ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 1 (T.1)
2025

Kirov, Russian Federation

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2025) ISSUE 1 (T.1), 126 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,

KIROV, RUSSIAN FEDERATION

PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.
Editorial opinion can differ from opinion of authors.
If reprinted, the reference to the journal is required.

Printed in Russian Federation, 2025

CONTENTS

МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОДСЧЁТУ ЧИСЛА (0,1)-ФУНКЦИЙ НА НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ В НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Аннотация

Проблема вычисления количества монотонных (0,1)-функций на частично упорядоченных множествах (ЧУМ) входит в круг актуальных проблем современной математики. В настоящее время такие задачи изучаются в курсах «Дискретная математика», «Дополнительные главы дискретной математики», а также в ряде специальных курсов. Целью работы является изложение методического подхода к подсчёту числа монотонных (0,1)-функций на ЧУМ специального вида. В работе доказаны утверждения и приведены примеры задач, решаемых на основе предложенного подхода, которые могут послужить отправной точкой для научно-исследовательской работы студентов, магистрантов и аспирантов.

Ключевые слова

частично упорядоченное множество, монотонная функция, диаграмма Хассе, дерево

АВТОРЫ

Андреева Татьяна Владимировна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана», г. Москва
t-v-andreeva@mail.ru

Семенов Юрий Станиславович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина», г. Москва
yuri_semenoff@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-5

Введение

В работе предложен подход к точному подсчёту числа монотонных $(0,1)$-функций на некоторых частично упорядоченных множествах (ЧУМ). Эта тема затрагивается в курсах «Дискретная математика», «Дополнительные главы дискретной математики», в ряде специальных курсов, читаемых для студентов математических и информационных направлений обучения. Более глубокое изучение возникающих в этом контексте проблем, как правило, происходит в рамках самостоятельной научно-исследовательской работы студентов, магистрантов и аспирантов. Методика выполнения научно-исследовательской работы, рассматриваемая в статье, позволяет получать как точные значения, так и некоторые асимптотические оценки числа монотонных $(0,1)$-функций на ЧУМ, диаграмма Хассе которых является деревом.

История вопроса восходит к концу XIX века. В 1897 г. Р. Дедекинд [1] получил значения для числа монотонных булевых функций от 3 и 4 переменных. Проблема нахождения числа булевых функций n переменных называется проблемой Дедекинда. Её точные решения найдены до $n = 9$ включительно. Асимптотическое решение проблемы Дедекинда было получено А. Д. Коршуновым [2] в 1977 г. А. А.

Сапоженко [3] в 1989 г. использовал метод граничных функционалов и получил асимптотику числа монотонных $(0,1)$ -функций в унимодальных частично упорядоченных множествах. В 1974 г. В. Б. Алексеев [4] получил асимптотику логарифма числа k -значных функций, монотонных относительно произвольно заданного частичного порядка. Проблема нахождения точного числа монотонных булевых функций, зависящих от n, $n \geq 10$, переменных, не решена до сих пор. В этом направлении имеется ряд продвижений. Например, следует отметить работу Дж. Бермана и П. Кёлера [5].

Методология и результаты исследования

1. Основные понятия. Пусть P – конечное частично упорядоченное множество (ЧУМ) с отношением строгого порядка $<$.

Отношение нестрогого порядка $\leq$ на P определяется следующим образом: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x < y$ или $x = y$.

Отношение непосредственного предшествования $\prec$ между элементами $x, y \in P$ определяется обычным образом: $x \prec y$, если $x < y$ и не существует такого $z \in P$, что $x < z < y$.

Диаграммой Хассе $H(P)$ частично упорядоченного множества P называют орграф $\vec{G} = \left(P, \vec{E}\right)$, где $(\overrightarrow{x, y}) \in \vec{E}$ тогда и только тогда, когда $x \prec y$. Под орграфом понимается ориентированный граф без петель и кратных рёбер.

Основные определения, используемые в работе, можно найти, например, в книге А.А. Сапоженко [6] или книге А.И. Белоусова и С.Б. Ткачева [7].

Пусть $B = \{0,1\}$, причем $0 < 1$. Монотонной $(0,1)$-функцией на ЧУМ P называется отображение $f: P \to B$, для которого из $x \leq y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$. Множество монотонных $(0,1)$-функций f на ЧУМ P обозначим $Mon(P)$, а их число – через $m(P)$.

Сужением функции f на множество $Q \subseteq P$ называется функция с областью определения Q, совпадающая с исходной функцией на всём Q.

Пусть отмечен некоторый элемент $v \in P$. Пару (P, v) будем называть отмеченным ЧУМ. Обозначим через $m_a(P, v)$ число функций $f \in Mon(P)$, удовлетворяющих условию $f(v) = a$, где $a \in B$. Очевидно, что $m_0(P, v) + m_1(P, v) = m(P)$ для любого $v \in P$. Каждому $v \in P$ поставим в соответствие вектор-столбец $\left(m_0(P, v), m_1(P, v)\right)^T$.

В качестве примера рассмотрим частично упорядоченные множества $B^0 = \{v\}$, B, B^2, B^3. На рис. 1 приведены их диаграммы Хассе, а около вершины v указан вектор-столбец $\left(m_0(P, v), m_1(P, v)\right)^T$.

Пусть S_n – группа перестановок S_n на B^n (S_n переставляет компоненты набора v). Ввиду действия группы S_n на B^n, вектор-столбец $\left(m_0(B^n, v), m_1(B^n, v)\right)^T$ для $v \in B^n$ будет зависеть только от числа единиц в наборе v.

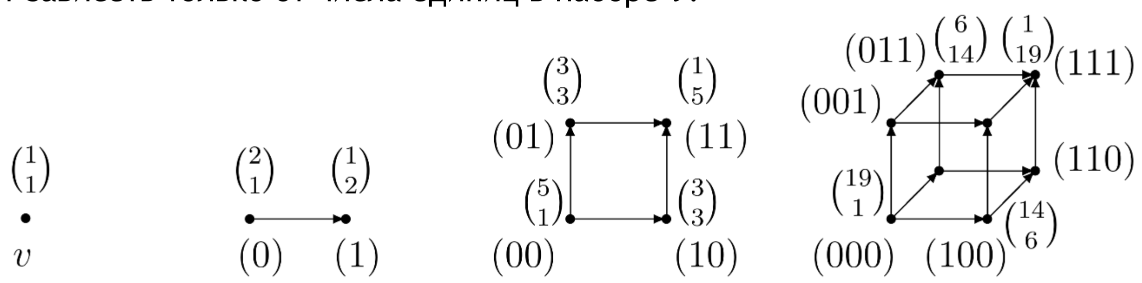

Рис. 1. Число монотонных функций на B^n при $n = 0,1,2,3,4$.

В общем случае отметим некоторую вершину v Д-ЧУМ P. Нижним конусом в P называется множество

$$C_\wedge(v) = \{u \in P: u < v\},$$

верхним конусом в P называется множество

$$C^\vee(v) = \{w \in P: v < w\}.$$

Заметим, что эти конусы являются ЧУМ и могут быть пустыми. Введём обозначения $P_\wedge(u) = \{u\} \cup C_\wedge(u)$, $P^\vee(w) = \{w\} \cup C^\vee(w)$.

2. Монотонные функции на ЧУМ, диаграммы Хассе которых являются деревьями. В этой части мы рассмотрим конечные ЧУМ P такие, что $H(P)$ - дерево, а также монотонные функции на этих ЧУМ. Будем называть такое ЧУМ древесным, или Д-ЧУМ. Простейший пример - это одноэлементный Д-ЧУМ $P = \{v\}$, рассмотренный выше, для которого $m(P) = 2$.

Если $C_\wedge(v) \neq \emptyset$, то рассмотрим все элементы $u_1, \ldots, u_k$, непосредственно предшествующие v. Ввиду того, что $H(P)$ - дерево, при $u_i \neq u_j$ подмножества $P_\wedge(u_i)$ и $P_\wedge(u_j)$ не пересекаются, их диаграммы Хассе являются деревьями и

$$C_\wedge(v) = \coprod_{i=1}^{k} P_\wedge(u_i).$$

Аналогично, если $C^\vee(v) \neq \emptyset$, то рассмотрим все элементы $w_1, \ldots, w_s$, которым непосредственно предшествует v. При $w_a \neq w_b$ подмножества (подЧУМ) $P^\vee(w_a)$ и $P^\vee(w_b)$ не пересекаются, их диаграммы Хассе являются деревьями и

$$C^\vee(v) = \coprod_{j=1}^{s} P^\vee(w_j).$$

На рис. 2 приведена схема такого разбиения Д-ЧУМ P, точнее, его диаграммы Хассе $H(P)$, вершиной v.

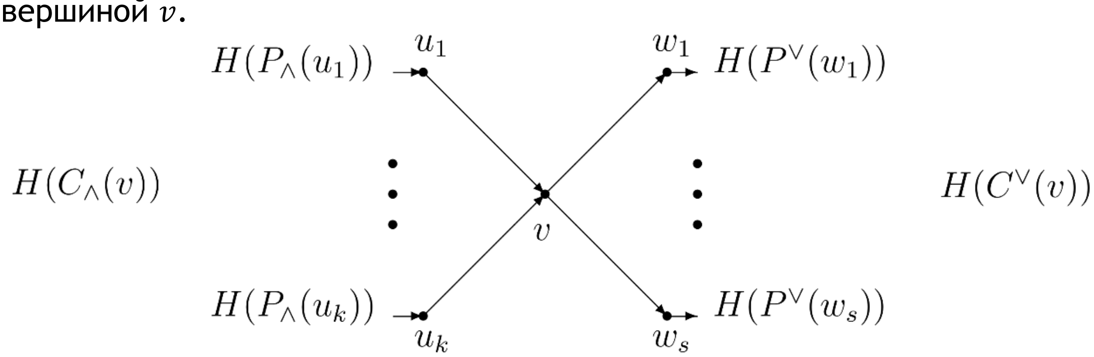

Рис. 2. Разбиение Д-ЧУМ P

Утверждение 1. *Имеют место следующие формулы:*

$$m_0(P, v) = \prod_{i=1}^{k} m_0(P_\wedge(u_i), u_i) \cdot \prod_{j=1}^{s} \Big(m_0\big(P^\vee(w_j), w_j\big) + m_1\big(P^\vee(w_j), w_j\big)\Big), \tag{1}$$

$$m_1(P, v) = \prod_{i=1}^{k} \big(m_0(P_\wedge(u_i), u_i) + m_1(P_\wedge(u_i), u_i)\big) \cdot \prod_{j=1}^{s} m_1\big(P^\vee(w_j), w_j\big). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in Mon(P)$ такую, что $f(v) = 0$. Тогда для всех u таких, что $u \prec v$ будет выполняться условие $f(u) = 0$, а на $v \prec w$ значения значения функции могут быть любыми. Диаграмма Хассе множества $P\{v\}$ представляет собой объединение непересекающихся по множествам вершин деревьев $H(P_\wedge(u_i))$ с отмеченными вершинами u_i и деревьев $H\left(P^\vee(w_j)\right)$ с отмеченными вершинами w_j (см. рис. 2).

Таким образом, функция $f \in Mon(P)$, удовлетворяющая условию $f(v) = 0$, однозначно определяет набор своих сужений на $P_\wedge(u_i)$ таких, что $f(u_i) = 0$, и сужений на $P^\vee(w_j)$ с любыми значениями на w_j. Обратно, любой независимый выбор таких сужений, т.е. монотонных функций на $P_\wedge(u_i)$ с нулевым значением в u_i и монотонных функций на $P^\vee(w_j)$, позволяет однозначно восстановить функцию $f \in Mon(P)$, удовлетворяющую условию $f(v) = 0$.

Подсчитав количество возможных сужений функции f, мы получаем формулу (1). Аналогичные рассуждения в случае $f(v) = 1$ приводят к формуле (2).

Утверждение 1 позволяет применять индуктивный подход к подсчёту числа монотонных функций на Д-ЧУМ P. Рассмотрим примеры.

