm 1$.

Как известно, равномерное распределение на промежутке $[-1; 2]$ имеет следующую плотность:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{если } x \in [-1; 2], \\ 0, & \text{если } x \notin [-1; 2]. \end{cases}$$



Выражения $p_X(\psi_1(y))$ и $p_X(\psi_2(y))$ будут зависеть от значения y. Для $y \in [0; 1]$ оба прообраза $\psi_1(y) = y$ и $\psi_2(y) = -y$ попадают в промежуток $[-1; 2]$, поэтому $p_X(\psi_1(y)) = p_X(\psi_2(y)) = \frac{1}{3}$ и

$$p_Y(y) = p_X(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + p_X(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)| = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot |-1| = \frac{2}{3}, \qquad y \in [0; 1].$$

Для $y \in [1; 2]$ прообраз $\psi_1(y) = y$ попадает в промежуток $[-1; 2]$, а $\psi_2(y) = -y$ не попадает. Поэтому для $y \in [1; 2]$ имеем $p_X(\psi_1(y)) = \frac{1}{3}$, $p_X(\psi_2(y)) = 0$ и

$$p_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot 1 + 0 \cdot |-1| = \frac{1}{3}, \qquad y \in [1; 2].$$

Для $y > 2$ оба прообраза $\psi_1(y) = y$ и $\psi_2(y) = -y$ не попадают в промежуток $[-1; 2]$, поэтому для $y > 2$ имеем $p_X(\psi_1(y)) = p_X(\psi_2(y)) = 0$ и

$$p_Y(y) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot |-1| = 0, \qquad y > 2.$$

Для $y < 0$ имеем $y \notin E_\varphi$ и поэтому $p_Y(y) = 0$.

Объединяя все значения для $p_Y(y)$, получаем:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & \text{если } y \in [0; 1], \\ \dfrac{1}{3}, & \text{если } x \in (1; 2], \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Можно сделать проверку того, что получено корректное выражения для функции плотности вероятности, а именно, что интеграл по всей числовой прямой от данной функции равен 1. Проверим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{3} dy + \int_1^2 \frac{1}{3} dy = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Найдём теперь функцию распределения величины Y как интеграл от плотности:

$$\mathrm{F_Y(y)} = \int_{-\infty}^{y} \mathrm{p_Y(t)\,dt}.$$

Если $\mathrm{y} \leq 0$, то на промежутке $(-\infty; \mathrm{y})$ плотность $\mathrm{p_Y(t)} = 0$ и поэтому $\mathrm{F_Y(y)} = 0$.

Если $0 < \mathrm{y} \leq 1$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ плотность $\mathrm{p_Y(t)} = 0$, а на промежутке $(0; \mathrm{y})$ имеем $\mathrm{p_Y(t)} = \frac{2}{3}$, поэтому

$$\mathrm{F_Y(y)} = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{dt} + \int_{0}^{y} \frac{2}{3}\,\mathrm{dt} = \frac{2}{3}\mathrm{y}.$$

Если $1 < \mathrm{y} \leq 2$, то

$$\mathrm{F_Y(y)} = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{dt} + \int_{0}^{1} \frac{2}{3}\,\mathrm{dt} + \int_{1}^{y} \frac{1}{3}\,\mathrm{dt} = 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\mathrm{y} - 1) = \frac{1}{3}\mathrm{y} + \frac{1}{3}.$$

Наконец, если $\mathrm{y} > 2$, то

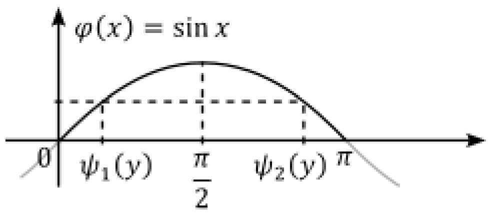
$$\mathrm{F_Y(y)} = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{dt} + \int_{0}^{1} \frac{2}{3}\,\mathrm{dt} + \int_{1}^{2} \frac{1}{3}\,\mathrm{dt} + \int_{2}^{y} 0\,\mathrm{dt} = 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 1.$$

Объединяя все вычисления, получаем:

$$\mathrm{F_Y(y)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathrm{y} \leq 0, \\ \frac{2}{3}\mathrm{y}, & \text{если } 0 < \mathrm{y} \leq 1, \\ \frac{1}{3}\mathrm{y} + \frac{1}{3}, & \text{если } 1 < \mathrm{x} \leq 2, \\ 1, & \text{если } \mathrm{y} > 2. \end{cases}$$

Пример. Найдём плотность и функцию распределения величины $\mathrm{Y} = \sin \mathrm{X}$, если величина X распределена по закону

$$\mathrm{p_X(x)} = \begin{cases} \frac{2\mathrm{x}}{\pi^2}, & \text{если } \mathrm{x} \in [0; \pi], \\ 0, & \text{если } \mathrm{x} \notin [0; \pi]. \end{cases}$$



В данном случае $\varphi(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{X}$. Эта функция принимает значения из промежутка $[-1; 1]$ и имеет бесконечно много промежутков монотонности. Но нас будет интересовать только ограничение функции $\varphi(\mathrm{x}) = \sin \mathrm{X}$ на промежуток $[0; \pi]$, на котором функция $\mathrm{p_X(x)}$ принимает ненулевые значения. Такая ограниченная функция $\varphi|_{[0;\pi]}$ принимает значения из промежутка $[0; 1]$ и имеет только два промежутка монотонности - $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Так что для каждого $\mathrm{y} \in [0; 1]$ есть два прообраза $\psi_1(\mathrm{y}) = \arcsin \mathrm{y}$ и $\psi_2(\mathrm{y}) = \pi - \arcsin \mathrm{y}$. Найдём производные:

$$\psi'_{1,2}(\mathrm{y}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \mathrm{y}^2}}.$$

Подставляем в $\mathrm{p_X(x)}$ сначала $\psi_1(\mathrm{y})$ и умножаем на $|\psi'_1(\mathrm{y})|$, затем подставляем $\psi_2(\mathrm{y})$ и умножаем на $|\psi'_2(\mathrm{y})|$. Получим:

$$\mathrm{p_Y(y)} = \mathrm{p_X}\big(\psi_1(\mathrm{y})\big) \cdot |\psi'_1(\mathrm{y})| + \mathrm{p_X}\big(\psi_2(\mathrm{y})\big) \cdot |\psi'_2(\mathrm{y})| =$$
$$= \frac{2 \arcsin \mathrm{y}}{\pi^2 \sqrt{1 - \mathrm{y}^2}} + \frac{2(\pi - \arcsin \mathrm{y})}{\pi^2 \sqrt{1 - \mathrm{y}^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - \mathrm{y}^2}}.$$

Для $\mathrm{y} \notin [0; 1]$ либо все прообразы $\psi(\mathrm{y})$ расположены вне промежутка $[0; \pi]$ и тем самым $\mathrm{p_X}\big(\psi(\mathrm{y})\big) = 0$, либо прообразов вообще нет.

Таким образом, получаем следующую плотность величины Y:

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{если } y\in[0;1],\\ 0, & \text{если } y\notin[0;1].\end{cases}$$

Найдём теперь функцию распределения величины Y.

Если $y\le 0$, то на промежутке $(-\infty;y)$ плотность $p_Y(t)=0$ и поэтому $F_Y(y)=0$.

Если $0<y\le 1$, то

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^y\frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{2}{\pi}\arcsin y.$$

Если $y>1$, то

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^1\frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt+\int_1^y 0\,dt=1.$$

Таким образом,

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le 0,\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin y, & \text{если } 0<y\le 1,\\ 1, & \text{если } y>1.\end{cases}$$

Пример. Найдём функцию распределения величины $Y=\operatorname{arctg}X$ по известной функции распределения величины X:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \dfrac{1}{4}x^2, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

В данном случае $\varphi(x)=\operatorname{arctg}x$. Эта функция принимает только значения из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и монотонно возрастает на всей числовой прямой. Подставим обратную функцию $\psi(y)=\operatorname{tg}y$ в выражение для $F_X(x)$. При этом если $y\le 0$, то $\operatorname{tg}y\le 0$ и $F_X(\operatorname{tg}y)=0$. Если $0<y\le\operatorname{arctg}2$, то $0<\operatorname{tg}y\le 2$ и $F_X(\operatorname{tg}y)=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 y$. Если же $y>\operatorname{arctg}2$, то $\operatorname{tg}y>2$ и $F_X(\operatorname{tg}y)=1$.

Таким образом, получаем следующую функцию распределения величины Y:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le 0,\\ \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2 y, & \text{если } 0<y\le\operatorname{arctg}2,\\ 1, & \text{если } x>\operatorname{arctg}2.\end{cases}$$

Пример. Пусть случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, а величина Y - стандартное распределение Коши. Найдём функцию φ, такую что $Y=\varphi(X)$.

Как известно, для того чтобы из величины X получить равномерное на отрезке $[0;1]$ распределение, нужно подействовать на X её же собственной функцией распределения. Поэтому если величина Z распределена равномерно на отрезке $[0;1]$, то $Z=F_X(X)$. Аналогично, $Z=F_Y(Y)$. Отсюда $Y=F_Y^{-1}(Z)=F_Y^{-1}\big(F_X(X)\big)$ и $\varphi=F_Y^{-1}\circ F_X$.

Функция экспоненциального распределения с параметром λ имеет вид:

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Для функции стандартного распределения Коши $F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}$ найдём обратную функцию

$$z=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2},\qquad y=\operatorname{tg}\left(\pi z-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\pi z.$$

Подставляем сюда вместо z функцию $F_X(x)$, получаем искомую связь между величинами X и Y:

$$Y = -\operatorname{ctg}\left(\pi\left(1 - e^{-\lambda X}\right)\right), \qquad x \geq 0.$$

Заключение

В работе подробно рассмотрены решения основных типов заданий, связанных с поиском распределений функций от случайных величин. При этом все примеры подобраны в порядке нарастания сложности, что позволяет преподавателю теории вероятностей спланировать семинар по данной теме. Акцент также сделан на разнообразии рассмотренных задач, использовании различных формул и методов решения.

Изучение данной темы поможет учащимся лучше разобраться не только в этих задачах, но в остальных разделах теории вероятностей и далее математической статистики, поскольку функции от случайных величин встречаются в теории вероятностей повсеместно.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).
2. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1994. – 112 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. - 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2005. – 315 с.
4. Лебедев А.В., Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Под ред. А.В. Лебедева. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М., 2018. – 480 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Дмитрий Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с. – (Высшее образование).

Oleg N. Biryukov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru
Nail A. Khasanov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nail_khasanov@mail.ru

Methodological aspects of the seminar on the topic 'Functions of random variables'

Abstract. One of the branches of probability theory is the theory of functions from random variables. And the main task considered in this section is to be able to find the probability distribution for a function of a given random variable according to a given probability distribution of a random variable. The purpose of the work is to discuss the methodology of the seminar on the topic "Functions of random variables". The paper discusses the basic theoretical concepts and formulas necessary to find distributions of functions from random variables, and examines in detail the main types of tasks.

Keywords: random variables, functions of random variables, probability distribution density.

РАЗВИТИЕ НАВЫКА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Аннотация

Одной из актуальных проблем современного образования любого уровня является повышение качества обучения. Качественное освоение учебной дисциплины подразумевает такую подготовку студента, при которой он успешно применяет теоретический материал при решении практических задач. Научно-технический прогресс сопровождается постоянным увеличением объема информации. Процесс интеграции наук требует комплексного применения знаний из различных областей. Как следствие, возрастает прикладная значимость математических средств выражения зависимостей между величинами (формулы, графики, алгоритмы и т.д.) в различных областях знания. Цель исследования – установить зависимость между установлением междисциплинарных связей при построении математических моделей в процессе изучения темы «Дифференциальные уравнения» и качеством усвоения темы студентами. Содержание статьи будет интересным преподавателям, студентам, старшеклассникам.

Ключевые слова

математическая модель, межпредметные связи,
математика в техническом университете

АВТОРЫ

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
vergazova@bmstu.ru

Лаптева Татьяна Николаевна,
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
t.lapteva@bmstu.ru

Введение

Успешное освоение студентами любой специальной инженерной дисциплины предполагает наличие глубоких знаний фундаментальных дисциплин, а также сформированных умений и навыков применения этих знаний. На примере решения задач прикладного характера студенту демонстрируется процесс построения математической модели в виде дифференциального уравнения. Задачи теоретической механики, задачи с экологическим содержанием и др. – отличная возможность установить междисциплинарные связи и расширить кругозор студента. Было проведено исследование, направленное на выяснение эффективности решения задач междисциплинарного характера на практических занятиях для развития навыка работы с отдельными математическими моделями (дифференциальные уравнения) по сравнению с занятиями, на которых уделяют внимание только традиционным упражнениям.

Методология и результаты исследования

В процессе изучения темы «Дифференциальные уравнения» студентами 1 курса Приборостроительного факультета две группы студентов на практических занятиях решали традиционные упражнения, а двум другим группам были предложены задачи, демонстрирующие построение математической модели (дифференциального уравнения) в механике и экологии.

Создание моделей применяется в случае, если:

1) Необходимо понять, как устроен конкретный объект (структура, свойства, законы развития, взаимодействие с окружающим миром).

2) Необходимо научиться управлять объектом (или процессом) наилучшим способом при заданных целях или критериях.

3) Необходимо прогнозировать воздействие на объект (или процесс).

Процесс построения модели называется *моделированием*. Существуют *материальное* и *идеальное* моделирование.

В случае материального моделирования исследование проводят на модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта.

Идеальное моделирование носит теоретический характер и разделяется на два типа – *интуитивное* и *знаковое*.

Отметим, что, например, жизненный опыт каждого человека может считаться его интуитивной моделью окружающего мира.

Особый интерес для будущего инженера представляет знаковое моделирование. Такой вид моделирования использует в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы и т.д. *Математическое моделирование*, как важнейший вид знакового моделирования, осуществляет исследование объекта (процесса) посредством модели, сформулированной на математическом языке, с применением математических методов. Классическим примером математического моделирования является описание и исследование механических объектов (процессов) средствами математики, в частности, с помощью дифференциальных уравнений.

В теоретической механике математика с успехом используется уже не одну сотню лет. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. На гладком столе (трением можно пренебречь) лежит небольшой металлический шарик, прикрепленный к пружине. В начальный момент пружина не деформирована (отсутствуют сжатие или удлинение). Сожмем пружину так, чтобы она не потеряла своих упругих свойств (рис. 1).

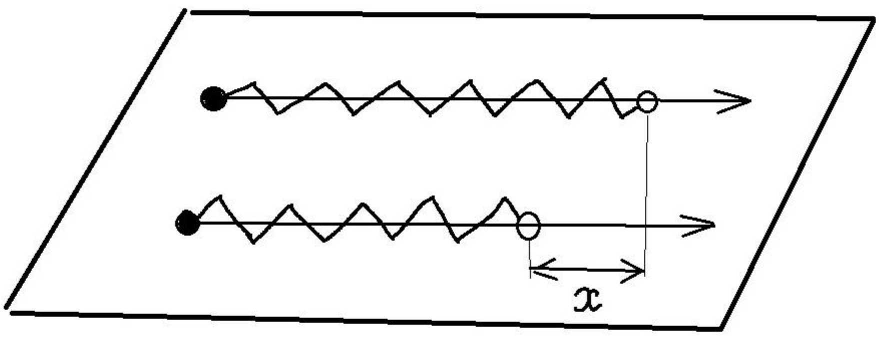


Рисунок 1. Металлический шарик, прикрепленный к пружине

Тогда по закону Гука на шарик действует упругая сила, равная $\vec{F} = -k\vec{x}$, где k- коэффициент упругости, $\vec{x}$- величина деформации пружины. Отпустим шарик, и он начнет двигаться под действием силы упругости. Пусть m - масса шарика. Тогда по второму закону Ньютона получим:

$ma = -kx.$

$a = \frac{d^2x}{dt^2} = x''.$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой математическую модель упругих колебаний шарика. Исследование такой модели позволяет прогнозировать положение шарика в любой момент времени.

Пусть в начальный момент времени шарик находится в точке x_0, т.е. и отпускается без начальной скорости: $v(0) = x'(0) = 0$. Решим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и начальными условиями:

$mx'' = -kx,$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $K^2 + \frac{k}{m} = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни

$k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$, в которых $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$x(t) = A\,sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\,cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Применим начальные условия. При $t = 0$ $x = x_0$, тогда получим $x_0 = B$. С учетом, что начальная скорость шарика равна нулю $x'(0) = 0$, получим

$x'(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - B\sqrt{\frac{k}{m}}sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$, отсюда при $t = 0$ имеем $A = 0$.

Решение примет вид $x(t) = x_0\,cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

Таким образом, уравнение позволяет найти положение шарика на оси $0x$ в любой момент времени.

Колебания, рассматриваемые в этой задаче, называются *простейшими*, так как в случае малых деформаций пружины сила упругости пропорциональна величине деформации.

В современной экологии часто возникает необходимость оценки численности той или иной популяции. Такая оценка позволяет правильно планировать потребление различных возобновляемых природных ресурсов – промысловых рыб, охотничьих угодий и др.

В задаче 1 рассматривается дескриптивная модель. Слово «дескриптивный» происходит от английского description (в переводе – описание). Математические модели такого класса служат для описания различных процессов в физике, биологии, экономике и других областях знания.

После того, как модель построена, необходимо разработать (или применить уже созданный) алгоритм для анализа построенной модели. В случае, когда модель и алгоритм достаточно простые, можно провести аналитическое исследование модели. Если модель и алгоритм сложные, то исследование проводят программным методом.

Составляется компьютерная программа, реализующая алгоритм. Далее выполняют исследование (расчеты) по модели с помощью программы и полученные результаты сравнивают с имеющимися фактическими данными. Такое сравнение необходимо для подтверждения адекватности модели – можно ли доверять модельным расчетам и использовать их.

В случае, если расчеты расходятся с реальными фактическими данными, то построенную модель совершенствуют, дорабатывают, уточняют или отказываются от прежней модели и переходят к построению новой. Процесс построения и совершенствования модели продолжается до тех пор, пока результаты расчетов не будут соотносится с реальными данными. Только тогда модель готова к использованию. Только единство математической модели, алгоритма для ее исследования и применения компьютера позволяет решать сложные задачи.

Задача 2. Пусть некоторая популяция имеет в момент времени $t = 0$ биомассу x_0. Предположим, что в каждый момент времени скорость увеличения пропорциональна уже имеющейся биомассе, а возникающие явления самоотравления снижают биомассу пропорционально квадрату наличной биомассы. Обозначим зависимость биомассы от времени через $x(t)$, а изменение биомассы за время Δt через Δx, тогда справедливо приближенное равенство

$\Delta x \approx (kx - \alpha x^2)\Delta t$, где α и k - постоянные.

Запишем полученное равенство в дифференциальной форме: $\frac{dx}{dt} = kx - \alpha x^2$. Получим математическую модель процесса изменения биомассы популяций.

Решим полученное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными и начальным условием:

$$\frac{dx}{kx - \alpha x^2} = dt, \qquad x(0) = x_0.$$

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{dx}{x^2 - \frac{k}{\alpha}x} = dt$$

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{dx}{\left(x - \frac{k}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{x}{2\alpha}\right)^2} = dt.$$

$$-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{2\frac{k}{2\alpha}} ln\left|\frac{x - \frac{k}{2\alpha} - \frac{k}{2\alpha}}{x - \frac{k}{2\alpha} + \frac{k}{2\alpha}}\right| = t + C.$$

$$-\frac{1}{\kappa} ln\left|\frac{x - \frac{k}{\alpha}}{x}\right| = t + C.$$

$$Ce^{-kt} = \frac{x - \frac{k}{\alpha}}{x}.$$

Применив начальное условие, получим $C = \frac{x_0 - \frac{k}{\alpha}}{x_0}$.

В результате получим выражение для биомассы в момент времени t имеет вид:

$x(t) = \frac{\alpha x_0 e^{kt}}{k\left(x_0\left(e^{kt} - 1\right) + 1\right)}$.

Представим, что необходимо изымать часть биомассы из экосистемы. Например, когда и сколько собирать урожай за время $(0; T)$, чтобы суммарный урожай был бы максимален? Математическая модель также позволяет провести такой анализ. Качественный результат таков: сбор урожая не производят пока биомасса меньше некоторого критического значения, в дальнейшем для максимальных результатов проводят непрерывный сбор урожая [1, 2].

В задаче 2 рассматривается упрощенная ситуация, когда изучаемая популяция вида не взаимодействует с другими популяциями. Учет взаимодействия популяций ведет к усложнению моделей. Приведем пример взаимодействия двух популяций, биомассы которых обозначим через x и y соответственно.

Пусть обе популяции употребляют один и тот же корм. Корм имеется в ограниченном количестве, поэтому популяции находятся в конкурентной борьбе друг с другом.

Модель французского математика Вольтерра показывает, что в указанной ситуации динамика популяций описывается системой дифференциальных уравнений в условиях ограниченного корма:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - \varepsilon_1(\lambda_1 x + \lambda_2 y)x,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 y - \varepsilon_2(\lambda_1 x + \lambda_2 y)y,$$

где $k_y, k_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_1,\ \lambda_2$ - действительные положительные числа. Первые члены правых частей уравнений характеризуют скорости роста популяций при условии отсутствия ограничивающих факторов. Вторые члены учитывают изменения скорости роста. Разработанные в теории дифференциальных уравнений методы позволяют представить графически связь между величинами x и y в зависимости от значений коэффициентов $k_y, k_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_1,\ \lambda_2$. (Рис. 2, 3).

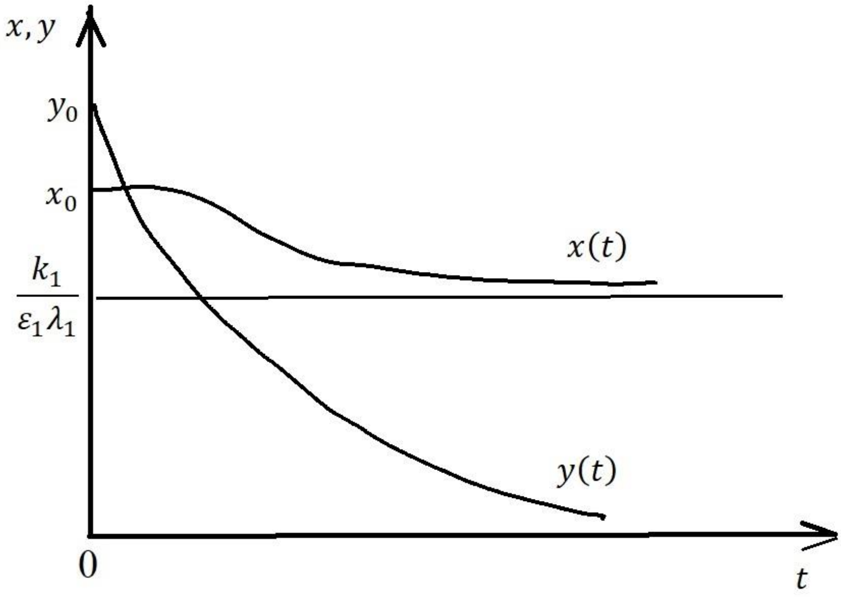


Рисунок 2. Популяция x стабилизируется, популяция y вымирает. Выполняется условие $x_0 > \frac{k_1}{\varepsilon_1 \lambda_1}$.

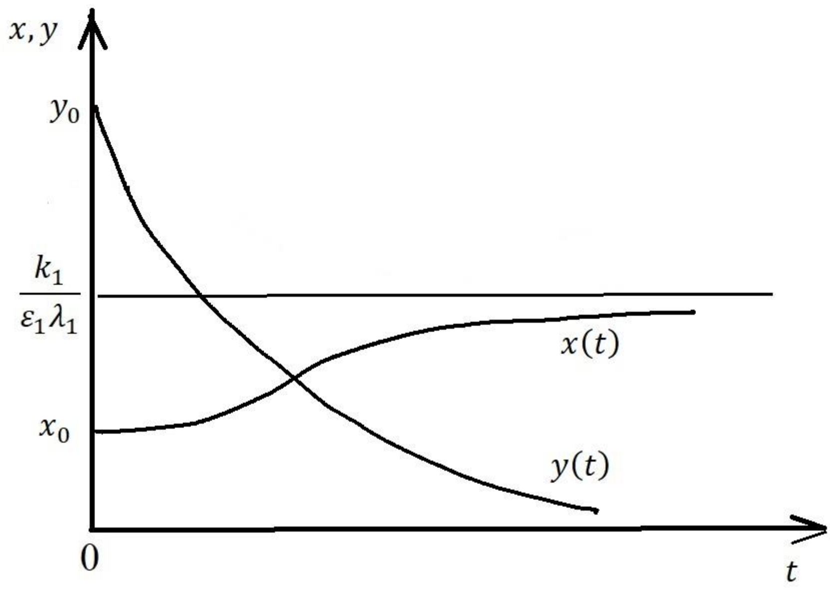


Рисунок 3. Популяция x стабилизируется, популяция y вымирает.
Выполнено условие $x_0 < \frac{k_1}{\varepsilon_1 \lambda_1}$.

Очевидно, что численность одной из популяций стремится к нулю, а численность другой стремится к стабильным значениям. Выживает и стабилизируется популяция, у которой больше $\frac{\kappa}{\varepsilon}$.[3].

Решение задач междисциплинарного характера рассматривалось при изучении темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения» на занятиях двух групп первого курса. Далее для формирования и развития навыка решения различных дифференциальных уравнений рассматривались задачи вида:

$\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0,\ y(0) = 1,$

$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$

$y' = 2^{x-y},\ y(-3) = -5,$

$y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$

$y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -6,$

$y'' + y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$ [4-6]

После изучения указанной темы был проведен рубежный контроль. Были проанализированы результаты решения задач по темам «Дифференциальные уравнения первого порядка» и «Дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами». Результаты, отражающие качество выполнения задач по указанным темам приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты выполнения задач рубежного контроля

	Группы с решением традиционных упражнений (правильное решение), %	Группы, в которых рассматривали решение междисциплинарных задач (правильное решение), %

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными	63	85
Дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами	69	82

Отметим, что состав групп был однороден. В группах, которые знакомились с построением математических моделей в межпредметных задачах, студенты показали более высокие результаты, чем в группах с традиционным подходом.

Заключение

Решение задач из других дисциплин (физика, биология, экология и др.) развивают навык построения математической модели и решения полученной математической задачи. Междисциплинарные связи, устанавливаемые в процессе решения таких задач, способствуют качественному усвоению знаний, а также способствует совершенствованию навыков решения практических задач, расширению кругозора и формированию научного мировоззрения студентов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горстко А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. - М. Знание. - 1991. - 160 с.
2. Кыштообаева Ч. А. О сущности реализации межпредметных связей математики с другими предметами // Молодой ученый. - 2017. - С. 76-79. - URL: https://moluch.ru/archive/138/39098/ (дата обращения: 21.09.2024).
3. Горстко А.Б. Указ. соч.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. - М. Оникс 21 век. - 2003. - 416 с.
5. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2006. - 352 с.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М. ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ». - 2005. -558 с.

***Olga B. Vergazova*,**
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
vergazova@bmstu.ru
***Tatyana N. Lapteva*,**
Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
t.lapteva@bmstu.ru

The development of the skill of building mathematical models of undergraduate students by the example of solving individual problems

Annotation. Annotation. One of the urgent problems of modern education at any level is to improve the quality of education. Qualitative mastering of an academic discipline implies such training of a student, in which he successfully applies theoretical material in solving practical problems. Scientific and technological progress is accompanied by a constant increase in the volume of information. The process of integrating sciences requires the integrated application of knowledge from various fields. As a result, the applied importance of mathematical means of expressing dependencies between quantities (formulas, graphs, algorithms, etc.) in various fields of knowledge increases. The purpose of the study is to establish the relationship between the establishment of interdisciplinary connections in the construction of mathematical models in the process of studying the topic "Differential equations" and the quality of students' assimilation of the topic. The content of the article will be interesting for teachers, students, and high school students.

Keywords: mathematical model, interdisciplinary connections, mathematics at a technical university.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ПРИМЕРОВ ПО ТЕМЕ «ПОСТРОЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Аннотация

В математической статистике важное место занимает задача оценивания неизвестных параметров закона распределения, общий вид которого известен. Навыки построения точечных оценок при решении этой задачи имеют большое значение в работе будущего специалиста, что делает актуальным оттачивание методики изложения этого раздела. Целью работы является исследование методических аспектов решения примеров по теме «Точечные оценки». В работе на примерах биномиального и экспоненциального распределений исследована методика решения задач по соответствующей теме и сформулирован ряд практических рекомендаций для ее изложения.

Ключевые слова

оценивание параметров, точечная оценка, метод моментов, метод максимального правдоподобия

АВТОРЫ

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Введение

Как известно, например, из учебника В.Б. Горяинова с соавторами [1], одной из основных задач математической статистики является получение научно обоснованных выводов о свойствах массовых процессов или явлений по результатам экспериментов или наблюдений. Более узко одну из основных задач математической статистики можно сформулировать следующим образом: имеется случайная величина, закон распределения которой неизвестен; требуется по результатам наблюдений сделать выводы о ее законе распределения.

Одним из вариантов этой задачи является задача идентификации неизвестных параметров закона распределения, общий вид (тип, класс) которого известен. В ставших уже классическими учебниках Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведева [2] и В.Е. Гмурмана [3] указывается, что для решения этой задачи обычно используются два подхода: построение точечных оценок и построение интервальных оценок. Оба этих подхода также можно назвать классическими, их изложению посвящено большое количество учебной и справочной литературы, а также научных работ, ссылки на которые можно найти на электронных ресурсах [4,5].

Для реализации первого подхода, то есть для построения точечных оценок, в математической статистике разработано большое число методов (см., например, электронные ресурсы [6,7]), однако на практике наиболее часто используются метод максимального правдоподобия, метод моментов, графический метод и метод наименьших квадратов. Настоящая работа посвящена методическим аспектам решения задач построения точечных оценок с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия, описание которых, в частности, можно найти в предыдущих работах Власова П.А. с соавторами [8, 9].

Методология и результаты исследования

В методике преподавания после изложения теоретического материала большое значение имеет разбор примеров, иллюстрирующих теоретические положения. Рассмотрим некоторые характерные примеры, которые с одной стороны позволяют учащимся лучше понять методы моментов и максимального правдоподобия построения точечных оценок, а с другой — сформировать устойчивый навык их использования.

Всюду в дальнейшем n будет обозначать объем случайной выборки, а $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — случайную выборку объема n из генеральной совокупности X.

Пример 1. Пусть $X \sim B(1,p)$, где значение параметра p неизвестно. Требуется построить точечную оценку параметра p.

С содержательной точки зрения случайная величина X— число успехов в одном испытании по схеме Бернулли (см., например, учебник В.Б. Горяинова с соавторами [10]), а ее ряд распределения задан таблицей 1, где $p \in (0,\ 1)$.

Таблица 1

X	0	1
P	$1-p$	p

Для построения оценки параметра p с использованием метода моментов заметим, что заданный в условии закон распределения зависит от $r = 1$ неизвестного параметра, поэтому система уравнений, формируемая при его реализации, будет содержать одно уравнение. Следуя идее метода, находим теоретическое значение

$$MX = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p,$$

а затем его выборочный аналог

$$\widehat{m}_1(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \tag{1}$$

и приравниваем первое ко второму. Полученное уравнение

$$p = \bar{X}$$

дает искомую точечную оценку:

$$\hat{p}(\vec{X}) = \bar{X}. \tag{2}$$

Для построения оценки параметра p с использованием метода максимального правдоподобия запишем функцию правдоподобия (см., например, учебник Горяинова В.Б. с соавторами [11]) случайной выборки $\vec{X}$:

$$\mathcal{L}(\vec{X},p) = P\{X = X_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X = X_n\} =$$
$$= p^{X_1}(1-p)^{1-X_1} \cdot \ldots \cdot p^{X_n}(1-p)^{1-X_n} = p^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Согласно методу максимального правдоподобия, изложенному в работе П.А. Власова с соавторами [12]) в качестве точечной оценки неизвестного параметра следует принять такое значение, которое доставляет максимум функции правдоподобия или, что эквивалентно, ее логарифму. Заметим, что поскольку закон распределения генеральной совокупности X зависит лишь от $r = 1$ неизвестного параметра, то система уравнений правдоподобия в рассматриваемом примере будет состоять лишь из одного уравнения. Так как

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X},p) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\ln(1-p),$$

то это уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X},p)}{\partial p} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0,$$

откуда находим стационарную точку функции $\mathcal{L}$:

$$\hat{p} = \bar{X}. \tag{3}$$

Покажем, что эта точка является точкой максимума функции правдоподобия. Поскольку

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{X},p)}{\partial p^2} = -\frac{1}{p^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{1}{(1-p)^2}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = -\frac{n}{p^2}\bar{X} - \frac{1}{(1-p)^2}(1-\bar{X}) < 0$$

то справедливо неравенство

$$\left.\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{X},p)}{\partial p^2}\right|_{p=\hat{p}} < 0$$

и, следовательно (см., например, учебник по математическому анализу [13]), стационарная точка (3) является точкой максимума функции $\mathcal{L}$ (заметим, что поскольку $X_i \in \{0,\ 1\}$, $i = \overline{1;n}$, то $\bar{X} \geq 0$ и $1 - \bar{X} \geq 0$, причем по крайней мере одно из двух последних неравенств будет выполнено в строгой форме). Таким образом, точечная оценка параметра p , построенная с использованием метода максимального правдоподобия, имеет вид

$$\hat{p}(\vec{X}) = \bar{X}. \tag{4}$$

Анализ результатов (2) и (4) показывает, что для рассматриваемого в настоящем примере законе распределения методы моментов и максимального правдоподобия дают одинаковые оценки неизвестного параметра.

Пример 2. Пусть $X \sim B(l,p)$, где $l \in \mathbb{N}$ — известный параметр, а значение параметра p неизвестно. Требуется построить точечную оценку для параметра p.

С содержательной точки зрения случайная величина X— число успехов в серии из l испытаний по схеме Бернулли, а ее закон распределения задается соотношениями (см., например, учебник Горяинова В.Б. с соавторами [14])

$$P\{X = k\} = C_l^k p^k (1-p)^{l-k}, \qquad k = \overline{0;l},$$

где $C_l^k = l!\,[k!\,(l-k)!]^{-1}$ — биномиальный коэффициент.

Для построения оценки параметра p с использованием метода моментов заметим, что заданный в условии закон распределения зависит от $r = 1$ неизвестного параметра, поэтому, как и в примере 1 система уравнений из метода моментов будет содержать одно уравнение. Следуя идее метода, изложенной в работе П.А. Власова с соавторами [15], записываем известное (см., например, учебник В.Б. Горянова с соавторами [16]) теоретическое значение

$$MX = lp,$$

математического ожидания случайной величины Xи приравниваем это значение к его выборочному аналогу (1):

$$lp = \bar{X}. \tag{5}$$

Решая полученное уравнение относительно неизвестного параметра, получаем искомую точечную оценку:

$$\hat{p}(\vec{X}) = \frac{1}{l}\bar{X}. \tag{6}$$

Для построения оценки параметра p с использованием метода максимального правдоподобия запишем функцию правдоподобия случайной выборки $\vec{X}$:

$$\mathcal{L}(\vec{X}, p) = P\{X = X_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X = X_n\} =$$

$$= C_l^{X_1} p^{X_1} (1-p)^{1-X_1} \cdot \ldots \cdot C_l^{X_n} p^{X_n} (1-p)^{1-X_n} = \left(C_l^{X_1} \cdot \ldots \cdot C_l^{X_n}\right) p^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-p)^{nl - \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Как и в примере 1, задачу поиска оптимального значения параметра p удобнее решать, предварительно прологарифмировав функцию правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, p) = \ln\left(C_l^{X_1} \cdot \ldots \cdot C_l^{X_n}\right) + \left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \ln p + \left(nl - \sum_{i=1}^n X_i\right) \ln(1-p).$$

Таким образом, уравнение правдоподобия в рассматриваемом примере будет иметь вид

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, p)}{\partial p} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \frac{1}{1-p}\left(nl - \sum_{i=1}^n X_i\right) = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно неизвестного параметра, получаем стационарную точку

$$\hat{p} = \frac{1}{l}\bar{X}. \tag{7}$$

функции правдоподобия. Рассуждая аналогично предыдущему примеру, получим

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{X}, p)}{\partial p^2} = -\frac{1}{p^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - \frac{1}{(1-p)^2}\left(nl - \sum_{i=1}^n X_i\right) = -\frac{n}{p^2}\bar{X} - \frac{n}{(1-p)^2}(l - \bar{X}).$$

Заметим, что

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$

где X_i — число успехов в серии из l испытаний, поэтому $X_i \geq 0$ и $X_i \leq l$ а, следовательно, $\bar{X} \geq 0$ и $\bar{X} \leq l$, причем по крайней мере одно из двух последних неравенств выполнено в строгой форме. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{X}, p)}{\partial p^2} < 0$$

поэтому найденная стационарная точка (7) действительно является точкой максимума функции правдоподобия $\mathcal{L}$. Это означает, что точечная оценка параметра p, полученная с использованием метода максимального правдоподобия, имеет вид

$$\hat{p}(\vec{X}) = \frac{1}{l}\bar{X}. \tag{8}$$

Как и в примере 1, анализ результатов (6) и (8) говорит о том, что в настоящем примере оба метода дают одинаковые точечные оценки неизвестного параметра.