3. Д-ЧУМ типа звезды. Пусть $S_{k,m} = \{u_1, \dots, u_k, v, w_1, \dots, w_m\}$, причём $u_i < v$, $v < w_j$ для любых i, j; элементы u_i между собой не сравнимы, элементы w_j - тоже. Случаи $k = 0$ или $m = 0$ не исключаются.

Диаграмма Хассе $H(S_{k,m})$ является звездой с k рёбрами, входящими в вершину v, и s рёбрами, исходящими из этой вершины (в графе на рис. 2 все деревья $H\left(\left(S_{k,m}\right)_\wedge(u_i)\right)$ и $H\left((S_{k,m})^\vee(w_j)\right)$ состоят только из одной вершины). По формулам (1), (2) получаем

$$m_0(S_{k,m}, v) = \prod_{i=1}^{k} 1 \cdot \prod_{j=1}^{m} (1+1) = 2^m, \quad m_1(S_{k,m}, v) = \prod_{i=1}^{k} (1+1) \cdot \prod_{j=1}^{m} 1 = 2^k.$$

В результате получаем $m(P) = 2^k + 2^m$.

4. Д-ЧУМ типа простой цепи. Рассмотрим Д-ЧУМ $P = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, в котором либо $v_{i-1} \prec v_i$, либо $v_i \prec v_{i-1}$ $i = 1, \dots, n$, а отношение порядка $<$ является транзитивным замыканием порядка $\prec$. Другими словами, диаграмма Хассе $H(P)$ является простой цепью с рёбрами, идущими из v_{i-1} в v_i, если $v_{i-1} \prec v_i$ (таким рёбрам припишем метку $\varepsilon_i = 1$), либо идущими из v_i в v_{i-1}, если $v_i \prec v_{i-1}$ (таким рёбрам припишем метку $\varepsilon_i = -1$).

На рис. 3 приведены два возможных направления первого ребра в простой цепи $H(P)$. В общем случае направления рёбер определяются последовательностью $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

1. $\varepsilon_1 = 1$ **2.** $\varepsilon_1 = -1$

Рис. 3. Направление первого ребра $H(P)$

Рассмотрим столбец $\left(m_0(P, v_0), m_1(P, v_0)\right)^T = \left(m_0^{(0)}, m_1^{(0)}\right)^T$.

Удалив из P элемент v_0, получим Д-ЧУМ $P^{(1)}$, диаграмма Хассе которого получается удалением из $H(P)$ вершины v_0 и смежного с ней первого ребра. Пусть $\left(m_0^{(1)}, m_1^{(1)}\right)^T = \left(m_0(P^{(1)}, v_1), m_1(P^{(1)}, v_1)\right)^T$. Выясним, как связаны друг с другом пары чисел $\left(m_0^{(1)}, m_1^{(1)}\right)^T$ и $\left(m_0^{(0)}, m_1^{(0)}\right)^T$. Для этого будем использовать рассуждения из доказательства утверждения 1.

В случае $\varepsilon_1 = -1$ мы получим (см. (1)) равенства $m_0^{(0)} = m_0^{(1)}$, $m_1^{(0)} = m_0^{(1)} + m_1^{(1)}$, а в случае $\varepsilon_1 = 1$ (см. (2)) - равенства $m_0^{(0)} = m_0^{(1)} + m_1^{(1)}$, $m_1^{(0)} = m_1^{(1)}$. В матричной форме эти равенства можно представить так:

$$\begin{pmatrix} m_0^{(0)} \\ m_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0^{(1)} \\ m_1^{(1)} \end{pmatrix} \text{ при } \varepsilon_1 = 1; \qquad \begin{pmatrix} m_0^{(0)} \\ m_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0^{(1)} \\ m_1^{(1)} \end{pmatrix} \text{ при } \varepsilon_1 = -1.$$

Введём следующие обозначения:

$$\tau_i = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \varepsilon_i = 1, \\ T, & \text{если } \varepsilon_i = -1, \end{cases}$$

где λ - пустой символ, а T - символ транспонирования. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_P = \prod_{i=1}^{n} A^{\tau_i}, \tag{3}$$

т.е. матрица A_P получается по схеме рис. 3, если пометить рёбра матрицами A^{τ_i} и перемножить матричные метки слева направо.

Теперь мы можем применить индукцию, обратив внимание на то, что на одноэлементном множестве $\{v_n\}$ имеются только две $(0,1)$-функции - константы 0 и 1. В результате получаем следующий результат:

Утверждение 2. *Имеет место следующая формула для числа монотонных* $(0,1)$*-функций на Д-ЧУМ типа простой цепи* P*:*

$$\begin{pmatrix} m_0(P, v_0) \\ m_1(P, v_0) \end{pmatrix} = A_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

с матрицей A_P*, определяемой формулой* (3)*. В частности, число* $m(P)$ *равно сумме всех элементов матрицы* A_P*.*

Замечание. Пусть

$$A_P = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix},$$

тогда a_{00} - количество функций $f \in Mon(P)$ таких, что $f(v_0) = f(v_n) = 0$, a_{01} - таких, что $f(v_0) = 0, f(v_n) = 1$, a_{10} - таких, что $f(v_0) = 1, f(v_n) = 0$, a_{11} - таких, что $f(v_0) = f(v_n) = 1$.

Рассмотрим несколько примеров цепей.

Пример 1. $P_n = \{0,1, \dots, n\}$, причём $0 < 1 < \dots < n$ (линейный порядок). Тогда $\varepsilon_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, и

$$A_{P_n} = A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, на P_n имеется всего $n + 2$ монотонные $(0,1)$-функции (известный результат).

Пример 2. $T_{2n} = \{0,1, \dots, 2n\}$, причём $2k + 1 < 2k, 2k + 1 < 2k + 2, k = 0, \dots, n - 1$, т.е. направления рёбер в цепи чередуются, а $\varepsilon_i = (-1)^i$, $i = 1, \dots, 2n$,. Тогда

$$A_{T_{2n}} = (A^T A)^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{2n-2} & f_{2n-1} \\ f_{2n-1} & f_{2n} \end{pmatrix},$$

где $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$, … - последовательность Фибоначчи. Таким образом, на T_{2n} имеется всего

$$m(T_{2n}) = f_{2n-2} + f_{2n-1} + f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n+2}$$

монотонных $(0,1)$-функций.

В первом примере рост числа функций оказался линейным, во втором - экспоненциальным, так как хорошо известно, что для чисел Фибоначчи

$$f_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \quad n \to \infty.$$

Пример 3. $P = G_n$ - гамильтонов путь в булевом кубе B^n.
Гамильтонов путь в B^n можно построить с применением индукции по n: для B очевидно $G_1 = P_1$. Пусть путь построен в B^k. Построим путь в B^{k+1}. Обозначим через $B_\sigma^{k+1,1}$ подкуб B^{k+1} размерности k, полученный заменой первой компоненты каждого набора $\tilde{\alpha} \in B^{k+1}$ на σ. По предположению индукции в каждом из подкубов $B_0^{k+1,1}$ и $B_1^{k+1,1}$ можно построить гамильтонов путь. Пусть путь G_k^0 в кубе $B_0^{k+1,1}$ начинается в вершине $\tilde{\alpha}_0 = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1})$, а путь G_k^1 в кубе $B_1^{k+1,1}$ - в вершине $\tilde{\alpha}_1 = (1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1})$. Соединим два этих пути ребром $\left(\overrightarrow{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1}\right)$, получим путь G_{k+1}. Примеры гамильтоновых путей приведены на рис. 4.

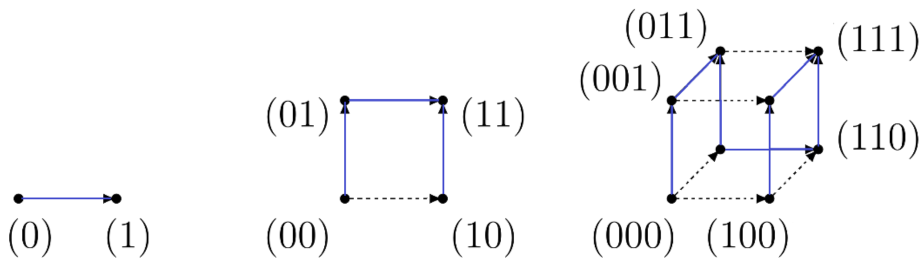

Рис. 4. Гамильтоновы пути в на B_2^n при $n = 1,2,3$.

Несложно показать, что

$$A_{G_1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m(G_1) = m(B^1) = 3,$$

$$A_{G_{n+1}} = A_{G_n} A \left(A_{G_n}\right)^T.$$

Сравним некоторые значения числа монотонных функций на гамильтоновой цепи в B_2^n и числа монотонных функций в B_2^n:

$$A_{G_2} = A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m(G_2) = 7, \qquad m(B^2) = 6;$$

$$A_{G_3} = A = \begin{pmatrix} 19 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad m(G_3) = 37, \qquad m(B^3) = 20;$$

$$A_{G_4} = A = \begin{pmatrix} 577 & 214 \\ 213 & 79 \end{pmatrix}, \qquad m(G_4) = 1\,083, \qquad m(B^4) = 168;$$

$$A_{G_5} = A = \begin{pmatrix} 502\,203 & 185\,390 \\ 185\,389 & 68\,437 \end{pmatrix}, \qquad m(G_5) = 941\,419, \qquad m(B^5) = 7581.$$

Заключение

Изложена методика подсчёта числа монотонных (0,1)-функций на некоторых частично упорядоченных множествах - Д-ЧУМ. Утверждение 1 даёт основу для индуктивного подхода к вычислению количества этих функций. Рассмотрены случаи Д-ЧУМ типа звезды и Д-ЧУМ типа простой цепи. Для простых цепей задача сведена к подсчёту суммы элементов определённой квадратной матрицы порядка 2. В частности, рассмотрен пример простой цепи - гамильтонова пути в булевом кубе.

Полученные результаты могут быть использованы при выполнении научно-исследовательских работ студентами, магистрантами и аспирантами некоторых математических и информационных направлений обучения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Dedekind R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Theiler, Festschrift Hoch. Braunschweig u. ges. Werke, II 1897, 103-148.
2. Коршунов А.Д. Решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций / Докл. АН СССР. - 1977. -Т. 233, N 4. - С. 543-546.
3. Алексеев В. Б. О числе монотонных k-значных функций / Проблемы кибернетики. - Вып. 28. - М.: Наука, 1974. - С. 5-24.
4. Сапоженко А.А. О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах / Дискрет. матем., 1989, т. 1, вып. 1, с. 74–93.
5. Berman J., Köhler P. On Dedekind Numbers and Two Sequences of Knuth. Journal of Integer Sequences, 24 (2021), Article 21.10.7, pp. 1–18.
6. Сапоженко А. А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов / А. А. Сапоженко. М.: Физматлит, 2009. - 152 с.
7. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 7-е изд. - М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. - 703 с.

***Tatiana V. Andreeva*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
t-v-andreeva@mail.ru
***Yuri S. Semenov*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate professor, National University of Oil and Gas “Gubkin University”, Moscow
yuri_semenoff@mail.ru

A methodical approach to counting the number of monotonous (0,1)-functions on some posets in research work

Abstract. The problem to calculate the number of monotonous (0,1)-functions on partially ordered sets (posets) enters the circle of actual problems in modern mathematics. At the present time such problems are studied in the courses «Discrete mathematics», «Additional chapters of discrete mathematics» as well as in several special courses. The aim of the paper is to present a methodical approach to counting the number of monotonous (0,1)-functions on some posets of special kind. In the paper we prove some statements and provide some examples which can be solved on the base of the considered approach and can be a background for research work of students, master’s students and aspirants.

Keywords: poset, monotonous function, Hasse diagram, tree.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

Для построения графиков функций часто прибегают к программным средствам. Безусловно, это позволяет повысить скорость решения поставленной задачи и облегчить труд исследователя. Однако, при этом также полезно и целесообразно развивать логику рассуждений, геометрическое мышление, навыки и профессиональные компетенции при самостоятельном построении графиков многозначных функций. Цель работы заключается в том, чтобы показать, как максимально быстро и просто можно построить график функции с помощью знаний основных линейных преобразований, свойств модуля и свойств четных, нечетных тригонометрических функций. В рамках поставленной задачи, в работе рассмотрены практические приемы построения графиков различного уровня сложности. Содержание статьи будет актуально преподавателям и студентам младших курсов при изучении дисциплины «Математический анализ».

Ключевые слова

тригонометрические функции, графики функций, линейные преобразования, однозначные и многозначные функции

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-12

Введение

Авторы продолжают рассмотрение цикла статей, посвященных методике преподавания решения задач и построения эскизов графиков функций. Этот предмет обсуждения всегда вызывает наибольшие трудности и высокий интерес при решении задач как у старшеклассников, так и у первокурсников различных высших учебных заведений.

Безусловно, тема построения графиков функций не новая и имеется целый ряд учебников, справочников и учебно-методических пособий по этой тематике. В ставших уже классическими учебниках И.М. Гельфанда и соавторов [1], М.Я. Выгодского [2], Л.Э. Гендштейна и соавторов [3], В.А. Ильина, Э.Г. Позняка [4], рассматриваются подходы при построении различного рода функций, таких как: линейно-зависимых, квадратичных, дробно-рациональных, тригонометрических и др. В зарубежных статьях эта тема также вызывает живой интерес, предлагается целый ряд программных продуктов, например, Gnuplot - портативная, управляемая командами, интерактивная программа. Она позволяет строить графики и диаграммы для Linux, OS/2, MS Windows и многих других платформ (см. электронные ресурсы [5]). Авторами в [6] также было показано применение среды MathCAD в учебном процессе на примерах графического исследования некоторых вопросов поведения функций с использованием этого пакета прикладных программ.

Без всякого сомнения, привлечение программных средств повышает скорость решения задач. В то же время, целесообразно обучать старшеклассников и студентов различным способам выбора нахождения ответа: аналитическим, графическим и с применением программной среды.

Ранее в работах [7-10] авторами уже были рассмотрены особенности поведения *тригонометрических* функций, в которых присутствовал только внешний или только внутренний модуль, или одновременно внешний и внутренний модули. В настоящей работе речь пойдет о построении графиков *многозначных* тригонометрических функций.

Методология и результаты исследования

Прежде чем приступить к рассмотрению многозначных функций, дадим два определения для понимания различия между однозначной и многозначной функциями:

1. Однозначной функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственное значения y из множества Y.

2. Многозначной функцией называется закон (соответствие или правило) f, по которому хотя бы одному элементу x из множества X ставится в соответствие более одного значения y из множества Y.

Вот теперь, перейдем к обсуждению многозначных тригонометрических функций, в которых присутствует знак абсолютного значения.

Для построения ГМТ (геометрическое место точек), удовлетворяющих уравнениям:

$$|y| = f(x),\ |y| = |f(x)|,\ |y| = f(|x|),\ |y| = |f(|x|)|,$$

где $f(x)$ - тригонометрическая функция, используется тот же подход, что и для других линейных или квадратичных функциональных зависимостей. А именно:

1. Строим график функции $y = f(x)$ при $y \geq 0$;
2. Отображаем построенный на предыдущем шаге эскиз относительно оси абсцисс.

Рассмотрим действие данного алгоритма на конкретных примерах для всех четырех уравнений, перечисленных выше.

Пример 1: Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y| = 3\cos 2x$.

1. Цепочка преобразований функции $y = \cos x$ при любых значениях y такова: $y = \cos x \to y = 3\cos x \to y = 3\cos 2x$. Увеличиваем амплитуду колебаний графика $y = \cos x$ в три раза и получаем $y = 3\cos x$, период и область допустимых значений (ОДЗ) при этом не изменяются. Меняется только область значений: $E(y) = [-3,3]$.

Сжимаем график $y = 3\cos x$ относительно оси Ox в два раза, получаем $y = 3\cos 2x$. ОДЗ и область значений при этом не изменяются. Меняется только период $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Строим $y = 3\cos 2x$ при $y \geq 0$.

2. Отображаем график симметрично оси абсцисс.

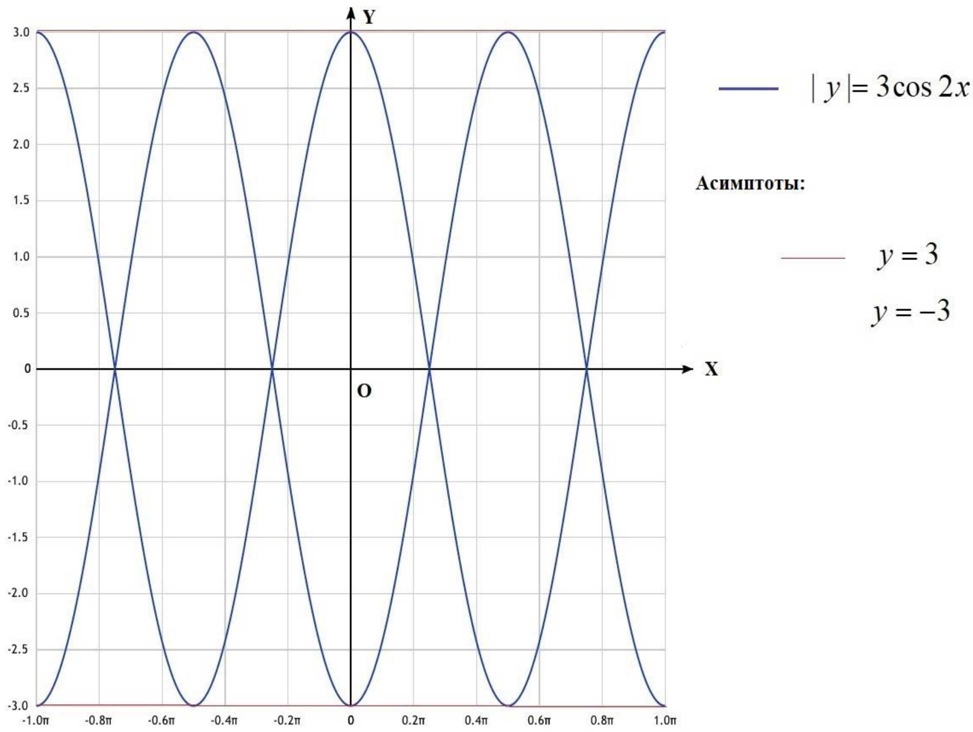

Рис.1 ГМТ, удовлетворяющее уравнению $|y| = 3\cos 2x$.

Пример 2. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y| = |2\sin x + 1|$.

1. Цепочка элементарных преобразований при любых значениях y: $y = \sin x \to y = 2\sin x \to y = 2\sin x + 1$. Увеличиваем амплитуду колебаний $y = \sin x$ и получаем график функции $y = 2\sin x$. Период и ОДЗ при этом не изменяются: $T = 2\pi$, $D(y) = R$, а область значений в этом случае $[-2,2]$.

Сдвигаем $y = 2\sin x$ на одну единицу вверх и получаем график функции $y = 2\sin x + 1$. Период и ОДЗ вновь не изменяются: $T = 2\pi$, $D(y) = R$. Меняется только область значений: $E(y) = [-1,3]$, где $y = 2\sin x + 1$.

Строим $y = |2\sin x + 1|$ при $y \geq 0$.

2. Отражаем график симметрично оси абсцисс.

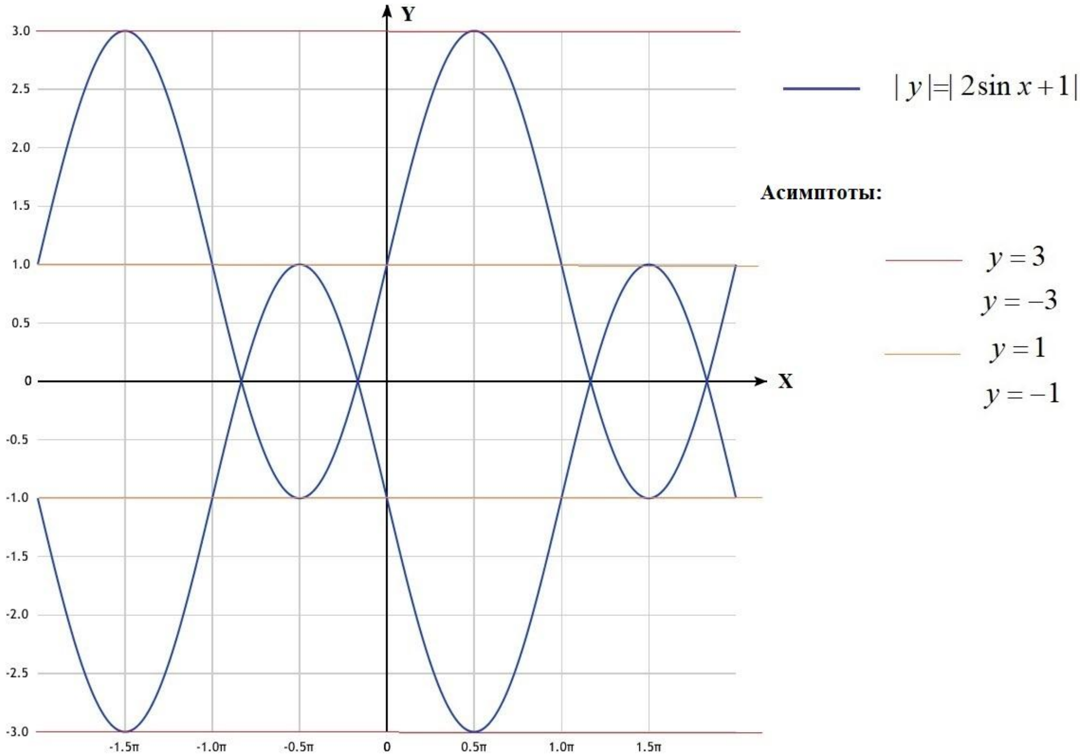

Рис. 2. ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y|=|2\sin x+1|$.

Пример 3. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y|=2ctg\left|\frac{\pi}{2}+3x\right|-\frac{\pi}{4}$.

1. Область определения функции $y=2ctg\left|\frac{\pi}{2}+3x\right|-\frac{\pi}{4}$ разбивается точкой $x=-\frac{\pi}{6}$ на две области: $x>-\frac{\pi}{6}$ и $x<-\frac{\pi}{6}$.

В первой области, то есть при $x>-\frac{\pi}{6}$, выражение $\left|\frac{\pi}{2}+3x\right|$ раскрываем со знаком «плюс». Таким образом, при $x>-\frac{\pi}{6}$ имеем функцию $y=2ctg\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\frac{\pi}{4}$.

Во второй области, то есть при $x<-\frac{\pi}{6}$, выражение $\left|\frac{\pi}{2}+3x\right|$ раскрываем со знаком «минус». Таким образом, при $x<-\frac{\pi}{6}$ имеем функцию $y=2ctg\left(-\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\right)-\frac{\pi}{4}=-2\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\frac{\pi}{4}$.

В итоге получаем, что необходимо построить эскиз графика функции

$$y=2ctg\,|\frac{\pi}{2}+3x|-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2ctg(\frac{\pi}{2}+3x)-\frac{\pi}{4}, x>-\frac{\pi}{6},\\ -2ctg(\frac{\pi}{2}+3x)-\frac{\pi}{4}, x<-\frac{\pi}{6}.\end{cases}$$

Строим $y=2ctg\left|\frac{\pi}{2}+3x\right|-\frac{\pi}{4}$ при $y\geq 0$.

2. Отражаем график относительно оси абсцисс.