Замечание 1. В литературе (см., например, электронный ресурс [17]) встречается вариант задачи из примера 2: проводятся две независимые серии испытаний по схеме Бернулли с неизвестной вероятностью p успеха в отдельном испытании; при этом известно, что в первой серии объема n_1 произошло m_1 успехов, а во второй серии объема n_2 произошло m_2 успехов. Требуется построить точечную оценку параметра p. В соответствующих источниках приведены решения этой задачи как с использованием метода моментов, так и с использованием метода максимального правдоподобия. Оба метода дают одинаковую оценку

$$\hat{p}(\vec{X}) = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

Этот результат полностью согласуется с результатами (6) и (8), полученными в примере 2 с использованием обоих методов: в качестве точечной оценки параметра принимается отношение общего числа успехов к общему объему испытаний.

Пример 3. Пусть $X \sim B(l,p)$, где $l \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ — неизвестные параметры, для которых требуется построить точечные оценки. Требуется построить точечную оценку для параметра p.

Генеральная совокупность X в настоящем примере очевидно имеет тот же закон распределения, что и случайная величина X из примера 2. Отличие заключается в том, что теперь объем l испытаний в отдельной серии неизвестен.

Стоит заметить, что поскольку множество возможных значений случайной величины Xзависит от неизвестного параметра, то рассматриваемая в настоящем примере модель нерегулярна. Это делает затруднительным использование метода максимального правдоподобия для построения точечных оценок, поэтому мы ограничимся использованием лишь метода моментов.

Так как закон распределения зависит от $r = 2$ неизвестных параметров, то соответствующая система должна содержать 2 уравнения. Как и в примерах 2 и 3 из работы П.А. Власова с соавторами [18], запишем первое из них относительно начального момента первого порядка, а второе — относительно центрального момента второго порядка. С учетом проведенных выше рассуждений первое уравнение будет иметь вид (5), а для составления второго уравнения используем известный (см., например, учебник В.Б. Горяинова с соавторами [19]) результат

$$\mu_2(l,p) = M[(X - MX)^2] = DX = lp(1-p),$$
$$\hat{\mu}_2(l,p) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}),$$

где

$$\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

— выборочная дисперсия. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} lp = \bar{X}, \\ lp(1-p) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}). \end{cases} \qquad (9)$$

Для решения этой системы подставим представление для lp из первого уравнения во второе:

$$\bar{X}(1-p) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}),$$

откуда

$$p = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2(\vec{X})}{\bar{X}}.$$

Подставляя полученное значение p в первое уравнение системы (9), найдем значение

$$l = \frac{\bar{X}^2}{\bar{X} - \hat{\sigma}^2(\vec{X})}.$$

При рассмотрении выборочных реализаций правая часть полученного выражения может принимать нецелые значения. В первую очередь это связано с вариативностью значений входящих в нее выборочных моментов, которая обусловлена спецификой любой невырожденной вероятностной модели. Кроме того, входящий в правую часть момент второго порядка является смещенной оценкой дисперсии, что также снижает точность полученного результата. В учебнике Горяинова В.Б. с соавторами [20] указывается, что выборочные моменты являются состоятельными оценками своих теоретических аналогов, поэтому, предполагая объем выборки достаточно большим, можно утверждать, что выборочные значения правой части будут близки к теоретическому значению параметра l. Это означает, что можно принять равенство

$$l = \left(\frac{\bar{X}^2}{\bar{X} - \hat{\sigma}^2(\vec{X})}\right),$$

где внешние круглые скобки обозначают округление до ближайшего целого:

$$(a) = \lfloor a + 0.5 \rfloor.$$

Таким образом, решение задачи можно записать в виде

$$\hat{p}(\vec{X}) = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2(\vec{X})}{\bar{X}}, \qquad \hat{l}(\vec{X}) = \left(\frac{\bar{X}^2}{\bar{X} - \hat{\sigma}^2(\vec{X})}\right).$$

Пример 4. Пусть $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda, \alpha)$, где значения параметров λ и α неизвестны. Требуется построить точечные оценки для этих параметров.

Во-первых, заметим, что случайная величина X имеет «смещенное» экспоненциальное распределение, то есть ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x, \lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Во-вторых, с использованием метода моментов эта задача решена в работе Власова П.А. с соавторами [21], поэтому сейчас мы ограничимся использованием лишь метода максимального правдоподобия.

На первый взгляд выражение для функции правдоподобия в рассматриваемой модели можно записать в виде

$$\mathcal{L}(\vec{X}, \lambda, \alpha) = f(X_1, \lambda, \alpha) \cdot \ldots \cdot f(X_n, \lambda, \alpha) = \lambda^n \, exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha)\right), \qquad (10)$$

откуда получаем

$$\ln \mathcal{L}(\vec{X}, \lambda, \alpha) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha) \qquad (11)$$

Это представление приводит к системе из $r = 2$ уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}, \lambda, \alpha)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{X}, \lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = \lambda n \alpha = 0,$$

из которой следует противоречивый результат

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0, \\ n = 0. \end{array}\right.$$

Проблема заключается в том, что выражения (10) и (11) составлены некорректно. Так, если хотя бы один элемент X_i выборки окажется меньше α, то соответствующий сомножитель $f(X_i, \lambda, \alpha)$ в выражении для функции правдоподобия будет равен нулю и, следовательно, $\mathcal{L} = 0$. Чтобы функция правдоподобия имела положительное значение, необходимо потребовать выполнение условия $\alpha \leq X_i$, $i = \overline{1; n}$, или, что эквивалентно, условия (см. рис. 1).

$$\alpha \leq X_{(1)}, \qquad (12)$$

где $X_{(1)}$ — первый элемент вариационного ряда случайной выборки $\vec{X}$. По этой причине корректное выражение для функции правдоподобия в рассматриваемом примере имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{X},\lambda,\alpha)=\begin{cases}\lambda^n exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)\right), & \alpha\le X_{(1)};\\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$$

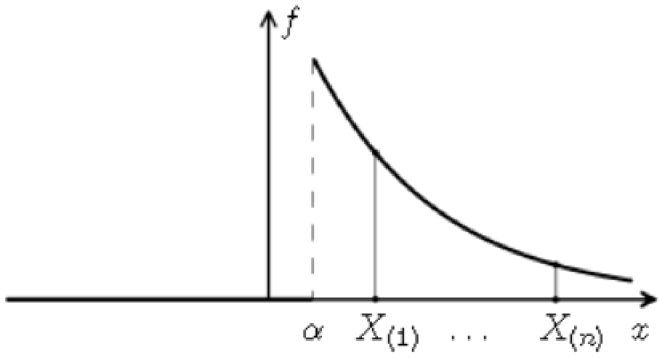


Рис. 1

Поскольку в методе максимального правдоподобия необходимо подобрать такие значения неизвестных параметров, которые доставляют наибольшее значение функции правдоподобия, то в дальнейшем мы будем рассматривать только те их значения, которые удовлетворяют условию (12). При этом анализ графической информации, представленной на рис. 1, позволяет утверждать, что чем больше значения α, тем больше соответствующие значения $f(X_i,\lambda,\alpha)$ и, следовательно, больше величина $\mathcal{L}(\vec{X},\lambda,\alpha)$. Таким образом, оптимальное значение параметра α следует выбирать из условия

$$\begin{cases}\alpha\to max,\\ \alpha\le X_{(1)},\end{cases}$$

откуда получаем $\hat{\alpha}=X_{(1)}$.

Для нахождения оценки максимального правдоподобия параметра λ воспользуемся стандартной техникой, основанной на использовании уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\vec{X},\lambda,\hat{\alpha})}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\alpha})=0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}-X_{(1)}}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial^2\ln\mathcal{L}(\vec{X},\lambda,\hat{\alpha})}{\partial\lambda^2}=-\frac{n}{\lambda^2}<0$$

,

поэтому найденная стационарная точка $\hat{\lambda}$ является точкой максимума функции $\mathcal{L}$. Таким образом, решение задачи, полученное с использованием метода максимального правдоподобия, можно записать в виде

$$\hat{\alpha}(\vec{X})=X_{(1)},\qquad \hat{\lambda}(\vec{X})=\frac{1}{\bar{X}-X_{(1)}}.$$

Заметим, что этот результат отличается от оценок, ранее полученных для рассматриваемого распределения с использованием метода моментов в работе П.А. Власова с соавторами [22].

Заключение

В работе рассмотрены методические аспекты решения примеров по теме «Построение точечных оценок» с использованием метода моментов и метода максимального правдоподобия, которые изучаются в курсе математической статистики.

В ходе исследования рассмотрена методика решения задач по соответствующим темам, изучены особенности реализации методов для различных законов распределения генеральной совокупности (экспоненциального, биномиального). В каждом случае сформулированы методические рекомендации, учитывающие специфику конкретной задачи.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
2. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1984.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - 12-е изд. - М.: Издательство Юрайт, 2023.
4. Интернет-энциклопедия «Википедия». - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_theory.
5. Интернет-энциклопедия «Википедия». - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation.
6. Интернет-энциклопедия «Википедия». - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_theory.
7. Интернет-энциклопедия «Википедия». - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation.
8. Власов П. А., Андреева Т. В., Семенов Ю. С. Изложение метода моментов построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - Т. 1, №1. - P. 91-97. - URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=53115570.
9. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Иложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. — Salzburg, 2023. - №3. - P. 67-75. - URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54653953.
10. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
11. Там же.
12. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Иложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. — Salzburg, 2023. - №3. - P. 67-75. - URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54653953.
13. В.А. Ильин, В.Г. Позняк. Основы математического анализа. Учебник. В 2-х частях. Часть 1. - М.: Физматлит, 2021.
14. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
15. Власов П. А., Андреева Т. В., Семенов Ю. С. Изложение метода моментов построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - Т. 1, №1. - P. 91-97. - URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=53115570.
16. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
17. Интернет-ресурс «Математическое бюро». - URL: www.matburo.ru/Examples/Files/ms_mmp_1.pdf.
18. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Иложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. — Salzburg, 2023. - №3. - P. 67-75. - URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54653953.
19. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Указ. соч.
20. Там же.
21. Власов П. А., Андреева Т. В., Семенов Ю. С. Изложение метода моментов построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - Т. 1, №1. - P. 91-97. - URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=53115570.
22. Там же.

Pavel A. Vlasov**,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
pvlx@mail.ru
Faniya Kh. Akhmetova**,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

dobrich2@mail.ru
Anastasiya M. Golovina**,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
nastya_gm@mail.ru

Methodology for solving examples on the topic "Construction of point estimates" in the course of mathematical statistics

Abstract. The problem of estimating unknown parameters of a distribution law, the general form (type or class) of which is known, takes an important place in the Mathematical statistics course. One approach to solving this problem is to construct the point estimates. The corresponding skills are of great importance for the practical work of a future specialist, which makes it relevant to hone the methodology of presenting this section. The purpose of this article is to study the methodological aspects of solving examples on the topic "Point Estimates" for students (bachelors) of engineering and their ranking by importance and sequence of presentation.

Keywords: parameter estimation, point estimate, method of moments, maximum likelihood estimation.

ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В статье обсуждаются основные понятия, возникающие при численном решении различных математических задач. Актуальность такого обсуждения обусловлена тем, что в рамках школьного курса информатики нет возможности получать навыки использования компьютеров для решения различных прикладных задач и ученик часто не понимает, как происходят вычисления. Цель работы – показать, как неточные начальные данные и конечные числа могут привести к непредсказуемым, неверным результатам. Проведенный анализ возникновения ошибок позволяет частично устранить причины их возникновения и получать удовлетворительные результаты вычислений. Работа предназначена для самостоятельного изучения школьникам, изучающим в школе информатику.

Ключевые слова

погрешность, абсолютная и относительная погрешности,
число обусловленности системы, регуляризация

АВТОРЫ

Грибов Александр Федорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Жидков Евгений Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
enzhidkov@yandex.ru

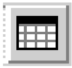
Краснов Игорь Константинович,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Введение

Численные методы могут изучаться в школе только факультативно в рамках внеклассных занятий или самостоятельно. Линейные алгебраические уравнения часто встречаются в школьных задачах как один из элементарных шагов общего решения. Мы будем подробно рассматривать систему второго порядка, решение которой можно проследить, как говорят, с карандашом в руках. Это позволяет увидеть, что можно ожидать и на что обратить внимание. Будем следовать Р.В. Хеммингу: «Цель расчетов - понимание, а не числа». Как следует из работ И.С.Березина и Н.П. Жидкова [1], линейные алгебраические уравнения появляются во многих прикладных задачах, а также большая часть численных методов решения различных задач, что отмечают А.А. Амосов с соавторами [2], включают в себя решение таких систем как элементарный шаг.

Обозначения, принятые в статье:
✓ – **сделать** щелчок (щелкнуть) левой кнопкой мыши;
✓✓ – **сделать** двойной щелчок левой кнопкой мыши;
✓✓✓ – **сделать** тройной щелчок левой кнопкой мыши;
✓ – **сделать** щелчок правой кнопкой мыши;
– **выполнить буксировку (перетащить);**

– **нажать** клавишу клавиатуры;


– **нажать кнопку на панели инструментов;**

– **нажать кнопку в диалоговом окне;**

❶ *Сохранить* – действие, которое нужно выполнить на компьютере;

Файл ⇒ **Открыть** – команды текстового меню, которые надо выполнить последовательно.

Методология и результаты исследования

Представление чисел в ЭВМ. Погрешность арифметических действий

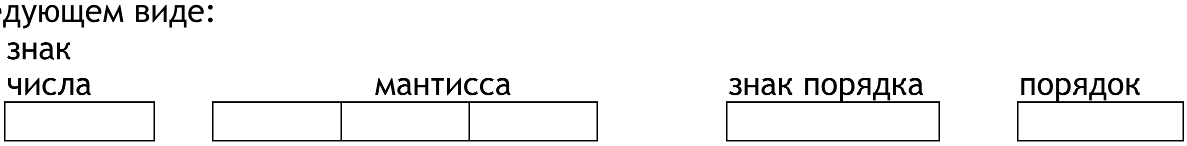
В отличие от классической математики, которая оперирует с бесконечными дробями и производит точные вычисления, при вычислении на ЭВМ приходится пользоваться конечными числами, что накладывает свою специфику на результат вычисления. В ЭВМ любое число представляется в виде

$$x = \theta m 2^p \qquad (1)$$

где m – мантисса, число из диапазона $0 \le m < 1$, θ - знак числа x, p – порядок числа x. Мантисса m должна быть нормализована, то есть, если $m \ne 0$, то старший разряд мантиссы не равен нулю.

На каждый из параметров в ЭВМ отводится определенное количество разрядов, поэтому не всякое действительное число из допустимого диапазона можно представить точно в виде (1) и это приводит к своеобразным особенностям при выполнении арифметических вычислений.

Для пояснения воспользуемся очень грубой моделью. Пусть на мантиссу m отведено три двоичных разряда, а на порядок – один. То есть, число представляется в следующем виде:



Например, представим в машинном виде число 1.0625.
Запишем его в двоичном виде. Целая часть числа равна 1.

В современном программировании принято вместо десятичной запятой употреблять десятичную точку. Мы также будем использовать это обозначение.

Для нахождения дробной части поступим следующим образом. Для этого умножим 0.0625 на 2. $0.0625 \times 2 = 0.125$. Таким образом, первый двоичный разряд мантиссы после запятой равен 0. Умножим теперь 0.125 на 2. Получаем $0.125 \times 2 = 0.25$. Второй двоичный разряд – 0. Умножим 0.25 на 2. $0.25 \times 2 = 0.5$. Очередной разряд – 0. Поступая также далее, получим $0.5 \times 2 = 1$. Следующий разряд – 1. Таким образом, $1.0625_{10} = 1.0001_2$. После нормализации получим следующий вид числа: $1.0001 = 0.10001 \times 2$.

Поскольку мантисса содержит три разряда, то мантисса будет равна 100. Больше двоичных разрядов в мантиссе нет, и остаток либо округляется, либо отбрасывается. Для простоты будем считать, что отбрасывается. Порядок полученного числа равен 1.

Перечислим все двоичные числа, представимые в трехзначной мантиссе (порядок *p* равен 0):

1	0	0	=0,5
1	0	1	=5/8=0,625
1	1	0	=3/4=0,75
1	1	1	=7/8=0,875

Следовательно, при *p* =1 получим значения 1, 1,25, 1,5, 1,75. При *p* = -1 получаем 0,25. 0,3125, 0,375, 0,4375.

Поэтому, все допустимые положительные числа, которые можно точно отобразить таким образом, заключены в таблице 1.

Таблица 1

Допустимые положительные числа

1/16	2/16	3/16	**1/4**	**5/16**	**3/8**	**7/16**	**1/2**	9/16	**5/8**	11/16	**3/4**	13/16	**7/8**
15/16	**1**	17/16	9/8	19/16	**5/4**	21/16	11/8	23/16	**3/2**	25/16	13/8	27/16	**7/4**

Жирным шрифтом отмечены числа, точно отображаемые в данной системе. Числа, по модулю меньшие 1/4 называются машинным 0. Числа, большие по модулю 7/4 считаются бесконечно большими. Остальные числа отображаются лишь приближенно. Пусть, например, нам требуется записать в память ЭВМ $\sqrt{2}$. В результате будем иметь $\sqrt{2} = 5/4$. Все числа из диапазона (1/16, 1/8) будут изображаться числом 1/16. Отсюда вытекают особенности машинной арифметики.

$-0{,}8 + 0{,}9 = 1/8$. $5/4 \times 3/2 = \propto$. $1/4 \times 5/16 = 0$.

Предположим, что мантисса состоит из четырех десятичных разрядов.

Задача. Требуется найти сумму 10 чисел: 0.2897, 0.4976, 2.488, 7.259, 16.38, 62.49, 216.2, 523.3, 1403, 5291. Точная величина суммы равна 7522,9043. Вычислим ее теперь в четырехразрядной сетке сначала слева направо, учитывая, что пятый разряд отбрасывается. Сумма равна 7522

Вычислим теперь сумму справа налево. Она равна 7520.

Абсолютная величина разности точного значения *x* и приближенного значения *x** называется *абсолютной погрешностью*, $A = |x - x^*|$.

Отношение абсолютной погрешности и точного числа называется относительной погрешностью, $\delta = A / x$.

Вычислим абсолютную и относительную погрешность результата. В первом случае абсолютная погрешность равна $A = 0{,}9043$, относительная $\delta = 0{,}0001202$. Во втором $A = 2{,}9043$, $\delta = 0{,}000386$.

Относительная погрешность меньше при суммировании от меньшего числа к большему. Отсюда вытекают правила действий с числами.

Памятка программисту.

1. Если приходится складывать или вычитать последовательность чисел, то надо суммировать их в порядке возрастания их по модулю.
2. Следует, по возможности, избегать вычитания почти одинаковых чисел.
3. Выражение $a(b-c)$ можно записать в виде $ab-ac$, а $(b-c)/a$ можно записать как $b/a-c/a$.Если числа *b* и *c* почти равны друг другу, то надо выполнить вычитание до умножения и деления.
4. Следует свести к минимуму число арифметических операций.

В качестве примера применения этих правил решим квадратное уравнение $x^2+0.4002x+0.00008=0$.

Точные значения корней – 0,4 и – 0,0002.

Формула для решения этого уравнения имеет вид

$$x=\frac{-0.4002\pm\sqrt{(0.4002)^2-0.00032}}{2}$$

Вычислим оба корня при длине мантиссы, равной 4.

$$x=\frac{-0.4002\pm\sqrt{0.1601-0.00032}}{2}=\frac{-0.4002\pm\sqrt{0.1597}}{2}=\frac{-0.4002\pm0.3996}{2}.$$

Корнями будут x_1 = - 0.3999 и x_2 = - 0.0003.

Абсолютные погрешности корней соответственно A_1 = 0.0001 и A_2 = 0.0001. Относительные же погрешности - δ_1 = 0.00025, δ_2 = 0.25. Ясно, что точность второго корня слишком мала. Это произошло вследствие нарушения правила 2 памятки. Попробуем исправить положение. Для этого преобразуем формулу для вычисления второго корня

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4c})(-b-\sqrt{b^2-4c})}{2(-b-\sqrt{b^2-4c})}=$$

$$=\frac{b^2-4c-b^2}{-2(\sqrt{b^2-4c}+b)}=\frac{2c}{\sqrt{b^2-4c}+b}.$$

Используя эту формулу, получим

$$x=-\frac{0.00016}{0.3996+0.4002}=-\frac{0.00016}{0.7998}=0.0002.$$

То есть, мы получили практически точное значение корня.

К сожалению, не существует общих правил получения такого улучшения результата.

Задача. Проверить пункт 3 на примере *a* = 0.9364, *b* = 0.6392, *c* = 0.6375 (умножение) и.*a* = 0.41, *b* = 0.36, *c* = 0.7 (деление).

Правила действий с погрешностями

$$A(x^*\pm y^*)\le A(x^*)\pm A(y^*)$$

$$\delta(x^*y^*)\le\delta(x^*)+\delta(y^*)+\delta(x^*)\delta(y^*)$$

$$\delta\left(\frac{x^*}{y^*}\right)\le\frac{\delta(x^*)+\delta(y^*)}{1-\delta(y^*)}$$

Если $\bar{\delta}(x^*),\bar{\delta}(y^*)\le 1$, то можно воспользоваться приближенными равенствами

$$\bar{\delta}\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \bar{\delta}(x^*) + \bar{\delta}(y^*), \quad \bar{\delta}(x^* y^*) \approx \bar{\delta}(x^*) + \bar{\delta}(y^*).$$

Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Как показывают Н.В. Копченова и И.А. Марон [3], решение систем линейных алгебраических уравнений является одной из часто встречающихся задач вычислительной математики. Поэтому, остановимся на них подробнее.

Пусть требуется решить систему

$$\begin{cases} 0.2038x + 0.1218y = 0.2014, \\ 0.4071x + 0.2436y = 0.4038. \end{cases}$$

Точное решение системы - $\begin{cases} x = -2, \\ y = 5. \end{cases}$

Задачу будем решать на такой же условной машине с мантиссой числа, содержащей четыре разряда. Самым популярным методом решения системы является метод Гаусса.

Умножим первое уравнение системы на 0.4071/0.2038 =1.997. Вычтем полученное уравнение из второго. При этом система примет вид

$$\begin{cases} 0.2038x + 0.1218y = 0.2014, \\ 0.0003653y = 0.001604. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на 0,0003653. В результате приходим к системе

$$\begin{cases} 0.2038x + 0.1218y = 0.2014, \\ y = 4.39, \end{cases}$$

Получим решение задачи, существенно отличающееся от точного

$$\begin{cases} x = -1.635, \\ y = 4.39. \end{cases}$$

Решим теперь еще одну задачу.

$$\begin{cases} 100.11x_1 + 99.91x_3 + 99.98x_5 = 899.74 \\ 10.1x_2 + 9.9x_4 = -59.8 \\ 99.91x_1 + 100.11x_3 + 99.98x_5 = 900.14 \\ 9.9x_2 + 10.1x_4 = -60.2 \\ 99.98x_1 + 99.98x_3 + 100.04x_5 = 900.12 \end{cases}$$

Точным решением системы является вектор (1, -2, 3, -4, 5)^T.

Так как часть школьников, изучающих информатику, но не сдающих ЕГЭ, могут не владеть приемами программирования на языках высокого уровня, будем решать задачу с помощью подробно описанной Д.М. Златопольским [4] и С.М. Лавреновым [5] программы для работы с электронными таблицами Excel. Поскольку в пакете нет метода Гаусса, то будем решать систему по формуле линейной алгебры $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$, где $\bar{x}$ - вектор решения, A - матрица системы, A^{-1} - матрица, обратная к матрице A и $\bar{b}$ - вектор правых частей.

❶ На листе Excel в ячейку B2 ввести текст «Матрица системы».

❷ Объединить ячейки B2:E2. Отформатировать ячейку: формат общий, выравнивание по центру, поставить флажок в окне объединение ячеек, OK

Адресом объединенной ячейки будет B2.

❸ В ячейки B3:F7 ввести коэффициенты при неизвестных системы. Формат ячеек: числовой, число знаков после запятой – 2, флажок в окне Разделитель групп разрядов (,), выравнивание – по центру, OK.

Число знаков после запятой указывает лишь на число знаков, выводимых на экран, а не разрядность числа.

❹ Отформатировать ячейки H3:H7 так же, как в ❸. Ввести в них величины правых частей системы.

❺ Ввести в ячейку H2 текст «Правая часть». Отформатировать ячейку: Формат общий, выравнивание по центру, переносить по словам, OK.

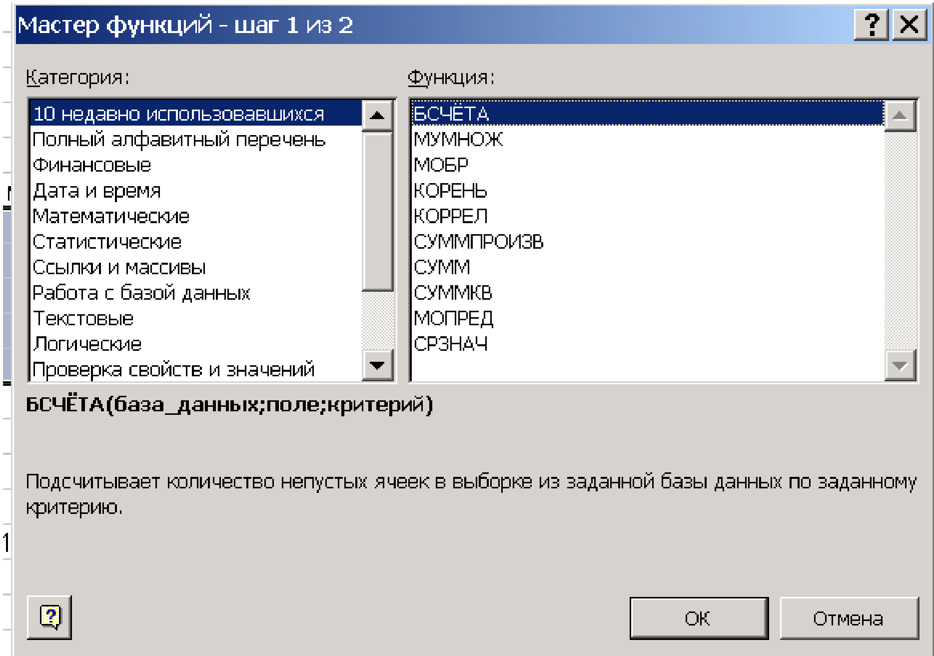
❻ Объединить ячейки B9:E9. Отформатировать ячейку: Формат общий, выравнивание по центру, поставить флажок в окне объединение ячеек, OK.

❼ Ввести в нее текст «Обратная матрица».

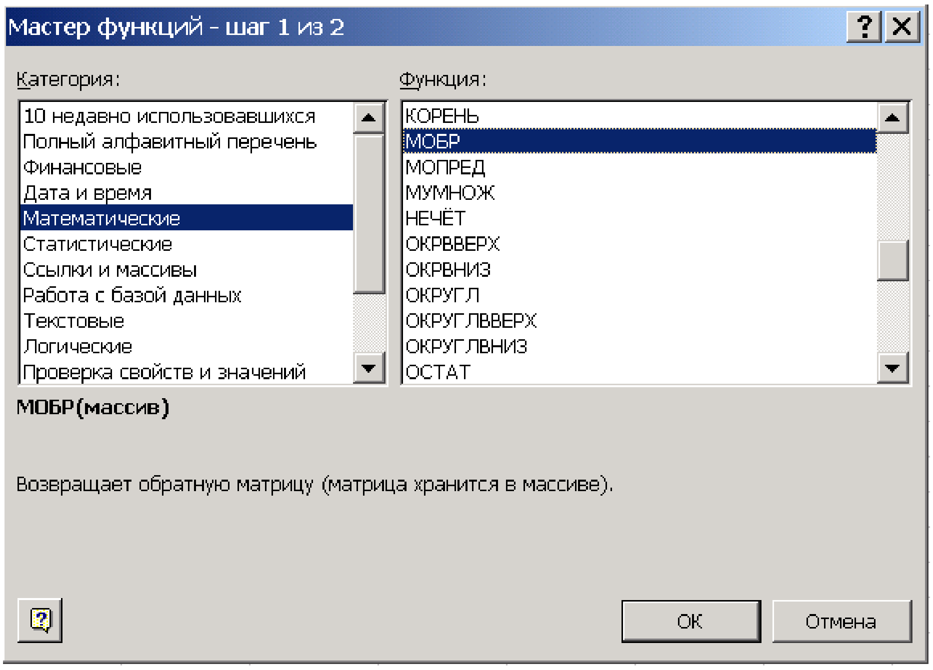
❽ Выделить блок ячеек B10:F14. Для этого поставить курсор Excel в ячейку B10 и, удерживая левую клавишу мыши нажатой провести курсор до ячейки F14, где и отпустить ее.

❽ ✓ на кнопке вставки функций f_x стандартной панели инструментов.

Появляется меню мастера функций.



❿ В левом окне выбираем группу Математические (✓). В правом окне выбираем функцию обращения матрицы МОБР.



OK.

❶ В окне меню МОБР вставляем адрес обращаемой матрицы. Для этого ✓ на кнопке . Выделяем блок исходной матрицы (см. ❽). ✓ .

⓬ Для запуска программы обращения нажимаем одновременно

Ctrl + Shift + Enter.

В результате получаем

	Обратная матрица			
5,278889	0	0,278889	0	-5,55444
0	2,525	0	-2,475	0
0,278889	0	5,278889	0	-5,55444
0	-2,475	0	2,525	0
-5,55444	0	-5,55444	0	11,11222

⓭ В ячейку H9 вводим текст «Решение».

⓮ Выделяем блок H10:H14.

⓮ f_x ⇒ **Математические**⇒МУМНОЖ.

В верхнее окно вставляем границы массива обратной матрицы, в нижнее – матрицы правых частей. Ctrl + Shift + Enter.

В результате получаем

решение
1
-2
3
-4
5

Замечаем, что результат совпадает с точным решением. Наиболее широко для решения линейных систем используется метод Гаусса, а также его вариации состоящий в том, что решения осуществляется исключением переменных по очереди. Метод Гаусса является прямым методом, позволяющий получить решение за конечное число элементарных вычислений. Наряду с такими методами существуют итерационные методы, когда начиная с приближенного решения находят новое приближение. Повторяют итерации до тех пор, пока отличие очередного приближения станет достаточно мало отличаться от предыдущего.

Решение первой системы значительно отличается от точного. Это являлось следствием того, что между двумя уравнениями оказалась «почти линейная зависимость» и малые изменения коэффициентов приводят к большой ошибке. Такие системы называются плохо обусловленными. Следовательно, надо найти способ определения «плохих» систем. Для этого введем *число обусловленности системы*, используя формулу

$$cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|.$$

Здесь $\|A\|$ - норма матрицы *A*, вычисляемая по формуле $\|A\|^2 = \sum a_{ij}^2$.

Перечислим свойства числа обусловленности.

1. $cond(A) \geq 1$.
2. $cond(cA) = cond(A)$.

Определив число обусловленности, можно сделать вывод, что если $cond(A) \approx n$, где *n* - число уравнений, то система хорошо обусловлена и ее можно решать любым способом. Если же $cond(A) \gg n$, то система «плохая» и ее нужно решать специальными методами.

Вычислим число обусловленности для матрицы последней системы. Для этого выполним следующие действия:

❶ В ячейку C17 ввести текст «норма *A*».

❷ Активизируем ячейку B17. f_x ⇒ **Математические** ⇒ СУММКВ. В первое окно вводим адреса массива исходной матрицы. Ctrl + Shift + Enter.

В ячейке B17 получен квадрат нормы матрицы *A*.

❸ В ячейку C19 ввести текст «норма A^{-1}».

❹ Активизируем ячейку B19. f_x ⇒ **Математические** ⇒ СУММКВ. В первое окно вводим адреса массива исходной матрицы. Ctrl + Shift + Enter.

В ячейке B19 получен квадрат нормы матрицы A^{-1}.

❺ В ячейку C22 вводим текст *cond*(A).

❻ В ячейку B21 вводим формулу =B17*B19. Получен квадрат числа обусловленности.

❼ Активизируем ячейку B22. f_x ⇒ **Математические** ⇒ КОРЕНЬ. В окно вводим адрес B21.

Результат – 16,60707. Данное число превышает число уравнений – 5. Но превышение не слишком велико. Поэтому, система решается достаточно хорошо.

Для первой системы число обусловленности равно 4621,364. Поэтому, система решается плохо. Способ решения подобных систем рассмотрим ниже.

В заключение хотелось бы отметить следующее важное обстоятельство. Все практически важные системы имеют коэффициенты, полученные в результате обработки экспериментальных данных. Поэтому, они могут оказаться несовместными или иметь большое число обусловленности. Тем не менее, их приходиться решать.

Для их решения существуют специальные методы решения, одним из которых является *метод регуляризации*.

В качестве примера решим следующую задачу.

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 1, \\ 3\sqrt{2}x + 6y = 1 \end{cases}$$

Данная система несовместна. Ее число обусловленности равно $\propto$.

Решим эту систему методом регуляризации. Для этого вместо решения системы (8) минимизируем функцию по переменным *x* и *y*.

$$\left\| \begin{matrix} x + \sqrt{2}y - 1 \\ 3\sqrt{2}x + 6y - 1 \end{matrix} \right\|^2 + \alpha \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|^2, \alpha > 0.$$

Необходимое условие минимума функции двух переменных - это равенство нулю производных функции по *x* и *y*. Это приводит к решению системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\left(x + \sqrt{2}y - 1\right) + 2\left(3\sqrt{2}x + 6y - 1\right)3\sqrt{2} + 2\alpha x = 0, \\ 2\left(x + \sqrt{2}y - 1\right)\sqrt{2} + 2\left(3\sqrt{2}x + 6y - 1\right)6 + 2\alpha y = 0 \end{cases}$$

Преобразуем систему к стандартному виду

$$\begin{cases} (38 + 2\alpha)x + 38\sqrt{2}y = 6\sqrt{2} + 2, \\ 38\sqrt{2}x + (76 + 2\alpha)y = 2\sqrt{2} + 12. \end{cases}$$

Система совместна и имеет единственное решение

$$x = \frac{3\sqrt{2} + 1}{114 + 2\alpha}, \quad y = \frac{2\sqrt{2} + 12}{114 + 2\alpha}.$$

Подставим полученное решение в левую часть системы и вычтем правую.

$$\left(\frac{3\sqrt{2} + 1}{114 + 2\alpha} + \sqrt{2}\frac{2\sqrt{2} + 12}{114 + 2\alpha} - 1, \quad 3\sqrt{2}\frac{3\sqrt{2} + 1}{114 + 2\alpha} + 6\frac{2\sqrt{2} + 12}{114 + 2\alpha} - 1, \quad \frac{15\sqrt{2} - 109 - 2\alpha}{114 + 2\alpha}, \frac{-24 + 15\sqrt{2} - 2\alpha}{114 + 2\alpha}\right)$$

Этот вектор называется *вектором невязки*. Вычислим его длину, которая называется *невязкой*.

$$\sqrt{\left(\frac{15\sqrt{2} - 109 - 2\alpha}{114 + 2\alpha}\right)^2} + + \sqrt{\left(\frac{-24 + 15\sqrt{2} - 2\alpha}{114 + 2\alpha}\right)^2} = \\ = \frac{1}{114 + 2\alpha}\sqrt{13357 - 3990\sqrt{2} - 4\alpha\left(30\sqrt{2} - 133\right) + 2\alpha^2}.$$

Наименьшее значение этой величины при $\alpha \geq 0$ достигается при $\alpha = 0$.