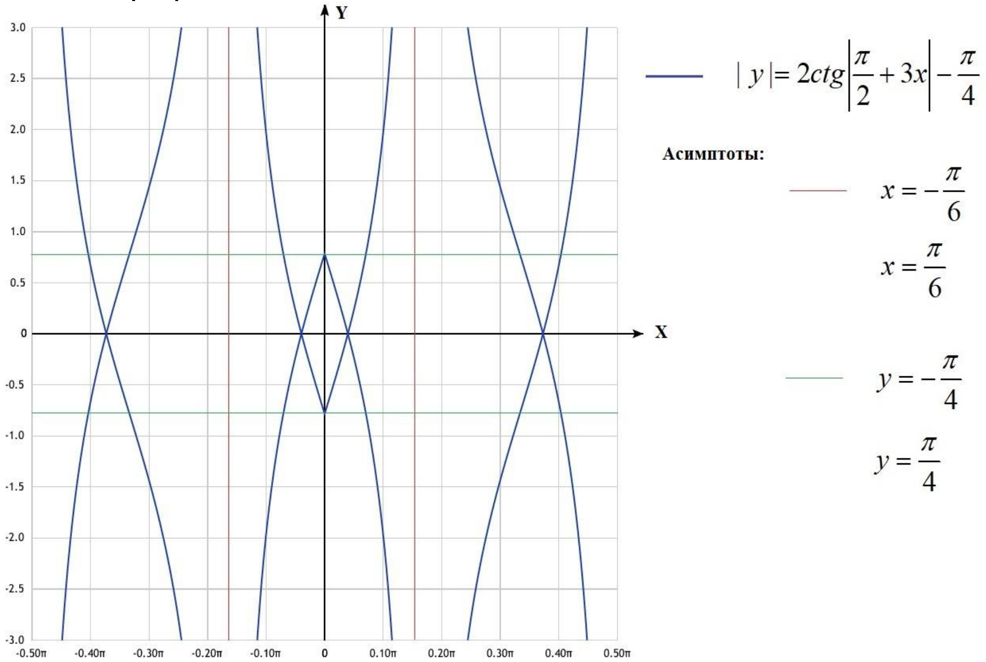

Рис. 3. ГМТ, удовлетворяющее уравнению $|y|=2ctg\left|\frac{\pi}{2}+3x\right|-\frac{\pi}{4}$.

Пример 4. Построить ГМТ, удовлетворяющих уравнению $|y|=\left|-\frac{1}{2}tg\left|\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right|+\frac{\pi}{3}\right|$.

1. Вначале рассмотрим график функции $y=-\frac{1}{2}tg\left|\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right|+\frac{\pi}{3}$ при любых значениях y. Приравниваем выражение, стоящее под знаком модуля, к нулю $\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x=0$, тогда $\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}x$, а $x=\frac{\pi}{2}$. Таким образом получаем две области: $x>\frac{\pi}{2}$ и $x<\frac{\pi}{2}$.

При $x>\frac{\pi}{2}$ имеем: $y=-\frac{1}{2}tg\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}x\right)+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right)+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}tg\left(-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{3}$.

При $x<\frac{\pi}{2}$ имеем: $y=-\frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right)+\frac{\pi}{3}$.

В итоге получаем кусочную функцию:

$$y=\left|-\frac{1}{2}tg\left|\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right|+\frac{\pi}{3}\right|=\begin{cases}\frac{1}{2}tg\left(-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{3}, x>\frac{\pi}{2},\\ -\frac{1}{2}tg\left(-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{3}, x<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Строим $y=\left|-\frac{1}{2}tg\left|\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right|+\frac{\pi}{3}\right|$ при $y\geq 0$.

2. Отражаем график относительно оси абсцисс.

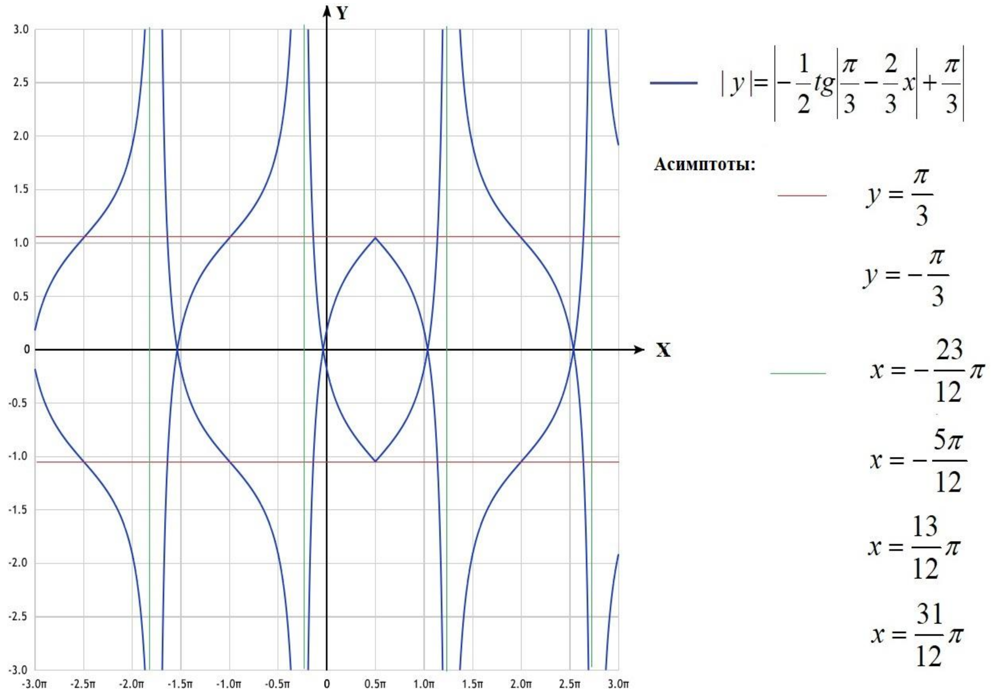

Рис. 4. ГМТ, удовлетворяющее уравнению $|y|=\left|-\frac{1}{2}tg\left|\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right|+\frac{\pi}{3}\right|$.

Заключение

Отметим, что данная работа будет полезна студентам первого курса МГТУ им. Н.Э. Баумана практически всех специальностей при выполнении первого контрольного домашнего задания по дисциплине «Математический анализ». Кроме того, на занятиях будет интересно рассмотреть графики многозначных тригонометрических функций и уделить особое внимание накоплению у студентов опыта самостоятельного выбора поиска решений.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э.: Функции и графики (основные приемы). 10-е, стереотипное, М: МЦНМО, 2019. - 120 с.
2. М. Я. Выгодский Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ Астрель, 2021. - 509 с.
3. Генденштейн Л. Э., Ершова А. П., Ершова А. С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей. - М.: Илекса, 2024, - 192 с.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. - Ч. 1. - М.: Физматлит, 2021. - 616 с.
5. Plotting Functions in Gnuplot. - URL: https://www.geeksforgeeks.org/plotting-functions-in-gnuplot/
6. Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». - 2017. - No V9. - С. 77–87. - URL: http://e-koncept.ru/2017/171024.htm
7. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков тригонометрических функций с помощью линейных преобразований // Modern European Researches. Salzburg, 2021. - Т. 1. - No 3. - P. 5-17. - URL: https://doaj.net/uploads/issue/issue_42.pdf
8. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внешнего модуля // Modern European Researches. Salzburg, 2022. - Т. 1. - No3. - P. 17-25. - URL: https://doaj.net/uploads/issue/issue_47.pdf
9. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внутреннего модуля // Modern European Researches. Salzburg, 2023. - Т. 1. - No1. - P. 18-28. - URL: https://doaj.net/uploads/issue/issue_53.pdf
10. Ахметова Ф. Х., Головина А. М., Власов П. А. Методика преподавания построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак модуля как внешнего, так и внутреннего //

Modern European Researches. Salzburg, 2024. - T. 1. - No1. - P. 5-11. - URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=65473069

Faniya Kh. Akhmetova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anastasiya M. Golovina,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nastya_gm@mail.ru

Teaching methods for plotting multi-valued trigonometric functions

Abstract. Software tools are often used to plot function graphs. Of course, this makes it possible to increase the speed of solving the task and facilitates the researcher's work. However, it is useful and advisable to develop the logic of reasoning, geometric thinking, skills and professional competencies in the independent construction of graphs of multivalued functions. The purpose of this paper is to show how it is possible to graph a function as quickly and simply as possible using knowledge of basic linear transformations, the properties of the module, and the properties of even and odd trigonometric functions. Within the framework of the task, practical techniques for plotting graphs of various levels of complexity are considered in the work. The content of the article will be relevant for teachers and undergraduates studying the discipline "Mathematical Analysis".

Keywords: trigonometric functions, graphs of functions, linear transformations, single-valued and multi-valued functions.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФРАНКА-ВУЛЬФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ДИСЦИПЛИНЫ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Аннотация

В статье рассмотрен алгоритм решения задачи нелинейного программирования методом Франка-Вульфа. Цель работы: проиллюстрировать особенности метода решения таких задач с линейной системой ограничений. Успешное освоение этой темы поможет студентам в выработке практических навыков для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности. Результаты исследования могут быть полезны для преподавателей при подготовке практических занятий и для студентов при выполнении лабораторных работ.

Ключевые слова

нелинейное программирование, задачи нелинейного программирования, нелинейная целевая функция, линейная система ограничений, метод Франка-Вульфа, итерационный процесс, градиент функции

АВТОРЫ

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат технических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Подзорова Марина Ивановна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
marinatichomirova@hotmail.com

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-19

Введение

Как указано в работах А.Г. Бурда, С.Н. Косников [1], И.К. Волков, Е.А. Загоруйко [2], основными задачами математического программирования являются построение, анализ и применение математических моделей принятия оптимальных решений. И.К. Волков, Е.А. Загоруйко [3] и Н.С. Бахвалов [4] определяют математическую модель как описание какого-либо класса явлений реального мира, выраженное с помощью математических символов.

К числу задач математического программирования И.К. Волков, Е.А. Загоруйко [5] и В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец [6] и другие авторы относят задачи нелинейного программирования, которые состоят в максимизации и минимизации выпуклой нелинейной функции на выпуклом многограннике.

Впервые метод решения этой задачи, называемый еще и методом условного градиента, был разработан в 1956 году Маргаритой Франк и Филипом Вульф [7]. Согласно этой работе [8] и статье В.С. Лобанова [9] метод основан на линеаризации нелинейной функции и нахождения максимума или минимума этой функции в том же направлении и на том же выпуклом множестве.

Актуальность решения задач математического программирования, в том числе и рассматриваемой задачи, состоит в том, что оно может служить основой для поддержки принятия необходимых решений.

В результате изучения дисциплины «Методы оптимизации» студенты должны знать основные методы решения задач математического программирования и численного моделирования, уметь применять их для решения профессиональных научных и инженерных задач, а также владеть навыками разработки алгоритмов и составления программных кодов их реализации.

Для успешного освоения дисциплины «Методы оптимизации» студенты должны предварительно изучить такие дисциплины учебного плана, как аналитическая геометрия, математический анализ, линейная алгебра.

Для актуализации знаний по ранее изученным темам студентам предлагается ответить на следующие вопросы:

1. Как определяется градиент функции и что он характеризует?
2. Какая задача математического программирования называют задачей линейного программирования?
3. Перечислите основные этапы решения задачи линейного программирования графическим способом.
4. Каковы основные отличия задач нелинейного программирования от задач линейного программирования?
5. Что называется допустимым планом задачи математического программирования?
6. Что называется оптимальным планом задачи математического программирования?

Методология и результаты исследования

Постановка задачи нелинейного программирования

Согласно классическим работам, к числу которых можно отнести книги И.К. Волков, Е.А. Загоруйко [10], Х.А. Таха [11], В. Г. Карманов [12], В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец [13], задача нелинейного программирования состоит в том, чтобы найти с точностью ε точку $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$, доставляющую максимум функции

$$\tilde{F}(\boldsymbol{u}) = \tilde{f}(u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{1}$$

и удовлетворяющую системе ограничений

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11} \cdot u_1 + \tilde{a}_{12} \cdot u_2 + \dots + \tilde{a}_{1n} \cdot u_n = \tilde{b}_1, \\ \tilde{a}_{21} \cdot u_1 + \tilde{a}_{22} \cdot u_2 + \dots + \tilde{a}_{2n} \cdot u_n = \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{a}_{m1} \cdot u_1 + \tilde{a}_{m2} \cdot u_2 + \dots + \tilde{a}_{mn} \cdot u_n = \tilde{b}_m, \\ u_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde{a}_{ij} = const$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$;

$\tilde{b}_j = const$, $j = 1, 2, \dots, m$.