Регуляризованное решение получается равным

$$x = \frac{15\sqrt{2} - 109}{114}, \quad y = \frac{15\sqrt{2} - 24}{114}.$$

Заключение

В работе изложены основные понятия, с которыми школьник встречается при изучении численных методов. Рассмотрена элементарная теория погрешностей и основные особенности машинной арифметики. На примере решения линейных алгебраических систем рассказано о существовании плохо обусловленных систем и методе регуляризации. Может быть полезна школьникам, изучающим информатику.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. –М.: Наука,1966. – 632 с.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк. - 1994. - 544 с.
3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М: Наука, 1972. 368 с.
4. Златопольский Д.М. 1700 заданий по Microsoft EXCEL. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.- 544 с.
5. Лавренов С.М. Excel: сборник примеров и задач. - М.: Финансы и статистика, 2003.

Alexander F. Gribov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
alexandr-gribov@list.ru
Evgeny N. Zhidkov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
enzhidkov@yandex.ru
Igor K. Krasnov,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow,
igorkrsnv@yandex.ru

The basics of numerical methods for schoolchildren by example systems of linear algebraic equations

Abstract. The article discusses the basic concepts that arise in the numerical solution of various mathematical problems. The relevance of such a discussion is due to the fact that within the framework of a school computer science course there is no opportunity to gain skills in using computers to solve various applied problems and the student often does not understand how calculations occur. The purpose of the work is to show how inaccurate initial data and final numbers can lead to unpredictable, incorrect results. The conducted analysis of the occurrence of errors makes it possible to partially eliminate the causes of their occurrence and obtain satisfactory calculation results. The work is intended for self-study by students studying computer science at school.

Keywords: error, absolute and relative errors, the number of conditionality of the system, regularization.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Аннотация

Современное высокотехнологическое производство выдвигает высокие требования к уровню математической подготовки студентов-будущих инженеров. Поэтому вопросы совершенствования и развития методов обучения математике в высших учебных заведениях всегда находятся в центре внимания исследователей. Целью данной статьи является анализ курса векторной алгебры в техническом вузе и разработка системы задач, которая окажется наиболее эффективной для обучения студентов. Результатами работы помимо разработанной системы задач являются также методические рекомендации по организации такого обучения. Материалы статьи могут оказаться полезными как преподавателям вузов, так и студентам первых курсов технических вузов, изучающих векторную алгебру.

Ключевые слова

векторная алгебра, свободный вектор, скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов, смешанное произведение векторов

АВТОРЫ

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

Пинчук Ирина Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
irenepin@yandex.ru

Шилова Зоя Вениаминовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»;
доцент ФГАОУ ВО «Московский политехнический университет», г. Москва
zoya@soi.su

Введение

Высокий технологический уровень современного производства предъявляет повышенные требования к подготовке инженеров. Это отмечают многие исследователи, например, В.П. Прокопьев [1]. К ключевым разделам математики относится, в частности, курс «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», одним из разделов которого является «Векторная алгебра». Вопросы, изучаемые в разделе «Векторная алгебра», традиционно считаются относительно несложными, поэтому им часто уделяют недостаточно много внимания, что не способствует формированию прочных и устойчивых навыков. Вместе с тем, математических аппарат этого раздела активно используется в различных разделах математики, а также имеет широкое практическое применение. Кроме того, изучение вопросов, связанных с векторами на первых курсах технических вузов, позволяет сохранять преемственность в изучении математики и тем самым способствовать лучшей адаптации обучающихся к изменившимся по сравнению со средней школой условиям. Вместе с тем, изучая элементы векторной алгебры, полезно затронуть и некоторые вопросы истории математики, что позволит сделать изучение математики более чувственным и повысить к ней интерес.

Методология и результаты исследования

Начинается изложение темы с традиционного знакомства-напоминания ключевых понятий, знакомых обучающимся еще из школьного курса математики. Постепенно добавляются новые понятия и соотношения, что отчетливо можно проследить, взяв учебное пособие для инженеров Б.П. Демидовича [2], а также классические учебники по аналитической геометрии, например, учебник авторов В.А. Ильина и Э.Г. Поздняка [3] или учебник М.М. Постникова [4]. Тексты задач усложняются и требуют повышенного внимания.

Приведем некоторые примеры и разберем решения ключевых для этого раздела математики задач и необходимых для дальнейшего изучения студентами, будущими инженерами, профильных дисциплин. Приводимые ниже задачи можно рассматривать полезным дополнением к набору задач в книге, рекомендованной для вузов под редакцией А. В. Ефимова [5].

К ключевым задачам можно отнести следующие типы задач.

1. Пользуясь определением, показать, что векторы $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ линейно независимы, и найти координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$.

2. Проверить, являются ли коллинеарными векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3. Некоторые метрические задачи, связанные с соотношениями в треугольнике. Например, такая. В треугольнике ABC проведены медиана и биссектриса из вершины A. Найти их длины и угол между медианой и биссектрисой.

4. Задачи, в которых используется геометрический смысл скалярного и векторного произведения. Например, вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5. Задачи на геометрический смысл смешанного произведения, например, проверить, компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

6. Для треугольной пирамиды $ABCD$ найти объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Ключевыми понятиям являются понятие линейно зависимой-независимой системы векторов и понятие базиса системы векторов, так что начинаем знакомство с темой именно с этих понятий.

Задача 1. Показать, что векторы $\bar{m} = (-1,2,4)$, $\bar{n} = (1,0,1)$, $\bar{p} = (0,1,2)$ линейно независимы, и найти координаты вектора $\bar{a} = (-1,2,8)$ в базисе $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$.

Решение. Векторы $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ линейно независимы, если из равенства

$$\lambda_1\bar{m} + \lambda_2\bar{n} + \lambda_3\bar{p} = \bar{0} \qquad (1)$$

Следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставляя в формулу (1) координаты векторов $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$ получим:

$$\lambda_1(-1,2,4) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3((0,1,2) = (0,0,0)$$

или $(-\lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_3, 4\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0)$. Последнее равносильно однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases}-\lambda_1+\lambda_2=0,\\ 2\lambda_1+\lambda_3=0,\\ 4\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Следовательно система имеет единственное нулевое решение $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Поэтому, векторы $\bar m, \bar n, \bar p$ линейно независимы и образуют базис трехмерного линейного пространства.

Найдем координаты вектора $\bar a=(-1,2,8)$ в базисе $\bar m, \bar n, \bar p$.:

$\bar a=\lambda_1\bar m+\lambda_2\bar n+\lambda_3\bar p$

или $(-1,2,8)=\lambda_1(-1,2,4)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(0,1,2)$,

$(-1,2,8)=(-\lambda_1+\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_3, 4\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)$

$$\begin{cases}-\lambda_1+\lambda_2=-1,\\ 2\lambda_1+\lambda_3=2,\\ 4\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=8\end{cases}$$

Последнюю систему решим по правилу Крамера: $\Delta=1\neq 0$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=5,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 2\end{vmatrix}=4,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 8\end{vmatrix}=-8$$

и тогда $\lambda_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=5,\ \lambda_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=4,\ \lambda_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-8$

В результате $\bar a=5\bar m+4\bar n-8\bar p$. Вектор $\bar a$ в разложении по базису $\bar m, \bar n, \bar p$ имеет координаты $\bar a=(5,4,-8)$.

Здесь отметим, что для успешного освоения всеми необходимыми понятиями необходимо предварительно познакомить студентов с понятием определителя и научить их вычислять определители небольших порядков. Полезно, если они смогут «видеть» основные случаи равенства определителей нулю.

Следующие задачи также исследуют случаи взаимного расположения векторов.

Задача 2. Проверить, являются ли коллинеарными векторы $\bar a=3\bar m-\bar n$ и $\bar b=\bar m+2\bar n$, если $\bar m=(1;0{,}5;3)$, $\bar n=(2;1;6)$

Решение. Найдем координаты векторов $\bar a$ и $\bar b$:

$$\bar a=3(1;0{,}5;3)-(2;1;6)=(3;1{,}5;9)-(1;2;6)=(1;0{,}5;3)$$

$$\bar b=(1;0{,}5;3)+2(2;1;6)=(5;2{,}5;15)$$

Если векторы $\bar a$ и $\bar b$ коллинеарные, то должно выполняться равенство $\bar a=\lambda\bar b$, и поэтому координаты векторов должны быть пропорциональны. Проверим пропорциональность координат:

$$\frac{1}{5}=\frac{1/2}{5/2}=\frac{3}{15}=\lambda.$$

Все координаты пропорциональны, поэтому векторы коллинеарны. Заметим, что $\lambda=0{,}2>0$, следовательно, векторы сонаправлены, и длина вектора $\bar a$ в пять раз меньше длины вектора $\bar b$.

Задача 3. Найти вектор $\bar x$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\bar x|=2\sqrt{3}$.

Решение. Так как вектор образует со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, то его направляющие косинусы равны. Координаты вектора $\bar x$, как известно, есть произведения направляющих косинусов на $|\bar x|$, тогда

$\bar x=2\sqrt{3}(\cos\alpha\,\bar\imath+\cos\alpha\,\bar\jmath+\cos\alpha\,\bar k)$. Но $cos^2\alpha+cos^2\alpha+cos^2\alpha=1$, $cos^2\alpha=\frac{1}{3}$.

Так как угол α острый, то $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и поэтому имеем

$$\bar{x} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k}.$$

Далее целесообразно переходить к решению различных метрических задач, связанных, например, с треугольниками требующих умения перехода от соотношений между геометрическими объектами к связям между векторами. Приведем некоторые примеры таких задач. В следующей задаче используется как скалярное произведение векторов, так и формулы для вычисления координаты точки, которая делит в некотором отношении отрезок, через координаты концов отрезка.

Задача 4. В треугольнике ABC проведены медиана и биссектриса из вершины A. Найти их длины и угол между медианой и биссектрисой, если $A(1,-2,1),\ B(4,2,1),\ C(4,-2,1)$.

Решение. Основание биссектрисы AK - точка K делит сторону BC на отрезки BK и CK, длины которых пропорциональны длинам прилегающих к ним сторон треугольника - AB и AC.

т.е. $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \lambda$. Найдем длины сторон и соотношение λ

$\overline{AB} = (3,4,0);\quad |\overline{AB}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$

$\overline{AC} = (3,4,0);\quad |\overline{AC}| = \sqrt{3^2+0^2+0^2} = 3$

Отношение $\lambda = 5/3$. Координаты точки K, которая делит отрезок BC в соотношении 5:3 или $\frac{BK}{KC} = \frac{5}{3}$, можно вычислить по формулам:

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda} \\ y_K = \frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda} \\ z_K = \frac{z_B+\lambda z_C}{1+\lambda} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_K = \frac{4+\frac{5}{3}\cdot 4}{1+\frac{5}{3}} = 4 \\ y_K = \frac{2-\frac{5}{3}\cdot 2}{1+\frac{5}{3}} = -\frac{1}{2} \\ z_K = \frac{1+\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{3}} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, точка K имеет координаты $K(4;-0{,}5;1)$. Теперь найдем вектор $\overline{AK}$ и длину биссектрисы:

$\overline{AK} = (3;15;0);\quad |\overline{AK}| = \sqrt{3^2+1{,}5^2+0^2} = 1{,}5\sqrt{5}$

Основание медианы AM - точка M , делит сторону BC на две равные части, поэтому $\lambda = \frac{BM}{MC}$ =1. Координаты точки M находим из соотношений (6.2) как координаты середины отрезка:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B+x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B+y_C}{2} \\ z_M = \frac{z_B+z_C}{2} \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x_M = \frac{4+4}{2} = 4 \\ y_M = \frac{2-2}{2} = 0 \\ z_M = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$$

Таким образом точка M имеет координаты $M(4,0,1)$, вектор $\overline{AM} = (3,2,0);$, длина медианы равна $|\overline{AM}| = \sqrt{3^2+2^2+0^2} = \sqrt{13}$

Угол между медианой AM и биссектрисой AK найдем как угол между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{AK}$

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{AM},\overline{AK})}{|AM|\cdot|AK|} = \frac{3\cdot 3+1{,}5\cdot 2+0\cdot 0}{1{,}5\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{65}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{65}} \approx 7^{\circ}.$$

Полезно также уделить внимание задачам на физический смысл скалярного произведения векторов, состоящий в следующем: работа постоянной по величине силы, затрачиваемая на перемещение материальной точки, равна $A = \bar{F}\cdot\bar{s}$, где $\bar{F}$ - вектор силы, а $\bar{s}$ - вектор перемещения точки.

Задача 5. Вычислить работу силы $\bar{F} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1{,}2{,}0)$ в положение $B(2{,}1{,}3)$.

Решение. Найдем вектор $\bar{s} = \overline{AB} = \bar{3\imath} - \bar{\jmath} + \bar{3k}$.

Тогда работа по перемещению точки $A = \bar{F} \cdot \bar{s} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 4$.

Далее уделим внимание решению задач, которые используют как векторное, так и смешанное произведение векторов. Среди них могут быть как задачи, которые непосредственно требуют применения основных формул, так и задачи, требующие комбинации различных методов и подходов.

Задача 6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2$, угол между векторами равен ${}^{5\pi}/_{6}$

Решение. Площадь параллелограмма найдем как модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $S = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|$. Вычислим векторное произведение:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [(\bar{p} + 3\bar{q}), (2\bar{p} - \bar{q})] = 2[\bar{p}, \bar{p}] + 6[\bar{q}, \bar{p}] - [\bar{p}, \bar{q}] - 3[\bar{q}, \bar{q}] = \bar{0} + 6[\bar{q}, \bar{p}] - [\bar{p}, \bar{q}] + \bar{0}$$
$$= 6[\bar{q}, \bar{p}] + [\bar{q}, \bar{p}] = 7[\bar{q}, \bar{p}]$$

В преобразованиях использовались следующие свойства векторного произведения:

–векторное произведение $[\bar{a}, \bar{a}] = \bar{0}$ для любого вектора $\bar{a}$, поскольку вектор $\bar{a}$ коллинеарен самому себе;

$-[\bar{p}, \bar{q}] = -[\bar{q}, \bar{p}]$, так как перестановка сомножителей в векторном произведении влечет за собой изменение знака произведения.

Далее получим:

$$\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = |7[\bar{q}, \bar{p}]| = 7|[\bar{q}, \bar{p}]| = 7|\bar{q}| \cdot |\bar{p}| \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 14 \cdot 0{,}5 = 7$$

Итак, площадь параллелограмма $S = 7(\text{ед}^2)$.

Задача 7. Проверить компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если $\bar{a} = (1{,}3{,}2)$, $\bar{b} = (2{,}3{,}4)$, $\bar{c} = (3{,}2{,}9)$

Решение. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ не компланарны.

Задача 8. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют левую тройку, $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$ и $\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 30^\circ$; $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$. Найти смешанное произведение векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Решение. Данные задачи позволяют вычислить модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = |\bar{a}|\left|\bar{b}\right| \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Векторы $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}$ коллинеарны, так как они ортогональны одной и той же плоскости, но их направления противоположны. Это связано с тем, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b}]$ является правой, тогда как тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ по условию левая. Отсюда $\left(\widehat{[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}}\right) = 180^\circ$, поэтому получаем.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \left([\bar{a}, \bar{b}]\right) \cdot \bar{c} = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right||\bar{c}| cos\left(\widehat{[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}}\right) = 1 \cdot 3 \cdot (-1) = -3.$$

Задача 9. Для треугольной пирамиды $ABCD$ найти объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC , если $A = (1, -3{,}8)$, $B = (2{,}2, -1)$, $C = (4, -5{,}3)$, $D = (1, -1{,}2)$

Решение. Вычислим объем пирамиды с помощью смешанного произведения векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = (1{,}5,-9)$, $\overline{AC} = (3,-2,-5)$, $\overline{AD} = (0{,}2,-6)$

Объем пирамиды вычислим

$$V = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$$

Смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ получим

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 58,$$

и тогда объем пирамиды равен $V = \frac{58}{6} = 9\frac{2}{3}$.

Теперь найдем высоту пирамиды.

Известно, что объем пирамиды $V = \frac{1}{3}HS_{ABC}$, отсюда $H = \frac{3V}{S_{ABC}}$.

Площадь треугольника ABC вычислим, используя модуль векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$|\overline{AB}, \overline{AC}| = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 43\bar{\imath} - 22\bar{\jmath} - 17\bar{k}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}, \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-43)^2 + (-22)^2 + (-17)^2} \approx 25{,}6.$$

В результате высота пирамиды равна $H = \frac{3\frac{58}{6}}{25{,}6} \approx 1$.

Задача 10. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, объем тетраэдра равен 29, а координаты трех других вершин таковы: $A(-1{,}10{,}0), B(0{,}5{,}2), C(6{,}32{,}2)$.

Решение. Введем обозначения координат точки $D(0, y, 0)$ (так как точка лежит на оси Oy). Тогда имеем три вектора $\overline{AB} = (1,-5{,}2), \overline{AC} = (7{,}22{,}2), \overline{AD} = (1, y-10{,}0)$. Объем тетраэдра выразим через смешанное произведение этих векторов.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

Имеем

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 22 & 2 \\ 1 & y-10 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 22 & 2 \end{vmatrix} - (y-10)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\right|$$

$$\frac{1}{6}|-54 + 12(y-10)| = 29.$$

Отсюда следует, что $y = 0$ или $y = 29$. То есть возможны два случаю расположения точки D: $D(0{,}0{,}0)$ и $D(0{,}29{,}0)$.

Следует уделить также внимание и физическому смыслу векторного произведения, а именно: момент $\bar{M}$ силы $\bar{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O, равен $[\overline{OA}, \bar{F}]$. Для примера рассмотрим задачу:

Задача 11. Сила $\bar{F} = 2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}$ приложена к точке $A(4,-2{,}3)$. Определить момент $\bar{M}$ этой силы относительно точки $O(3{,}2,-1)$.

Решение. Вычислим вектор $\overline{OA} = \bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 4\bar{k}$. Имеем

$$\bar{M} = [\overline{OA}, \bar{F}] = [\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 4\bar{k}, 2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 4\bar{k}.$$

Мы привели примеры задач некоторых типов, которые безусловно не охватывают все возможное разнообразие задач данного раздела, но позволяют составить представление о нем. Количество и уровень трудности задач зависит, безусловно, от многих факторов, среди которых наиболее важными являются количество часов, отводимых на изучение данного раздела математики, а также от уровня подготовленности студентов.

Заключение

Таким образом, можно заметить, что материал этого раздела математики действительно чрезвычайно важен для подготовки будущих инженеров. Он способствует не только возможности изучить необходимый для будущей деятельности математический аппарат, но и позволяет сформировать у студентов высокий уровень математического мышления и математической культуры. Также незаменима роль предлагаемого раздела математики в формировании представлений о единстве математического знания, внедрения идеи неразрывности фундаментальной и прикладной математики.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Прокопьев В.П. О роли математики в подготовке специалистов для высокотехнологического производства//Современные наукоемкие технологии. - 2010. - №8. – С. 128-129.
2. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. - 654 с.
3. Ильин В.А. Аналитическая геометрия/ В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. - М.: Наука, 1981. – 232 с.
4. Постников М.М. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1973. – 754 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. - М.: Наука, 1996. - 464 с

***Svetlana B. Zabelina*,**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
zabelina_sb@mail.ru
***Irina A. Pinchuk*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
irenepin@yandex.ru
***Zoia V. Shilova*,**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Moscow Polytechnic University, Moscow
zoya@soi.su

Methods of teaching elements of vector algebra to students of engineering specialties

Abstract. Modern high-tech production places high demands on the level of mathematical training of students-future engineers. Therefore, the issues of improving and developing methods of teaching mathematics in higher education institutions are always in the center of attention of researchers. The purpose of this article was to analyze the course of vector algebra in a technical university and develop a system of problems that will be most effective for teaching students. The results of the work, in addition to the developed system of problems, are also methodological recommendations for organizing such training. The materials of the article can be useful both for university teachers and first-year students of technical universities studying vector algebra.

Keywords: vector algebra, free vector, scalar product of vectors, vector product of vectors, mixed product of vectors

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Аннотация

Использование метапредметных связей в процессе преподавания математики позволяет сформировать у студентов понимание единства ряда явлений и процессов мира. При реализации метапредметных связей применение задач в процессе преподавания математики играет важную роль, в том числе для достижения дидактических целей. Цель статьи - рассмотреть процесс реализации метапредметных связей при преподавании вузовских разделов математики: аналитической геометрии, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики. В результатах показана эффективность их использования при формировании метапредметных умений, на этапе применения метазнаний при решении задач.

Ключевые слова

метапредметные связи, метапредметные умения, задачи, геометрия, теория вероятностей, математическая статистика

АВТОРЫ

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

Шилова Зоя Вениаминовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»;
доцент ФГАОУ ВО «Московский политехнический университет», г. Москва
zoya@soi.su

Кудряшова Мария Петровна,
студент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
kudryashovamp@student.bmstu.ru

Введение

В настоящее время важность реализации метапредметных связей в процессе преподавания математики не вызывает сомнения. Существуют различные толкования понятия метапредметные связи, в том числе при преподавании математики. Следует отличать межпредметные и метапредметные связи, функции и методы обучения, их отличие А.Д. Король [1] предлагает представить, как горизонтальный и вертикальный срезы образовательного пространства. На основании модели образования, сформированной В.В. Краевским, И.Я. Лернером и М.Н. Скаткиным [2], А.В. Хуторский и его научная школа выделяют пять уровней реализации метапредметного подхода [3]: 1) доктрина образования; 2) проектирование образовательных стандартов; 3) конструирование учебного предмета; 4) разработка образовательной программы; 5) уровень обучения. Реализация метапредметности осуществляется не только в результате учебной деятельности, но и в содержании образования, в том числе математического.

Необходимость реализации метапредметных связей диктуется также дидактическими принципами обучения, связью обучения с жизнью, подготовкой студентов к практической деятельности. Метапредметные связи играют важную роль в повышении практической и научно-теоретической подготовки обучающихся, существенной особенностью которой является: генерализация содержания учебного предмета и обеспечение индивидуальной образовательной траектории обучающихся.

Специальные исследования показали преимущества активизации учебного процесса, в котором наряду с другими педагогическими факторами используются метапредметные связи.

Методология и результаты исследования

Метапредметный подход позволяет, как считает В.В. Боженко [4], сформировать целостную личность обучающихся, а также обеспечить преемственность всех ступеней образования. М.В. Наумова [5] определяет метапредметные умения – присвоенные метаспособы, общеучебные, междисциплинарные (надпредметные) познавательные умения и навыки обучающихся. Одним из направлений реализации таких умений в процессе преподавания математике является решение задач с метапредметными связями и прикладного характера. Данные задания позволяют развить метапредметные компетенции, показать связь математики с жизнью, что обуславливает усиление мотивации к изучению самого предмета.

В МГТУ им. Н.Э. Баумана на первом курсе в первом семестре студентам направлений подготовки «Информатика и системы управления», «Радиоэлектроника и лазерная техника» преподают дисциплину «Аналитическая геометрия» (АГ), где студентов знакомят с основными разделами аналитической геометрии, векторной алгебры и основными понятиями линейной алгебры, в течение первого семестра обучающиеся проходят 4 контрольные точки: два домашних индивидуальных задания и две аудиторные рубежные контрольные работы, содержащие вопросы и теоретические, и практические. По результатам выполненных работ, если студентом набрано не менее шестидесяти баллов, выставляется оценка за распределенный экзамен. Во втором семестре преподают дисциплину «Линейная алгебра и функции нескольких переменных», а на втором курсе в 3 семестре дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика». На этих дисциплинах преподаватели «опираются» на полученные студентами знания и сформированные умения и навыки по АГ, в основном это происходит при преподавании задач. Покажем эффективность использования метапредметных связей при решении задач.

Задача №1. Рассчитать вероятность того, что случайно выбранный вектор в трехмерном пространстве будет составлять угол менее 60 градусов с направлением оси X.

Для вычисления вероятности того, что случайно выбранный вектор в трехмерном пространстве будет составлять угол менее 60 градусов с направлением оси X, мы можем использовать следующую геометрическую интерпретацию: представим трехмерное пространство в виде сферы единичного радиуса, центр которой совпадает с началом координат. Все возможные направления векторов будут соответствовать точкам на поверхности этой сферы, то есть, её площади.

Далее рассмотрим конус с вершиной в начале координат, осью, совпадающей с осью X, и углом раствора 120 градусов. Все векторы, попадающие внутрь этого конуса, будут составлять угол менее 60 градусов с осью X (рис. 1).

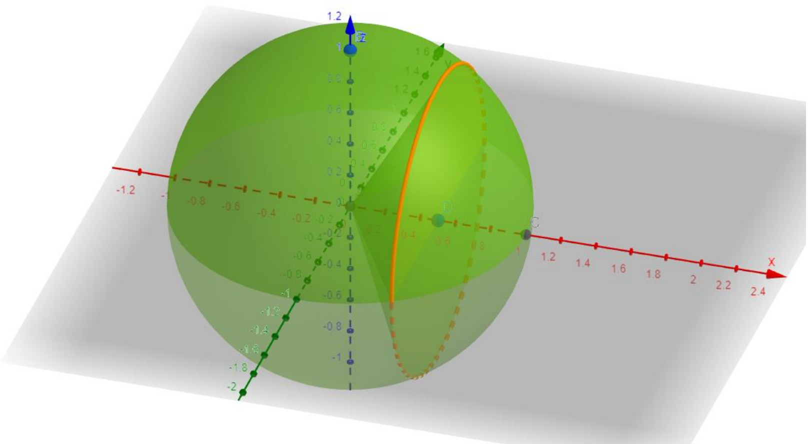


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация вероятности в трехмерном пространстве

Площадь поверхности данной сферы рассчитывается по стандартной формуле:

$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

Таким образом:

$S = 4 \cdot \pi$

Для того, чтобы приблизиться к ответу, необходимо вычислить площадь шарового сегмента, который ограничен основанием конуса – на рисунке выше он выделен с помощью линии оранжевого цвета.

Для этого потребуется формула:

$S_{шар.сегм.} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$

Но нам неизвестна высота *h* данного шарового сегмента (на рис. 2 ниже обозначена тёмно-зелёным цветом):

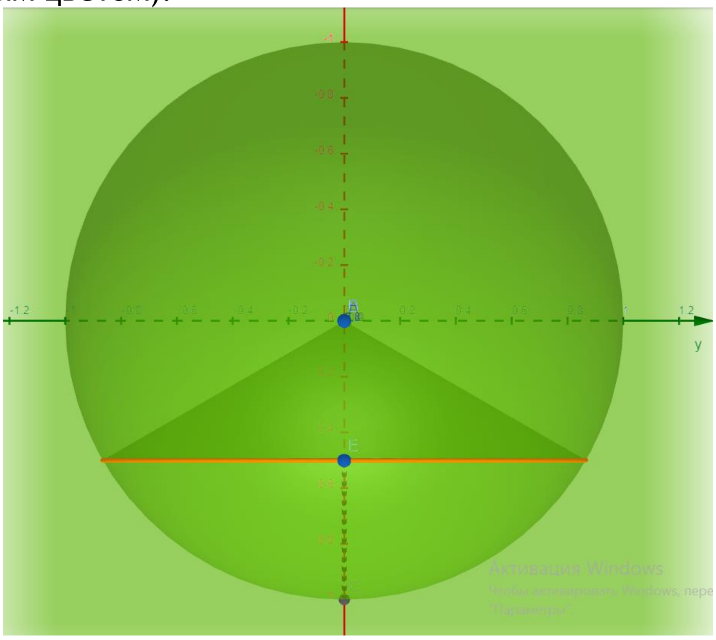
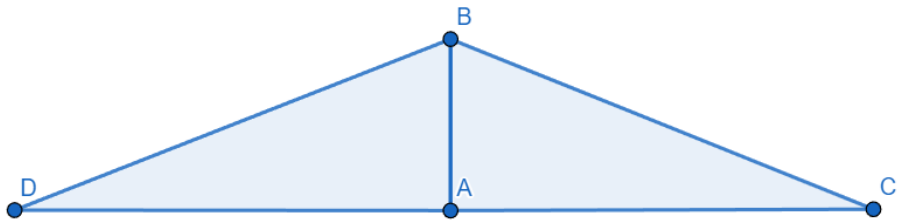


Рис. 2. Геометрическая иллюстрация вероятности на плоскости

Рассмотрим равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого являются образующие конуса, а основанием – диаметр конуса. Найдём высоту данного треугольника, а затем вычтем её из данного по условию задачи радиуса сферы.

Высота в равнобедренном треугольнике делит его на 2 равных прямоугольных треугольника. Как известно, угол раствора конуса составляет 120º, соответственно, угол при вершине одного из прямоугольных треугольников ∠ABC будет равен 60º. Второй острый угол этого прямоугольного треугольника ∠ACB будет равен 30º.



Высоту AB рассчитаем через ∠ACB, равный 30°: sin30° = ½.

AB/BC = ½, AB = ½ · BC = ½ = 0.5

Радиус сферы равен 1, следовательно, искомая высота *h* = 1 – 0.5 = 0.5

Теперь возвращаемся к расчёту площади поверхности шарового сектора:

$S_{шар.сегм.} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$

$S_{шар.сегм.} = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot ½ = \pi$

Следовательно, вероятность того, что случайно выбранный вектор в трехмерном пространстве будет составлять угол менее 60 градусов с направлением оси *X*, равна:

P ($\theta < 60^\circ$) = (площадь поверхности шарового сегмента) / (площадь поверхности сферы) = π / 4·π = ¼ = 0.25.

Ответ: 0,25.

Задача №2. У вас есть данные о производительности сотрудников в различных отделах компании, представленные в формате матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} 120 & 5 & 90 \\ 100 & 4 & 80 \\ 150 & 6 & 100 \\ 80 & 3 & 70 \\ 130 & 5 & 95 \end{pmatrix}$$

Матрица D состоит из трех столбцов, каждый из которых представляет собой информацию об одном из отделов компании. Столбцы матрицы содержат следующую информацию:

–Первый столбец: производительность сотрудников (в условных единицах)

–Второй столбец: количество сотрудников в отделе

–Третий столбец: среднее время, затрачиваемое сотрудниками на выполнение задач (в минутах)

а) Найти среднее значение μ и стандартное отклонение σ для каждого параметра (производительность, количество сотрудников, среднее время).

б) Выполнить нормализацию данных, преобразовав каждый столбец в вектор со средним значением 0 и стандартным отклонением 1 (z-преобразование).

Решение:

а) Вычисление среднего значения и стандартного отклонения для каждого параметра:

Производительность:

$\mu = \frac{120+100+150+80+130}{5} = 116$

$\mu = \frac{120+100+150+80+130}{5} = 116$

$\sigma = \sqrt{((120-116)^2+(100-116)^2+(150-116)^2+(80-116)^2+(130-116)^2)/5} =$ 24.166.

Количество сотрудников:

$\mu = \frac{5+4+6+3+5}{5} = 4.6$

$\sigma = \sqrt{((5-4.6)^2+(4-4.6)^2+(6-4.6)^2+(3-4.6)^2+(5-4.6)^2)/5} = 1.020.$

Среднее время:

$\mu = \frac{90+80+100+70+95}{5} = 87$

$\sigma = \sqrt{((90-87)^2 + (80-87)^2 + (100-87)^2 + (70-87)^2 + (95-87)^2)/5} = 10.770.$

б) Нормализация данных:

$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$

z **-** стандартизированное значение

x_i **-** одно необработанное значение данных

μ – среднее значение

σ – стандартное отклонение

Производительность:

$z_1 = \frac{120-116}{24.166} = 0.166.$

$z_2 = \frac{100-116}{24.166} = -0.662.$

$z_3 = \frac{150-116}{24.166} = 1.407.$

$z_4 = \frac{80-116}{24.166} = -1.490.$

$z_5 = \frac{130-116}{24.166} = 0.579.$

Количество сотрудников:

$z_1 = \frac{5-4.6}{1.020} = 0.392.$

$z_2 = \frac{4-4.6}{1.020} = -0.588.$

$z_3 = \frac{6-4.6}{1.020} = 1.373.$

$z_4 = \frac{3-4.6}{1.020} = -1.569.$

$z_5 = \frac{5-4.6}{1.020} = 0.392.$

Среднее время:

$z_1 = \frac{90-87}{10.770} = 0.279.$

$z_2 = \frac{80-87}{10.770} = -0.650$

$z_3 = \frac{100-87}{10.770} = 1.207.$

$z_4 = \frac{70-87}{10.770} = -1.578.$

$z_5 = \frac{95-87}{10.770} = 0.743.$

Результатом будет матрица с нормализованными значениями для каждого параметра:

$$D_z = \begin{pmatrix} 0.166 & 0.392 & 0.279 \\ -0.662 & -0.588 & -0.650 \\ 1.407 & 1.373 & 1.207 \\ -1.490 & -1.569 & -1.578 \\ 0.579 & 0.392 & 0.743 \end{pmatrix}.$$

В ходе опытной работы студенты, обучающиеся в 2023 и 2024 годах были разбиты на контрольную и экспериментальную группы. Показатели эффективности были зафиксированы результатами сдачи контрольных точек.

Выделим следующие составляющие эффективности преподавания математике: репродуктивная, функциональная и системная. Современная система оценки предполагает проверку сформированности метапредметных связей по принципу трехуровневости: знать, уметь, владеть.

Таблица 1

Результаты выполнения контрольных работ на начало и конец опытного преподавания

Группы / Составляющие	Контрольная группа* (КГ, 49 студентов)		Экспериментальная группа* (ЭГ, 45 студентов)	
	Входящая диагностика	Исходящая диагностика	Входящая диагностика	Исходящая диагностика
репродуктивная	88	26	90	8
функциональная	11	64	8	76
системная	1	10	2	16

*% студентов, находящихся на соответствующем уровне сформированности метапредметных связей

Применим критерий Хи-квадрат, для a = 0,05 $\chi^2_{crit.1}$ = 5,99. Найдем $x^2_{obs.1} < x^2_{crit.1}$ (1,86 < 5,99), тогда можем сделать вывод о том, что группы однородные по первоначальному уровню усвоенных знаний, умений и навыков. Рассмотрим: $\chi^2_{obs.2} > \chi^2_{crit.2}$ (18,31 > 5,99), тогда можем считать, что отличие в уровнях для экспериментальной и контрольной групп можно считать не случайным.

Данные таблицы наглядно изображены в виде гистограммы (рис. 3).

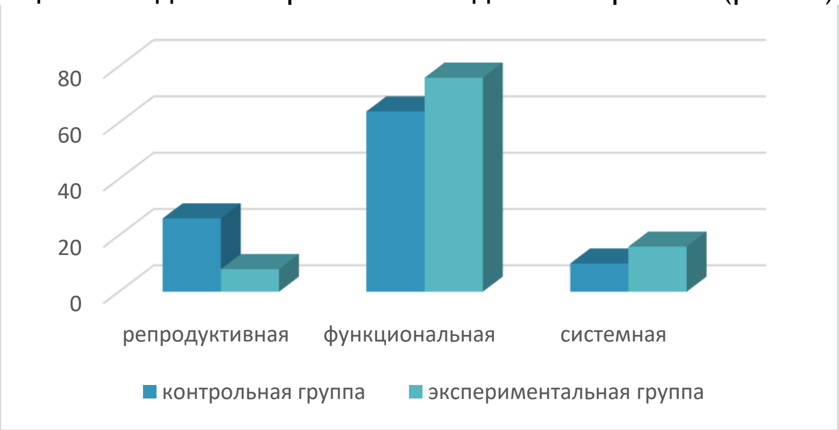


Рис. 3. Уровни сформированности метапредметных связей

Таким образом, различия в итоговых результатах КГ и ЭГ не могут быть объяснены только случайными причинами, то есть носят систематический, регулярный характер.

Заключение

Таким образом, реализация метапредметных связей при преподавании математики способствует эффективному усвоению содержания учебного материала. Регулярное преподавание задач с метапредметными связями способствует формированию научного мировоззрения, культуры мышления и целостной личности студентов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Король А.Д. «Арифметика» образования: межпредметная и метапредметная функции диалога // Интернет-журнал «Эйдос». - 2012. - №5. - URL: http://eidos.ru/journal/2012/0829-06.htm.
2. Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера. – Москва: Педагогика, 1983. – 352 с.
3. Хуторской А.В. Пять уровней реализации метапредметного подхода в содержании образования // Вестник Института образования человека. – 2017. – №2. – С.8.
4. Боженко В.В. Реализация принципа метапредметности на уроке математики: средства, приемы, методы // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2015. – Т. 6. – С. 101–105.

5. Наумова М.В. Метапредметные компетенции как условие развития мыслительной деятельности у учащихся на уроках математики в средней школе // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7-1. – С. 129-133.

Svetlana B. Zabelina,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
zabelina_sb@mail.ru
Zoia V. Shilova,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Moscow Polytechnic University, Moscow
zoya@soi.su
Maria P. Kudryashova,
Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
kudryashovamp@student.bmstu.ru

Implementation of meta-subject relationships in teaching mathematics

Annotation. The relevance of the problem under study. The use of meta-subject connections in the process of teaching mathematics allows students to form an understanding of the unity of a number of phenomena and processes in the world. When implementing meta-subject relationships, the use of tasks in the process of teaching mathematics plays an important role, including for achieving didactic goals. The purpose of the article. This study examines the process of implementing meta-subject relationships in teaching university branches of mathematics: analytical geometry, linear algebra, probability theory and mathematical statistics. The main results Show the effectiveness of their use in the formation of meta-subject skills, at the stage of applying meta-knowledge in solving problems.

Keywords: meta-subject relationships, meta-subject skills, tasks, geometry, probability theory, mathematical statistics.

МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Аннотация

Во многих вузах принята балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов, которая предполагает регулярное проведение контрольных работ по изучаемым темам. При этом актуальным является вопрос составления большого числа вариантов задач для проведения этих работ. В работе рассматриваются некоторые методические приёмы, которые позволяют получить методику, дающую возможность значительно упростить составление большого числа вариантов задач для контрольной работы по теме «Неопределённый интеграл». Статья будет полезна преподавателям и студентам первого курса.

Ключевые слова

неопределённый интеграл, замена переменной, интегрирование по частям

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный техничекий университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
wiktorobuhov@yandex.ru

Введение

Задачей контрольной работы по теме «Неопределённый интеграл» является проверка знаний студентов свойств неопределённых интегралов, усвоение неопределённых интегралов от основных элементарных функций (табличных интегралов), к которым приводятся с помощью методов интегрирования основные классы интегрируемых функций. Поэтому в статье обсуждается вопрос о достоинстве таблиц табличных интегралов в различных учебниках по математическому анализу. Контрольная работа по данной теме согласно количеству основных классов интегрируемых функций, которые изучают в большинстве вузов, состоит из восьми задач. В работе для каждой задачи применяется тот или иной методический приём для получения их большого количества с учётом номера варианта контрольной работы, в которую они будут входить. В статье рассматриваются многочисленные примеры из множества каждого вида задач, из которых в дальнейшем составляются варианты контрольной работы. Рассматриваются примеры формирования вариантов контрольных работ и их модификаций для практических занятий и текущего контроля.

Методология и результаты исследования

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке I. Промежутком называется отрезок, интервал или полуинтервал. Функция $F(x)$, заданная на промежутке I, называется первообразной функции $f(x)$, заданной на том же промежутке, если для любого $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Совокупность всех первообразных есть множество функций $\{F(x) + C\}$, где C – произвольная постоянная. Указанная совокупность функций называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутке I и обозначается $\int f(x)dx$. При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ —подынтегральным выражением, а x — переменной интегрирования. По традиции пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$, опуская фигурные скобки в правой части. Для вычисления неопределенных интегралов используется таблица интегралов и некоторые их свойства, которые мы будем формулировать по мере надобности. Мы будем использовать таблицу интегралов, которая есть в каждом учебном или справочном руководстве по рассматриваемой тематике (заметим, однако, что А.Д. Мышкис [1] такой таблицы не приводит: автор предлагает читателю самому составить эту таблицу). Для определённости остановимся на таблице, приведённой в учебнике В.С. Зарубина с соавторами [2, с. 25]. Отметим, что в этой таблице переменная интегрирования (и независимая переменная) обозначена буквой "u"(а не “x“ как в других учебниках). Из других особенностей этой таблицы отметим, что интегралам $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ и $\int e^u du = e^u + C$ присвоены отдельные номера, из-за которых общее число табличных интегралов увеличилось до 16 (обычно их 15). Далее, под номерами 5 и 6 в рассматриваемой таблице стоят соответственно интегралы $\int \sin u \, du$ и $\int \cos u \, du$, а под номерами 7 и 8 – интегралы $\int \frac{du}{cos^2 u}$ и $\int \frac{du}{sin^2 u}$. Почему во второй паре интегралы поменялись местами остаётся загадкой. Это же замечание относится и к интегралам под номерами 9—12, где фигурируют гиперболический синус и гиперболический косинус. Такие перестановки мешают студентам при “заучивании “ таблицы (надо отметить, что указанные перестановки интегралов имеются также и в таблицах из других учебников, см., например, В.А. Зорич [3]; А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин [4]; В.И. Смирнов [5]; Н.С. Пискунов [6]; Н.Н. Лузин [7]). Лишь в учебнике Г.М. Фихтенгольца [8] мы видим таблицу, в которой интегралы располагаются в “естественном“ порядке. При составлении вариантов контрольной работы мы будем использовать таблицу интегралов; при этом будем всегда иметь в виду таблицу В.С. Зарубина с соавторами [9, с. 25], но будем считать, что переменная интегрирования обозначена в виде x.

Составляя варианты контрольной работы, мы будем исходить из того, что среднестатистический студент может выполнить её на оценку “4” (продолжительность контрольной работы составляет 2 занятия по 45 минут плюс пятиминутный перерыв между занятиями). При этом предполагается, что студент добросовестно к ней подготовился.

Первая задача нашего будущего варианта контрольной будет простой: с ней должны справиться все участвующие в выполнении работы.

Задача эта основана на том, что если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Так как первую задачу смогут решить большинство студентов, то на консультации не следует заострять внимание студентов на том, что сформулированное свойство интегралов не является таким уж безобидным, и над ним надо призадуматься, если привлечь к рассмотрению (различные!) промежутки, на которых заданы функции $f(x)$ и $f(ax+b)$. По-видимому, следует объяснить лишь формальную сторону вопроса.

Итак, составляем первую задачу для всех вариантов. Для этого сначала отбираем нужные формулы из таблицы, которую приведём здесь (поскольку книги В.С. Зарубина с соавторами [10] может не оказаться под рукой, а номера интегралов в таблицах из разных учебников не всегда совпадают). Переменную интегрирования “u“ заменяем на “x“, а также изменяем правые части формул 13 и 15:

1. $\int x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C, s \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C.$
8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\,x + C.$
9. $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C.$
10. $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C.$
11. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C.$
12. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C.$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$
14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2\,a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C.$

Пользуясь этой таблицей (а также свойствами интегралов), надо составить 30 вариантов заданий (на деле даже 31 вариант – “ на всякий случай “; как в книге Л.А. Кузнецова [11], где для каждой задачи предлагается именно 31 вариант). Из таблицы исключаем формулы 13—16. Вместо первой формулы пишем четыре новых и получаем новую таблицу из 15 формул:

1. $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C.$
2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$
3. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
7. $\int e^x\,dx = e^x + C.$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
10. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C.$
11. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\,x + C.$
12. $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C.$
13. $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C.$

14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C.$
15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C$

В написанных формулах в каждом интеграле dx оставляем без изменения, а x заменяем на формулу $(ax + b)$, где в качестве a берётся номер варианта, а в качестве b квадратный корень из этого номера (или кубический корень, если квадратный корень извлекается; можно и единицу поставить, если совсем уж плохое число). Для первого варианта задачи предложенная схема не работает в полной мере, так как первообразная $F(ax + b)$ в вышеуказанном уравнении умножается на коэффициент $\frac{1}{a}$ и номер варианта как бы пропадает (получается слишком простой интеграл первого варианта $\int \sqrt{x+1}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$), поэтому можно, например, взять $a = 32, b = 1$. Получим в результате для первого варианта задачу на вычисление интеграла $\int \sqrt{32x+1}dx$.

Для, например, восьмого варианта получим интеграл $\int \sin(8x + \sqrt{8})dx$; поскольку $\sqrt{8}$ лучше записать в виде $2\sqrt{2}$, а $\sqrt[3]{8} = 2$, то данный интеграл заменяем на $\int \sin(8\,x + 2)\,dx$ или $\int \sin(8\,x + 1)\,dx$.

Аналогично поступаем и в других “плохих“ случаях. В случае варианта 11 действуем так, чтобы число a не равнялось единице; например, заменим x на $11\,x + 1$. Число a в интеграле $\int a^x\,dx$ возьмём равным номеру соответствующего варианта. После того как первые 15 вариантов готовы, для получения вариантов 16 -31 записываем полученную таблицу интегралов в обратном порядке и получаем новую таблицу:

1) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C.$
2) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C.$
3) $\int ch\, x\; dx = sh\, x + C.$
4) $\int sh\, x\; dx = ch\, x + C.$
5) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C.$
6) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C.$
7) $\int \cos x\; dx = \sin x + C.$
8) $\int \sin x\; dx = -\cos x + C.$
9) $\int e^x\; dx = e^x + C.$
10) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
11) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
13) $\int x^3\; dx = \frac{x^4}{4} + C.$
14) $\int x\; dx = \frac{x^2}{2} + C.$
15) $\int \sqrt{x}\; dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C.$

Повторяем описанный выше алгоритм. При повторении можно внести в алгоритм и изменения: например, для варианта 23 переменную интегрирования x заменяем не на $23\,x + \sqrt{23}$, а на $2\,x + 3$, и аналогично поступаем и в остальных случаях (когда извлекается корень из номера варианта). Для последнего, 31 варианта можно предложить интеграл $\int \frac{dx}{3x+1}$. Составление первой задачи комплекта контрольной работы закончено.

Вторая задача составляется по аналогии с первой. Сначала выписываем первые 15 интегралов в другом порядке: можно, например, поставить последний интеграл прежнего списка на первое место. Получим следующую таблицу интегралов:

1. $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C.$
2. $\int \frac{dx}{sh^2\, x} = -cth\, x + C.$
3. $\int \frac{dx}{ch^2\, x} = th\, x + C.$
4. $\int ch\, x\ dx = sh\, x + C.$
5. $\int sh\, x\ dx = ch\, x + C.$
6. $\int \frac{dx}{sin^2\, x} = -ctg\, x + C.$
7. $\int \frac{dx}{cos^2\, x} = tg\, x + C.$
8. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
9. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C.$
10. $\int e^x\ dx = e^x + C.$
11. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
12. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
14. $\int x^3\ dx = \frac{x^4}{4} + C.$
15. $\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C.$

Затем в этих интегралах меняем dx на формулу $\varphi'(x)\, dx$ (и при этом отбрасываем числовой множитель), а x меняем на новую переменную $\varphi(x)$. Для каждого варианта задачи надо выбрать свою функцию $\varphi(x)$. Таким образом, для решения второй задачи надо осуществить замену переменной $u = \varphi(x)$, после чего получится табличный интеграл. Здесь используется такое утверждение: если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big) + C;$$

подробную формулировку соответствующей теоремы мы здесь не рассматриваем.

Теперь надо придумать 15 функций $\varphi(x)$. Можно взять такие функции: $\varphi(x) = x^6$; $\varphi(x) = x^5$; $\varphi(x) = x^4$; $\varphi(x) = x^3$; $\varphi(x) = x^2$; $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$; $\varphi(x) = \frac{1}{x^3}$; $\varphi(x) = \frac{1}{x^4}$; $\varphi(x) = \sqrt{x}$; $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$; $\varphi(x) = \ln x$; $\varphi(x) = \cos x$; (1)
$\varphi(x) = ch\, x$; $\varphi(x) = sh\, x$;
причём во всех случаях можно прибавить номер варианта, равный номеру функции в таблице (1) т.е. x^6 заменить на $x^6 + 1$, $\frac{1}{x^3}$ на $\frac{1}{x^3} + 4$ и т.д. Можно расширить таблицу использованных интегралов: добавить четыре интеграла, исключённых при составлении первой задачи. Но в этих интегралах в качестве $\varphi(x)$, по-видимому, целесообразно брать лишь степенные функции с натуральным показателем степени и не надо прибавлять номер варианта к $\varphi(x)$. Например, для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ можно взять $\varphi(x) = x^4$ и параметр a^2 заменить на номер варианта; если этот номер равен 19 , то получим такой интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{19-x^8}}$. А если $\varphi(x) = \cos x$, то получим интеграл $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{19-cos^2 x}}$, который вполне можно использовать. Поэтому запрет на использование в качестве $\varphi(x)$ функций, которые не являющихся степенными, не следует соблюдать слишком строго. Теперь ясно как составить и оставшиеся варианты (т.е. варианты 16

- 31) в комплекте контрольной работы: необходимо полученную выше расширенную таблицу интегралов записать в обратном порядке и добавить четыре функции $\varphi(x)$ в таблицу (1).

Варианты третьей задачи свяжем с вычислением интегралов вида $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$. Здесь весьма полезным для студентов является совет, который даётся в справочнике

Э.П. Казанджана с соавтором [12, С. 5]: " увидел квадратный трёхчлен – выдели полный квадрат ". При составлении вариантов третьей задачи никаких хитростей нет: если, скажем, надо составить такую задачу для варианта 23 , то сразу пишем $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+5x+6}}$, и задача готова (здесь $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$). Таким образом, в интегралах $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ параметр a означает первую цифру номера варианта, параметр b — вторую. Квадратный трёхчлен имеет корни равные первым и вторым цифрам номеров вариантов со знаком минус. Чтобы разнообразить знаки коэффициентов p, q в квадратном трёхчлене положим, что в нечётных вариантах наибольший корень квадратного трёхчлена будет со знаком минус. Следовательно, 23 вариант квадратного трехчлена будет иметь вид $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$. Для вариантов $1-9$ приписываем перед номером варианта цифру 4 и действуем, как указано выше. Следует помнить, что квадратный трёхчлен в знаменателе не должен быть полным квадратом, поэтому для вариантов 11 и 22 требуется особый подход (например, можно заменить эти номера на 51 и 32). Можно расширить таблицу использованных интегралов: положить в квадратном трёхчлене коэффициент при x^2, равным плюс 1 для чётных вариантов и (-1) – для нечётных.

Для четвёртой задачи рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+px+q}}, \tag{2}$$

где квадратный трёхчлен под знаком корня не является полным квадратом.

Здесь, как известно, дело сводится к предыдущей задаче с помощью замены $x=\frac{1}{t}$.

После выполнения этой замены мы получим интеграл $(-sign\, t)\int \frac{dt}{\sqrt{1+pt+qt^2}}$, где функция

$$sign\, t = \begin{cases} 1\,, & t>0 \\ -1\,, & t<0 \end{cases}.$$

Далее интеграл вычисляется с помощью уже упоминавшегося совета из справочника Э.П. Казанджана с соавтором [13, С. 5]; при этом надо учесть знак q.

Можно составить четвёртую задачу и по-другому: в качестве образца взять интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2+bx+1}} \tag{3}$$

Для варианта, скажем, 16 возьмём $a=1, b=6$. В результате получим интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+6x+1}},$$

который после замены $t=x+1$ сводится к предыдущему интегралу (2). Можно для чётных вариантов предложить задачу типа (2), а для нечётных – задачу типа (3). Но это является спорным решением, т.к., возможно эти типы задач не являются равноценными.

Следующий тип задач — задачи на применение формулы интегрирования по частям. Неограниченное число таких задач можно составить с помощью, например, такого равенства

$$\int \varphi(x)\,\varphi'(x)\,f'((\varphi(x))dx \;=\; \varphi(x)f\big(\varphi(x)\big)-F(\varphi(x))+C, \tag{4}$$

где $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на соответствующем промежутке.

Пусть мы составляем задачу для варианта 23. Положим $f(x)=\sin x, \varphi(x)=2x^2+3$.

Тогда $\int \varphi(x)\ \varphi'(x)\ f'((\varphi(x))dx$ (с точностью до числового коэффициента) есть интеграл

$$I = \int (2x^3 + 3x)\cos(2x^2 + 3)dx.$$

Тогда по формуле интегрирования по частям

$$I = \frac{1}{4}\int (2x^2 + 3)(\sin(2x^2 + 3))'dx = \frac{1}{4}(2x^2 + 3)\sin(2x^2 + 3) -$$
$$- \frac{1}{4}\int (2x^2 + 3)'\sin(2x^2 + 3)\,dx = \frac{1}{4}(2x^2 + 3)\sin(2x^2 + 3) +$$
$$+ \frac{1}{4}\cos(2x^2 + 3) + C.$$

Можно придумать и другие равенства, аналогичные (4), которые позволяют составлять задачи на применение формулы интегрирования по частям, но в этом нет надобности: одного лишь равенства (4) достаточно, чтобы составить требуемое количество вариантов.

Чтобы не получились слишком сложные задачи, можно порекомендовать в качестве $f(x)$ функции $\cos\,x,\ \sin\,x,\ ch\,x,\ shx, e^x,\ \frac{1}{x}, tg\,x, ctg\,x,\ arctg\,x$ и т.д.. в качестве $\varphi(x)$ можно взять (с учётом номера варианта) квадратичную функцию, как в разобранном выше примере, или линейную функции $ax + b$. Составить 30 (или 30 +1) вариантов не представляет труда.

В шестой задаче предлагается проинтегрировать рациональную дробь – отношение двух многочленов из класса рациональных функций, интегрирование которых может быть получено в конечном виде. Если из рациональной дроби исключить её целую часть, то получим правильную рациональную дробь в виде $\frac{P_s(x)}{Q_n(x)}$ (степень многочлена числителя s меньше степени многочлена знаменателя n). Среди правильных рациональных дробей выделяют элементарные (простые) дроби четырёх типов, которые легко интегрируются:

$$\text{I. } \frac{A_1}{x-a}, \qquad \text{II. } \frac{A_k}{(x-a)^k}\ (k = 2, 3, \cdots), \quad \text{III. } \frac{M_1x+N_!}{x^2+px+q}, \qquad \text{IV. } \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q\ )^m}\ \ (m = 2,\ 3, \cdots),$$

где $A_1,\ A_k,\ M_1,\ N_1,\ M_k,\ M_k, a, p, q$ – вещественные числа; при этом квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней. Из алгебры известно, что каждая правильная дробь $\frac{P(x)}{Q_n(x)}$ может быть представлена в виде суммы нескольких простых дробей (смотри, например, Г.М. Фихтенголц [14, с.39]). При этом многочлен знаменателя дроби $Q_n(x)$ разлагается на множители

$Q_n(x) = (x - a)^{k_1} \cdots\ (x - a)^{k_i} \cdots (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots \left(x^2 + p_jx + q_j\right)^{m_j}$, а
n = $\sum k_i + 2\sum m_j$.

Для определения коэффициентов простых дробей, как правило, применяют “метод неопределённых коэффициентов”. Зная форму разложения правильной рациональной дроби с неопределёнными коэффициентами, приводят правую часть разложения к общему знаменателю. Он будет равен знаменателю $Q_n(x)$ левой части, сокращают знаменатели обеих частей разложения и получают равенство тождественное относительно x числителей разложения; далее приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x и получают алгебраическую систему n линейных уравнений относительно n неопределённых коэффициентов.

Для получения множества шестых задач для составления вариантов контрольных работ с достаточно простой рациональной дробью надо исключить из рассмотрения в её разложении простые дроби IV типа с кратными комплексными корнями, и чтобы степень многочлена знаменателя дроби не превышала четырёх. Число слагаемых в числителе дроби не должен превышать четырёх. При составлении знаменателя дроби необходимо, чтобы он достаточно легко разлагался на сомножители, для чего активно привлекать формулы сокращённого умножения. При этих ограничениях составляется банк многочленов числителя рациональной дроби и банк многочленов знаменателя рациональной дроби, что легко можно сделать. Предлагается учесть номера варианта шестой задачи следующим образом: в числителе номер варианта будет коэффициентом при младшей степени переменной (или возможно старшей), в знаменателе номер варианта будет корнем знаменателя элементарной дроби первого типа и второго, если он отличен от нуля; при этом можно взять номер варианта в качестве корня со знаком плюс для чётных вариантов и со знаком минус для нечётных. Например, рассмотрим 7-ой вариант: пусть в банке числителя дроби под номером 7 стоит многочлен $P_7(x) = x^3 + 1$, а в знаменателе $-Q_7(x) = x^3 - x^2$. Тогда 7-ой вариант интеграла для этой задачи будет иметь вид $\int \frac{(x^3+7)}{x^2(x+7)} dx.$ В числителе рациональной дроби подынтегральной функции коэффициент при младшей степени переменной стоит 1 , следуя методике заменяем его на номер 7, а в знаменателе корень знаменателя элементарной дроби первого типа (не равный нулю) в разложении рациональной дроби равен единице, и у нас нечётный вариант, то единицу заменяем на номер (-7). Более сложные рациональные дроби (например, такие, у которых в знаменателе многочлен четвёртой степени) вряд ли целесообразно рассматривать. Обычно студенты хорошо знают правила интегрирования рациональных дробей, и ошибки, которые они совершают, не являются принципиальными.

С помощью этой методики можно составить необходимое количество комплектов контрольной работы для разных групп студентов с разным содержанием 6-ой задачи.

Для этого достаточно немного переставить многочлены в банке многочленов числителя и знаменателя рациональной дроби (это может сделать любой преподаватель для своих нужд).

При изучении способов отыскания первообразных обычно рассматриваются также приёмы вычисления интегралов от тригонометрических функций. Варианты седьмой задачи решаются применением универсальной подстановки. Применяя универсальную подстановку для вычисления интеграла $\int R(\cos x, \sin x)dx,$ где R – рациональная функция своих аргументов, мы полагаем $u = tg\,\frac{x}{2}$ и от последнего интеграла переходим к интегралу $\int \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \ \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}\, du$ от рациональной функции. В частности, от интегралов

$\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ и $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ мы перейдём соответственно к интегралам $\int \frac{2du}{a(1+u^2)+b(1-u^2)}$ и $\int \frac{2du}{a(1+u^2)+2bu}$. Можно рассмотреть и интегралы вида $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$. Параметры a, b и c следует выбирать, учитывая номер варианта, чтобы избежать повторений. Например, для варианта 17 можно предложить интеграл $\int \frac{dx}{1+7\cos x}$.

В вариантах для седьмой задачи предлагается вычислить интеграл $\int cos^{2q}x\, sin^{2p}\, x\, dx,$

где p и q – целые числа. Пусть $u = tg\, x$. Тогда этот интеграл преобразуется к виду

$\int u^p\, (1 + u^2)^{-p-q-1} du.$

Пусть $-p - q - 1 \in \{1, 2, 3\}$. В этом случае данный интеграл сводится к сумме нескольких интегралов от степенных функций. Нетрудно подобрать 31 пару значений p и q, при которых дело сводится к вычислению интегралов от степенных функций. Например,

$\int \frac{cos^8 x}{sin^{12} x} dx$, где $p = -6, q = 4, -p - q - 1 = 1.$ Получается интеграл $\int \frac{1+u^2}{u^6}\, du.$

Для интеграла $\int \frac{dx}{cos^2 x\, sin^4 x}$ $p = -2, q = -1, -p - q - 1 = 2 \implies \int \frac{\left(1+u^2\right)^2}{u^2} du.$

Последняя (восьмая) задача заключается в вычислении интеграла

$$\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n \sqrt[p]{(x+b)^{p-1}}}\,. \qquad (5)$$

Преобразуем его к виду

$$\int \sqrt[p]{\frac{x+a}{x+b}}\,\frac{dx}{(x+a)^{m+1}(x+b)^n}$$

и перейдём к новой переменной $t^p = \frac{x+a}{x+b}$.
Тогда (с точностью до числового множителя) получим интеграл

$$\int t^{-pm}\,(1-\,t^p)^{m+n-1}\,dt,$$

который не зависит от a и b и легко вычисляется. При составлении вариантов целесообразно выбирать m, n и p целыми числами. Параметр p следует брать нечётным, чтобы не возникало проблем со знаком при извлечении корня из t^p. Параметры a и b можно выбирать исходя из номера варианта. Различие решений задач обеспечивается выбором чисел m, n и p. Чтобы решение не было слишком громоздким, целесообразно следить за тем, чтобы $m+n-1$ было небольшим натуральным числом: $m+n-1 \in \{1, 2, 3\}$. При оформлении ответа его следует записать зависящим от t, и указать, что $t = \sqrt[p]{\frac{x+a}{x+b}}$. Не следует требовать от студентов подставлять вместо t указанное выражение в ответ, как показывает пример на вычисление интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)\,(x+1)^2}}$ у Г.М. Фихтенгольца [15, с. 305].

Приведём два варианта задач, составленных по рассмотренным выше рекомендациям.

Вариант 5.

1. $\int \frac{dx}{5x+1}$.
2. $\int (shx^2)\,xdx$.
3. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{-x^2-5x}}$.
4. $\int xe^{5x}dx$.
5. $\int \frac{8x+5}{(x+5)(x^2+4x+5)}\,dx$.
6. $\int \frac{cos^{10}x}{sin^{14}x}\,dx$.
7. $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$.
8. $\int \sqrt[3]{(x+4)(x+5)^2}\,\frac{x+5}{(x+4)^2}\,dx$.

Вариант 24

1. $\int e^{2x+4}\,dx$.
2. $\int \frac{a^{x^{\frac{1}{2}}}}{x^3}\,dx$.
3. $\int \frac{2x+4}{cos^2(2x+4)}\,dx$.
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+4x+1}}$.
5. $\int \frac{cos^8x}{sin^4x}\,dx$.
6. $\int \frac{dx}{2+4\sin x}$.
7. $\int \frac{x^3-24}{(x^3+x)(x+24)}\,dx$.
8. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt[5]{(x+4)(X+2)^4(x+2)^3}}$.

Если перетасовать задачи $2-8$, то варианты немного усложнятся.

Заключение

В данной статье предложена методика составления большого количества вариантов для каждого типа задач, которые проходят по программе в вузах, позволяющие составлять комплект для контрольной работы по теме «Неопределённый интеграл». Незначительные изменения методики составления таких вариантов дают возможность получать различные комплекты контрольных для нескольких учебных групп. Составленные варианты задач можно использовать для типовых расчётов, для проведения практических занятий по рассматриваемой теме и выдаче индивидуальных текущих заданий по каждому типу задач для контроля усвоения темы занятия.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. -М.: Наука, 1969. – 640 с.

2. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного. -М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 528 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ, т.1. - М.: Наука, 1981. – 544 с.
4. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988. – 816 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 1. - М.: Наука, 1974. – 480 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1.- М.: Наука, 1985. – 432 с.
7. Лузин Н.Н. Интегральное исчисление. - М.: “ Советская наука “, 1949. – 420 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 1. - М.: Наука, 1964. – 440 с.
9. Зарубин В.С. с соавторами. Указ. соч.
10. Зарубин В.С. с соавторами. Указ. соч.
11. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты. - Издательство Лань, 2005. – 240 с.
12. Казанджан Э.П., Казанджан Г.П. Рабочий справочник по математике. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 32 с.
13. Там же.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. - М.: Наука, 1969. – 800 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Указ. соч.

Pavel L. Ivankov,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
ivankovpl@mail.ru
Victor P. Obuhov,
Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
wiktorobuhov@yandex.ru

Methodology for compiling tasks for control work on the topic «Indefinite integral»

Abstract. Many universities have adopted a point-rating system for assessing students’ knowledge, which involves regular control work on the topics studied. At the same time, the issue of compiling a large number of task options for carrying out these works is relevant. The purpose of this article is to obtain a methodology for compiling a large number of tasks (and corresponding options) on the topic «Indefinite integral». The indefinite integral is a key concept in many branches of higher mathematics, and the practical development of this topic by students will give them the opportunity to gain good knowledge (competencies) in mathematics. This article discusses some techniques that allow us to obtain a methodology that makes it possible to significantly simplify the compilation of a large number of variants of problems on the topic of «Indefinite integral». The content of the article will be useful for teachers and first-year students of universities.

Keywords: indefinite integral, variable substitution, integration by parts.

АСПЕКТЫ ПОДГОТОВКИ КАДРОВ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННОСТИ В РАМКАХ ИНТЕГРАЦИИ ВУЗ - ПРЕДПРИЯТИЕ

Аннотация

Актуальность исследования связана с подготовкой современного выпускника технического вуза с использованием новых подходов и методов при реализации образовательных программ, позволяющих будущему специалисту комплексно сочетать исследовательскую, проектную и предпринимательскую деятельность. Формирование профессиональных компетенций возможно на основе интеграции вуза с отраслевыми предприятиями. Цель статьи - обосновать интеграционный процесс «вуз - предприятие» как эффективный способ подготовки высококвалифицированных специалистов для обеспечения отраслевых предприятий кадрами. Разработана методология, основанная на моделировании процесса образования с учетом специфики профессиональной деятельности выпускников.

Ключевые слова

инженерное образование, образовательные технологии,
профессиональные компетенции

АВТОРЫ

Попов Владимир Семенович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
vspopov@bk.ru

Власова Елена Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
skupova189@yandex.ru

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Введение

Подготовка современного конкурентоспособного выпускника технического вуза невозможна без привлечения новых подходов и методов при реализации образовательных программ, направленных на формирование компетенций, позволяющих выпускнику принимать активное участие в инновационно-производственных технологических процессах, генерировать новые идеи и их реализовывать, способных максимально учитывать запросы предприятий и требования будущих работодателей к его предстоящей профессиональной деятельности. Такое формирование профессиональных компетенций с учетом задач отрасли в полной мере возможно лишь на основе интеграции кафедр, вуза в целом с отраслевыми предприятиями.

На протяжении многих лет ведущие технические университеты страны осуществляют мониторинг проблем кадрового обеспечения современных промышленных и научно-исследовательских предприятий, выпускающих или разрабатывающих высокотехнологическую продукцию. Анализ ситуации показывает серьезные трудности таких предприятий и организаций в кадровом вопросе, обусловленных увеличением возрастного потолка работников, снижением их профессионального уровня, недостаточным пополнением молодыми специалистами, готовыми в минимальные сроки адаптироваться в реальном производстве.

На взгляд авторов статьи, одной из причин такого положения дел в кадровом вопросе является недостаточная связь системы высшего профессионального образования с промышленными предприятиями и научными организациями.

Ведущим предприятиям промышленности нужны специалисты качественно нового уровня, удовлетворяющие запросам современного общества и производства. От них требуются глубокие фундаментальные знания, наличие практического опыта, способности исследовательского и аналитического характера, умение управлять инновационными проектами, системно мыслить, работать в коллективе.

Сложившаяся на данный момент система профессионального технического образования не может в полной мере способствовать подготовке такого рода специалистов. По мнению авторов, причиной этому, являются такие факторы, как: несоответствие профессиональных и образовательных стандартов; отрыв результатов процесса обучения в вузе от реальных запросов современного производства и, тем самым, неудовлетворенность работодателей уровнем подготовки выпускников; недостаточно оснащенная материально-техническая база инженерных вузов. Ликвидация такого рода причин реально требует пересмотра, трансформации инженерного образования в вопросах методологии, содержания, дидактики, подходов, принципов, компетенций.

Дидактика подготовки выпускника инженерного вуза, как отмечается в статье А.Р. Шайдуллиной и Л.М. Алексеевой [1], должна быть ориентирована на формирование у него исследовательских навыков и компетенций, готового сразу же, после защиты дипломного проекта, реализовывать на практике приоритетные задачи в рамках научно-технологической стратегии предприятия. Это требует, по мнению Б.Л. Аграновича и В.Б. Аграновича [2], специальной организации учебно-практической работы студентов на протяжении всей учебы в вузе, перехода от учебно-образовательного процесса к научно-образовательному.

Анализ и систематизация существующих исследований, проведенных М.А. Мурашевым [3], показывает, что концепция подготовки конкурентоспособного выпускника технического вуза на данный момент недостаточно проработана. В работе Э.Р. Хайруллиной [4] указано, что формирование у студентов мотивационной составляющей исследовательской и аналитической деятельности, развитие интереса к проектам инновационного характера, умение системно мыслить, работать в коллективе – это как раз то, что не в полной мере предусматривается действующими на данный момент образовательными программами вуза. Процесс образования, оторванный от практики, становится все более схематичным и все менее эффективным, а обратные связи между вузом и современным высокотехнологичным предприятием слабы и недостаточны.

В связи с этим нужно формировать новые подходы и методы, создавать организационные механизмы для эффективного решения задачи привлечения, подготовки и удержания кадров для предприятий.

Одним из путей решения проблемы, на взгляд авторов, является организация инновационной среды технического вуза в тесном партнерстве с базовыми отраслевыми предприятиями научно-исследовательского и производственного сектора экономики, при условии активного участия обучающихся в совместных с предприятиями практико-ориентированных исследовательских проектах.

Методология и результаты исследования

Цель статьи – обосновать интеграционный процесс «вуз – предприятие», как эффективный способ подготовки высококвалифицированных специалистов, обеспечение кадрами отраслевые предприятия, ориентированные на инновационные технологии промышленного производства и научно-исследовательские разработки.

Бесспорно, что подготовка инженеров высокой квалификации возможна только в тех высших технических вузах, где работают признанные в стране и за рубежом научные и научно-педагогические кадры, способные обеспечить единство учебной, научной и практической работы. Наиболее оптимальные условия для подготовки высокопрофессиональных инженерных кадров на основе интеграции образовательной и исследовательской деятельности создаются в технических университетах.

Технический университет – именно та форма высшего технического учебного заведения, где осуществляются фундаментальные исследования по прорывным направлениям науки, техники и технологии, происходит подготовка профессионалов высокого творческого потенциала для научно-технической деятельности по широкому спектру направлений и специальностей с использованием современных образовательных технологий, методов и дидактики.

Однако, образовательные технологии должны предусматривать не только фундаментальность знаний в обучении, но и практическую профессиональную составляющую выпускника, нацеленную на специфику современных промышленно-исследовательских и научных организаций. Такая двуединая задача может быть решена, на наш взгляд, на основе партнерской интеграции «вуз – предприятие».

Взаимодействие между вузом и предприятием законодательно закреплено в Приказе Министерства образования и науки России N 882 и Министерства просвещения России N 391 от 05.08.2020 (ред. от 22.02.2023) [5], в рамках которого предусмотрена сетевая форма реализации образовательных программ, позволяющая вовлекать материальные, технологические, методические, кадровые ресурсы и оборудование предприятий в учебно-образовательный процесс вуза. Но такое взаимодействие, на наш взгляд, не должно сводиться к простому комбинированию ресурсов сторон учебно-образовательного процесса. Необходим, в конечном итоге, взаимовыгодный скоординированный эффект от этой интеграции вуза и предприятия, в том числе и в области получения и развития профессиональных компетенций участников реализации научно-производственных программ. Для этого нужна модернизация инновационной среды инженерного вуза, дидактики, педагогических методов, ориентированных на формирование исследовательских компетенций и навыков выпускника, проводимой в тесном взаимодействии с предприятиями-заказчиками потенциальных кадров.

Методология такого взаимовыгодного партнерства «вуз – предприятие» реализована в рамках интеграции кафедр прикладной математики и математического моделирования Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана) с отраслевыми научно-производственными организациями, такими как Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова и др., в большинстве которых открыты филиалы кафедр.

На этих предприятиях студенты кафедр проходят производственную практику, слушают спецкурсы и выполняют курсовые и дипломные работы. Многие выпускники кафедры пополняют научные подразделения этих институтов, а многие специалисты институтов являются совместителями на кафедре.

На протяжении всей учебы в университете студенты связаны с предприятиями, на которые после окончания обучения они пойдут работать: выполнение курсовых и дипломных проектов, прохождение различного рода производственных практик, участие в конференциях и т.п., проходит при непосредственном участии не только преподавателей вуза, но и персонала этих предприятий.

Для того чтобы максимально приблизить учебный процесс в вузе с производственным процессом на предприятии, авторы разработали методологию, основанную на моделировании процесса образования с учетом специфики профессиональной деятельности будущих выпускников, которая содержит ряд следующих факторов.

1. В основу положен метод проектов, который позволяет сформировать исследовательские компетенции студентов в процессе обучения в инженерном вузе, осознать их прикладное назначение и связь с будущей профессией, то есть комплексно решать проблему профессионально ориентированной подготовки выпускника. Этот метод представляет собой способ достижения цели с помощью детальной разработки проблемы и получения конкретного практического и прикладного результата при работе студентов индивидуально или в малой группе.

Метод проектов, объединяющий в себе проблемные, творческие и исследовательские методы, позволяет создать для студентов такую образовательную среду, которая максимально приближена к среде будущей профессиональной деятельности.

Решение проблемы начинается с ее постановки, технического задания. В основе проекта лежит, как правило, производственная инженерная задача, близкая по тематике к задачам промышленного или научно-исследовательского предприятия, на котором будет трудиться после окончания вуза студент. Выполнение проекта может носить индивидуальный или коллективный характер, то есть в малой группе. При этом, как показано в статье Е. А. Власовой и В. С. Попова [6], работа в группе вырабатывает умение трудиться коллективно, слушать других, принимать или не принимать их взгляды по решаемой проблеме, аргументировано отстаивать свою позицию, широко использовать междисциплинарные знания.

Таким образом, проектный метод определяет концепцию инженерного образования на практике и, по сути, проектный метод есть способ моделирования в учебном процессе профессиональной деятельности будущих инженеров.