$\tilde{f}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ - выпуклая, дважды дифференцируемая функция.

Для решения данной задачи строят последовательность точек $\{\boldsymbol{u}^k\}$, которая при $k \to \infty$ приближается к точке максимума $\boldsymbol{u}^*$ функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$. При этом точки $\boldsymbol{u}^k$ находят, используя выражение

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + \alpha_k \cdot \boldsymbol{p}^k, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{p}^k$- вектор, задающий направление от точки $\boldsymbol{u}^k$ к точке $\boldsymbol{u}^{k+1}$;

α_k - длина шага или шаг итерационного процесса.

Начальную точку $\boldsymbol{u}^0$ последовательности выбирают из области допустимых решений произвольно.

В каждой точке $\boldsymbol{u}^k$ последовательности нелинейную целевую функцию $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$ заменяют линейной функцией $\Phi(\boldsymbol{z})$ так, чтобы $\overline{grad\,\Phi(z^k)} = \overline{grad\,\tilde{F}(u^k)}$.

В результате, с учетом того, что система ограничений (2) рассматриваемой задачи линейна, получают задачу линейного программирования.

Процесс нахождения точки максимума продолжают до тех пор, пока

1) градиент $\overline{grad\,\tilde{F}(u^k)})$. целевой функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$ в точке $\boldsymbol{u}^k$ не будет равным нулю.

При этом точкой максимума $\boldsymbol{u}^*$ функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$ будет $\boldsymbol{u}^k$, т. е. $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^k$, $\tilde{F}_{max}(\boldsymbol{u}) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^*) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^k)$;

или

2) модуль разности значений целевой функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$ в точках $\boldsymbol{u}^{k+1}$ и $\boldsymbol{u}^k$ не станет меньше или равной числа ε, характеризующего точность решения задачи, т. е.

$$|\tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1}) - \tilde{F}(\boldsymbol{u}^k)| \leq \varepsilon .$$

При этом точкой максимума $\boldsymbol{u}^*$ функции $\widetilde{F(}\boldsymbol{u})$ будет точка $\boldsymbol{u}^{k+1}$, т. е. $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^{k+1}$, $\tilde{F}_{max}(\boldsymbol{u}) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^*) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1})$.

Алгоритм решения задачи нелинейного программирования методом Франка - Вульфа

1. Выбираем произвольно начальное приближение $\boldsymbol{u}^0$ решения задачи из области допустимых решений, и вычисляем значение $\tilde{F}(\boldsymbol{u}^0)$.

2. Находим градиент функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$

$$\overline{grad\,\tilde{F}(u)} = \left\{\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial\tilde{F}}{\partial u_n}\right\}.$$

3. Полагаем $k = 0$ (где k – номер итерации).

4. Находим градиент целевой функции

$$\overline{grad\,\tilde{F}(u^k)} = \left\{\frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_1}, \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_1}\right\}$$

в точке $\boldsymbol{u}^k$.

Если $\overline{grad\,\tilde{F}(u^k)}$. $= \{0.\ 0, \dots, 0\}$, то процесс решение задачи заканчиваем и тогда

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^k,\quad \tilde{F}_{max}(\boldsymbol{u}) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^*) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^k).$$

5. Составляем линейную целевую функцию

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_1}\cdot \boldsymbol{z}_1 + \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_{21}}\cdot \boldsymbol{z}_2 + \dots + \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_1}\cdot \boldsymbol{z}_n .$$

6. Решаем полученную задачу:

найти точку $\boldsymbol{z}^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k)$, доставляющую максимум целевой функции

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_1}\cdot \boldsymbol{z}_1 + \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_{21}}\cdot \boldsymbol{z}_2 + \dots + \frac{\partial\tilde{F}(u^k)}{\partial u_1}\cdot \boldsymbol{z}_n$$

и удовлетворяющую системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}\cdot z_1 + a_{12}\cdot z_2 + \dots + a_{1n}\cdot z_n = b_1, \\ a_{21}\cdot z_1 + a_{22}\cdot z_2 + \dots + a_{2n}\cdot z_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot z_1 + a_{m2}\cdot z_2 + \dots + a_{mn}\cdot z_n = b_m, \\ z_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

7. Находим решение $\boldsymbol{u}^{k+1}$ исходной задачи нелинейного программирования:

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + \alpha_k\cdot(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{u}^k), \qquad (4)$$

где α_k - шаг итерационного процесса, $0 \le \alpha_k \le 1$.

а. Определяем шаг α_k , при котором значение функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1})$ будет принимать наибольшее значение.

Для этого подставляем выражение (4) в целевую функцию (1) исходной задачи.

Если шаг α_k получается меньшим *0*, то его полагают равным *0*, а если большим *1*, то – равным *1*.

б. Подставляем найденное в пункте а. значение α_k в выражение (4) и находим решение $\boldsymbol{u}^{k+1}$ исходной задачи.

8. Вычисляем значение функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1})$.

9. Проверяем точность нахождения точки максимума $\boldsymbol{u}^*$ функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$.

Если $| \tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1}) - \tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k}) | > \varepsilon$, то увеличиваем номер итерации на *1*, т. е. полагаем $k = k + 1$, и переходим к пункту 4.

Если $| \tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1}) - \tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k}) | \le \varepsilon$, то решение задачи заканчиваем.

При этом $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^{k+1}$, $\breve{F}_{max}(\boldsymbol{u}) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^*) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^{k+1})$.

Пример.

Найти точку $\boldsymbol{u}^* = (u_1^* , u_2^*)$, доставляющую максимум целевой функции

$$\tilde{F}(\boldsymbol{u}) = - u_1^2 - u_2^2 + u_1 + 8 \cdot u_2 , \qquad (5)$$

и удовлетворяющую системе ограничений

$$\begin{cases} u_1 + u_2 \le 7 , \\ \qquad u_2 \le 5 , \\ u_1 \ge 0 , u_2 \ge 0 \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon = 0.1$.

Решение.

1. Выбираем начальное решение рассматриваемой задачи $\boldsymbol{u}^0 = (0, 0)$, которая принадлежит области допустимых решений.

Вычисляем значение функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u}^0)$

$$\tilde{F}(\boldsymbol{u}^0) = - (0)^2 - (0)^2 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0.$$

2. Находим $\overline{grad\ \tilde{F}(u)} = \left\{ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_1} , \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_2} \right\}$.

$$\overline{grad\ \tilde{F}(u)} = \{ - 2 \cdot x_1 + 1 , - 2 \cdot x_2 + 8 \}.$$

3. Полагаем $k = 0$.

Итерация $k = 0$.

4. Находим $\overline{grad\ \tilde{F}(u^9)} = \left\{ \frac{\partial \tilde{F}(u^0)}{\partial u_1} , \frac{\partial \tilde{F}(u^0)}{\partial u_2} \right\}$.

$$\overline{grad\ \tilde{F}(u^9)} = \{ 1, 8 \}.$$

5. Составляем линейную функцию

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = z_1 + 8 \cdot z_2 .$$

6. Решаем задачу линейного программирования:

найти переменные z_1 , z_2 , доставляющие максимум функции

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = z_1 + 8 \cdot z_2$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \le 7 , & \text{(I)} \\ \qquad z_2 \le 5 , & \text{(II)} \\ z_1 \ge 0 , z_2 \ge 0 . \end{cases}$$

Решаем задачу линейного программирования геометрическим способом (рис.1).

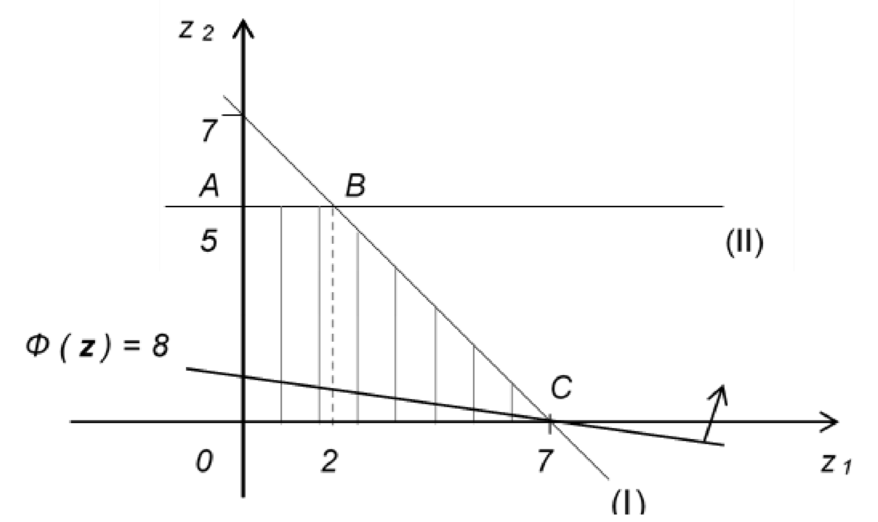

Рис. 1. Решение задачи линейного программирования при k = 0

Область допустимых решений: трапеция *0ABC*.

Строим линию уровня функции $\Phi(\,\mathbf{z}\,) = 8$ с градиентом в каждой точке z, равным $\overline{grad\ \Phi(z)} = \{\,1,\ 8\,\}$. Стрелкой показано направление ее возрастания.

Целевая функция $\Phi(\,\mathbf{z}\,)$ принимает максимальное значение в точке $B(\,2,\ 5\,)$

$$\Phi_{max}(\,\mathbf{z}\,) = \Phi(\,B\,) = \Phi(\,2\,,\ 5\,) = 42.$$

Таким образом, решение задачи линейного программирования – точка

$$\mathbf{z}^0 = (\,z_1{}^0,\ z_2{}^0\,) = (\,2,\ 5\,).$$

7. Находим решение $\mathbf{u}^1 = (\,u_1{}^1,\ u_2{}^1)$ исходной задачи:

$$\begin{aligned} u_1{}^1 &= u_1{}^0 + \alpha_0 \cdot (\,z_1{}^0 - u_1{}^0\,) = 0 + \alpha_0 \cdot (\,2 - 0\,) = 2\cdot \alpha_0\,, \\ u_2{}^1 &= u_2{}^0 + \alpha_0 \cdot (\,z_2{}^0 - u_2{}^0\,) = 0 + \alpha_0 \cdot (\,5 - 0\,) = 5\cdot \alpha_0\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

а. Подставляем выражение (6) в целевую функцию (5) исходной задачи.

В результате получаем функцию, зависящую от переменной α_0

$$\tilde{F}(\,\alpha_0\,) = -\,(\,2\cdot \alpha_0\,)^2 - (\,5\cdot \alpha_0\,)^2 + 2\cdot \alpha_0 + 8\cdot 5\cdot \alpha_0 = -\,29\cdot \alpha_0{}^2 + 42\cdot \alpha_0\,.$$

Находим значение переменной α_0, при которой функция $\tilde{F}(\,\alpha_0\,)$ достигает максимального значения.

Определяем первую производную

$$\frac{d\tilde{F}(\alpha_0)}{d\alpha_0} = -\,58\cdot \alpha_0 + 42,$$

приравняв которую к нулю, определяем критическую точку первого рода функции $\tilde{F}(\alpha_0)$

$$-\,58\cdot \alpha_0 + 42 = 0,$$

$$\alpha_0 \approx 0.724.$$

Находим вторую производную $\frac{d\,\tilde{F}^2(\alpha_0)}{d\alpha_0{}^2}$ функции $\tilde{F}(\alpha_0)$

$$\frac{d\,\tilde{F}^2(\alpha_0)}{d\alpha_0{}^2} = -\,58.$$

Поскольку вторая производная функции $\tilde{F}(\alpha_0)$ отрицательна, то эта функция достигает максимума в точке $\alpha_0 \approx 0.724$.