2. В статье Е. А. Власовой, В. С. Попова и С. И. Шишкиной [7] обоснована рекомендация включения в учебный процесс разбор и решение ситуационных задач, связанных с их будущей инженерной деятельностью. В таких задачах, как правило, присутствуют различного рода качественные показатели, связанные с описанием конкретных практико-ориентированных процессов и событий. Решение такого рода задач предполагает использование межпредметных и метапредметных знаний, умение комплексно работать с информацией, составлять оптимальный план и расставлять приоритеты в алгоритме их решений. При этом такие нестандартные задачи способствуют развитию у студентов творческих знаний и умений, учат развивать интуицию, привлекать к решению различные методы и подходы, пробуждают интерес к предмету и мотивацию к его изучению.

Ситуационные задачи воссоздают условия, которые могут возникнуть в реальной действительности, содержат проблемный вопрос, и здесь, как правило, нет единого подхода, метода решения задачи. В решении таких задач наиболее важным является построение математической модели изложенной ситуации.

3. Решение кадровой проблемы следует начинать с проблемы профессиональной ориентации школьников. Для этого следует расширить интеграцию «вуз – предприятие» до «школа – вуз – предприятие». Это приводит к системе целевой подготовки специалистов с высшим образованием и включает в себя интеграцию форм, методов и различного рода организационных мероприятий, которые должны быть направлены

на подготовку высококвалифицированных специалистов, способных оптимально по времени адаптироваться к условиям и задачам предприятия-заказчика.

Систему такой подготовки можно представить, как многоуровневую и являющейся составляющей процесса непрерывного образования, включающую в себя:

а) довузовскую подготовку учащихся общеобразовательных школ;

б) целевую подготовку студентов в вузах;

в) послевузовскую подготовку и повышение квалификации молодых специалистов.

Довузовская подготовка в системе целевой подготовки кадров для предприятий предполагает создание предпрофессиональных (инженерных) классов в общеобразовательных школах при базовых предприятиях промышленности или научно-производственных центрах. Создание таких классов способствует формированию у школьников осознанному выбору профессии, получение необходимого базиса знаний, отвечающих требованиям вуза, приобретению начальных профессиональных навыков по будущей рабочей профессии, адаптации к ней. Непосредственное участие в учебном процессе специализированных классов принимают преподаватели базовых вузов. Они разрабатывают учебные программы с учетом специфики высшего учебного заведения, проводят факультативные занятия со школьниками, помогают штатным педагогам школы в методических вопросах, в повышении их квалификации.

Целевая подготовка студентов в вузах – это основной уровень в системе целевой подготовки специалистов с высшим образованием для отраслевых предприятий. Основная цель такой подготовки – формирование компетенций, позволяющих выпускнику принимать активное участие в инновационно-производственных технологических процессах на предприятии, генерировать новые идеи и их реализовывать.

Послевузовская подготовка и повышение квалификации молодых специалистов является заключительным этапом в системе целевой подготовки. Здесь предприятие совместно с вузом проводит работу по созданию условий для творческого роста молодого специалиста, получение им дополнительного высшего или специального образования, отбору наиболее способных и талантливых молодых работников для их карьерного и профессионального роста: направление в аспирантуру, на стажировки.

Связь «вуз – предприятие» не прекращается и после поступления выпускников на работу. Многие преподаватели профильного вуза задействованы в системе повышения квалификации, принимают участие в комиссиях по аттестации работников предприятия, проводят консультации по научно-техническим вопросам, связанных с тематикой базового предприятия. Специалисты предприятий задействуются на кафедрах вуза в качестве совместителей.

Заключение

Вопрос кадрового обеспечения современных промышленных и научно-производственных предприятий высококвалифицированными специалистами – важный и актуальный в государственном масштабе. Одним из путей решение этой задачи является интеграция интеллектуального и научного потенциала вузов и ресурсов базовых предприятий научно-исследовательского и реального производственного сектора экономики. При этом необходим взаимовыгодный скоординированный (синергетический) эффект от этой интеграции, в том числе и в области получения и развития профессиональных компетенций участников реализации научно-производственных программ.

Для этого нужна, с одной стороны, модернизация инновационной среды инженерного вуза, дидактики, педагогических методов. С другой стороны, на предприятии должна быть создана эффективная система подбора кадров. При этом, высокотехнологичные предприятия должны быть не «потребителями» молодых специалистов, а их заказчиками.

Как нам представляется, решение кадровой проблемы возможно только при совместной работе системы образования с предприятиями реального сектора экономики.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Шайдуллина А.Р., Алексеева Л.М. Теоретические основания подготовки студентов технического вуза к инновационной деятельности в условиях интеграции образования, науки и производства // Казанский педагогический журнал. – 2012. – №4 (94). - С. 61-65.
2. Агранович Б.Л., Агранович В.Б. Системное проектирование содержания инновационного образования. Кадровые аспекты развития российского высокотехнологического комплекса. Интеграция образования, науки и производства (Материалы секционных заседаний Международной конференции VIII Международного форума "Высокие технологии XXI века», 24 апреля 2007 года)/ Под ред. И.Б. Федорова и А.Н. Тихонова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 200 с.
3. Мурашев М.А. Интеграция инженерного образования и производства: исторический опыт и современные тенденции // Проблемы высшего образования. – 2017. – №1 – С. 69-71.
4. Хайруллина Э.Р. Модель формирования профессиональных компетенций выпускника в условиях интеграции вуза с отраслевыми предприятиями / Э.Р. Хайруллина, А.С. Насретдинова, А.И. Насретдинов // Современные наукоемкие технологии. – 2023. – № 11. – С. 220-224. - URL: https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=39847 (дата обращения: 16.02.2024).
5. Приказ Минобрнауки России N 882, Минпросвещения России N 391 от 05.08.2020 (ред. от 22.02.2023) "Об организации и осуществлении образовательной деятельности при сетевой форме реализации образовательных программ" (вместе с "Порядком организации и осуществления образовательной деятельности при сетевой форме реализации образовательных программ") (Зарегистрировано в Минюсте России 10.09.2020 N 59764)
6. Власова Е. А., Попов В. С. Методика оценивания индивидуальных достижений при выполнении междисциплинарного проекта в студенческой группе // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. - 2019. - № 4. - С. 86-94. - URL: https://vestnik-mgou.ru/Articles/View/13539. - DOI: 10.18384/2310-7219-2019-4-86-94
7. Власова Е. А., Попов В. С., Шишкина С. И. Использование ситуационных задач в техническом вузе для формирования профессиональных компетенций будущих инженеров // Мир науки. Педагогика и психология. - 2023. - Т. 11. - No 6. - С. 1-13. - URL: https://mir-nauki.com/PDF/64PDMN623.pdf

***Vladimir S. Popov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
vspopov@bk.ru
***Elena A. Vlasova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
skupova189@yandex.ru
***Mikhail A. Velishchanskiy*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
velmiha@yandex.ru

Aspects of personnel training for industry within the framework of university-enterprise integration

Annotation. The relevance of research is related to the preparation of modern a graduate of a technical university using new approaches and methods in the implementation of educational programs that allow a future specialist to combine research, design and entrepreneurial activities in a comprehensive manner. The formation of professional competencies is possible on the basis of the integration of the university with indus-try enterprises. The purpose of the article is to substantiate the university –enterprise integration process as an effective way to train highly qualified specialists to provide industry enterprises with personnel. A methodology has been developed based on modeling the educational process, taking into account the specif-ics of graduates' professional activities.

Keywords: engineering education, educational technologies, professional competencies.

СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ УЧЕБНИКОВ ПО АРИФМЕТИКЕ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XVIII ВЕКА НА ПРИМЕРЕ УЧЕБНИКОВ Д.С. АНИЧКОВА и А.Д. БАРСОВА

Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена обсуждаемым вопросом о содержании математических курсов для различных направлений обучения и об организации обучения практической направленности. Цель статьи: показать различия между структурой и стилем учебных математических пособий для углубленного и прикладного изучения математики на примере сравнения учебников по арифметике А.Д. Барсова (1769-?) и Д.С. Аничкова (1733-1788), изданных при Московском университете во 2 половине XVIII века. Материалы статьи могут быть полезными историкам образования и науки, а также преподавателям высшей школы.

Ключевые слова

Александр Дмитриевич Барсов, Дмитрий Сергеевич Аничков, арифметика, история математики, история образования, коммерческое образование

АВТОРЫ

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Елена Владимировна,
магистр ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва
elena-pt@yandex.ru

Введение

Начало становления системы образования, охватывающего различные слои населения Российской империи, относится к XVIII веку. Создавались народные училища, гимназии, университеты, специализированные образовательные учреждения: инженерные, военные, инженерно-военные, коммерческие, духовные и другие. Создание отечественных учебников, написанных на русском языке, адаптированных к российским условиям жизни и целям обучения в конкретных учебных заведениях, являлось одной из важнейших задач. Понимание необходимости различного изложения курсов для различных учебных заведений вылилось в написание разнообразных по форме изложения и содержанию учебных книг.

В статье рассмотрены три учебника по арифметике, изданные при Московском университете во второй половине XVIII века (не для народных училищ): два превосходных учебника – переводчики Дмитрий Сергеевич Аничков и Александр Дмитриевич

Барсов, и оригинальный учебник Д.С. Аничкова Особенностью российских переводов, неоднократно отмеченной исследователями, была частичная переработка оригинальных текстов, вплоть до изменения их структуры и включение в текст собственных дополнений. В оригинальных российских учебниках также использовались работы зарубежных и отечественных авторов (в том числе собственные предшествующие работы), часто в большом количестве, при этом материал подавался в значительной переработке и, как правило, со ссылками (что нельзя сказать про учебники для народных училищ).

В статье показано, что учебники по математике для университетского и коммерческого образования уже в XVIII веке отличались друг от друга строгостью изложения материала, оформлением, содержанием, количеством примеров и задач с практическим содержанием, различными методическими указаниями. Вопрос о глубине преподавания и освоения основных математических курсов актуален и в наше время, особенно в связи с ограниченным объемом учебных часов, занятых под другие дисциплины специальностей.

На примере коммерческого образования и частной судьбы математика А.Д. Барсова будет показано, что отрыв прикладного образования от будущей прикладной деятельности может сделать образование в некоторых случаях бесполезным, а также снизить мотивацию как к этой деятельности, так и к образованию.

С другой стороны, школа прикладного образования способствует развитию умения отбирать только необходимый материал и составлять такой список учебных задач, которые почти наверняка могут пригодиться на практике.

Методология и результаты исследования

Сравнение учебников по арифметике Д.С. Аничкова и А.Д.Барсова

Рассмотрим три учебника по арифметике, которые были изданы во второй половине XVIII века при Московском университете и были ориентированы не на учеников народных училищ, а для более глубокого изучения (рис. 1).

1. Учебники Аничкова Д.С. (четыре издания до 1800 года: 1764 [1], 1775 [2], 1786 [3], 1793 [4]): Аничков Д.С. Теоретическая и практическая арифметика: В пользу и употребление юношества/ Собранная из разных авторов и вновь дополненная профессором экстраординарным и обеих гимназий инспектором Дмитрием Аничковым. – М.: Печатана при Императорском Московском университете, 1775. – 328 с.

2. Переводы Аничкова Д.С. (два издания до 1800 года: 1765 [5], 1795 [6]): Иог. Фридерика Вейдлера Арифметика / Переведенная с латинского языка магистром Дмитрием Аничковым; Исправленная и дополненная магистром Александром Барсовым. – М.: в Университетской типографии, у Хр. Ридигера и Хр. Клаудия, 1795.–134 с.

3. Перевод Барсова А.Д. (1797 [7]): Шмит Н. Новейшая арифметика: Заключающая в одном цепном правиле большую часть тех правил, которыя обыкновенно в арифметиках преподаются под особливыми именами; С показаниями самых кратчайших средств к решению разных задач / Сочиненная Н. Шмитом, Которую в пользу всех учащихся, а особливо купеческого юношества, с немецкого перевел, удобнейшим порядком расположил, и нужными прибавлениями дополнил, при Имп. Московском университете, философии и свободных наук магистр Александр Барсов.; Иждивением И. Новикова. – М.: В типографии Селивановского и товарища, 1797. – 190 с.

Учебники по арифметике, связанные с именем Д.С. Аничкова, всегда состоят из двух частей: объемной теоретической части с практическими вставками и практической. В самих учебниках выделяются ЧАСТИ и ГЛАВЫ (авторский учебник) или только ГЛАВЫ (перевод Иог. Фр. Вейдлера).

В книгах содержится множество определений, причем каждое определяемое понятие не только выделено курсивом, но озаглавлено как ОПРЕДЕЛЕНИЕ, каждое определение имеет номер. Так же озаглавлены и пронумерованы АКСИОМЫ и ТЕОРЕМЫ. Все теоремы имеют ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, правда, во многих случаях доказательства проводятся на примерах. В тексте есть многочисленные ПРИБАВЛЕНИЯ и ПРИМЕЧАНИЯ, также пронумерованные. У каждой ЗАДАЧИ выделено РЕШЕНИЕ и в некоторых случаях ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В учебниках также есть ПРИМЕРЫ.


ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И
ПРАКТИЧЕСКАЯ
АРИѲМЕТИКА,
ВЪ
ПОЛЬЗУ
И
УПОТРЕБЛЕНІЕ
ЮНОШЕСТВА,
собранная
изъ
РАЗНЫХЪ АВТОРОВЪ

Печатана при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ 1775 года.

ІО. ФРИДЕРИКА
ВЕЙДЛЕРА
АРИѲМЕТИКА,
ПЕРЕВЕДЕННАЯ
съ
ЛАТИНСКАГО ЯЗЫКА
МАГИСТРОМЪ
Дмитріемъ Аничковымъ,
Исправленная и дополненная
МАГИСТРОМЪ
Александромъ Барсовымъ.

МОСКВА,
Въ Университетской Типографіи,
у Хр. Ридигера и Хр. Клаудія,
1795 года.

НОВѢЙШАЯ
АРИѲМЕТИКА,
заключающая въ одномъ цѣпномъ правилѣ большую часть тѣхъ правилъ, которыя обыкновенно въ Ариѳметикахъ преподаются подъ особливыми именами; съ показаніемъ самыхъ кратчайшихъ средствъ къ рѣшенію разныхъ задачь.
сочиненная И. Шиптомъ,
которую
въ пользу всѣхъ учащихся, а особливо купеческаго юношества, съ Нѣмецкаго перевелъ, удобнѣйшимъ порядкомъ расположилъ, нужными прибавленіями дополнилъ,
при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ, Философіи и Свободныхъ Наукъ Магистръ
АЛЕКСАНДРЪ БАРСОВЪ.

МОСКВА.

Рис. 1. Титульные листы трех рассматриваемых учебников

Практически каждый абзац книг имеет номер (знак параграфа с номером, нумерация сквозная), эта традиция в учебной литературе показывает особую ответственность авторов за текст.

Книги, где Д.С. Аничков является автором, составлены после изучения других учебников по той же тематике. Их основой является арифметика в изложении Вольфа Хр., т. е. достаточно формализованное и строгое изложение. Упоминание о Вольфе Хр. написано на последних страницах его «Теоретической и практической арифметики» (например, на с. 271 издания 1764 года [8] и на с. 328 издания 1775 года [9]). В переводе Д.С. Аничковым учебника Иог. Фр. Вейдлера «Арифметика теоретическая и практическая» в ПРЕДУВЕДОМЛЕНИИ о математическом способе учения опять встречаем ссылку на Хр. Вольфа ([10, с. 21]), оказавшего сильнейшее влияние на изложение математических текстов, следовательно, и на учебник Вейдлера.

На последней странице «Теоретической и практической арифметике» Д.С. Аничков пишет, что перевод Хр. Вольфа с немецкого языка сделан был профессором А.А. Барсовым, практически ровесником Д.С. Аничкова С ним же Д.С. Аничков обсуждал перевод: «Признаюсь, что я его изрядными наставлениями, в разсуждении сей науки, много доволен» [11, С. 271]. Два преподавателя математики в Московском университете старались сделать учебник лучшим, передать, как пишет Д.С. Аничков, «юношеству» все лучшее, по их мнению, из известных методик обучения арифметике. Однако в «Теоретической и практической арифметике» Д.С. Аничкова нет упоминания о вышедших к этому времени российских учебниках по арифметике, например, перевода «Арифметики» Л. Эйлера и дискуссии о соотношении формального и практического в них. В дальнейшем профессор Антон Алексеевич Барсов становится цензором Московского университета, и его именем подписываются Одобрения, расположенные на первых страницах изданий.

В связи с практической частью своего учебника Д.С. Аничков ссылается на латинские переводы А. Такквета, математика XVII века. Других авторов Д.С. Аничков не упоминает, хотя слова «из разных авторов» могут относиться не только к зарубежным математикам, но и к отечественным: Н.Г. Курганову, С.Я. Румовскому, С.К.Котельникову, Е.Д. Войтяховскому, А.Г. Решетникову и другим.

Перевод Д.С. Аничковым книги Иог. Фр. Вейдлера «Арифметика теоретическая и практическая» издавался два раза: в 1765 и 1795 гг. (уже после смерти Аничкова Д.С.). Первое издание содержит 192 параграфа, а второе — 204. Оно исправлено и дополнено магистром Александром Дмитриевичем Барсовым. В частности, в ПРЕДУВЕДОМЛЕНИЕ добавлены параграфы 27 и 28, где описаны другие источники.

А.Д. Барсов был учеником Д.С. Аничкова А.Д. Труды Барсова по составлению учебников имеют те же черты:

–переводы имеют прибавления и изменения, вплоть до порядка изложения,

–самостоятельные учебники, составленные из отобранного материала из разных авторов, содержат ссылки на первоисточники.

Как и учитель, А.Д. Барсов издает учебник по арифметике «Новейшая арифметика» – перевод книги Н. Шмита. Однако, если у Д.С. Аничкова практическая часть не является основной, то учебник А.Д. Барсова почти полностью состоит из примеров, т. е. практическая часть его учебника значительно превосходит теоретическую. В книге отсутствуют заголовки ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИБАВЛЕНИЕ, ПРИМЕЧАНИЕ, АКСИОМА, ТЕОРЕМА. Однако, выделяются ДОКАЗАТЕЛЬСТВА и ПРАВИЛА, определяемые понятия выделены курсивом (хотя в целом его меньше и оформление проще), а текст, кроме деления на ГЛАВЫ, разбит на ОТДЕЛЕНИЯ, которые отсутствуют у Д.С. Аничкова Присутствует также нумерация многих абзацев, т. е. текст разбит на параграфы и напоминает скорее конспект. Четкое изложение материала подкрепляется обращением к примерам не абстрактного, а конкретного прикладного содержания. При этом некоторые свойства сформулированы не на строгом, а на житейском языке, и, может быть, даже без приведения доказательств, но обязательно с пояснением на примере (та же черта – сочетание теоретических формулировок с численными примерами – присутствует и у учебников, связанных с именем Д.С. Аничкова). Латинские синонимы терминов у А.Д. Барсова полностью исключены. Он максимально близок к читателю: «Следующее примечание облегчает сей труд во многих случаях», «Что же в самом деле значит цепное правило?», «Следующие правила могут предостеречь от погрешностей в расположении цепного правила», «Удобнее и легче сего способа предлагаю я следующий», «Теперь можем мы приступить к решению задач на сложное интересное правило» [12, С. 117, 121, 125, 143, 149].

Сравним адресатов учебников Д.С. Аничкова и А.Д. Барсова. Учебники Д.С. Аничкова предназначены для обучения математике юношества, а некоторые из них – для тех, кто упражняется в землемерии, фортификации и артиллерии (например, его учебники по геометрии (1780) и тригонометрии (1780, 1787) [13, 14, 15]. Таким образом, аудитория Д.С. Аничкова – юношество, которому необходимо углубленное знание математики. Учебник по арифметике А.Д. Барсова предназначен для обучения купеческого юношества, поэтому практически все примеры – из коммерции. Корме того, у А.Д. Барсова на определенную аудиторию ориентированы и некоторые заголовки: «О выгодах, коими в сложении воспользоваться можно», «О выгодах, кои в цепном правиле употребить можно» [16, С. 12, 133], и т. д.

Отметим, что «Новейшая арифметика» издана в конце XVIII века, и к этому времени было известно немало книг по арифметике. Слово же «новейшая» в названии отличает её от предшествующих. С современной точки зрения, это своеобразный маркетинговый ход, чтобы сделать книгу заметнее. С первой страницы А.Д. Барсов перечисляет отличия своей книги от всех изданных ранее [17, С. I-III]:

1) особый способ деления, который во многих случаях «с выгодою употреблен быть может»;

2) легкий способ найти наименьший общий знаменатель дробей;

3) облегченный способ умножения и деления десятичных дробей;

4) особое цепное правило, как способ решить все задачи, связанные с геометрической прогрессией;

5) упрощение выражений при использовании цепного правила, которое позволяет «решить задачу в десять крат скорее обыкновенного»;

6) приложение этого правила к действиям с разнородными числами;

7) авторский способ возведения в степень для вычисления процентов на проценты без помощи логарифмов.

Далее А.Д. Барсов упоминает не включенные за ненадобностью традиционные для учебников по арифметике темы: извлечение корней, вычисление логарифмов, нахождение наибольшего общего делителя. Он говорит о том, что эти разделы он перенесет в отдельный учебник по алгебре, и излагает его подробный план, что можно считать некой рекламой. Эта книга вышла в 1797 году под названием «Новая алгебра» [18]. Как и в «Новейшей арифметике», автор приводит отличия и преимущества его книги перед всеми остальными, изданными к тому времени. В целом, в тематическом плане по математике А.Д. Барсов пошел дальше своего учителя: его учебник «Новая алгебра» содержит дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление.

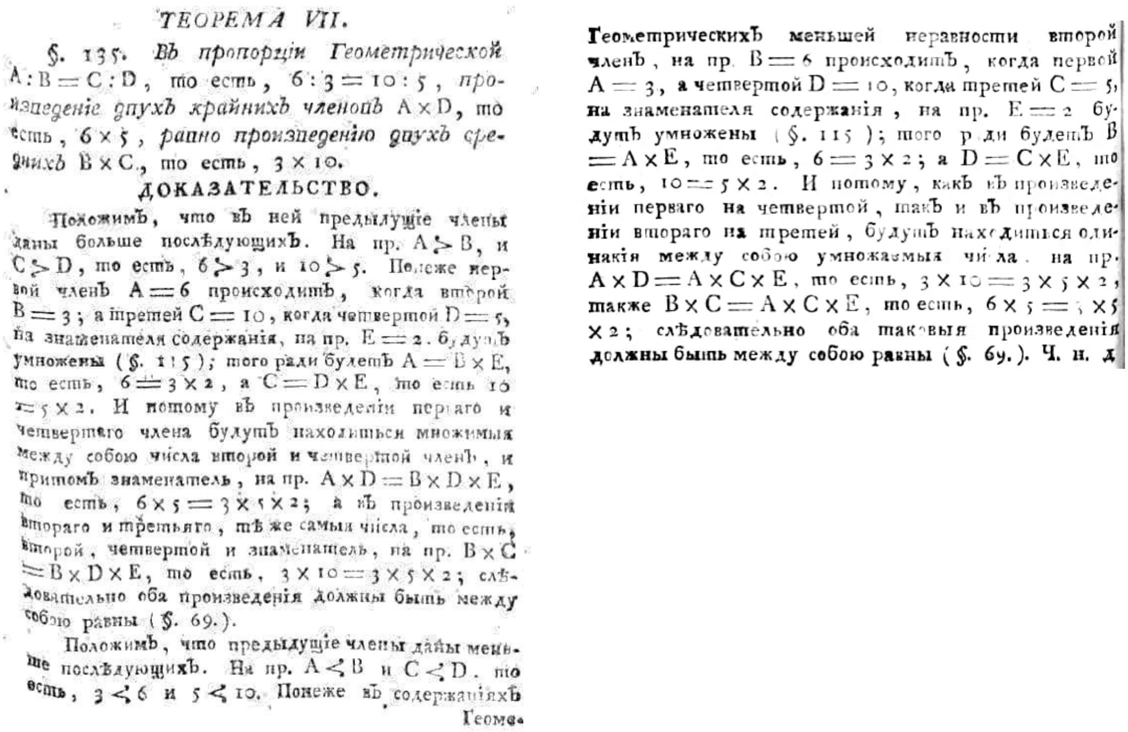
Изложение материала о пропорциях и прогрессиях в различных учебниках

Рассмотрим в качестве примера материал о пропорциях и прогрессиях, изложенный в учебнике Д.С. Аничкова «Теоретическая и практическая арифметика», 1775 (на основе Вольфа, переведенного А.А.Барсовым, и других авторов; обсуждения с А.А. Барсовым) [19].

В этом учебнике изучению пропорций и прогрессий посвящена Глава четвёртая «О содержании, пропорции и прогрессии арифметической и геометрической» (С. 65-119). В ней определяется отношение двух величин, причем рассматривается не только их частное, но и разность. При этом сравнение двух чисел через вычисление разности называется содержанием арифметическим, а через вычисление частного – содержанием геометрическим. Пропорция определяется как равенство двух отношений, причем аналогично пропорциями являются как равенство A – B = C – D, так и равенство A : B = C : D. Пропорции первого вида называются арифметическими, а второго – геометрическими. Далее определяются арифметическая и геометрическая прогрессии. Свойства пропорций и прогрессий излагаются и доказываются как теоремы, имеется также несколько аксиом. Интересно, что теоремы формулируются не только в общем виде, но и одновременно на примерах, т. е. сочетается использование букв и чисел (рис. 2).

Кроме того, в этой главе приведены задачи на прогрессии, с подробными решениями и во многих случаях с доказательствами проведенных решений. Вначале разбираются задачи на арифметическую прогрессию, потом – на геометрическую. После каждого блока следует несколько примеров «на правила прогрессии арифметической» или «на правила прогрессии геометрической» (с краткими решениями).

Задачи на пропорции при этом вынесены во вторую часть учебника, в девятую главу «О практической арифметике» (С. 202-271). Эта глава в основном посвящена именно им и начинается словами: «Практические правила Арифметики суть те, чрез которые, приняв в помощь науку о пропорциях, можно решить разные вопросы, или задачи, случающиеся при сравнении одной вещи с другую, напр. в купле, продаже, и проч.». Таким образом, пропорциям отводится центральная роль в прикладном значении арифметики.



ТЕОРЕМА VII.

§. 135. *Вѣ пропорціи Геометрической* A : B = C : D, то есть, 6 : 3 = 10 : 5, *произведеніе двухъ крайнихъ членовъ* A × D, то есть, 6 × 5, *равно произведенію двухъ среднихъ* B × C, то есть, 3 × 10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

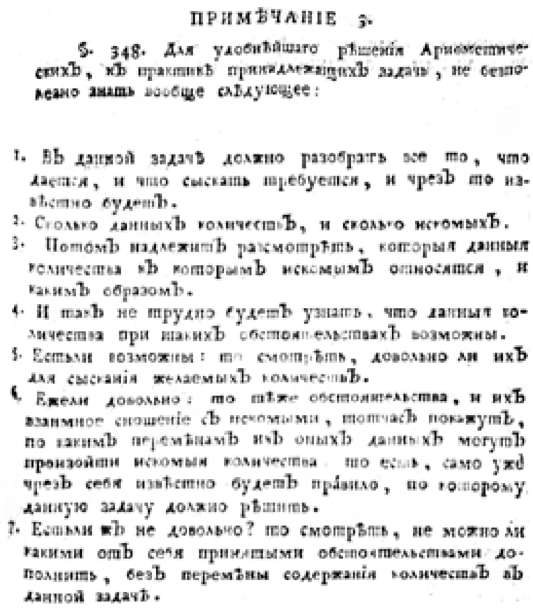
Положимъ, что въ ней предыдущіе члены даны больше послѣдующихъ. На пр. A > B, и C > D, то есть, 6 > 3, и 10 > 5. Понеже первой членъ A = 6 происходитъ, когда второй B = 3; а третей C = 10, когда четвертой D = 5, на знаменателя содержанія, на пр. E = 2. будутъ умножены (§. 115); того ради будетъ A = B × E, то есть, 6 = 3 × 2, а C = D × E, то есть 10 = 5 × 2. И потому въ произведеніи перваго и четвертаго члена будутъ находиться множимыя между собою числа второй и четвертой членъ, и притомъ знаменатель, на пр. A × D = B × D × E, то есть, 6 × 5 = 3 × 5 × 2; а въ произведеніи втораго и третьяго, тѣ же самыя числа, то есть, второй, четвертой и знаменатель, на пр. B × C = B × D × E, то есть, 3 × 10 = 3 × 5 × 2; слѣдовательно оба произведенія должны быть между собою равны (§. 69.).

Положимъ, что предыдущіе члены даны меньше послѣдующихъ. На пр. A < B и C < D, то есть, 3 < 6 и 5 < 10. Понеже въ содержаніяхъ Геоме-

Геометрическихъ меньшей неравности второй членъ, на пр. B = 6 происходитъ, когда первой A = 3, а четвертой D = 10, когда третей C = 5, на знаменателя содержанія, на пр. E = 2 будутъ умножены (§. 115); того ради будетъ B = A × E, то есть, 6 = 3 × 2; а D = C × E, то есть, 10 = 5 × 2. И потому, какъ въ произведеніи перваго на четвертой, такъ и въ произведеніи втораго на третей, будутъ находиться одинакія между собою умножаемыя числа, на пр. A × D = A × C × E, то есть, 3 × 10 = 3 × 5 × 2, также B × C = A × C × E, то есть, 6 × 5 = 3 × 5 × 2; слѣдовательно оба таковыя произведенія должны быть между собою равны (§. 69.). Ч. н. д.

Рис. 2. Пример оформления теоремы с главным свойством пропорции в учебнике Д.С. Аничкова «Теоретическая и практическая арифметика»

При этом Д.С. Аничков выделяет несколько так называемых правил – методов решения задач. Для каждого из правил приведены методические указания для их наилучшего использования. Примеры задач на каждое правило взяты из тематически разных прикладных задач. Также есть развернутые методические указания общего характера, обращенные к тем, кто решает задачи (рис. 3).



ПРИМѢЧАНІЕ 3.

§. 348. Для удобнѣйшаго рѣшенія Ариѳметическихъ, къ практикѣ принадлежащихъ задачь, не безполезно знать вообще слѣдующее:

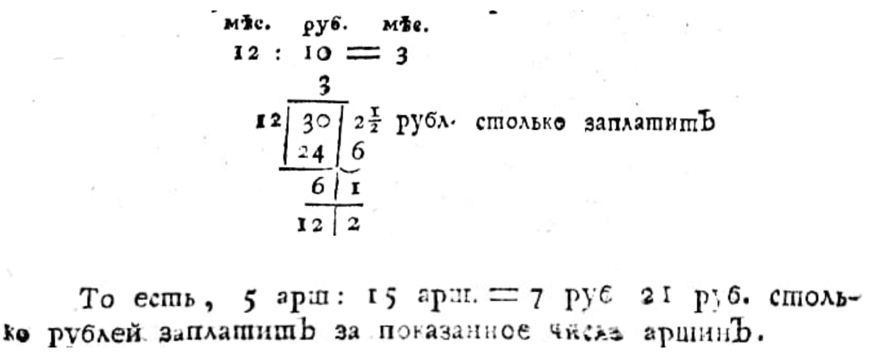
1. Въ данной задачѣ должно разобрать все то, что дается, и что сыскать требуется, и чрезъ то извѣстно будетъ.
2. Сколько данныхъ количествъ, и сколько искомыхъ.
3. Потомъ надлежитъ разсмотрѣть, которыя данныя количества къ которымъ искомымъ относятся, и какимъ образомъ.
4. И такъ не трудно будетъ узнать, что данныя количества при такихъ обстоятельствахъ возможны.
5. Естьли возможны: то смотрѣть, довольно ли ихъ для сысканія желаемыхъ количествъ.
6. Ежели довольно: то тѣже обстоятельства, и ихъ взаимное сношеніе съ искомыми, тотчасъ покажутъ, по какимъ перемѣнамъ изъ оныхъ данныхъ могутъ произойти искомыя количества, то есть, само уже чрезъ себя извѣстно будетъ правило, по которому данную задачу должно рѣшить.
7. Естьли жъ не довольно? то смотрѣть, не можно ли какими отъ себя принятыми обстоятельствами дополнить, безъ перемѣны содержанія количествъ въ данной задачѣ.

Рис. 3. Развернутые методические указания общего характера к решению задач в учебнике Д.С. Аничкова «Теоретическая и практическая арифметика»

Д.С. Аничков выделяет тройное правило (для нахождения неизвестного числа в пропорции по трем другим числам) и тройное правило сложное (для нахождения неизвестного числа в пропорции по трем другим числам «с приложенными при них обстоятельствами»), которое разделяется на пятерное (для нахождения шестого числа по пяти), семерное (восьмого по семи) и девятерное (десятого по девяти).

При этом в каждом случае имеется два варианта: прямой и «возвратительный», соответствующие прямой и обратной пропорциям.

С первого взгляда не совсем понятно, по какому принципу нумеруются члены в прямом и «возвратительном» правилах: прямое – это нахождение четвертого члена через деление произведения второго и третьего членов на первый, и обратное – нахождение первого через деление произведения второго и четвертого на третий. Но всё проясняется, если обратиться к ссылкам Д.С. Аничкова на параграфы четвёртой главы. В случае тройного прямого правила необходимо найти последнюю составляющую возрастающей геометрической прогрессии из четырех членов, в случае тройного обратного – первую. Например, в задаче на стоимость куска сукна в 15 аршин при известной стоимости куска сукна в 5 аршин (7 руб.) находится последний член последовательности 5, 7, 15, x (x = (7*15)/5) (С. 207), а в задаче на вес копеечного хлеба из муки по 12 копеек за четверик при известном весе копеечного хлеба из муки по 16 копеек за четверик (3 фунта) – первый член последовательности x, 3, 12, 16 (x = (3*16)/12) (С. 211-212). Заметим, что мы сами добавили сюда величину x, в учебнике Аничкова Д.С. на месте x может стоять пустое место или уже полученный результат (рис. 4).


мѣс. руб. мѣс.
12 : 10 = 3
3
12 | 30 | $2\frac{1}{2}$ рубл. столько заплатитъ
24 | 6
6 | 1
12 | 2

То есть, 5 арш : 15 арш. = 7 руб 21 руб. столько рублей заплатитъ за показанное число аршинъ.

Рис. 4. Некоторые примеры оформления пропорций в учебнике Д.С. Аничкова «Теоретическая и практическая арифметика»

Интересно также упоминание о возможности перестановки членов пропорции и дальнейшего сокращения на общий множитель, называемое «практикой итальянскою».

Наконец, в случае более сложных тройных правил (пятерное, семерное, девятерное) Аничков Д.С. приводит пошаговый алгоритм решения, оперирующий понятиями «члены, значащие вещи», «обстоятельства» и «член одинакового знаменования с искомым». Например, в задаче на нахождение стоимости провоза определенной массы железа (12 пуд) на некоторое количество верст (20 верст) при известной стоимости провоза 19 пуд на 36 верст «члены, значащие вещи» – это массы железа, «обстоятельства» – длины путей.

Вначале он составляет пропорцию 12:8 = 19:x (x = $12\frac{2}{3}$), а затем – 20:$12\frac{2}{3}$ = 36:x (x = $22\frac{4}{5}$). Величина x также добавлена нами. Уникальной методической особенностью учебника является то, что перед изложением сложных тройных правил автор вставляет задачу XXVI «Повторить тройное прямое правило» (то есть его простой вариант) и кратко повторяет, какой член на какой следует разделить, и в прибавлении пишет: «Равным образом повторяется и тройное возвратительное правило» (С. 214).

Заметим, что, как и в случае задач на прогрессии, в данном разделе приведены «примеры» задач не с полными, а с краткими решениями: «примеры на тройное прямое правило», «примеры на тройное возвратительное правило» и «примеры на все случаи тройного правила сложнаго».

В той же главе имеются и другие правила:

–правило товарищества, или складное (деление числа на пропорциональные части);

–правило смешения («способ смешивать вещи разных цен таким образом, чтобы произшедшее из того смешение было средней цены»);

–правило фальшивое («способ, чрез взятое по изволению число, находить искомое», при этом «число, которое вместо искомаго принимается по изволению, называется положением»), и в том же абзаце правило одного положения («помощию одного по изволению взятого числа, находится искомое») и двух положений («помощию двух по изволению взятых чисел, находится искомое»),

–правило слепое, или девичье («способ данное число денег употребив по показанной цене на покупку определеннаго количества разных вещей; или по данному уделу разделив на определенное число разнаго пола, или звания людей, найти потом в особливости каждой вещи количество, или число каждаго пола и звания людей»).