б. Подставляем найденное значение α_0 в выражение (6) и получаем решение $\mathbf{u}^1 = (\,u_1{}^1,\ u_2{}^1\,)$ исходной задачи

$$u_1{}^1 = 2\cdot 0.724 \approx 1.45,$$

$$u_2{}^1 = 5\cdot 0.724 \approx 3.62,$$

т. е. $\mathbf{u}^1 = (\,1.45;\ 3.62\,)$.

8. Вычисляем значение функции $\tilde{F}(\,\mathbf{u}^1\,)$

$$\tilde{F}(\boldsymbol{u}^1) = -(1.45)^2 - (3.62)^2 + 1.45 + 8 \cdot 3.62 = 15.2031.$$

9. Проверяем точность нахождения точки максимума $\boldsymbol{u}^*$ функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$.

Так как $|\tilde{F}(\boldsymbol{u}^1) - \tilde{F}(\boldsymbol{u}^0)| = |15.2031 - 0| = 15.2031 > \varepsilon = 0.1$, то заданная точность нахождения точки максимума функции $\breve{F}(\boldsymbol{u})$ не достигнута.

Полагаем номер итерации $k = 1$ и переходим к пункту 4.

Итерация $k = 1$.

4. Находим $\overline{grad\ \tilde{F}(u^1)} = \left\{ \frac{\partial \tilde{F}(u^1)}{\partial u_1}, \frac{\partial \tilde{F}(u^1)}{\partial u_2} \right\}$.

$$\overline{grad\ \tilde{F}(u^1)} = \{-1.90,\ 0.76\}.$$

5. Составляем линейную функцию

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = -1.90 \cdot z_1 + 0.76 \cdot z_2 .$$

6. Решаем задачу линейного программирования:

найти переменные z_1, z_2, доставляющие максимум целевой функции

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = -1.90 \cdot z_1 + 0.76 \cdot z_2$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \le 7, & \text{(I)} \\ z_2 \le 5, & \text{(II)} \\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем задачу линейного программирования геометрическим способом (рис.2).

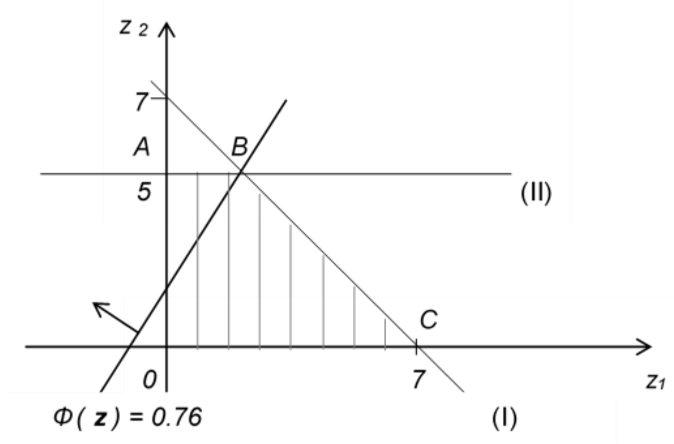

Рис. 2. Решение задачи линейного программирования при k = 1

Область допустимых решений: трапеция *0ABC*.

Строим линию уровня функции $\Phi(\boldsymbol{z}) = 0.768$ с градиентом в каждой точке z, равным $\overline{grad\ \Phi(z)} = \{-1.90,\ 0.76\}$. Стрелкой показано направление ее возрастания.

Целевая функция $\Phi(\boldsymbol{z})$ принимает максимальное значение в точке $A(0, 5)$

$$\Phi_{max}(\boldsymbol{z}) = \Phi(A) = \Phi(0, 5) = 3.80.$$

Таким образом, решение задачи линейного программирования – точка

$$\boldsymbol{z}^1 = (z_1^1, z_2^1) = (0, 5).$$

7. Находим решение $\boldsymbol{u}^2 = (u_1^2, u_2^2)$ исходной задачи:

Находим допустимое решение исходной задачи нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1^1 + \alpha_1 \cdot (z_1^1 - u_1^1) = 1.45 + \alpha_1 \cdot (0 - 1.45) = 1.45 - 1.45 \cdot \alpha_1, \\ u_2^2 &= u_2^1 + \alpha_1 \cdot (z_2^1 - u_2^1) = 3.62 + \alpha_1 \cdot (5 - 3.62) = 3.62 + 1.38 \cdot \alpha_1. \end{aligned} \quad (7)$$

а. Подставляем выражение (7) в целевую функцию (5) исходной задачи.

В результате получаем функцию, зависящую от переменной α_1

$$\tilde{F}(\alpha_1) = -(1.45 - 1.45 \cdot \alpha_1)^2 - (3.62 + 1.38 \cdot \alpha_1)^2 + 1.45 - 1.45 \cdot \alpha_1 +$$

$$+ 8\cdot (3.62 + 1.38\cdot \alpha_1) = - 4.0069\cdot \alpha_1^2 + 3.8038\cdot \alpha_1 + 15.2031.$$

Находим значение переменной α_1 , при которой функция $\tilde{F}(\alpha_1)$ достигает максимального значения.

Определяем первую производную

$$\frac{d\tilde{F}(\alpha_1)}{d\alpha_1} = - 8.0138\cdot \alpha_1 + 3.8038,$$

приравняв которую к нулю, определяем критическую точку первого рода функции $\tilde{F}(\alpha_1)$

$$- 8.0138\cdot \alpha_1 + 3.8038 = 0,$$

$$\alpha_1 \approx 0.475.$$

Находим вторую производную $\frac{d\,\tilde{F}^2(\alpha_1)}{d\alpha_1^2}$ функции $\tilde{F}(\alpha_1)$

$$\frac{d\,\tilde{F}^2(\alpha_1)}{d\alpha_1^2} = - 8.0138.$$

Поскольку вторая производная функции $\tilde{F}(\alpha_1)$ отрицательна, то эта функция достигает максимума в точке $\alpha_1 \approx 0.475$.

б. Подставляем найденное значение α_1 в выражение (7) и получаем решение $\boldsymbol{u}^2 = (u_1^2, u_2^2)$ исходной задачи:

$$u_1^2 = 1.45 - 1.45 \cdot 0.475 \approx 0.76,$$

$$u_2^2 = 3.62 + 1.38 \cdot 0.475 \approx 4.27,$$

т. е. $\boldsymbol{u}^2 = (0.76; 4.27)$.

8. Вычисляем значение целевой функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u}^2)$

$$\tilde{F}(\boldsymbol{u}^2) = - (0.76)^2 - (4.27)^2 + 0.76 + 8\cdot 4.27= 16.1095.$$

9. Проверяем точность нахождения точки максимума $\boldsymbol{u}^*$ функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$.

Так как $| \tilde{F}(\boldsymbol{u}^2) - \tilde{F}(\boldsymbol{u}^1) | = | 16.1095 - 15.2031 | = 0.9064 > \varepsilon = 0.1$, то заданная точность нахождения точки максимума функции $\tilde{F}(\boldsymbol{u})$ не достигнута.

Полагаем номер итерации $k = 2$ и переходим к пункту 4.

Итерация $k = 2$.

4. Находим $\overline{grad\ \tilde{F}(u^9)} = \left\{\frac{\partial\tilde{F}(u^2)}{\partial u_1}, \frac{\partial\tilde{F}(u^2)}{\partial u_2}\right\}$.

$$\overline{grad\ \tilde{F}(u^2)} = \{ - 0.52, - 0.54 \}.$$

5. Строим линейную функцию

$$\Phi (\boldsymbol{z}) = - 0.52\cdot z_1 - 0.54\cdot z_2 .$$

6. Решаем задачу линейного программирования:

найти переменные z_1 , z_2 , доставляющие максимум целевой функции

$$\Phi (\boldsymbol{z}) = - 0.52\cdot z_1 - 0.54\cdot z_2$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \le 7 , & \text{(I)} \\ z_2 \le 5 , & \text{(II)} \\ z_1 \ge 0 ,\ z_2 \ge 0 . \end{cases}$$

Решаем задачу линейного программирования геометрическим способом (рис.3).

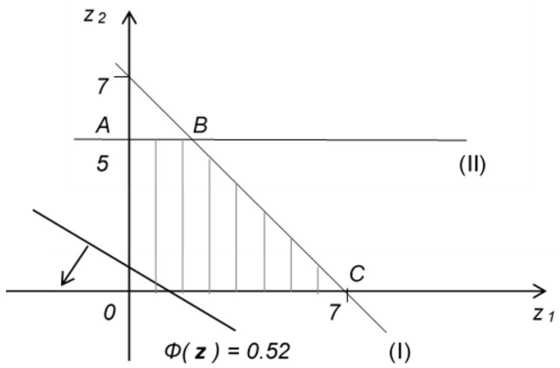

Рис. 3. Решение задачи линейного программирования при k = 2

Область допустимых решений: трапеция *0ABC*.

Строим линию уровня целевой функции $\Phi(\mathbf{z}) = 0.52$ с градиентом в каждой точке z, равным $\overline{grad\,\Phi(z)} = \{ -0.52, -0.54 \}$. Стрелкой показано направление ее возрастания.

Целевая функция $\Phi(\mathbf{z})$ принимает максимальное значение в точке $O(0, 0)$

$$\Phi_{max}(\mathbf{z}) = \Phi(O) = \Phi(0, 0) = 0.$$

Таким образом, решение задачи линейного программирования – точка

$$\mathbf{z}^2 = (z_1{}^2, z_2{}^2) = (0, 0).$$

7. Находим решение $\mathbf{u}^3 = (u_1{}^3, u_2{}^3)$ исходной задачи:

$$u_1{}^3 = u_1{}^2 + \alpha_2 \cdot (z_1{}^2 - u_1{}^2) = 0.76 + \alpha_2 \cdot (0 - 0.76) = 0.76 - 0.76 \cdot \alpha_2,$$
$$u_2{}^3 = u_2{}^2 + \alpha_2 \cdot (z_2{}^2 - u_2{}^2) = 4.27 + \alpha_2 \cdot (0 - 4.27) = 4.27 - 4.27 \cdot \alpha_2. \quad (8)$$

а. Подставляем выражение (8) в целевую функцию (5) исходной задачи.

В результате получаем функцию, зависящую от переменной α_2

$$\tilde{F}(\alpha_2) = -(0.76 - 0.76\cdot\alpha_2)^2 - (4.27 - 4.27\cdot\alpha_2)^2 + 0.76 - 0.76\cdot\alpha_2 +$$
$$+ 8\cdot(4.27 - 4.27\cdot\alpha_2) = -18.8105\cdot\alpha_2{}^2 + 2.7010\cdot\alpha_1 + 16.1095.$$

Находим значение переменной α_2, при которой функция $\breve{F}(\alpha_2)$ достигает максимального значения.

Определяем первую производную

$$\frac{d\tilde{F}(\alpha_2)}{d\alpha_2} = -37.6210\cdot\alpha_2 + 2.70,$$

приравняв которую к нулю, определяем критическую точку первого рода функции $\tilde{F}(\alpha_2)$

$$-37.6210\cdot\alpha_2 + 2.7010 = 0,$$
$$\alpha_2 \approx 0.072.$$

Находим вторую производную $\frac{d\,\tilde{F}^2(\alpha_2)}{d\alpha_2{}^2}$ функции $\tilde{F}(\alpha_2)$

$$\frac{d\,\tilde{F}^2(\alpha_2)}{d\alpha_2{}^2} = -37.621.$$

Поскольку вторая производная функции $\tilde{F}(\alpha_2)$ отрицательна, то эта функция достигает максимума в точке $\alpha_2 \approx 0.072$.

б. Подставляем найденное значение α_2 в выражение (8) и получаем допустимое решение $\mathbf{u}^3$ исходной задачи:

$$u_1{}^3 = 0.76 - 0.76\cdot 0.072 \approx 0.71,$$
$$u_2{}^3 = 4.27 - 4.27\cdot 0.072 \approx 3.96,$$

т. е. $\mathbf{u}^3 = (0.71; 3.96)$.