В учебнике Иог. Фр. Вейдлера «Арифметика теоретическая и практическая», 1795, (перевод Аничкова Д.С., влияние Вольфа, исправления и дополнения Барсовым А.Д.) [20] теме прогрессий и пропорций посвящена Глава третья «О содержании и пропорции» (С. 65-86). Она также начинается с понятий содержания (арифметического и геометрического), причем этой теме уделено больше внимания по сравнению с первой рассмотренной нами книгой: в частности, выделены дополнительные виды содержаний, такие как содержание суперпартикулярное, содержание суперпарциенс и др.

В «Теоретической и практической арифметике» Д.С. Аничкова сначала определяется пропорция, как равенство содержаний, и оба ее вида, а затем уже прогрессия и оба ее вида. В «Арифметике теоретической и практической» Вейдлера (перевод Д.С. Аничкова) прогрессия и пропорция определены в одном абзаце, причем достаточно нечетко в случае пропорции, которая выделяется только в одном виде – геометрическая (таблица 2).

Также как и в случае «Теоретической и практической арифметики», свойства прогрессий и пропорций изложены в виде теорем с доказательствами, но в отличие от предыдущей книги, в этой главе аксиомы отсутствуют. Также стоит отметить, что в первой книге задачи были вынесены в конец главы (т. е. они следовали после всех теорем, касающихся и арифметической, и геометрической прогрессии, и пропорции), и были разбиты на блоки арифметической и геометрической прогрессий (при этом в каждом сначала были приведены задачи с полными решениями, а затем – с краткими). В данном же случае теоремы и задачи перемешаны.

Кроме того, в формулировках теорем отсутствует сочетание словесного изложения, буквенных формул и численного примера – теоремы формулируются только словесно и с численным примером.

В целом, несмотря на расширение темы про содержания, глава гораздо короче и отличается меньшей стройностью по сравнению с авторским учебником Д.С. Аничкова

То же касается главы седьмой «О правилах практической арифметики» (С. 116-134). В ней вводится тройное правило (названное также златым), разделенное на прямое и возвратительное (названное также превращенным), и его усложненный вариант – тройное правило сложное, «по которому из пяти, семи и т. д. данных членов находится шестой, осьмой и пр.», но термины «пятерное», «семерное» отсутствуют, при этом формулировка самого правила идет уже после работы с правилом простым (в первом же учебнике сначала формулируются и простой, и сложный варианты, а потом уже идет подробный разбор обоих по очереди). Структура практической главы отличается не только этим. Рассмотрим подробнее, как в этой главе изложен материал по пропорциям в обеих книгах (таблица 1).

Таблица 1

Изложение материала по пропорциям в главах, посвященных практической арифметике, в двух книгах по арифметике, связанных с именем Д.С. Аничкова

Аничков Д.С. «Теоретическая и практическая арифметика», 1775, 2-е издание	Иог. Фр. Вейдлер «Арифметика теоретическая и практическая», перевод Аничкова Д.С., 1795, 2-е издание
1	2
Определение тройного правила прямого и возвратительного.	Определение тройного правила прямого и возвратительного.
Определение тройного правила сложного прямого и возвратительного.	
Три теоретических примечания.	Два теоретических прибавления, во втором прибавлении – с подробным разбором примера задачи.
Задача LXI. Сделать тройное правило прямое. Приведено решение и доказательство (теоретические), и далее теоретическое примечание с подробным разбором задачи.	Задача XXXI. Изъяснить тройное прямое правило. Приведено теоретическое решение.
Три отдельных теоретических примечания с подробным разбором задачи в каждом.	Теоретическое прибавление с численным примером.
Примеры на тройное прямое правило с краткими решениями.	
Задача LXII. Сделать тройное правило возвратительное. Приведено решение и доказательство (теоретические), и далее подробный разбор примера задачи.	Задача XXXI. Изъяснить тройное возвратительное правило. Приведено два теоретических способа решения, поясняющихся на подробном разборе задачи.
Краткое пояснительное прибавление.	
Отдельное теоретическое примечание с разбором задачи.	
Примеры на тройное возвратительное правило **с** краткими решениями.	
Задача XXVI. Повторить тройное прямое правило. Приведено теоретическое решение.	

Прибавление: «равным образом и повторяется и тройное возвратительное правило».	
Теоретическое примечание, предваряющее сложное тройное правило.	
	Определение тройного правила сложного прямого и возвратительного с упоминанием пяти, семи и т. д. членов.
Задача LIX. Сделать тройное правило сложное. Приведено решение с разбором трех случаев (пять, семь и девять членов), в каждом случае приведен теоретический пошаговый алгоритм и подробный разбор задачи.	Задача XXXIII. Изъяснить сложное прямое правило. Приведено два теоретических способа решения, поясняющихся на подробном разборе задачи (для случая пяти членов).
Два теоретических прибавления.	Задача XXXIV. Изъяснить сложное возвратительное правило. Приведен теоретический способ решения, поясняющийся на подробном разборе задачи (для случая пяти членов).
Два теоретических примечания с подробным разбором задачи в каждом.	
Два прибавления.	
Примеры на все случаи тройного правила сложного **с** краткими решениями.	
Теоретическое примечание с кратким решением задачи.	
Примеры на все случаи тройного правила сложного **с** краткими решениями.	

По сути, первый учебник отличается большим числом разобранных задач и теоретических прибавлений, а главное – более четкой структурой каждого блока, посвященного отдельному правилу: формулировка, теоретические примечания с подробным разбором решений задач, примеры задач с короткими решениями. Во втором учебнике за формулировкой каждого правила, кроме тройного прямого, следует подробный разбор задачи, но дополнительных пояснений с отдельными разобранными задачами очень мало, и вовсе отсутствуют тренировочные задачи с краткими решениями. Кроме того, в первом учебнике подробно разобран теоретический пошаговый алгоритм и решение задачи для нескольких случаев сложного правила – пятерного, семерного, девятерного, но прямой и возвратительный варианты не разделяются, а во втором учебнике сложное правило разбирается только для пятерного случая и без деления теоретической части на занумерованные шаги, но зато отдельно в прямом и возвратительном вариантах. Достоинством второго учебника являеися также наличие двух способов решения для тройного возвратительного и сложного прямого правил.

Во второй книге имеются и другие правила: правило товарищества или складное, правило положения (одного и двух), правило смешения. Все эти три правила имеются в первой книге (правило положения названо правилом фальшивым, но потом также разложено на одно и два положения), но в ней еще есть правило слепое или девичье.

Таким образом, оба учебника, связанных с именем Д.С. Аничкова, являются одновременно как изложением теоретического курса, так и методическим пособием по решению задач. При этом учебник под авторством Д.С. Аничкова отличается большей полнотой, стройностью и математической строгостью по сравнению с его переводом учебника Вейдлера, а также более продуманной методикой.

В учебнике Н. Шмита «Новейшая арифметика, Заключающая в одном цепном правиле большую часть тех правил, которыя обыкновенно в арифметиках преподаются под особливыми именами; С показаниями самых кратчайших средств к решению разных задач», 1797 (перевод, исправления и дополнения А.Д. Барсова) [21], теме прогрессий и пропорций посвящена в первую очередь Глава шестая «О пропорциях и прогрессиях» (С. 97-112). Как и в «Теоретической и практической арифметике» и «Арифметике теоретической и практической», она начинается с понятия содержания, арифметического и геометрического. В отличие от учебников Д.С. Аничкова, других типов содержаний не выделяется.

Как и в авторском учебнике Д.С. Аничкова, в книге Н. Шмита вначале вводится понятие пропорции, а затем, в другом параграфе и даже в другом отделении, прогрессии. Определения достаточно четкие, в отличие от перевода Д.С. Аничковым Иог. Фр. Вейдлера, где пропорция определена только в геометрическом варианте и почти синонимизируется с прогрессией, причем оба понятия находятся в одном абзаце (таблица 2).

Таблица 2

Изложение тем содержания, прогрессии и пропорции в трех рассматриваемых книгах по арифметике

<table>
<tr><td>Аничков Д.С. «Теоретическая и практическая арифметика», 1775, 2-е издание</td><td>Иог. Фр. Вейдлер «Арифметика теоретическая и практическая», перевод Аничкова Д.С., 1795,
2-е издание</td><td>Шмит Н. «Новейшая арифметика», перевод Барсова А.Д., 1797</td></tr>
<tr><td colspan="3">Содержания арифметическое и геометрическое</td></tr>
<tr><td>Пропорция:
«Пропорция не что иное есть, как равенство двух между собою содержаний».
«Арифметическую пропорцию составляют те содержания, в которых одинакая разность находится».
«Напротив того Геометрическую пропорцию составляют те содержания. Которые имеют одинакого знаменателя» (§ 117).</td><td rowspan="2">Прогрессия и пропорция:
«Прогрессия есть ряд нескольких подобных содержаний».
«Оная бывает или Арифметическая, в которой все числа имеют одинакую разность».
«Или Геометрическая, в которой все числа имеют одинакого знаменателя, или показателя».
«Такая прогрессия называется также пропорциею Геометрическую, или Аналогиею» (§ 93).</td><td>Пропорция:
«Два равных содержания, соединенные между собой знаком равенства, называются пропорциею».
«Арифметическая пропорция есть равенство двух арифметических содержаний».
«Геометрическая пропорция есть равенство двух геометрических содержаний» (§ 122).</td></tr>
<tr><td>Прогрессия:
«Прогрессия есть порядок количеств одного роду в одинаковом содержании продолжающихся».
«И собственно называется Арифметическую, когда между всеми количествами, то есть, членами непрерывно продолжающимися, будем одинакая разность»
«Напротив того Геометрическую называется, когда между всеми членами, непрерывно продолжающимися будет одинакой знаменатель» (§ 122).</td><td>Прогрессия:
«Строка или ряд чисел, продолжающихся в одинаком арифметическом содержании, называется прогрессия арифметическая».
«Ряд чисел, в одинаком геометрическом содержании продолжающихся, называется прогрессия геометрическая» (§ 154).</td></tr>
</table>

Интересно, что А.Д. Барсов также приводит пояснение, каким образом следует читать пропорции: «Сия пропорция выговаривается следующим образом» (С. 99). Стремление автора к формулировкам на житейском языке выражается, например, в стиле изложения утверждения о возможности перестановки средних членов пропорции, который можно сравнить в трех рассматриваемых книгах (таблица 3).

Из этого сравнения видно, что в наиболее математически строгой авторской книге Д.С. Аничкова «Теоретическая и практическая арифметика» это утверждение оформлено в виде теоремы, которая сформулирована в словесном, буквенном и численном видах, и отдельно доказана. В его переводе Иог. Фр. Вейдлера «Арифметика теоретическая и практическая» утверждение оформлено как прибавление к теореме о главном свойстве пропорции. Наконец, в переводе А.Д. Барсовым книги Н. Шмита «Новейшая арифметика» читаем: «Обе пропорции могут написаны и прочтены быть как от левой руки к правой, так и от правой к левой», и видим сразу пример не только для геометрической пропорции, но и для арифметической. В этом еще одна особенность последнего учебника – частое упоминание обоих типов пропорций в одной мысли, параллельное изложение. Правда, на с. 100 автор пишет: «Для двух причин не стану я всегда упоминать об Арифметической пропорции: во-первых, потому, что сказанное о Геометрической пропорции, с вышеозначенною переменою иметь место и в Арифметической; а во-вторых потому, что Арифметическая пропорция гораздо меньше иметь влияние на общежитие, нежели Геометрическая». Кроме того, если доказательства у А.Д. Барсова присутствуют, то зачастую они напоминают проверку утверждения на примере.

Таблица 3

Стиль изложения утверждения о возможности перестановки средних членов пропорции в трех рассматриваемых книгах по арифметике

Аничков Д.С. «Теоретическая и практическая арифметика», 1775, 2-е издание	Иог. Фр. Вейдлер «Арифметика теоретическая и практическая», перевод Аничкова Д.С., 1795, 2-е издание	Шмит Н. «Новейшая арифметика», перевод Барсова А.Д., 1797
ТЕОРЕМА X. §. 139. *Въ пропорцiи Геометрической* A:B = C:D, то есть, 3:9 = 6:18, *члены ме-* *жду* (80) *жду собою содержатся также и чрезъ членъ* (alternando, seu permutando); т. е. *какъ первой къ третьему, такъ второй къ четвертому.* На пр. A:C = B:D, то есть, 3:6 = 9:18. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понеже предыдущiе члены въ пропорцiи даны меньше своихъ послѣдующихъ; того ради оные будутъ, какъ части своихъ послѣдующихъ, и слѣдовательно подобны, и содержатся между собою, какъ ихъ цѣлыя. На пр. A:C = B:D, то есть, 3:6 = 9:18 (§. 131.). Положимъ пропорцiю A:B = C:D, то есть, 12:4 = 24:8, въ которой предыдущiе члены даны больше своихъ послѣдующихъ: то, для тѣхъ же причинъ, будетъ B:D = A:C, то есть, 4:8 = 12:24, или, что все равно, A:C = B:D, то есть, 12:24 = 4:8. Ч. и д.	ПРИБАВЛЕНIЕ. 2. §. 112. Но естьли въ какихъ нибудь четырехъ числахъ произведенiе крайнихъ равняется произведенiю среднихъ: то тѣ числа суть Геометрически пропорцiональныя, понеже о сихъ только доказано было оное свойство. Чего ради, естьли среднiя числа перемѣнятся, и третiй членъ на мѣсто втораго, а второй на мѣсто третьяго поставится, понеже произведенiе ихъ то же будетъ: то слѣдуетъ, что въ четырехъ пропорцiональныхъ числахъ, также *переложенное, или перемѣненное содержанiе* (alternata vel permutata ratio) перваго къ третьему и втораго къ четвертому имѣетъ мѣсто. На пр. въ пропорцiи 2:4 = 6:12, будетъ слѣдующее переложенiе среднихъ, или *перемѣненное содержанiе* 2:6 = 4:12.	После определения пропорций и примеров 7 — 4 = 5 — 2 и 18 : 9 = 6 : 3: Обѣ пропорцiи могутъ написаны и прочтены быть какъ отъ лѣвой руки къ правой, такъ и отъ правой къ лѣвой, а имянно $2 \overset{3}{—} 5 = 4 \overset{3}{—} 7$; $3 \overset{2}{:} 6 = 9 \overset{2}{:} 18$. Ж 2

Сравним оформление основного свойства пропорции (таблица 4).

В первой книге имеется наиболее развернутое теоретическое доказательство с использованием не только численных примеров, но и букв, во второй –теоретическое доказательство, но в словесном виде, и численный пример, а в третьей книге доказательство умещается в несколько строк и излагается сразу на примере. Кроме того, опять же упоминаются оба типа пропорции.

Таблица 4

Стиль изложения главного свойства пропорции в трех рассматриваемых книгах по арифметике

Аничков Д.С. «Теоретическая и практическая арифметика", 1775, 2-е издание	Иог. Фр. Вейдлер «Арифметика теоретическая и практическая», перевод Аничкова Д.С., 1795, 2-е издание	Шмит Н. «Новейшая арифметика», перевод Барсова А.Д., 1797
ТЕОРЕМА VII. §. 135. *Въ пропорціи Геометрической* A:B = C:D, то есть, 6:3 = 10:5, *произведеніе двухъ крайнихъ членовъ* A×D, то есть, 6×5, *равно произведенію двухъ среднихъ* B×C, то есть, 3×10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положимъ, что въ ней предыдущіе члены даны больше послѣдующихъ. На пр. A > B, и C > D, то есть, 6 > 3, и 10 > 5. Понеже первой членъ A = 6 происходитъ, когда второй B = 3; а третей C = 10, когда четвертой D = 5, на знаменателя содержанія, на пр. E = 2. будутъ умножены (§. 115); того ради будетъ A = B×E, то есть, 6 = 3×2, а C = D×E, то есть 10 = 5×2. И потому въ произведеніи перваго и четвертаго члена будутъ находиться множимыя между собою числа второй и четвертой членъ, и притомъ знаменатель, на пр. A×D = B×D×E, то есть, 6×5 = 3×5×2; а въ произведеніи втораго и третьяго, тѣ же самыя числа, то есть, второй, четвертой и знаменатель, на пр. B×C = B×D×E, то есть, 3×10 = 3×5×2; слѣдовательно оба произведенія должны быть между собою равны (§. 69.). Положимъ, что предыдущіе члены даны меньше послѣдующихъ. На пр. A < B и C < D, то есть, 3 < 6 и 5 < 10. Понеже въ содержаніяхъ Геоме- (78) Геометрическихъ меньшей неравности второй членъ, на пр. B = 6 происходитъ, когда первой A = 3, а четвертой D = 10, когда третей C = 5, на знаменателя содержанія, на пр. E = 2 будутъ умножены (§. 115); того ради будетъ B = A×E, то есть, 6 = 3×2; а D = C×E, то есть, 10 = 5×2. И потому, какъ въ произведеніи перваго на четвертой, такъ и въ произведеніи втораго на третей, будутъ находиться одинакія между собою умножаемыя числа, на пр. A×D = A×C×E, то есть, 3×10 = 3×5×2, также B×C = A×C×E, то есть, 6×5 = 3×5×2; слѣдовательно оба таковыя произведенія должны быть между собою равны (§. 69.). Ч. н. д.	*ТЕОРЕМА VI.* §. 110. *Въ пропорціи Геометрической, состоящей изъ четырехъ чиселъ, произведеніе крайнихъ членовъ, то есть перваго и послѣдняго, равняется произведенію среднихъ, то есть втораго и третьяго.* ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость сего предложенія явствуетъ изъ слѣдующаго: понеже подобные, или одинакіе множители производятъ одинакія произведенія (§. 58.); а въ умноженіи крайнихъ и среднихъ пропорціональныхъ чиселъ находятся одинакіе множители. Ибо четвертой членъ происходитъ изъ умноженія знаменателя на третій членъ (§. 97.): того ради произведеніе изъ перваго и четвертаго происходитъ изъ множителей, перваго, третьяго члена и знаменателя, между собою умноженныхъ. И понеже второй членъ происходитъ изъ умноженія перваго на знаменателя содержанія (§. 97.): то естьли третій членъ умножится на второй, произведеніе изъ того будетъ имѣть множителей подобныхъ первымъ, то есть первой членъ, знаменателя содержанія и третій членъ; слѣдовательно оба произведенія крайнихъ	§ 124. Въ каждой Геометрической пропорціи произведеніе двухъ среднихъ членовъ равно произведенію двухъ крайнихъ членовъ; въ Ариѳметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ. 4 4 3:12=2:8 7—10=3—6 12.2=3.8=24; 10+3=7+6 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Въ Геометрической пропорціи произведеніе среднихъ членовъ 12 и 2 происходитъ отъ умноженія между собою перваго члена 3, знаменателя 4, и третьяго члена 2: и 3. 4. 2. равно произведенію 12. 2, поелику 3. 4. равно 12 — 101 — умноженія тѣхъ же самыхъ трехъ чиселъ, а именно перваго члена 3, третьяго члена 2, и знаменателя 4: ибо 3. 2. 4. равно произведенію 3 8, поелику 2. 4. равно 8ми.

В той же главе А.Д. Барсов упоминает тройное правило, являющееся частным случаем цепного: «Тройное и цепное правило, когда сие последнее состоит из одного только предложения, есть не иное что, как способ находить четвертое геометрически пропорциональное число». В том же абзаце, без оформления в отдельную задачу, разбирается задача на прямую пропорцию с фунтами и рублями, теоретическая формулировка правила и его доказательство отсутствуют.

Интересно, что везде А.Д. Барсов располагает величины одного рода не друг под другом, а крест-накрест (рис. 5).

По цѣпному правилу располагаются сіи числа слѣдующимъ образомъ:
90 ф
5 . ф . . . . 4. р; производитъ 72 р.

Рис. 5. Фрагмент решения задач из книги Н.Шмит «Новейшая арифметика», перевод А.Д. Барсова, 1797

Собственно, использование цепного правила как универсального способа решения задач на геометрические пропорции – одна из важнейших отличительных особенностей учебника, о котором А.Д. Барсов упоминает и в заголовке, и в начале книги (см. выше). Ему посвящена Глава седьмая «О цепном правиле» (С. 112-190): «Помощию цепного правила сыскивается такое число, которое к данному числу содержится так как другое данное к третьему данному числу содержится» (С. 112). В ней же имеется большое количество задач прикладного смысла (в шестой главе таких задач содержится только три штуки, остальные примеры численные), а также появляется обозначение неизвестной величины специальным символом (буква «Д»), что не встречается в учебниках, связанных с именем Д.С. Аничкова (рис. 6).

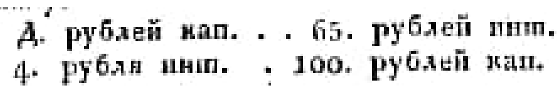

Д. рублей кап. . . 65. рублей инт.
4. рубля инт. . 100. рублей кап.

Рис. 6. Обозначение неизвестной величины специальным символом, книга Н. Шмита «Новейшая арифметика», перевод А.Д. Барсова, 1797

После девяти страниц пояснения цепного правила с задачами-примерами следует раздел «Доказательство на цепное правило», который также содержит в себе задачи, и далее раздел «О расположении членов цепного правила», в котором имеется шесть занумерованных римскими цифрами ПРАВИЛ.

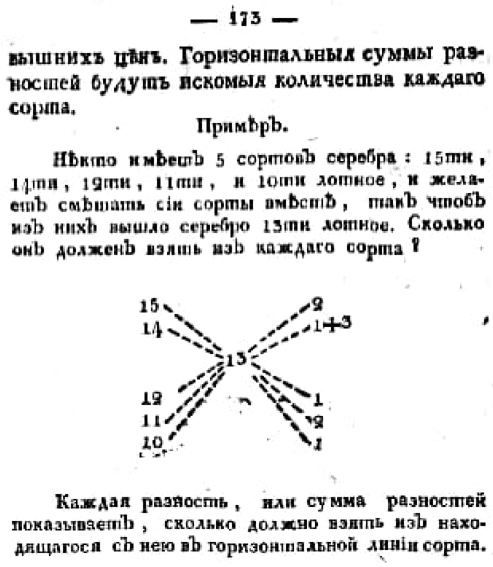
В отличие от двух рассмотренных ранее учебников, где практическое приложение никогда не предваряет теоретическую формулировку, здесь автор может сначала «заинтриговать» читателя практическим вопросом, потом изложить правило, и затем снова вернуться к практической задаче. Например, в IV правиле: «Иногда нельзя определить, которые вещи действуют одна на другую. На пр. сколько весу в 10ти копеечном хлебе, ежели четверик ржи стоит 50 копеек? Здесь искомое число фунтов зависит не только от цены хлеба, но также и от цены ржи. В сем случае, и во всех возможных случаях служит следующее правило…»" (С. 127) Далее идет формулировка правила и разбор решения задачи) Эта особенность прослеживалась и при начальном знакомстве с цепным правилом, когда автор сначала кратко формулировал смысл его использования, затем приводил пример задачи, затем вводил правила оформления, иллюстрировал на тех же задачах, снова переходил к теории и потом продолжал работать с задачами, и т. д. (С. 112-115).

Главу завершает раздел «О выгодах, кои в цепном правиле употребить можно», который начинается словами: «Одно из самых важнейших преимуществ цепного правила перед прочими» (С. 135). Далее идет разбор различных приложений цепного правила. А.Д. Барсов успешно применяет его в различных задачах на пропорции (в т. ч. тех, которые требуют, например, в терминологии учебников, связанных с именем Д.С. Аничкова, пятерного правила), для приведения дробей к общему знаменателю, и т. д.

Как частный случай цепного правила, введено правило интересное в простом и составном вариантах: «способ решить все те задачи, которые предметом своим имеют капитал с интересом» (С. 144). В этом еще раз проявляется коммерческая ориентированность учебника, особенно по сравнению с «Теоретической и практической арифметикой» и «Арифметикой теоретической и практической». Задачи на простое составное правило напоминают задачи на пропорции (например, при известном «интересе», т. е. прибыли от вложения n_1 руб. в m_1 лет, нужно найти прибыль от вложения n_2 руб. в m_2 лет). Задачи на сложное составное правило сейчас называются в современной школьной программе экономическими (например, найти размер вклада по прошествии m лет, если дан исходный размер вклада и годовая ставка).

Продолжая коммерческую тему, автор вводит денежный вычет (рабат, или дисконто) и весовой вычет (тара), и затем рабатное правило – также частный случай цепного правила, позволяющее решать задачи о ситуациях, в которых должнику удается заплатить свой долг прежде срока. Правило временное используется для решения задач, в которых даны конкретные сроки уплаты частей долга, правило меновое – для решения задач на обмен товарами между купцами.

Последние выделенные правила – правило товарищества и правило смешения, с которыми мы уже сталкивались при знакомстве с предыдущими двумя учебниками. В отличие от них, все примеры здесь также опираются на денежные отношения. Методической особенностью этой книги является появление звездчатых схем при иллюстрации правила смешения (рис. 7).



— 173 —

вышнихъ цѣнъ. Горизонтальныя суммы разностей будутъ искомыя количества каждаго сорта.

Примѣръ.

Нѣкто имѣетъ 5 сортовъ серебра: 15ти, 14ти, 12ти, 11ти, и 10ти лотное, и желаетъ смѣшать сіи сорты вмѣстѣ, такъ чтобъ изъ нихъ вышло серебро 13ти лотное. Сколько онъ долженъ взять изъ каждаго сорта?

Каждая разность, или сумма разностей показываетъ, сколько должно взять изъ находящагося съ нею въ горизонтальной линіи сорта.

Рис. 7. Пример задачи на правило смешения из учебника Н. Шмита «Новейшая арифметика», перевод А.Д. Барсова, 1797

Наконец, последний оригинальный раздел «Новейшей арифметики» – «Разные курсовые выкладки, производимые помощию цепного правила, помещенные для занимающихся иностранной торговлею». В них приведены краткие решения задач на покупку и продажу валюты при разных курсах обмена с учетом переводов из одного города в другой и обратно.

Таким образом, тема пропорций и прогрессий, как и остальные темы, освещены в «Новейшей арифметике» с экономической стороны. Кроме того, эта тема изложена не в стиле академического учебника, а в стиле пособия по прикладной деятельности, в которое вставлены необходимые теоретические выкладки. При этом данную тему можно назвать центральной для учебника в силу объема посвященных ей глав и многочисленных акцентов на полезность используемого цепного правила.

Итак, мы ознакомились с тремя учебниками по арифметике, изданными во второй половине XVIII века при Московском университете и ориентированными не на учеников народных училищ, а на более взрослую аудиторию. Первые два – «Теоретическая и практическая арифметика» и «Арифметика теоретическая и практическая» были связаны с именем Д.С. Аничкова– знаменитого математика, философа и педагога. Третий учебник – «Новейшая арифметика» – связан с А.Д. Барсовым, учеником Д.С. Аничкова

Судьба семьи Барсовых, из которой происходил А.Д. Барсов, известна недостаточно. Поскольку один из важнейших трудов А.Д. Барсова связан с занятиями его семьи коммерцией, то, опираясь на работу Т.В. Котовой [22] и другие источники, приведем некоторые сведения из его биографии.

Некоторые сведения из биографии Александра Дмитриевича Барсова

Александр Дмитриевич Барсов (1769-?), будущий математик, родился в городе Ярославле в семье купца 1-й гильдии Дмитрия Александровича Барсова (1730-1798?). Его прадед Кирилл происходил из духовного сословия, а дед Александр Кириллович (1685–1747) выбрал коммерческую деятельность. Некоторое время Александр Кириллович и его сыновья Андрей, Дмитрий и Петр служили у солепромышленников Строгановых. Эта служба могла повлиять на становление Барсовых как купцов: к середине XVIII века Александр Кириллович Барсов стал одним из богатейших купцов Ярославля.

Старший сын Александра Кирилловича Андрей Александрович Барсов (1721-1799) в 1760 и 1770 годах был бургомистром Ярославского магистрата, купцом 1-й гильдии. В 1785 году он был избран городским головой Ярославля и вошел в первый состав шестигласной Думы. Другой сын Александра Кирилловича Дмитрий Александрович Барсов (1730-1798?) в 1777 году был избран первым городским степенным головой Ярославля и также был купцом 1-й гильдии.

Братья Андрей Александрович и Дмитрий Александрович были в одном капитале до 1789 года. Вследствие крайне неудачного состояния дел Дмитрия Александровича, в конце 1780-х-начале 1790-х годов произошло обеднение, а потом к концу 1790-х – полное разорение купцов Барсовых. При это оба брата выбыли в мещане. Неумелое ростовщичество, которым в 1790-е годы пытался заниматься Дмитрий Александрович, не помогло ему расплатиться с собственными кредитами.

Чтобы не платить по долгам, после смерти Дмитрия Александровича его сыновья Александр, Петр и Захарий отказались от наследства, и за неимением капитала также были записаны в мещане. При этом Захарий до своей смерти в 1798 году помогал в делах дяде Андрею Александровичу. Александр и Петр дело отца не продолжили, а «поступили в статскую службу по аттестатам Московского университета и коммерческого училища» соответственно. У Андрея Александровича не было сыновей, поэтому продолжать семейное купеческое дело стало некому.

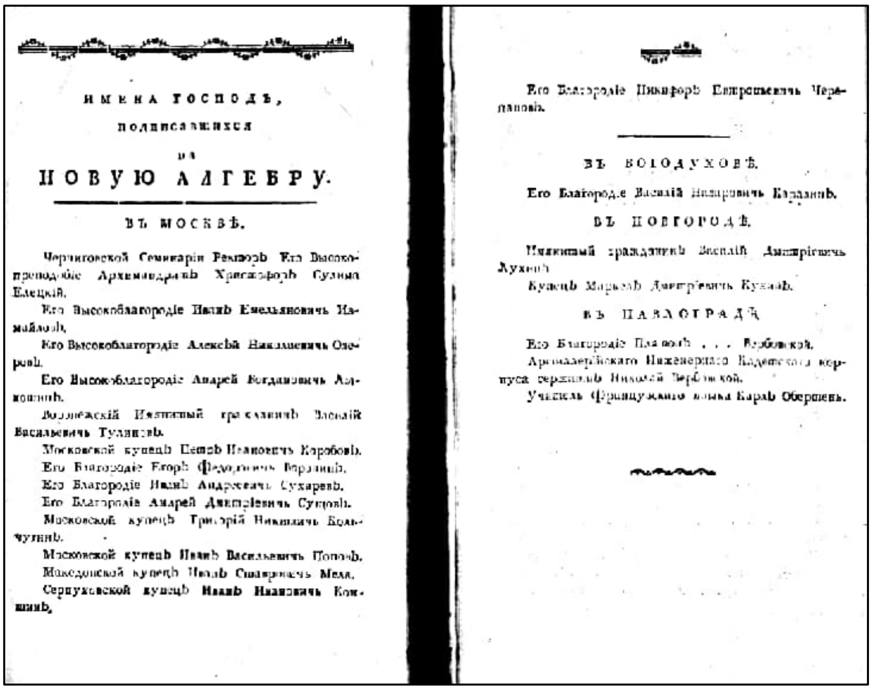
Известно, что до поступления в Московский университет Александр также учился в коммерческом училище в Москве. Императорское коммерческое училище было создано по инициативе Прокофия Демидова при Московском воспитательном доме в 1772 году для бесплатного обучения купеческих детей. Обучение продолжалось с 6 лет до совершеннолетия воспитанников в 21 год. Воспитанников не отпускали домой даже на каникулы, а редкие свидания разрешались только в присутствии воспитателей. Свидетельство об окончании училища получали только те, кто окончил весь курс обучения. Купцы неохотно отдавали своих сыновей на 15-летнее обучение, так как это надолго отрывало детей от семейного дела. Изоляция воспитанников была частью программы, составленной И.И. Бецким. Ее главной идеей было воспитание, а не образование. Альтернативные проекты, исходящие из купеческой среды, не были приняты (например, проект купцов из Архангельска под авторством В.В. Крестинина). Проблемы образования в среде российского купечества XVIII века исследованы в монографии Н.В. Козловой [23].

Изучение иностранных языков было обязательной частью обучения в коммерческом училище. В 1781 году 12-летний Александр Дмитриевич Барсов, вместе с другими учащимися Н. Рубцовым, И. Новиковым, В. Антиповым, перевел трактат Верона де Форбонне «Перевод из энциклопедии о коммерции» (из «Словаря русских писателей XVIII века» С.Н. Травникова [24]).

В 1782 году Александр Дмитриевич, как лучший ученик, был принят на казенное содержание в Московскую университетскую гимназию. Затем он поступил на философский факультет Московского университета, который в 1790 году окончил с золотой медалью и степенью бакалавра. Из Истории Московского университета С.П. Шевырева [25, С. 237], известно, что после смерти профессора Д.С. Аничкова с 1787 года один из его учеников Аршеневский преподавал чистую математику «по Вейдлеру», а другой ученик Барсов – логику и метафизику «по Федорову руководству». Из этого мы заключаем, что А.Д. Барсов начал преподавание ещё до окончания университета (с 18 лет) и был учеником Аничкова Д.С. В 1793 году Александр Дмитриевич защитил на латинском языке диссертацию «О движении небесных тел» и получил ученую степень магистра философии и свободных наук [26].

Кроме преподавания в Университете и занятий математикой, А.Д. Барсов много занимался переводами. Им были переведены книги: с немецкого языка в 1790 году «Геометрия для детей от 8 до 12 лет, желающих навострить свой разум» А.Ф.Э. Якоби, в 1791 году «Представление всеобщей истории» А.Л. Шлецера, в 1794 году «Школа деревенской архитектуры, или наставление как строить прочные домы о многих жильях из одной только земли, или из других обыкновенных и дешевых материалов» Ф. Куантеро. В 1795 году А.Д. Барсов исправил и дополнил 2-ое издание перевода с латинского языка учебника Иог. Фр. Вейдлера «Арифметика», выполненного Д.С. Аничковым

В 1797 году А.Д. Барсов выпустил перевод книги «Новейшая арифметика, заключающаяся в одном цепном правиле, которыя обыкновенно в арифметиках преподаются под особливыми именами» Н. Шмита, написанный «в пользу всех учащихся, а особливо купеческаго юношества», значительно переработав её содержание.



ИМЕНА ГОСПОДЪ,
подписавшихся
на
НОВУЮ АЛГЕБРУ.

ВЪ МОСКВѢ.

Черниговской Семинаріи Ректоръ Его Высокопреподобіе Архимандритъ Христофоръ Сулима Елецкій.
Его Высокоблагородіе Иванъ Емельяновичъ Измайловъ.
Его Высокоблагородіе Алексѣй Николаевичъ Озеровъ.
Его Высокоблагородіе Андрей Богдановичъ [illegible].
[illegible] Именитый гражданинъ Василій Васильевичъ Туляновъ.
Московской купецъ Петръ Ивановичъ Коробовъ.
Его Благородіе Егоръ Федоровичъ [illegible].
Его Благородіе Иванъ Андреевичъ Сухаревъ.
Его Благородіе Андрей Дмитріевичъ Сутовъ.
Московской купецъ Григорій Никитичъ Колчугинъ.
Московской купецъ Иванъ Васильевичъ Поповъ.
Македонской купецъ Иванъ Ставровичъ Мела.
Серпуховской купецъ Иванъ Ивановичъ Коншинъ.

Его Благородіе Никифоръ Петровичъ Черепановъ.

ВЪ БОГОДУХОВѢ.

Его Благородіе Василій Илларіоновичъ Караазинъ.

ВЪ НОВГОРОДѢ.

Именитый гражданинъ Василій Дмитріевичъ Луховъ.
Купецъ Маркелъ Дмитріевичъ Кузнецъ.

ВЪ ПАВЛОГРАДѢ.

Его Благородіе Плацъ . . . Вербовской.
Артиллерійскаго Инженернаго Кадетскаго корпуса сержантъ Николай Вербовской.
Учитель Французкаго языка Карлъ Оберпенъ.

Рис. 8. Список подписчиков учебника «Новая алгебра»

В том же году вышел собственный учебник А.Д. Барсова «Новая алгебра, содержащая не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление» [27]. Оба издания были выпущены «иждивением» его товарищем по Императорскому коммерческому училищу – бухгалтером И.Я. Новиковым «Новейшая арифметика» предназначалась для грамотного и быстрого ведения купеческих расчетов, в частности, в области займов и кредитов. Как нам уже известно, книга не помогла семейному делу Барсовых, ее автор был математик, а не действующий коммерсант. Но она безусловно вызвала интерес купеческого сообщества: среди подписчиков учебника «Новая алгебра» 6 из 20 подписчиков составляли купцы [29]. (рис. 8).