8. Вычисляем значение целевой функции $\tilde{F}(\mathbf{u})$ в точке $\mathbf{u}^3$

$$\tilde{F}(\mathbf{u}^3) = -(0.71)^2 - (3.96)^2 + 0.71 + 8\cdot 3.96 = 16.2043.$$

9. Проверяем точность нахождения точки максимума $\mathbf{u}^*$ функции $\tilde{F}(\mathbf{u})$.

Так как | $\tilde{F}(\boldsymbol{u}^3) - \tilde{\breve{F}}(\boldsymbol{u}^2)$ | = | $16.2043 - 16.1095$ | $= 0.0948 \le \varepsilon = 0.1$, то заданная точность нахождения точки максимума функции $\breve{F}(\boldsymbol{u})$ достигнута. Итерационный процесс заканчиваем и полагаем

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^3 = (0.71;\ 3.96),\quad \tilde{F}_{max}(\boldsymbol{u}) = \tilde{F}(\boldsymbol{u}^*) = \breve{F}(\boldsymbol{u}^3) = \tilde{F}(0.71;\ 3.96) = 16.2043.$$

Таким образом, с точностью $\varepsilon = 0.1$ точка $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^3 = (0.71;\ 3.96)$ доставляет максимум целевой функции

$$\tilde{F}(\boldsymbol{u}) = -u_1^2 - u_2^2 + u_1 + 8\cdot u_2$$

и удовлетворяет системе ограничений

$$\begin{cases} u_1 + u_2 \le 7, \\ \qquad u_2 \le 5, \\ u_1 \ge 0,\ u_2 \ge 0. \end{cases}$$

При этом $\tilde{F}_{max}(\boldsymbol{u}) = \breve{F}(0.71;\ 3.96) = 16.2043$.

Задание для самостоятельной работы

Для закрепления изучения темы: «Решение задач нелинейного программирования методом Франка-Вульфа», студентам предлагается, используя описанный алгоритм, написать программный код и решить задачу в соответствии со своим вариантом.

Заключение

В работе приведен алгоритм решения задач нелинейного программирования методом Франка-Вульфа и пример его использования для решения практической задачи.

Материал, представленный в данной статье, может быть использован преподавателями при подготовке и проведении практических и лабораторных занятий по теме: «Решение задач нелинейного программирования», а также студентами для самостоятельной работы.

Приведенный в статье алгоритм решения задач нелинейного программирования методом Франка-Вульфа будет полезным студентам при выполнении лабораторных работ и может способствовать в выработке у них навыков по решению задач численного моделирования и применения методов оптимизации для решения теоретических и прикладных задач профессиональной деятельности.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Бурда А.Г., Косников С.Н. Оптимизация и основы теории принятия решений: учебник для вузов. СПб: Лань, 2024. - 176 с.
2. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций: Учеб, для вузов – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 436 с.
3. Там же.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы: учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов Н.П. Жидков Г.М. Кобельков; под общ. ред. Н.И. Тихонова. М.: Физматлит: Лаб. базовых знаний; СПб.: Нев. диалект, 2002. - 630 с.:
5. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Указ. соч.
6. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. СПб: Лань, 2022. - 344 с.
7. Frank M., Wolfe P. An algorithm for quadratic programming// Naval Research Logistics Quarterly. 1956. - Т. 3, вып. 1-2. - С. 95–110.
8. Там же.
9. Лобанов В.С. Метод линеаризации для задач условной оптимизации. Алгоритм Франка-Вульфа // Молодой ученый. - 2020. - № 3 (293). - С. 8-12. - URL: https://moluch.ru/archive/293/66414/ (дата обращения: 13.04.2025).
10. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Указ. соч.
11. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. - 912 с.

12. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2004. - 264 с.
13. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Указ. соч.

Olga N. Bakhtiyarova,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
olga-bakh06@mail.ru
Marina I. Podzorova,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
marinatichomirova@hotmail.com
Inga V. Ptitsyna,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru

Application of the Frank-Wolf method for solving nonlinear programming problems in the course of the discipline "Optimization Methods"

Abstract. The article considers an algorithm for solving a nonlinear programming problem using the Frank-Wolf method. The purpose of the work is to illustrate the features of a method for solving such problems with a linear system of constraints. Successful mastery of this topic will help students develop practical skills to solve theoretical and applied problems of professional activity. The results of the study can be useful for teachers when preparing practical exercises and for students when performing laboratory work.

Keywords: nonlinear programming, nonlinear programming tasks, nonlinear objective function, linear constraint system, the Frank-Wolfe method, an iterative process, the gradient of the function.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ»

Аннотация

Вычисление контурных интегралов является одной из основных задач в «Теории функций комплексной переменной». Целью данной работы является рассмотрение методики преподавания темы «Контурные интегралы от комплексных функций». Для этого в работе рассмотрены различные методы вычисления контурных интегралов: непосредственное интегрирование, с помощью интегральной формулы Коши и с использованием теоремы Коши о вычетах. Приводятся примеры вычисления одного и того же интеграла разными методами. Работа будет полезна преподавателям и студентам вузов в процессе изучения «Теории функций комплексной переменной».

Ключевые слова

контурный интеграл, интегральная формула Коши, теорема Коши о вычетах

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский Государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Келдыш Елизавета Петровна,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
liza.keldysh@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-29

Введение

Вычисление контурных интегралов является одним из основных умений студентов, изучающих «Теорию функций комплексной переменной» (ТФКП). Контурные интегралы находят применение во множестве областей математики и физики.

Для вычисления контурных интегралов можно использовать разные методы (см. учебник В.Д. Морозовой [1] и задачник М.Л. Краснова [2]): непосредственное интегрирование, с помощью интегральной формулы Коши и с использованием теоремы Коши о вычетах. Это довольно разные способы, рассматриваемые в процессе изучения дисциплины «ТФКП». И для лучшего понимания связи между формулами комплексного анализа полезно рассмотреть вычисление одних и тех же интегралов разными способами. Этот же приём спасает и в случае ограниченного количества часов, выделенных на изучение «ТФКП».

В данной работе рассмотрены различные методы вычисления контурных интегралов от комплексных функций. Кратко перечислены основные теоремы и формулы, необходимые для вычисления контурных интегралов. Приводятся примеры вычисления одного и того же интеграла разными методами.

Работа будет полезна преподавателям и студентам вузов в процессе изучения «ТФКП».

Методология и результаты исследования

Начать рассмотрение темы следует с краткого напоминания основных теорем и формул, необходимых для вычисления контурных интегралов. Преподавателю необходимо понимать, что те теоремы и формулы, которые ему хорошо известны, учащиеся могли видеть всего один раз на лекции, возможно, не полностью поняли эти формулы и уж тем более не знают их наизусть. Поэтому напоминание.

Пусть $f(z)$ – функция от комплексного переменного. Контурным интегралом от функции $f(z)$ называется интеграл по простой замкнутой кривой L. Обозначается:

$$\oint_L f(z)\,dz.$$

Всюду далее будем по умолчанию предполагать, что контур в интеграле обходится в положительном направлении, то есть так, что при обходе контура ограниченная им область остаётся слева.

Для решения задач потребуются следующие три теоремы Коши: для аналитической функции, интегральная теорема и теорема о вычетах. Здесь важно не просто выписать формулы, но и чётко сформулировать условия теорем, при которых эти формулы выполняются. В процессе решения задач перед применением каждой формулы надо будет явно проверять выполнение всех условий соответствующей теоремы.

Теорема 1. Пусть дана односвязная область D и кусочно гладкий контур L расположен в области D. Тогда для любой функции $f(z)$, аналитической в D, имеем:

$$\oint_L f(z)\,dz = 0.$$

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно дана точка $z_0 \in D$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{1}$$

Из формулы (1) можно получить выражение для производной n-го порядка:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \tag{2}$$

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 функция $f(z)$ имеет в D особенности z_1, z_2, …, z_n. Тогда

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \tag{3}$$

При вычислении контурных интегралов может оказаться полезной ещё и теорема о сумме вычетов:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0. \tag{4}$$

Начать рассмотрение примеров следует с простого контурного интеграла. Проще всего взять какой-нибудь простой интеграл от рациональной дроби, поскольку его можно также вычислить непосредственно. Весь процесс решения необходимо подробно комментировать учащимся, указывая на возможные и часто встречающиеся ошибки.

Рассмотрим пример:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z}.$$

Начнём с непосредственного интегрирования. Для этого разложим выражение $\frac{3}{z^2 - 3z}$ на слагаемые, каждое из которых является простейшей дробью. К моменту изучения интегралов в ТФКП учащиеся обычно уже хорошо знают метод неопределённых коэффициентов для выполнения этой задачи и это не вызывает трудностей.

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z - 3} - \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z}.$$

У выражения $\frac{1}{z-3}$ есть особенность $z = 3$, но эта точка вне области с границей $|z| = 2$. Поэтому в соответствии с теоремой 1 имеем:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z - 3} = 0.$$

У выражения $\frac{1}{z}$ одна особенность $z = 0$, и эта точка расположена внутри области с границей $|z| = 2$. Вычислим этот интеграл непосредственно с помощью замены переменной $z = 2e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0; 2\pi]$. Эта замена представляет собой параметризацию окружности с вещественным параметром φ и позволяет свести комплексный интеграл к обычному определённому интегралу с вещественной переменной. Найдём дифференциал $dz = 2ie^{i\varphi}\,d\varphi$ и получаем:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{i\varphi}\,d\varphi}{2e^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

Объединяя оба вычисления, получаем:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = 0 - 2\pi i = -2\pi i.$$

Надо заметить, что данным методом можно вычислить только достаточно простые интегралы. Поэтому в основном при решении задач используются другие методы, о которых пойдёт речь далее.

Другой способ вычисления данного интеграла – использование формулы (1), из которой получаем:

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Для применения этой формулы перепишем выражение в следующем виде:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{3}{z-3}}{z - 0}\,dz.$$

Отсюда в силу (1) для $z_0 = 0$ и $f(z) = \frac{3}{z-3}$ находим $f(z_0) = \frac{3}{0-3} = -1$ и вычисляем:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = 2\pi i \cdot f(z_0) = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i.$$

Здесь полезно отметить, что применение формулы (1) возможно только, если в области, по границе которой происходит интегрирование, расположена ровно одна особенность подынтегральной функции. В случае, когда особенностей несколько, следует разложить выражение в сумму так, чтобы у каждого слагаемого была ровно одна особенность.

Важно также обратить внимание на типичные ошибки, связанные с применением формулы (1): это неверный выбор точки z_0, а также потеря коэффициента $2\pi i$.

Третий способ вычисления – использование формулы (3). Для применения этой формулы необходимо найти все особые точки, расположенные внутри области с границей $|z| = 2$. В данном случае такая особенность только одна $z = 0$, поэтому:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(0)$$

Чтобы найти $\operatorname{Res} f(0)$, рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{3}{z^2 - 3z} = \infty.$$

Так как получилась бесконечность, то $z = 0$ является полюсом. Исходя из следующего предела:

$$\lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{3z}{z^2 - 3z} = \lim_{z\to 0} \frac{3}{z - 3} = -1,$$

видим, что $z = 0$ является простым полюсом и, значит

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = -1$$

Здесь можно акцентировать внимание на том факте, что конечный ненулевой предел $\lim\limits_{z\to 0} z \cdot f(z)$ помогает установить, что точка является простым полюсом, а для простого полюса значение этого предела равно вычету в данной точке.

Отсюда получаем:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i.$$

Здесь полезно сравнить два способа вычисления – с помощью формулы (1) и с помощью формулы (3). Видим, что, по сути, это одно и то же решение, но записанное и интерпретированное немного по-разному. Рассмотрение этого примера даёт хорошее представление о связи формул (1) и (3).