В 1796 году Екатерина II обратилась в Сенат с Указом о необходимости учреждения цензуры «в прекращение разных неудобств, которыя встречаются от свободного и неограниченнаго печатания книг». В 1797 году Павел I подчинил новоучрежденную цензуру 3-му Департаменту Сената и определил ее штаты. По согласованию с куратором Московского университета И.И. Шуваловым. Сенат назначил для цензуры в Москве профессора Антона Прокоповича-Антонского, а для цензуры в Радзивиловскую таможню, находившуюся в Кременецком уезде Волынской губернии, магистра Александра Барсова, с назначением им жалования по 1000 рублей в год (С.П. Шевырев [28, С. 286]).

При этом из «Сборника постановлений и распоряжений по цензуре с 1720 по 1862 год» [29, С.52] мы узнаем, что цензура в Радзивиловской таможне была открыта только в 1799 году. Назначение в данную таможню было и выгодным, и почётным.

Но с 1797 года сведения об А.Д. Барсове отсутствуют. С этого года он не числится в Московском университете (с 1 ноября), а в таможне он также служить не мог, так как должность еще не была открыта. На эти же годы приходится смерть отца и отказ от наследства. Причина исчезновения А.Д. Барсова неизвестна. Его судьба после этих событий является предметом дальнейшего поиска.

Недоказанным является родство Барсова Александра Дмитриевича с профессором Московского университета Барсовым Антоном Алексеевичем (1730–1791), хотя в некоторых справочных изданиях он назван племянником Антона Алексеевича. Имя известного родоначальника семьи Кирилла в обеих семьях Барсовых было в то время распространенным; его происхождение в обеих семьях – из духовных – также не является доказательством: духовное сословие было одним из самых образованных. Например, треть первых профессоров Московского университета имела духовное происхождение, из духовных учебных заведений набирались и студенты учительских семинарий. Город Ярославль находится недалеко от Москвы, и переезды в него и обратно были обычным явлением. В биографии предков Антона Алексеевича упоминается только Ярославль и Москва, а у Александра Дмитриевича – Мценск, Ярославль и Москва. В ярославских архивах [30] братьями Александра Кирилловича названы Иван Кириллович и Сергей Кириллович. А в источниках об Алексее Кирилловиче, отце Антона Алексеевича, его братом назван поп Степан Кириллов ([31, с. 436]). Все известные к настоящему времени материалы представлены в статье Н.В. Каревой, Е.Г. Пивоварова [32], посвященной его сыну Алексею Степановичу Барсову (1718–1763) и издательской деятельности Академии наук в Санкт-Петербурге.

Косвенным подтверждением родства [33] является факт продажи в 1790 году женой Д.А.Барсова, отца математика А.Д. Барсова, ее дома с земельным участком в Твери «коллежскому советнику и кавалеру Антону Барсову». Чин коллежского советника, дававший право на потомственное дворянство, был присвоен Барсову Антону Алексеевичу в 1775 году [34], поэтому, не исключено, что дом был продан близкому родственнику во время трудного положения семьи Барсовых.

Заключение

В данной статье выполнено сравнение учебников по арифметике второй половины XVIII века, изданных при Московском университете и связанных с именами знаменитого педагога и ученого Д.С. Аничкова и его ученика А.Д. Барсова. Рассмотренные нами книги: «Теоретическая и практическая арифметика» Д.С. Аничкова, «Арифметика теоретическая и практическая» Иог. Фр. Вейдлера в переводе Д.С.Аничкова, «Новейшая арифметика» Н.Шмита в переводе А.Д. Барсова

Учебники, связанные с именем Д.С. Аничкова, отличаются большей строгостью, формализованностью и структурированностью. Учебник, связанный с именем

А.Д. Барсова «Новейшая арифметика», напротив, напоминает прикладной курс, в который вставлены необходимые фрагменты теории. Она наполнена примерами из области коммерции и имеет дополнительные по отношению к «Теоретической и практической арифметике» и «Практической и теоретической арифметике» экономические разделы. В учебниках Д.С. Аничкова теоретический материал преобладает над практическим.

У А.Д. Барсова ярче выражен параллелизм в изложении, а в оформлении решения задач неизвестное обозначено специальным символом Д, что очень удобно при современном прочтении. Напротив, современному читателю может показаться менее удобным перекрестное расположение одноименных величин в пропорциях.

В «Новейшей арифметике» приведен обширный материал по использованию так называемого цепного правила, как универсального (его частным случаем является тройное правило). Эта книга предназначалась, в основном, для «купеческаго юношества», а учебники, связанные с именем Д.С. Аничкова, были ориентированы на более широкую аудиторию.

«Арифметика теоретическая и практическая» Иог. Фр. Вейдлера в переводе Д.С. Аничкова могла быть привлекательна для читателей, желающих получить более краткую информацию.

Наиболее академическим учебником по арифметике можно считать «Теоретическую и практическую арифметику» Д.С. Аничкова, а наиболее «народным» и экономически-ориентированным – «Новейшую арифметику» Н. Шмита в переводе А.Д. Барсова

Выпущенные с участием А.Д. Барсова книги были востребованы, особенно в том сословии, где он не состоялся – в купеческом, и дополнили набор учебников по арифметике того времени, ориентированных на разную аудиторию и разные цели обучения.

Изучение опыта педагогов прошлого, составлявших учебники и решавших при этом созвучные современным целям методические задачи, может быть полезным при написании современных учебных книг.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая арифметика: В пользу и употребление юношества, / Собранная из разных авторов магистром Дмитрием Аничковым. – М.: Печ. при Имп. Моск. ун-те, 1764. – 271 с.
2. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая арифметика: В пользу и употребление юношества, / Собранная из разных авторов и вновь дополненная профессором экстраординарным и обеих гимназий инспектором Дмитрием Аничковым. – [2-е изд.]. – М.: Печатана при Императорском Московском университете, 1775. – 328 с.
3. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая арифметика: В пользу и употребление юношества, / Собранная из разных авторов, вновь дополненная и исправленная надворным советником, Имп. Московскаго университета публичным ординарным профессором и обеих онаго гимназий инспектором Дмитрием Аничковым. – 3-е изд. – М.: Тип. Комп. типографич., 1786. – 392 с.
4. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая арифметика: В пользу и употребление юношества, / Собранная из разных авторов, вновь дополненная и исправленная надворным советником, Императорскаго Московскаго университета публичным ординарным профессором и обеих онаго гимназий инспектором Дмитрием Аничковым. - 4-е изд. - М.: Тип. при Театре, у Клаудия, 1793. – 444 с.
5. Иог. Фридерик Вейдлер. Арифметика теоретическая и практическая. / Переведенная с латинскаго языка магистром Дмитрием Аничковым. - М.: Печатана при Императорском Московском университете, 1765. – 103 с.
6. Иог. Фридерик Вейдлер. Арифметика. / Переведенная с латинскаго языка магистром Дмитрием Аничковым; Исправленная и дополненная магистром Александром Барсовым. – М.: В Университетской типографии, у Хр. Ридигера и Хр. Клаудия, 1795. – 134 с.
7. Шмит Н. Новейшая арифметика: Заключающая в одном цепном правиле большую часть тех правил, которыя обыкновенно в арифметиках преподаются под особливыми именами: С показаниями самых кратчайших средств к решению разных задачь. / Сочиненная Н. Шмитом; Которую в пользу

всех учащихся, а особливо купеческаго юношества, с немецкаго перевел, удобнейшим порядком расположил, и нужными прибавлениями дополнил, при Имп. Московском университете, философии и свободных наук магистр Александр Барсов.; Иждивением И. Новикова. - М.: В типографии Селивановскаго и товарища, 1797. – 190 с.
8. Аничков Д.С. Указ. Соч. (1.)
9. Аничков Д.С. Указ. Соч. (2.)
10. Вейдлер И.Ф. Указ. Соч. (6.)
11. Аничков Д.С. Указ. Соч. (1.)
12. Шмит Н. Указ. Соч. (7.)
13. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая геометрия: В пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии, / Из разных авторов собранная с приобщением гравированных фигур на тритцати семи таблицах, Имп. Московскаго университета публичным ординарным профессором, обеих онаго гимназий инспектором и Московскаго Российскаго собрания при том же Университете членом, Дмитрием Аничковым. – М.: Унив. тип., у Н. Новикова, 1780. – 366 с.
14. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая тригонометрия: В пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии, / Из разных авторов собранная с приобщением гравированных фигур на двенатцати таблицах, Императорскаго Московскаго университета публичным ординарным профессором и Московскаго Российскаго собрания при том же Университете членом, Дмитрием Аничковым. – М.: Печатана в Университетской типографии у Н. Новикова, 1780. – 123 с.
15. Аничков Д.С. Теоретическая и практическая тригонометрия: В пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии, / Из разных авторов собранная и вновь исправленная с приобщением таблиц, синусов и тангенсов, такожъ логарифмов их и простых чисел, начиная от 1 до 10000, и притом гравированных фигур на двенатцати таблицах, Дмитрием Аничковым, надворным советником, Императорскаго Московскаго университета публичным ординарным профессором и обеих онаго гимназий инспектором. – Издание второе – М.: В типографии Компании типографической, 1787. – 80, 65-240, 239-346 с.
16. Шмит Н. Указ. Соч. (7.)
17. Шмит Н. Указ. Соч. (7.)
18. Барсов А.Д. Новая алгебра: Содержащая в себе не только простую аналитику; но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, / Которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при императорском Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов; Иждивением бухгалтера И. Новикова. – М.: В Университетской типографии у Ридигера и Клаудия, 1797. – VIII, [2], 196, [2] с.
19. Аничков Д.С. Указ. Соч. (2.)
20. Вейдлер И.Ф. Указ. Соч. (6.)
21. Шмит Н. Указ. Соч. (7.)
22. Котова Т.В. Из истории городского управления Ярославля (1785-1918 вв.). – [Электронный ресурс]. - URL: www.yararchive.ru/elib/книги/Из истории городского управления Ярославля/01-barsovaa.pdf?ysclid=m1gqdxjzbl687180480 (дата обращения: 30.09.2024).
23. Козлова Н.В. Российский абсолютизм и купечество в XVIII веке: (20-е – начало 60-х гг.) / Н. В. Козлова; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. Ист. фак., Рос. гос. архив древ. актов. – М.: Археогр. Центр, 1999. – 381 с.
24. Травников С.Н. Словарь русских писателей XVIII века. Вып. 1. –Л.: Институт русской литературы (Пушкинский Дом) РАН, 1988.
25. Шевырев С.П. История Императорского Московского университета, написанная к столетнему его юбилею ординарным профессором русской словесности и педагогики Степаном Шевыревым: 1755-1855. – 584 с.
26. Травников С.Н. Указ. Соч. (24.)
27. Барсов А.Д. Указ. Соч. (18.)
28. Шевырев С.П. Указ. Соч. (25.)
29. Сборник постановлений и распоряжений по цензуре с 1720 по 1862 год: Сборник постановлений и распоряжений по цензуре с тысячи семьсот двадцатого по тысяче восемьсот шестьдесят второй год: напечатан по распоряжению Министерства народнаго просвещения. – Санкт-Петербург: в Тип. Морскаго министерства, 1862. – 482 с.
30. Котова Т.В. Указ. Соч. (22.)
31. Чистович И.А. Феофан Прокопович и его время / [Соч.] И. Чистовича. – Санкт-Петербург: тип. Имп. Акад. наук, 1868. – [2], X, 752 с.: 23 – (Сборник статей, читанных в Отделении русского языка и словесности Академии наук).

32. Карева Н.В., Пивоваров Е.Г. А.С. Барсов и академическое книгоиздание XVIII века // Библиотековедение. – 2019. – Т. 68. – №. 6. -- С. 614-626.
33. Котова Т.В. Указ. Соч. (22.)
34. Травников С.Н. Указ. Соч. (24.)

***Inga V. Ptitsyna*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru
***Olga N. Bakhtiyarova*,**
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
olga-bakh06@mail.ru
***Elena V. Ptitsyna**,*
Master of the Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Moscow
elena-pt@yandex.ru

Specialization of textbooks on arithmetic in the second half of the XVIII century on the example of textbooks by Anichkov D.S. and Barsov A.D.

Abstract. The relevance of the problem under study is due to the discussed issue of the content of mathematical courses for various fields of study and the organization of practical training. The purpose of the article is to show the differences between the structure and style of educational mathematical manuals for in-depth and applied study of mathematics using the example of comparing textbooks on arithmetic by A.D. Barsov (1769-?) and D.S. Anichkov (1733-1788), published at Moscow University in the 2nd half of the XVIII century. The materials of the article may be useful to historians of education and science, as well as teachers of higher education.

Keywords: Barsov Alexander Dmitrievich, Anichkov Dmitry Sergeevich, arithmetic, history of mathematics, history of education, commercial education.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПРОЦЕССА СОСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО СТЕНДА ДЛЯ КВАДРОКОПТЕРОВ

Аннотация

В статье представлены отдельные особенности методики преподавания процессом проведения составления математической модели испытательного гироскопического стенда для квадрокоптеров, что актуально при обучении и работе со студентами инженерных и технических специальностей. Целью работы являлось формирование алгоритма эффективного взаимодействия руководителя со студентом в рамках обозначенного проекта. В статье представлен план проведения научной работы, приведены основные принципы составления математической модели испытательного стенда, рассмотрены задачи, которые могут быть решены с помощью системы стенд-квадрокоптер.

Ключевые слова

методика преподавания, математическое моделирование, квадрокоптер, гироскопический стенд, теория управления

АВТОРЫ

Ряхимов Ринат Равильевич,
студент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»; техник ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН», г. Москва
ryakhimov.rinat@gmail.com

Кустов Аркадий Юрьевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»; старший научный сотрудник
ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН», г. Москва
arkadiykustov@yandex.ru

Введение

Взаимодействие со студентами и аспирантами технических специальностей недопустимо без предоставления им возможности совершения самостоятельной работы – как заключающейся в анализе известных работ, так и связанной с решением соответствующих задач. В рамках проекта, частично освещенного в статье, студент-соавтор данной работы продолжил свою деятельность в области теории автоматического управления (ТАУ): на предыдущем этапе была построена простая модель беспилотника (БПЛА), на данном этапе – решается задача составления математической модели трехосного гироскопического испытательного стенда и моделирования поведения системы стенд-БПЛА при некотором воздействии. Причиной выбора является широкое применение БПЛА во многих сферах: они выполняют такие транспортные функции как перевозка различных грузов, функции фото- и видеосъемки, навигационные и многие другие функции, причем сферы их применения только растут. Особенности устройства квадрокоптера, связанные с наличием нескольких тяговых двигателей, и необходимость постоянной стабилизации аппарата в пространстве предъявляют существенные требования к работе систем управления. Перед использованием БПЛА в полевых условиях, разработчик должен подвергнуть его действию нагрузок, сопоставимых или превышающих нагрузки в реальных условиях. На стадии моделирования и эксперимента выделяются наиболее важные свойства БПЛА, зачастую абстрагируясь от его несущественных характеристик, и использование для этих целей испытательных стендов позволяет установить связь между теоретическими представлениями об особенностях движения БПЛА и его реальным поведением, провести идентификацию, настройку и проверку всех его систем. В более сложных подходах учитывают более тонкую конфигурацию роторов, вплоть до возможности их отказа (можно посоветовать работу Мочиды и др. [1]). Симбиоз аппарата математического моделирования и проведения реальных экспериментов на испытательном стенде эффективен не только с точки зрения затрат на этапе разработки, но и с точки зрения безопасности проводимых в дальнейшем исследований. В данной статье в части технических обобщений были освещены некоторые особенности, связанные с разработкой трехосного гироскопического стенда для испытаний квадрокоптеров. В заключении представлено описание результатов, полученных при рассмотрении поставленной задачи анализа, а также алгоритм, отражающий основные шаги взаимодействия студента, выполнявшего данную работу, с преподавателем.

Методология и результаты исследования

Математическое моделирование предполагает изучение объекта посредством составления математических моделей, отражающих в виде точных математических формул те или иные закономерности, наблюдаемые в оригинале, и их дальнейшего изучения. Решение любой задачи управления начинается с составления математической модели объекта управления. После понимания общей идеи управления БПЛА, студент должен приступить к непосредственному выполнению одного из основных этапов – собственно составлению математической модели исследуемого процесса в рамках сделанных предположений.

Приведем кратко результаты, полученные на предыдущем этапе работы. При составлении математической модели движения БПЛА как твердого тела в пространстве вводятся две системы координат (СК): инерциальную и неинерциальную (рис. 1.) Немаловажную роль играют вводимые предположения: центр неинерциальной системы координат совпадает с центром масс; оси неинерциальной системы координат направлены вдоль главных осей инерции.

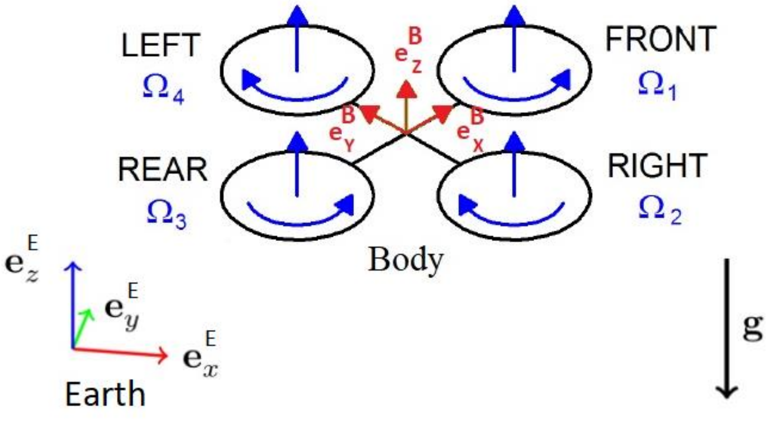


Рис. 1. Введенные системы координат

Обычно составление математической модели объекта управления разбивается на три части: механическую, кинематическую и динамическую, и на каждом этапе происходит учет соответствующих физических закономерностей.

Является крайне желательным образование у студента широкой степени понимания вопроса, т.е. каждой отдельной части задачи должно быть посвящено достаточное количество времени, а работа, выполненная на каждом из этапов, сопровождаться некоторыми пояснениями как самого процесса решения, так и его места в работе в целом.

На первом этапе была выбрана степень приближения звеньев БПЛА их алгебро-геометрическим аналогом: цилиндрами, сферами, конусами и т.д. (рис. 2), после чего производится вычисление напрямую требуемых характеристик (масса, размеры и пр.).

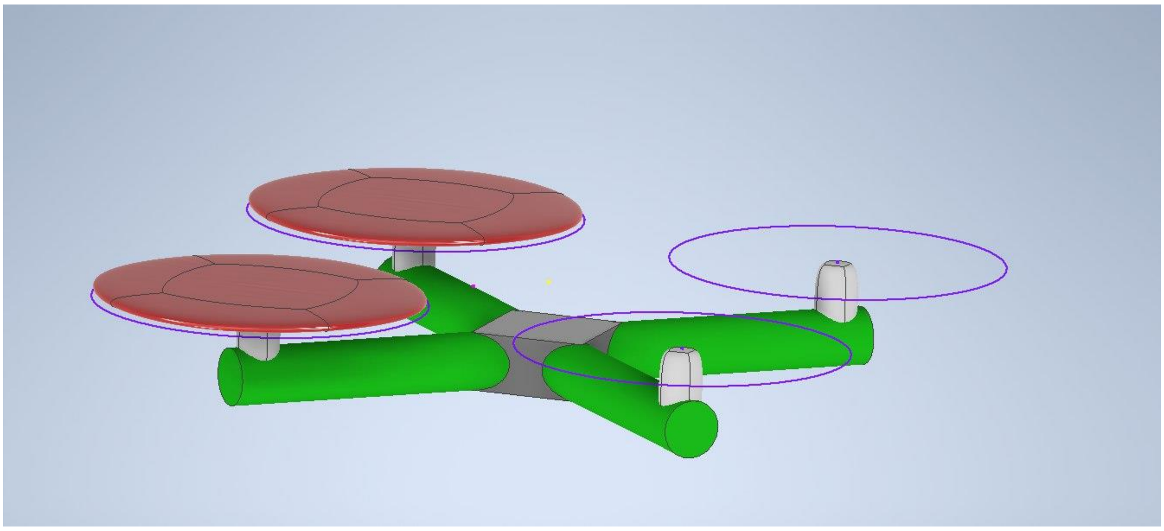


Рис. 2. Упрощенная механическая модель БПЛА

Для рассматриваемого объекта оси связанной системы координат сонаправлены главным осям инерции. В силу высокой симметричности модели, матрицу тензора инерции в выбранной неинерциальной системе координат будем считать диагональной:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Для центральной коробки, несущей бортовую аппаратуру, и аккумулятора составляющие моменты инерции вычисляются по следующим соотношениям:

$$\begin{cases} J_{XX}^{(1,2)} = M\left(\frac{W^2}{12} + \frac{H^2}{12} + D^2\right) \\ J_{YY}^{(1,2)} = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{H^2}{12} + D^2\right) \\ J_{ZZ}^{(1,2)} = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{W^2}{12}\right) \end{cases} \tag{2}$$

где M - масса звена, W - ширина, L - длина, H - высота, D - расстояние от ЦМ звена до плоскости Ox_by_b. Для одного луча БПЛА или одного двигателя, принятого за цилиндр с равномерно распределенной плотностью соответствующие элементы матрицы тензора инерции равны

$$\begin{cases} J_{XX}^{(3,4)} = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + D^2\right) \\ J_{YY}^{(3,4)} = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + L^2 + D^2\right) \\ J_{ZZ}^{(3,4)} = M\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right) \end{cases} \quad (3)$$

где M – масса цилиндра, R – радиус, H – высота, D – расстояние от ЦМ звена до плоскости Ox_by_b , L – расстояние от ЦМ звена до оси Oz_b. Для одного винта БПЛА, принимающегося при вращении за плоский цилиндр с переменной плотностью значения инерций, вычисляются так:

$$\begin{cases} J_{XX}^{(5)} = M\left(\frac{R^2}{6} + \frac{H^2}{12} + D^2\right) \\ J_{YY}^{(5)} = M\left(\frac{R^2}{6} + \frac{H^2}{12} + L^2 + D^2\right) \\ J_{ZZ}^{(5)} = M\left(\frac{R^2}{3} + L^2\right) \end{cases} \quad (4)$$

где M – масса цилиндра, R – радиус, H – высота, D – расстояние от ЦМ звена до плоскости Ox_by_b, L – расстояние от ЦМ звена до оси Oz_b. Таким образом, матрица тензора инерции тела будет представлять собой сумму матриц тензоров инерций каждого его звена.

Рис. 3. Испытательный гироскопический стенд

Работа на первом этапе сопровождалась как изучением студентом литературы по данному вопросу, так и непосредственной практической работой с БПЛА (в данном случае заключающейся в проведении замеров длин, масс и т.д.), в ходе чего у студента развивалось всестороннее – теоретическое и практическое – понимание вопроса.

Перед вторым этапом студенту предлагается ознакомиться с информационной выкладкой сборки испытательного стенда. К началу выполнения данного этапа он должен осознавать значимость создания испытательных условий для робототехнических систем, понимать возможность дальнейшего перехода от испытаний на гироскопическом стенде к свободным испытаниям как с точки зрения математического моделирования, так и работы с реальными объектами. Для составления простейшей модели гироскопического испытательного стенда (рис. 3) необходимо знать матрицы инерции соответствующих звеньев и систем звеньев как функций от текущих углов их ориентации в пространстве. В данной работе использовался, по всей видимости, наиболее простой, но и более грубый способ нахождения значений нужных величин. А именно, каждое звено было приближено своим идеальным аналогом из следующих пояснений. Несущая рама, состоящая из основания и П-образной опоры, считалась имеющей бесконечные массу и моменты инерции относительно всех осей (такое предположение допустимо при использовании вместе со стендом не слишком мощных квадрокоптеров, не рассчитанных для поднятия тяжестей и неспособных повлиять на положение стенда). Внешние и внутренние восьмиугольные обручи с нетривиальным профилем сечения были приближены кольцами сплошного круглого сечения. Стержень-платформа для крепления квадрокоптера описывалась цилиндром сплошного кругового сечения. Наконец, для самого квадрокоптера ранее были найдена матрица тензора инерции относительно осей связанной с ним системы координат.

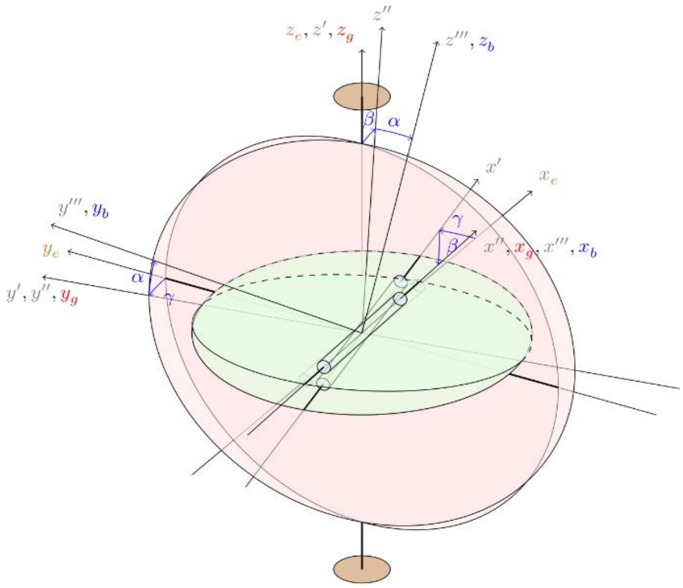


Рис. 4. Схематичное изображение гироскопического стенда вместе с используемыми системами координат

После описания механической составляющей, опираясь на знания студента по курсу теоретической механики и дифференциальных уравнений, ему предлагается составить систему уравнений, описывающую вращательное движение квадрокоптера на гироскопическом испытательном стенде. После использования формулы для момента инерции тела относительно оси, заданной направляющими косинусами, и применения теоремы Штейнера-Гюйгенса для определения значений моментов инерции относительно стендовой подвижной системы координат, получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \dfrac{M_{bx}+0.3S_\alpha C_\beta-0,0035\dot{\alpha}}{0.02}, \\ \ddot{\beta} = \dfrac{M_{by}C_\alpha-M_{bz}S_\alpha+0.3C_\alpha S_\beta-0,0035\dot{\beta}}{0.345+0.03C_\alpha^2+0.02S_\alpha^2}, \\ \ddot{\gamma} = \dfrac{M_{by}S_\alpha+M_{bz}C_\alpha-0,0035\dot{\gamma}}{0.43+0.65C_\beta^2+0.33S_\beta^2+\left(0.03S_\alpha^2+0.02C_\alpha^2\right)C_\beta^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где α, β, γ – углы поворота вокруг своих осей, заданных расположением пар подшипниковых шарниров, соответственно стержня, внутреннего и внешнего обручей, а

S_α и C_α обозначают, соответственно синус и косинус нужного угла (см. рис. 4). В системе (1) M_{bx}, M_{by}, M_{bz} - моменты суммарных сил, развиваемых винтами квадрокоптера, относительно осей связанной с ним системы координат, которая при установке квадрокоптера на испытательный стенд устроена следующим образом: ось Ох коллинеарна оси вращения стержня-платформы и всегда сонаправлена с последней; ось Оу компланарна плоскости внутреннего обруча и в начальный момент времени сонаправлена с осью его вращения; ось Oz выбрана так, чтобы образовывать с двумя предыдущими осями правую тройку, и в начальный момент времени направлена вверх, т.е. в направлении оси вращения внешнего обруча. При выводе модели предполагалось, что вращение вокруг одной из осей системы непосредственно не сказывается на вращении вокруг других осей (что может иметь место, например, при неточной установке шарниров), а из сил сопротивления учтены только силы трения шарниров (такие силы, как силы аэродинамического сопротивления, а также аэродинамические эффекты винтов при составлении данной модели учтены не были – см. Г.М. Хоффмана и др., [2]).

Система (1) с сохранением приемлемой точности допускает упрощение до системы

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{M_{bx}+0.3S_\alpha C_\beta-0,0035\dot{\alpha}}{0.02}, \\ \ddot{\beta} = \frac{M_{by}C_\alpha-M_{bz}S_\alpha+0.3C_\alpha S_\beta-0,0035\dot{\beta}}{0.37}, \\ \ddot{\gamma} = \frac{M_{by}S_\alpha+M_{bz}C_\alpha-0,0035\dot{\gamma}}{0.43+0.675C_\beta^2+0.33S_\beta^2}, \end{cases} \tag{2}$$

где произведено усреднение в знаменателях правых частей второго и третьего уравнений по углу α. Аналогичное усреднение по углу β в знаменателе правой части третьего уравнения невозможно ввиду величины коэффициентов перед соответствующими тригонометрическими функциями.

Тем не менее, если в качестве задания для синтеза регуляторов выступает обеспечение стабилизации в окрестности заданных (для простоты - нулевых) угловых положений, т.е. стабилизация неустойчивого положения $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)$, то система (2) может быть упрощена до системы

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = 15\alpha - 0,175\dot{\alpha} + 50M_{bx}, \\ \ddot{\beta} = 0.81\beta - 0,01\dot{\beta} + 2.7M_{by} - 2.7\alpha M_{bz}, \\ \ddot{\gamma} = -0,0032\dot{\gamma} + 0.905\alpha M_{by} + 0.905M_{bz}. \end{cases} \tag{3}$$

При введении обозначения $q = \left(\alpha,\dot{\alpha},\beta,\dot{\beta},\gamma,\dot{\gamma}\right)^T$ нетрудно убедиться, что система (3) есть билинейная система вида

$$\dot{q} = Aq + B(q)u \tag{4}$$

с нелинейностью, заданной произведением линейной по угловым переменным матрицы $B(q)$ на вектор управлений $u = \left(M_{bx}, M_{by}, M_{bz}\right)^T$.

Наконец, самая простая система, моделирующая поведение квадрокоптера в верхнем неустойчивом положении на гироскопическом стенде, задана линейной системой, полученной из (4) путем отбрасывания из нее нелинейных слагаемых. На данном моменте важно добиться понимания студентом предполагаемого допущения, так как полученная таким образом система может моделировать лишь с некоторой точностью поведение квадрокоптера в окрестности рассматриваемого положения только при отсутствии внешних возмущений, способных за короткое время (примерно в несколько тактов, если говорить о дискретном варианте этой системы) вывести состояние из окрестности нуля вопреки действующим управлениям. Эта линейная система имеет вид

$$\dot{q} = Aq + Bu, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -0.175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0032 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.905 \end{bmatrix}.$$

На заключительном этапе студенту можно предложить провести моделирование полета БПЛА в соответствии с полученной системой (3) для демонстрации количественных характеристик динамических процессов, связанных с математической моделью гироскопического стенда, в контексте двух задач управления. Первая - для системы (1) - будет заключаться в синтезе управления, реализующего программную траекторию, заданную явно системой функций времени $t \in [0; 20)$: $\alpha(t) = \frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$, $\beta(t) = \frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)$, $\gamma(t) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$. Вторая - для системы (5) с начальными условиями $q(0) = (0.1, 0, 0.1, 0, 0.1, 0)^T$ - будет заключаться в синтезе LQR-регулятора как в статье М.В. Хлебникова и др. [3], оптимального в смысле функционала качества

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (q^T R q + u^T Q u) dt$$

с матрицами $R = I_3$ и $Q = 10 \cdot I_3$. Результаты решений задач представлены на рис. 5 и 6 соответственно. Среди других задач, которые могут быть решены для квадрокоптеров, можно привести в пример синтез ПИД-регуляторов, синтез регуляторов, подавляющих случайные внешние возмущения, или задачи идентификации и оценивания наподобие рассмотренных у Т. Бресциани в [4]. Для билинейной системы (4) также можно поставить задачу синтезу оптимального управления по аналогию со статьей [5] М.В. Хлебникова.

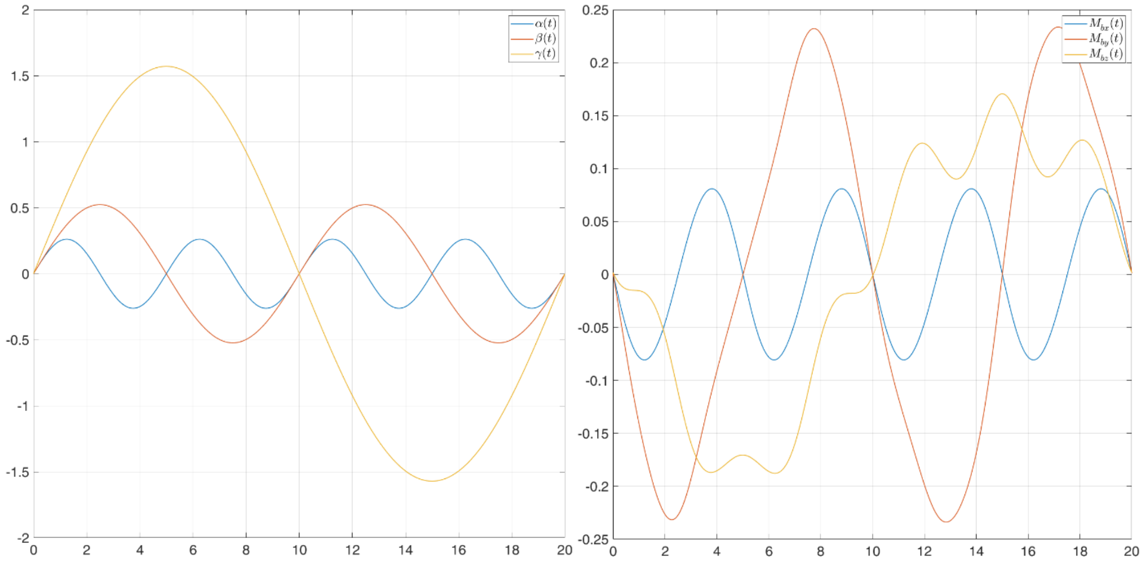


Рис. 5. Программные траектории (слева) и управления (справа) для системы (4).

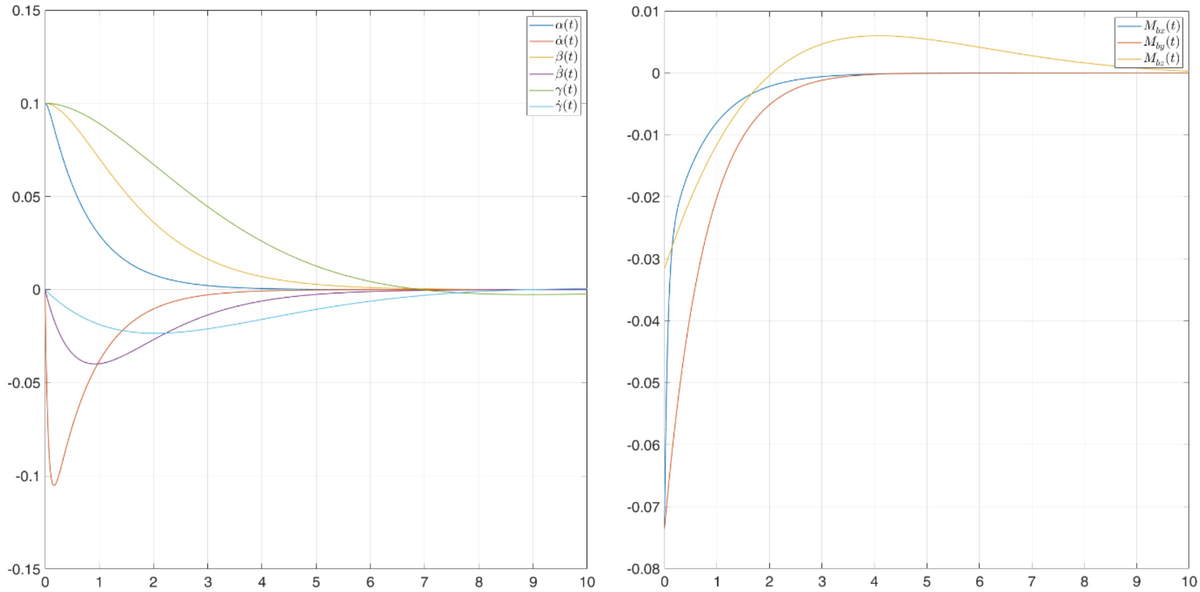


Рис. 6. Графики траекторий (слева) и управлений (справа) для системы (8) в задаче синтеза LQR-регулятора

Данная работа может быть использована как наглядное пособие проведения работ студентом четвертого курса по предмету теория автоматического управления и математическое моделирование.

Заключение

В работе была рассмотрена математическая модель трехосного испытательного гироскопического стенда для квадрокоптеров. Было проведено математическое моделирование решения двух задач: синтеза управления для реализации периодической траектории и стабилизации в окрестности нуля с приведенным критерием качества. Работа выполнялась с целью привития студенту инженерных и технических специальностей основных навыков, необходимых для постепенного выхода на работу с реальным объектом. По ходу выполнения работы отдельные ее этапы были описаны с точки зрения методологии преподавания.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Mochida, S., Matsuda, R., Ibuki, T., Sampei, M. Development and Fesign Optimization of 2Y Hexarotor with Robustness against Rotor Failure, IFAC-PapersOnLine. – Vol.56, Is.2. – 2023. – P. 9294-9299.
2. Hoffmann, G.M., Huang, H., Waslander, S.L., Tomlin, C.J. Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. - 2007. - P. 20.
3. Хлебников М.В., Щербаков П.С., Честнов В.Н. Задача линейно-квадратичного управления: новое решение. Автоматика и телемеханика. - №12. - 2015 г. - С. 15.
4. Bresciani, T. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. MSc Theses. - 2008. - P. 184.
5. Хлебников, М.В. Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: II. Задача синтеза. Автоматика и телемеханика. - №8. - 2019. - С. 1390-1402.

Rinat R. Ryakhimov,
student of the Bauman Moscow State Technical University; technician of the V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow
ryakhimov.rinat@gmail.com
Arkadiy Yu. Kustov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor Bauman Moscow State Technical University; Senior Researcher of the V.A. Trapeznikov Institute of Management Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow

arkadiykustov@yandex.ru

Methodology for teaching the process of conducting a mathematical model of a gyroscopic test platform for quadcopters

Abstract. In this paper, certain aspects of the methodology for teaching the process of conducting a mathematical model of a gyroscopic test stand for quadcopters are presented. This topic is particularly relevant when working with students in engineering and technical disciplines. The objectives of this work include the formation of an effective interaction algorithm between the supervisor and the student. The paper presents a plan for conducting scientific research. Basic principles used to derive the corresponding equations are listed. Some examples are shown to demonstrate quantitative performance of the system stand plus quadrotor.

Keywords: education methodology, mathematical modelling, quadcopter, gyroscopic stand, control theory.

ОБЗОР ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Аннотация

В настоящее время дистанционное обучение стало реальностью и будущим образования. В связи с санкциями многие иностранные компании уходят с российского рынка, Роскомнадзор рекомендовал искать другие заменяющие платформы для проведения дистанционных занятий. Цель статьи - проанализировать отечественные программные продукты «ВКУРСЕ» и МТС Линк для проведения дистанционных занятий, выявить достоинства и недостатки. Поделиться опытом проведения онлайн консультации перед рубежным контролем для студентов МГТУ. Занятия в дистанционном формате с использованием программного обеспечения российского производства проведено впервые. В статье проанализирован средний балл за рубежный контроль в группе, где было проведено онлайн занятие и в группе, где занятие не проводилось.

Ключевые слова

дистанционное обучение, программа, разработчики, спикер, геймификация, квизы, майнд-карты

АВТОРЫ

Скосарева Екатерина Петровна,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»; старший преподаватель
НОЧУ ВО «Московский финансово-промышленный университет «Синергия»,
г. Москва
ekaterina-skosareva@rambler.ru

Введение

Дистанционное обучение уходит своими корня в Европу в середину 19 века. Лондонский университет первым сделал шаги в обучении на расстоянии, используя почтовые рассылки. Студенты по почте получали задания, если возникали вопросы, переписывались с преподавателем, экзамен также сдавали по почте.

В России о дистанционном обучении заговорили только после 1917 после окончания революции. К концу 60-х гг. было создано 11 открытых университетов. Схема обучения была похожа на заочное обучение, чем на дистанционное обучение.

Дистанционное обучение — это самостоятельная форма обучения, информационные технологии в дистанционном обучении являются ведущим средством. Согласно, Е.С. Полат: «Под дистанционными образовательными технологиями понимаются образовательные технологии, реализуемые в основном с применением средств информатизации и телекоммуникации» [1, с. 12].

В наши дни всемирное развитие интернета, компьютерных технологий сделало дистанционное обучение более привлекательным. В 2020 во время пандемии COVID-19 привело к невозможности посещения занятий, и дистанционное обучение стало выходом из сложившийся ситуации. Школы, колледжи, вузы перешли на дистанционное обучение с помощью зарубежных платформ, таких как Zoom, Cisco Webex, Google

Classroom, Microsoft Teams, D2L и Edgenuity, Skype. На тот момент российских аналогов не было, и возможность была в использовании только зарубежного программного продукта. Роскомнадзор рекомендовал искать аналоги среди отечественного программного обеспечения, в области дистанционного образования, так как в связи с санкциями иностранные ит-компании уходят с российского рынка.

Проведя анализ всех программ, специализирующихся в области проведения конференций и вебинаров, можно выделить только две «ВКУРСЕ» и МТС Линк. Остальные программные продукты уступают или по времени проведения, только 40 минут, или очень завышена цена, нет бесплатных версий, неудобный интерфейс, в котором трудно работать, а также необходимо быть технически грамотным пользователем. В статье рассматриваются программы, выполненные российскими разработчиками, произведен разбор двух российских платформ для дистанционного обучения, таких как «ВКУРСЕ» и МТС Линк.

В статье проанализированы достоинства и недостатки двух отечественных программных продуктов «ВКУРСЕ» и МТС Линк для проведения онлайн занятий в образовательной деятельности. Статья будет полезна преподавателям не только вузов, но и колледжей, учителей школ.

Методология и результаты исследования

Многопрофильная группа компаний «ХайТэк», осуществляющих деятельность в сфере информационных технологий выпустила платформу «ВКУРСЕ», которая, по словам разработчиков, заменит все зарубежные аналоги. «ВКУРСЕ» только российская разработка, инфраструктура находится в Российской Федерации. Над решением данной задачи разработчики трудились с 2016 г.

Онлайн-платформа «ВКУРСЕ» – имеет свидетельство о госрегистрации программы для ЭВМ № 2022660197, включена в «Реестр российского программного обеспечения» МинЦифр №14460 от 08.08.2022. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации рекомендовало вузам использовать для проведения сессий и итоговых аттестаций отечественные сервисы видео-конференц-связи из реестра Минцифры.

Регистрация отечественной платформы «ВКУРСЕ» понятна и не вызывает проблем у пользователя. См. рис.1.

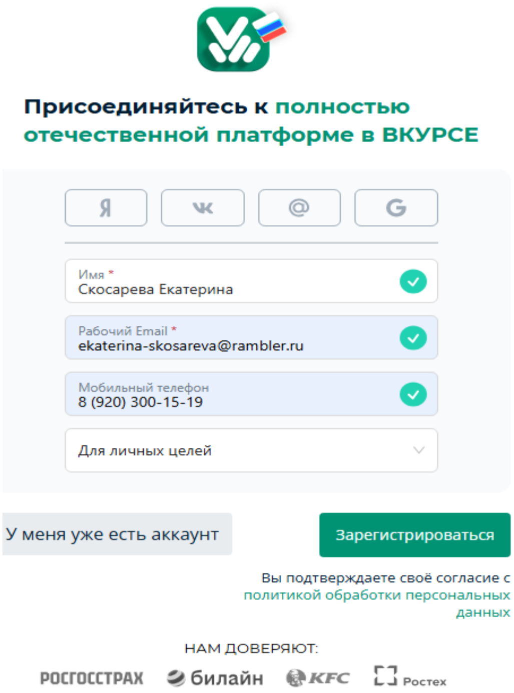


Рис.1. Регистрация программного продукта

Платформа «ВКУРСЕ» создала линейку программных сред для разных ступеней образования: для учреждений начального основного и среднего образования, учреждения средне-специального образования и для учреждений высшего образования. Перед каждой ступенью стоят свои задачи и, несомненно, это правильное решение – разграничить программные продукты с учетом ступени образования [2].

У программного продукта имеются возможности для проведения различных видов занятий. Мероприятие «Лекция» позволяет ведущему конференции доносить информацию для слушателей с демонстрацией экрана и обменом файлами. С использованием шаблона «Групповые конференции» имеется возможность проводить междисциплинарные занятия. Имеется возможность проводить опрос студентов, обеспечивая, таким образом, обратную связь. Также есть в программе функции синхронного перевода и протоколирования видеоконференции.

Сессионный зал позволяет спикеру доносить информацию обучающимся в индивидуальном порядке, не отвлекая от обучения от остальных. В отличие от Zoom на платформе «ВКУРСЕ» для общения студентов и преподавателя имеется встроенный мессенджер.

Программа «ВКУРСЕ» устанавливается на всех операционных системах и на всех мобильных устройствах. С помощью нее можно проводить крупные мероприятия, рассчитанные на десять тысяч человек и возможность сделать более трехсот ведущих конференции.

Рис. 2. Функционал программного продукта

В программе «ВКУРСЕ» можно ознакомиться с планом выполнения преобразований за квартал. В каждый квартал разработчики ставят по нескольку задач по обновлению и улучшению среды интерфейса. Если поставленная задача успешно выполнена, то это отображается в плане, линия бегунка подсвечена в зеленый цвет, в противном случае остается не закрашенной. Только у программного продукта «ВКУРСЕ» пользователь знает о разработках программистах, о новых технических возможностях программы и может использовать в своей образовательной деятельности.

Рис.3. Поквартальный план программы «Вкурсе»

Что касается образования, то разработчики ставят амбициозные цели, такие как обучение с элементами геймификации (от англ. game – игра) использование игровых элементов. Сама идея привнесения игры в образование не новая, пример описан в книге Джоан Роулинг «Гарри Поттере»: за успехи учеников факультеты Хогвартса награждают баллами, и соревнование завершается в конце года торжественным объявлением победителя [3].

Тестирование студентов сделать вопросы не только с множественным и единичным выбором ответа, работают над созданием различных сложнейших модификаций: установление соответствия, установление последовательности, свободное изложение, исключение, поиск лишнего в предложении, поиск последовательности.

Разработчики обещают поддержку квизов (от анг. quiz-викторина) Квиз — это командная интеллектуальная игра. Ближайший аналог в России — телеигра «Что? Где? Когда?». Квизы стали очень популярны в образовании, преподаватель использует квизы для проверки знаний, является аналогом школьных тестов, только квизы – интерактивный тест с элементами игровой деятельности. Квизы способствуют расширению познавательной деятельности обучающихся, развитию памяти, концентрации внимания, элемент соревновательной деятельности [4].

А также для лекций и проведения уроков планируется создавать мероприятия с заданными спикером сценарием.

Платформа «ВКУРСЕ» — не единственный такой российский сервис для использования в дистанционном обучении, составляет конкуренцию зарубежным аналогам, таким как Zoom. У программного продукта «ВКУРСЕ» есть недостатки: одним из них является цена, платные тарифы дорогостоящие, зарубежные программы в этом плане бесплатны. Для преподавателя бесплатной версии Zoom вполне хватит. Цена на подписку платформы «ВКУРСЕ» связана с проблемами инфраструктуры серверов в облаке.

Разработчики программы «ВКУРСЕ» заявляют о возможности подключения десяти тысяч человек и трехсот спикеров, Zoom может, подключит до одной тысячи человек.

Имеется еще одна платформа отечественного производства МТС Линк — российский разработчик экосистемы сервисов для бизнес-коммуникаций и совместной работы. Первый сервис был выпущен в 2008 году. С июля 2022 года экосистема стала частью цифровых продуктов МТС и в октябре 2023 года получила название МТС Линк.

Онлайн-платформа МТС Линк - имеет свидетельство о госрегистрации программы для ЭВМ № 3316 от 30.03.2017 г., включена в «Реестр российского программного обеспечения»

Платформа МТС Линк подразделяется на три составляющие в зависимости от поставленных задач: Линк Встречи, Линк Вебинары, Линк Курсы.

Поговорим о Линк Встречи, спикер присылает ссылку, в чат группы, по этой ссылке обучающиеся присоединяются к занятию. Во время занятия можно добавлять заметки, преподаватель кратко записывает анонс занятия, после окончания заметка придет на почту участникам занятия. Имеется возможность посмотреть запись занятия, но только в платной версии программы. Также есть чат для обсуждения различных вопросов. Можно поставить таймер на обсуждение ответов на вопросы. Если обучающийся захочет задать вопрос, то нужно выбрать опцию «поднятая рука». Имеются интерактивные доски, где обучающиеся могут писать, оставлять свои комментарии. На интерактивных досках можно создавать майнд-карты - визуальное представление информации, объектов и связей между ними. Тони Бьюзен автор майнд-карт, карты «ума (памяти)» информация представлена в виде нейронной сети. Спикер может устраивать брейнштормы, проработать идеи и пути решения различных проблем.

Также как и на других платформах имеется возможность демонстрировать презентацию, обмениваться файлами [5].

Линк Вебинары еще одна составляющая платформы, используется для проведения вебинаров – онлайн-мероприятия, на котором получают новые знания и навыки по различным областям. Тесты для оценки знаний студентов. Программистам в этой области еще предстоит многое сделать и поработать над улучшением форм тестовых вопросов.

Недостатками МТС Линк является корпоративный, встроенный мессенджер доступен только в тестовом режиме, после заявки на сайте МТС. Пользователи данной платформы к недостаткам платформы относят неудобный интерфейс программы, расположение кнопок. Пользователи негативно высказываются о частых сбоях при проведении онлайн-занятий.

Платформа «ВКУРСЕ» создала линейку программных сред для разных ступеней образования: для учреждений начального основного и среднего образования, учреждения средне-специального образования и для учреждений высшего образования. МТС Линк ориентирован на бизнес-проекты.

В образовательной деятельности ФГБОУ ВО «Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана» была использована автором статьи, платформа «ВКУРСЕ» при проведении консультации перед рубежным контролем.

Перед проведением рубежного контроля по модулю 1 «Векторная алгебра, прямые и плоскости» по дисциплине аналитическая геометрия, изучаемого на первом курсе факультета «ИУ1 «Системы автоматического управления»» была проведена консультация ИУ1-12б в онлайн формате. При выборе программного обеспечения учитывалась специфика занятия, необходима была обратная связь со студентами. Программа была выбрана «ВКУРСЕ». В программе МТС Линк отсутствует обратная связь, ее лучше применять при проведении занятий лекционного типа. В сетке расписания консультации перед проведением рубежного контроля не предусмотрены, но она необходима студентам для успешного выполнения теоретической и практической части рубежного контроля. Так как это первая серьезная работа для студентов первого курса, то преподавателю нужно рассказать об организационных моментах проведения рубежного контроля, обратить внимание на оформление работы, систему оценивания в баллах. Также есть материалы, выносимые на самостоятельное изучение студентами, консультация необходима, чтобы задать интересующие вопросы преподавателю.

Перед проведением онлайн занятия преподаватель оставил ссылку в группе в мессенджере, указал дату и время проведения.

Самой большой проблемой при подготовке к проведению занятия в режиме онлайн стало изображения рисунков и написание математических формул. В презентации сделать это проблематично, вводить математические формулы, используя встроенные редакторы формул, очень долго по времени. Поэтому для преподавателей математики, при проведении дистанционных занятий, необходим графический планшет для быстрого написания формул и выполнения чертежей. Формулу можно внести, написав её стилусом на планшете, информация будет отображена на экране, а текст будет распознан в небольшом окне выше.

Если сравнивать средний балл за рубежный контроль в группе, где была проведена консультация ИУ1-12б он составляет 3,57 и средний балл в группе ИУ1-11б, где консультации не было – 3,26. Исходя из отзывов студентов, консультация была полезна, и чувствовали они себя на рубежном контроле уверенно. Консультации такого формата будут проводить на постоянной основе, очень удобно, нет зависимости от аудитории, выбор удобного времени для большинства.

Руководству вуза стоит подумать сделать часть консультаций при проведении рубежного контроля, контрольной работе, перед проведением экзамена в онлайн формате на постоянной основе.

Заключение

Дистанционное обучение с использование различных платформ в образовательной деятельности станет доступным в самых удалённых уголках мира. Подход обучения от группового передвинется в сторону личностного. Развитие программных продуктов для дистанционного обучения позволяет студентам и преподавателем экономить время и финансовые затраты. Подводя итог, можно сказать, что потенциал у отечественных программных продуктов в области дистанционного образования огромен. МТС Линк решить проблемы со сбоями при онлайн-занятиях. «ВКУРСЕ» отрегулировать ценообразование, сделать программу доступнее для любого пользователя. Можно провести любой вид занятия, по любой дисциплине. Дистанционное образование имеет большой потенциал, поэтому нужно улучшать программные продукты, что увеличит качество онлайн образования.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Педагогические технологии дистанционного обучения: учеб. пособие для студ. высш. учеб заведений / [Е.С. Полат, М.В. Моисеева, А.Е. Петров и др.]; под. Ред. Е.С. Полат. – М.: Издательский центр «Академия», 2006.– 400с.
2. ВКУРСЕ | Онлайн-платформа для ВКС и Вебинаров с мессенджером // Сайт об онлайн-платформе для проведения обучения. - URL: https://vkurse.ru/ (дата обращения 11.10.2024).
3. Геймификация обучения: примеры, инструменты, плюсы и минусы [Электронный источник] // Сайт об образовании в школе. - URL: https://school.kontur.ru/publications/2453 (дата обращения 12.10.2024).
4. Что такое квиз простыми словами [Электронный источник] // Сайт дзен. - URL: https://dzen.ru/a/ZORwbCWrNnNrCAf9?ysclid (дата обращения 12.10.2024).
5. Сервис для видеоконференций и онлайн мероприятий мессенджером // Сайт об онлайн-платформе для проведения обучения. - URL: https://mts-link.ru/(дата обращения 12.10.2024).

***Ekaterina P. Skosareva*,**
Senior lecturer Bauman Moscow State Technical University; Senior lecturer non-governmental educational private institution of Higher Education "Moscow Financial and Industrial University "Synergy", Moscow
ekaterina-skosareva@rambler.ru

Overview of software products for conducting distance learning in educational activities

Abstract. Currently, distance learning has become a reality and the future of education. Due to the sanctions, many foreign companies are leaving the Russian market, Roskomnadzor recommended looking for other replacement platforms for conducting distance learning.
The purpose of the article is to analyze the domestic software products "VKURSE" and MTS Link for conducting distance learning, to identify advantages and disadvantages. To share the experience of conducting online consultations before the boundary control for MSTU students. Classes in a remote format using Russian-made software were conducted for the first time. The article analyzes the average score for the foreign control in the group where the online lesson was conducted and, in the group, where the lesson was not conducted.

Keywords: distance learning, program, developers, speaker, gamification, quizzes, mind maps.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ УПРАВЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ»

Аннотация

В статье рассматривается методика преподавания элементов теории линейного оптимального быстродействия. Рассмотрение данного вопроса представляется целесообразным, так как данная тема изучается в рамках курсов оптимального управления и методов оптимизации, предназначенных для студентов технических университетов. Целью статьи является разбор решения одного частного случая задачи линейного оптимального быстродействия для системы второго порядка с двумя управляющими параметрами. Представлена методика изложения алгоритма решения задачи. Для контроля усвоения учебного материала составлены 20 вариантов индивидуальных домашних заданий. Статья может быть полезна преподавателям технических университетов и студентам.

Ключевые слова

оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, задача оптимального быстродействия, задача синтеза оптимальных управлений

АВТОРЫ

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Введение

Образовательные программы по различным направлениям подготовки студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана предполагают изучение разделов теории оптимизации, в том числе оптимального управления. Такие дисциплины преподаются студентам факультетов «Фундаментальные науки», «Специальное машиностроение» и многих других. Среди задач оптимального управления особое место занимают задачи оптимального быстродействия, имеющие многочисленные практические приложения. Класс задач быстродействия обширен, для их решения используются различные аналитические и численные методы. Поэтому имеется возможность подобрать для изучения раздел теории оптимального быстродействия и задачи, соответствующие требуемому уровню подготовки студентов. В данной работе рассматривается задача линейного оптимального быстродействия для системы второго порядка с двумя управляющими параметрами и действительными отрицательными различными собственными значениями, которая допускает аналитическое решение. Использование компьютерных технологий при решении данной задачи также возможно и приветствуется. Метод решения рассматриваемой задачи был предложен Понтрягиным Л.С., Болтянским В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и Мищенко Е.Ф. в монографии [1], первое издание которой в 1961 году подвело итог исследованиям, удостоенным Ленинской премии. Методика преподавания данной темы студентам технического университета подразумевает, что излагается лишь схема решения задачи, часть вычислений опускается, давая возможность студентам самостоятельно провести расчеты и сделать чертежи.

Методология и результаты исследования

Задача линейного оптимального быстродействия формулируется в рамках математической модели управляемого объекта, используемой в оптимальном управлении (см., например, монографию Л.С. Понтрягина с соавторами [2] или в кратком изложении в статье Н.Г. Хорьковой [3]).

Рассмотрим задачу о наибыстрейшем попадании управляемого объекта из произвольной точки плоскости в начало координат. На состояние объекта можно влиять, используя управляющие параметры u_1, u_2, на которые наложены ограничения $|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1$, то есть область управления U - квадрат. Движение управляемого объекта определяется системой двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Итак, далее рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$T = T[x_1, x_2, u_1, u_2] = \int_{t_0}^{t_1} dt \longrightarrow min,$$
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2, \end{cases}$$
$$|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1,$$
$$x^{(0)} \in R^2, \qquad x^{(1)} = (0,0).$$

Введя в рассмотрение фазовый вектор $x = (x_1, x_2)$, вектор управления $u = (u_1, u_2)$, а также матрицы $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, запишем задачу в матричном виде:

$$\begin{gathered} T = T[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} dt \longrightarrow min, \\ \dot{x} = Ax + Bu\,, \\ |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1, \\ x^{(0)} \in R^2, \qquad x^{(1)} = 0. \end{gathered} \tag{i}$$

Как обычно, предполагаем, что $\det B \neq 0$ (это означает, что систему (1) нельзя свести к системе с одним управляющим параметром). Также предполагаем, что выполняется следующее условие общности положения: если вектор w параллелен стороне квадрата $|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1$, то вектор Bw не является собственным вектором матрицы A. Смысл этого условия требует отдельного обсуждения (см. монографию Понтрягина Л.С. с соавторами [4]). Решение поставленной задачи зависит от собственных значений матрицы A. В данной работе рассматривается случай действительных отрицательных различных собственных значений. Далее, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ - собственные значения матрицы A.

1. Приведем поставленную задачу к каноническому виду. Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов линейного оператора с матрицей A. Матрица этого оператора в базисе из собственных векторов диагональная, причем

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = S^{-1}DS.$$

Сделаем замену переменных $x = Sy$ в (1):

$$\dot{x} = Ax + Bu \Leftrightarrow S\dot{y} = ASy + Bu \Leftrightarrow \dot{y} = Dy + Cu, C = S^{-1}B.$$

Введя новые переменные $v_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2, v_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2, C = (c_{ij})$, получим следующую систему уравнений движения

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + v_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + v_2. \end{cases}$$

Замечание 1. Время преобразованию не подвергается, поэтому оптимальные траектории системы (1), ведущие в начало координат, при сделанной замене координат перейдут в траектории, также ведущие в начало координат.

Выясним теперь, что происходит при замене переменных с областью управления. В силу линейности преобразования квадрат перейдет в параллелограмм V с центром в начале координат и вершинами e_1, e_2, e_3, e_4, которые нумеруем против часовой стрелки. Координаты вершин параллелограмма находятся как образы вершин квадрата, которые имеют координаты $(\pm 1, \pm 1)$, то есть вершины будут иметь координаты $(c_{11} + c_{12}, c_{21} + c_{22})$, $(c_{11} - c_{12}, c_{21} - c_{22})$, $(-c_{11} + c_{12}, -c_{21} + c_{22})$, $(-c_{11} - c_{12}, -c_{21} - c_{22})$.

Замечание 2. Новая система получается из системы (1) с помощью линейного преобразования, поэтому для нее так же выполняется условие общности положения. Так как собственные векторы диагональной матрицы имеют вид $(1,0), (0,1)$, то это условие означает, что ни одна из сторон параллелограмма V не параллельна никакой координатной оси.

Подведем итог приведения задачи к каноническому виду. Далее мы будем рассматривать следующую задачу

$T \longrightarrow min$,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + v_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + v_2, \end{cases}$$
$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0,$$
$$v = (v_1, v_2) \in V,$$
$$y^{(0)} \in R^2, \qquad y^{(1)} = (0,0).$$

2. Для решения задачи оптимального управления, приведенной к каноническому виду, используем метод решения задачи Понтрягина (см., например, монографию Понтрягина Л.С. с соавторами [5], задачник Алексеева В.М. с соавторами [6]). Составим функцию Понтрягина $H = p_1\,(\lambda_1 y_1 + v_1) + p_2\,(\lambda_2 y_2 + v_2)$ и запишем пару уравнений Гамильтона, которые легко решаются:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 &= -\lambda_1 p_1, \\ \dot{p}_2 &= -\lambda_2 p_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 &= C_1 e^{-\lambda_1 t}, \\ p_2 &= C_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Если одна из констант C_1, C_2 равна 0, то вектор множителей Лагранжа $p = (p_1, p_2)$ сохраняет постоянное направление, параллельное одной из осей координат. Если обе константы отличны от нуля, то вектор p с возрастанием t монотонно поворачивается от первой оси ко второй, оставаясь все время в одном квадранте. Квадрант определяется по знакам констант C_1, C_2 .

Запишем принцип максимума:

$$\hat{v} = \arg\max_{v\in V} H = \arg\max_{v\in V}\big(p_1\,(\lambda_1 y_1 + v_1) + p_2\,(\lambda_2 y_2 + v_2)\big) = = \arg\max_{v\in V}(p_1\, v_1 + p_2\, v_2)$$
$$= \arg\max_{v\in V}(p, v) = \arg\max_{v\in V} np_p\, v.$$

Выполним вспомогательное построение. Через начало координат проведем две прямые l_1, l_2 , перпендикулярные сторонам параллелограмма V, l_1 перпендикулярна стороне $(e_1,\ e_4\ )$. Прямые образуют 4 угла, которые можно занумеровать так, чтобы выполнялось следующее утверждение: если вектор $p = (p_1, p_2)$ находится в угле α_i, то $\arg\max_{u\in V} H = e_i$. Заметим также, что в силу условия общности положения прямые l_1, l_2 не совпадают с осями координат. Возможны два варианта расположения этих прямых относительно координатных осей: 1) прямые расположены в разных квадрантах; 2) прямые расположены в двух квадрантах. В обоих случаях очевидно наличие ограничения на число переключений управления. В первом случае возможны движения не более, чем с одним переключением, во втором - не более, чем с двумя. Для домашнего задания подобраны задачи, в которых реализуется второй вариант. Поэтому далее первый случай рассматриваться не будет.

Решим уравнения движения управляемого объекта при постоянном управлении. Пусть управление $v = e_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$. Тогда уравнения движения объекта принимают вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + a_1^{(i)}, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + a_2^{(i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 (y_1 - b_1^{(i)}), \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 (y_2 - b_2^{(i)}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

где

$$b_j^{(i)} = -\frac{a_j^{(i)}}{\lambda_j}, z_j = y_j - b_j^{(i)}, j = 1,2.$$

Фазовый портрет для системы имеет вид устойчивого узла (см., например, замечательный учебник Арнольда В.И. [7]), положение равновесия которого находится в точке $e_i' = (b_1^{(i)}, b_2^{(i)})$.

Перейдем описанию фазового портрета для второго случая. Предположим, для определенности, что прямые l_1, l_2 расположены в первом и третьем квадрантах, между ними в первом квадранте находится вершина e_1, далее вершины параллелограмма V и углы α_i между прямыми нумеруются против часовой стрелки. Если вектор p в начальный момент времени находится внутри второго квадранта или на его сторонах, то в процессе движения управляемого объекта вектор p не выйдет за пределы этого квадранта, движение объекта будет происходить под действием только управления e_2 и соответствующая фазовая траектория приведет объект в начало координат. Аналогичная ситуация будет иметь и для четвертого квадранта. Фазовые траектории для этих двух случаев оказываются симметричными относительно начала координат. В силу соображений симметрии далее достаточно рассмотреть случай, когда в начальный момент времени вектор p находится внутри первого квадранта (или третьего). В первом квадранте расположен угол α_1 и частично углы α_2 и α_4. Напомним, что в процессе движения вектор p поворачивается от оси абсцисс к оси ординат. Поэтому возможны движения объекта без переключений под действием управления $v = e_2$, с одним переключением $e_1 \to e_2$ и с двумя переключениями $e_4 \to e_1 \to e_2$. Аналогичным образом, для третьего квадранта возможны траектории без переключений под действием управления $v = e_4$, с одним переключением $e_3 \to e_4$ и с двумя переключениями $e_2 \to e_3 \to e_4$. В монографии Понтрягина Л.С. с соавторами [8] показано, что для всех оптимальных траекторий с двумя переключениями управления промежуток времени, в течение которого управление принимает значение $v = e_1$ (или e_3), имеет одну и ту же длину

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{k_2}{k_1},$$

где k_i - угловой коэффициент прямой l_i, τ_i - момент переключения управления (момент, когда вектор p попадает на прямую l_i).

Для построения фазового портрета проведем сначала анализ траекторий с двумя переключениями $e_4 \to e_1 \to e_2$. Найдем и построим траекторию OA из узла с центром в точке e_2', ведущую в начало координат O. Очевидно, что кривая OA расположена в четвертом квадранте. Затем рисуем траектории из узла с центром в точке e_1', выходящие на кривую OA. По этим кривым до момента встречи с OA управляемый объект двигался в течение времени, не большем τ. «Отъедем» от точек кривой OA по траекториям узла e_1' в противоположном направлении на время τ. Получим линию BC, которая является линией переключения управления (не фазовая траектория!): в точках этой кривой происходит переключение управления $e_4 \to e_1$. В фазовый портрет надо включить части траекторий узла с центром в точке e_1', расположенные между линиями OA и BC. Как найти уравнение кривой BC? Расчет следует привести на занятии (в монографии Понтрягина Л.С. с соавторами [9] расчет отсутствует). Ответ следующий. Если кривая OA задается уравнением $f(y_1, y_2) = 0$, то кривая BC задается уравнением

$$f\left(e^{\lambda_1\tau}\left(y_1-b_1^{(1)}\right)+b_1^{(1)}, e^{\lambda_2\tau}\left(y_2-b_2^{(1)}\right)+b_2^{(1)}\right)=0.$$

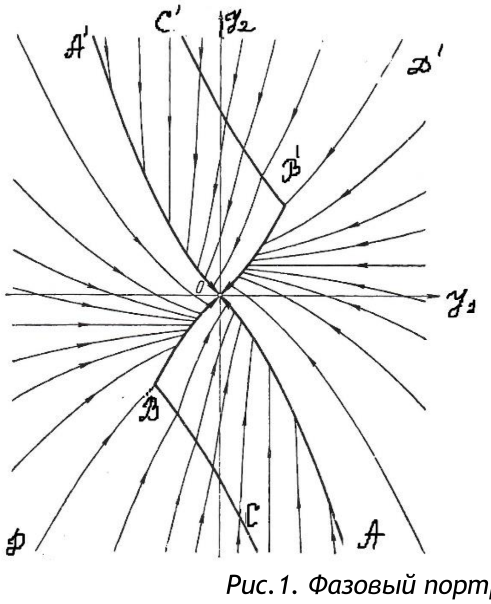
Далее построим траектории из узла с центром в точке e_4', выходящие на кривую BC. Пусть BD - крайняя траектория из этого пучка. При движении объекта по траектории BDO происходит только одно переключение $e_4 \to e_1$ в точке B. В тот момент, когда должно было бы произойти второе переключение $e_1 \to e_2$, объект уже находится в начале координат. Проанализируем теперь фазовые траектории, на которых происходит только одно переключение управления $e_4 \to e_1$. Эти траектории выходят на кривую BO и относятся к узлу с центром в точке e_4'. Крайней в этом семействе будет траектория OA', на которой нет переключений. Очевидно также, что кривые OA и OA' симметричны относительно начала координат. Осталось повернуть картинку на 180 градусов, чтобы заполнить траекториями часть плоскости правее линии AOA'. Фазовый портрет в системе координат Oy_1y_2 готов. Для того, чтобы получить фазовый портрет на плоскости Ox_1x_2 надо выполнить линейную замену переменных. Отметим, что все матрицы A в условиях домашнего задания симметричны и приводятся к диагональному виду ортогональным преобразованием.

3. Синтезирующая функция $v(y_1, y_2)$ определена на фазовой плоскости Oy_1y_2. Ее значение в каждой точке равно значению управления на оптимальной траектории, проходящей через эту точку. Для рассматриваемой задачи имеем таблицу значений синтезирующей функции:

$v(y_1, y_2)$	
e_1	*На OB и внутри $CBOA$*
e_2	*На OA и правее $C'B'OA$*
e_3	*На OB' и внутри $A'OB'C'$*
e_4	*На OA' и $A'OBC$ левее*

Учитывая линейную замену переменных $x = Sy$, можно найти синтезирующую функцию $u(x_1, x_2)$.

Ниже на рисунке слева приведен эскиз фазового портрета, на рисунке справа – синтезирующая функция.



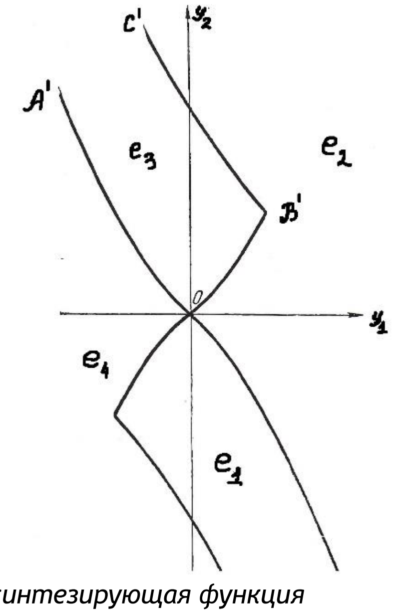


Рис.1. Фазовый портрет и синтезирующая функция

Домашнее задание «Задача линейного оптимального быстродействия»

В следующей задаче линейного оптимального быстродействия построить фазовый портрет и найти синтезирующую функцию:

$$T = T[x_1, x_2, u_1, u_2] = \int_{t_0}^{t_1} dt \longrightarrow min,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2, \end{cases}$$

$$|\, u_1 \,| \le 1, |\, u_2 \,| \le 1,$$

$$x^{(0)} \in R^2, \qquad x^{(1)} = (0,0).$$

Матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ приведены в таблице:

Таблица 1

Условия домашнего задания по вариантам

№ варианта	A	B	№ варианта	A	B
1	$\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -41 & 12 \\ 12 & -34 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -41 & -12 \\ -12 & -34 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -41 & -12 \\ -12 & -34 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} -41 & 12 \\ 12 & -34 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -34 & 12 \\ 12 & -41 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -34 & -12 \\ -12 & -41 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -34 & -12 \\ -12 & -41 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -34 & 12 \\ 12 & -41 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Заключение

В работе показана целесообразность рассмотрения простейших задач линейного оптимального быстродействия в рамках курсов оптимального управления и методов оптимизации, изучаемых студентами технических университетов. Представлена методика преподавания решения одной задачи оптимального быстродействия для линейной системы второго порядка с двумя управляющими параметрами. Рассмотрены алгоритм построения фазового портрета и задача синтеза оптимальных управлений. Составлены 20 вариантов условий индивидуальных домашних заданий, которые можно использовать для контроля усвоения учебного материала.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.4-е изд. - М.: «Наука», 1983. - 392 с.
2. Там же.
3. Хорькова Н.Г. О некоторых методических аспектах преподавания темы «Задача Лагранжа в форме Понтрягина» в рамках курса «Вариационное исчисление»//Modern European Researches. - Salzburg, 2021. - Т.1, №3. - С.138-145.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Указ. соч.

5. Там же.
6. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. – М.: Физматлит, 2007. – 255 с.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: «Наука», 1971. – 240 с.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Указ. соч.
9. Там же.

***Nina G. Khorkova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Bauman Moscow State Technical University, Moscow
ninakhorkova@bmstu.ru

The methodology of conducting classes on the topic "Time-optimal control problems for linear second-order systems with two control parameters"

Abstract. The article discusses the methodology of teaching elements of the time-optimal control theory for linear systems. Consideration of this issue seems appropriate, since this topic is studied within the framework of courses on optimal control and optimization methods designed for students of technical universities. The purpose of the article is to analyze one particular case of the linear optimal performance problem for a second-order system with two control parameters. The method of presentation of the algorithm for solving the problem is presented. There are 20 options for individual homework assignments to control the assimilation of educational material. The article may be useful for teachers of technical universities and students.

Keywords: optimal control, Pontryagin maximum principle, time-optimal control problem, optimal control synthesis problem.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 2 (T.1), 2024
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS
610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”

Sent for printing 13-11-2024
Circulation 1000
Order 013120/127