Есть ещё один способ вычисления этого же интеграла. У функции $f(z) = \frac{3}{z^2 - 3z}$ за пределами области с границей $|z| = 2$ есть две особенности: $z = 3$ и $z = \infty$. По формуле (4)

$$\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(3) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0.$$

Объединяя это равенство с теоремой 3, получаем следующую формулу:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = 2\pi i \cdot (-\operatorname{Res} f(3) - \operatorname{Res} f(\infty)).$$

Для нахождения $\operatorname{Res} f(3)$ определим тип особенности $z = 3$. Так как

$$\lim_{z\to 3} f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{3}{z^2 - 3z} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{z\to 3} (z-3) \cdot f(z) = \lim_{z\to 3} \frac{3(z-3)}{z^2 - 3z} = \lim_{z\to 3} \frac{3}{z} = 1,$$

то $z = 3$ является простым полюсом и, следовательно,

$$\operatorname{Res} f(3) = \lim_{z\to 3} (z-3) \cdot f(z) = 1.$$

Для нахождения $\operatorname{Res} f(\infty)$ определим тип особенности $z = \infty$. Так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{3}{z^2 - 3z} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{z\to\infty} z^2 \cdot f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{3z^2}{z^2 - 3z} = 3,$$

то $z = \infty$ является нулём второго порядка и, значит,

$$\operatorname{Res} f(\infty) = 0.$$

Так что получаем:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3\,dz}{z^2 - 3z} = 2\pi i \cdot (-1 - 0) = -2\pi i.$$

Таким образом, один и тот же интеграл был посчитан четырьмя различными способами, на которых проиллюстрированы важнейшие формулы ТФКП.

Рассмотрим теперь более сложный пример:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2 - 4)}\,dz.$$

Вычислим его сначала по теореме 2. У $f(z) = \frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)}$ в области с границей $|z - 2| = 3$ расположено две особенности: $z = 0$ и $z = 2$. Поэтому необходимо сначала представить выражение $\frac{16}{z^2\,(z^2-4)}$ следующим образом:

$$\frac{16}{z^2(z^2 - 4)} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z + 2} - \frac{4}{z^2}.$$

Тогда

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2 - 4)}\,dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos z}{z - 2}\,dz - \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos z}{z + 2}\,dz - \oint_{|z-2|=3} \frac{4\cos z}{z^2}\,dz.$$

Здесь первый интеграл находится по формуле (1):

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{\cos z}{z - 2}\,dz = 2\pi i \cdot \cos z|_{z=2} = 2\pi i \cos 2.$$

Здесь полезно будет ещё раз напомнить учащимся об условиях применения формулы (1) и о том, почему в данном случае все условия выполняются.

Во втором интеграле $\frac{\cos z}{z+2}$ имеет одну особенность $z = -2$. Эта точка расположена за пределами области с границей $|z - 2| = 3$. Поэтому в соответствии с теоремой 1:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{\cos z}{z + 2}\,dz = 0.$$

Здесь нужно акцентировать внимание на отличии этого интеграла от предыдущего, в частности, на том факте, почему здесь формула (1) не применима.

Третий интеграл можно найти по формуле (2):

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0).$$

Имеем:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{4\cos z}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot (4\cos z)'|_{z=0} = 2\pi i \cdot (-4\sin z)'|_{z=0} = -8\pi i \cdot \sin 0 = 0.$$

Здесь впервые в данных примерах встречается применение формулы (2), соответственно, нужно объяснить, почему следует использовать именно эту формулу, а не формулу (1). Важно обратить внимание и на типичные ошибки, связанные с формулой (2): это неправильный выбор точки z_0, неверный порядок производной, а также потеря коэффициента $2\pi i/n!$.

Объединяя все три значения, получаем:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)}\,dz = 2\pi i\cos 2 - 0 - 0 = 2\pi i\cos 2.$$

Другим способом решения является использование теоремы 3:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)}\,dz = 2\pi i\cdot(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(2)).$$

Чтобы найти $\operatorname{Res} f(0)$, рассмотрим предел:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)} = \infty.$$

Так как получается бесконечность, то $z=0$ является полюсом и, исходя из следующего предела:

$$\lim_{z\to 0} z^2\cdot f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{16\cos z}{z^2-4} = -4,$$

видим, что это полюс второго порядка. Поэтому

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{16\cos z}{z^2-4}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{-16\sin z\,(z^2-4) - 16\cos z\cdot 2z}{(z^2-4)^2} = 0.$$

Здесь следует обратить внимание на одну из частых ошибок, а именно, за вычет берут значение предела $\lim\limits_{z\to 0} z^2\cdot f(z)$, забывая, что для полюсов второго порядка надо взять производную первого порядка. Полезно указать и на альтернативный способ вычисления вычета через разложение в ряд Лорана, который в данном случае можно на самом деле и не вычислять. В силу чётности функции и без вычисления ясно, что в ряде Лорана будут только чётные степени переменной и поэтому $c_{-1}=0$. Значит, $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$.

Аналогично находим $\operatorname{Res} f(2)$. Так как

$$\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{z\to 2}(z-2)\cdot f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{16\cos z}{z^2(z+2)} = \cos 2,$$

то точка $z=2$ является простым полюсом и

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\cdot f(z) = \cos 2.$$

Таким образом:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)}\,dz = 2\pi i\cdot(0+\cos 2) = 2\pi i\cos 2.$$

Этот же пример можно решить через вычеты в особенностях, расположенных за пределами области с границей $|z-2|=3$:

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)}\,dz = 2\pi i\cdot(-\operatorname{Res} f(-2) - \operatorname{Res} f(\infty)).$$

Так как

$$\lim_{z\to -2} f(z) = \lim_{z\to -2}\frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{z\to -2}(z+2)\cdot f(z) = \lim_{z\to -2}\frac{16\cos z}{z^2(z-2)} = -\cos 2,$$

то $z=-2$ является простым полюсом и

$$\operatorname{Res} f(-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)\cdot f(z) = -\cos 2.$$

Точка $z=\infty$ является существенно особой. Поэтому для нахождения $\operatorname{Res} f(\infty)$ следовало бы разложить функцию $f(z) = \frac{16\cos z}{z^2\,(z^2-4)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности и тогда $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1}$. Но в силу чётности функции и без вычисления ясно, что будут только чётные степени переменной и поэтому $c_{-1}=0$. Значит, $\operatorname{Res} f(\infty)=0$.

Так что

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{16\cos z}{z^2(z^2-4)}\,dz = 2\pi i\cdot(-(-\cos 2)-0) = 2\pi i\cos 2.$$

Таким образом, данный интеграл посчитан тремя различными способами, на которых ещё раз проиллюстрированы основные формулы ТФКП.

Дополнительные примеры интегралов для проведения семинарского занятия или самостоятельной работы можно найти в учебных пособиях Е.А. Григорьева [3], Н.П. Семериковой [4] и И.Н. Дробязко [5].

Заключение

В данной статье рассмотрены различные методы вычисления контурных интегралов. Для каждого интеграла указано по несколько вариантов его вычисления, что позволяет сравнить лучше понять связь между формулами комплексного анализа. Рассмотренные в работе примеры помогут преподавателю подготовить и провести семинарское занятие сразу по нескольким важным темам «ТФКП»: интегрирование комплексных функций, интегральная формула Коши, теорема Коши о вычетах. Это поможет сэкономить учебные часы для изучения других разделов комплексного анализа.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. X.)
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 304 с.
3. Григорьев Е.А. Введение в комплексный анализ: теория и практика: учебное пособие. – М.: Факультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015. – 287 с.
4. Вычеты и их применение к вычислению интегралов: учеб.-метод. Пособие / Н.П. Семерикова, А.А. Дубков, А.А. Харчева. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. – 47 с.
5. Дробязко И.Н. Контурное интегрирование функций комплексного переменного: учеб. пособие. – Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 82 с.

Oleg N. Biryukov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru
Elizaveta P. Keldysh,
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
liza.keldysh@bmstu.ru

Methodological aspects of teaching the topic "Calculation of contour integrals of complex functions"

Abstract. The calculation of contour integrals is one of the important tasks in the «Theory of functions of a complex variable». The purpose of this paper is to consider the teaching methodology of the topic «Contour integrals of complex functions». To do this, the paper considers various methods for calculating contour integrals: direct integration, using the Cauchy integral formula and using Cauchy's deduction theorem. Examples of calculating the same integral using different methods are given. The work will be useful for teachers and university students in the process of studying the "Theory of functions of a complex variable".

Keywords: contour integral, Cauchy integral formula, Cauchy's theorem on deductions.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Аннотация

Потребность вычисления двойных интегралов возникает при решении множества различных задач: инженерных, физических и т.д. Формирование навыков грамотного вычисления двойных интегралов является актуальной задачей при подготовке инженерных кадров. В работе рассматриваются особенности методики преподавания использования замены переменных и, в частности, полярных координат, для вычисления двойного интеграла. Приводятся типичные ошибки, совершаемые при решении подобных задач и способы их устранения. Даны необходимые для обоснования рассматриваемого метода краткие теоретические сведения. Рассматриваются примеры, иллюстрирующие использование полярных координат для вычисления двойного интеграла.

Ключевые слова

двойной интеграл, повторный интеграл, замена переменных, полярные координаты

АВТОРЫ

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Власова Елена Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва,
skupova189@yandex.ru

Попов Владимир Семенович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва, Российская Федерация
vspopov@bk.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-36

Введение

При изучении физики, механики, а также при решении разнообразных задач часто возникает задача вычисления интегралов от функций нескольких переменных. Эти интегралы приходится вычислять по двух и трехмерным областям, поверхностям и разнообразным кривым. В данной работе рассматривается двойной интеграл, понятие которого первоначально возникло при решении прикладных задач: задачи об объеме цилиндрического тела, о массе пластины и т.п. Однако теперь, круг его применения стал гораздо шире. Не случайно любой более-менее серьезный современный математический пакет имеет в своем составе средства для вычисления двойных интегралов. При этом, на наш взгляд, нельзя все отдавать на откуп технике и всецело полагаться на ее возможности. Во всем есть свои ограничения, и грамотный инженер должен не только уметь пользоваться подобными пакетами программ, но и иметь представления о том, как они работают, какие есть ограничения. Это необходимо, в первую очередь, чтобы избежать бездумного «запихивания» в подобные пакеты всего и вся, в надежде что что-нибудь да получится. Знание методов вычисления позволяет, при необходимости, правильно поставить задачу или, при необходимости, переформулировать ее так, чтобы используемые программы смогли найти адекватное решение.

Данная работа является продолжением работы М.А. Велищанского с соавторами [1], посвященной методике преподавания семинара по вычислению двойного интеграла. Представленный далее материал получен на основании опыта преподавания в МГТУ им. Н.Э. Баумана семинарских занятий по курсу «Кратные и криволинейные интегралы, теория поля и ряды».

Методология и результаты исследования

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению методики проведения занятия о замене переменных в двойном интеграле, напомним некоторые известные [2,3] формулы и теоремы, которые будут использованы нами в дальнейшем при рассмотрении иллюстрирующих примеров.

Рассматриваемый в статье метод, используемый при замене переменных в двойном интеграле, базируется на следующей теореме [4].

Теорема 1. Пусть отображение $\boldsymbol{x = x(u,v), y = y(u,v)}$, $\boldsymbol{(u,v) \in G^*}$ взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $\boldsymbol{G^*} \subset \mathbb{R}^2$ на область $\boldsymbol{D^*} \subset \mathbb{R}^2$, причем якобиан $\boldsymbol{J(u,v)}$ этого отображения в $\boldsymbol{G^*}$ отличен от нуля. Если $\boldsymbol{D \subset D^*}$ - квадрируемая замкнутая область и $\boldsymbol{f(x,y)}$ - функция, непрерывная в $\boldsymbol{D}$, то имеет место следующая формула:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv.$$

Далее в работе все рассматриваемые функции будут непрерывными, а области - квадрируемыми. Мы более не будем заострять внимание на проверке выполнения данных условий.

Замечание 1. Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области G^* и как криволинейные координаты для точек области D^*.

Замечание 2. Можно показать корректность приведенной формулы и в случае обращения в нуль якобиана $J(u,v)$ указанного преобразования в одной или нескольких точках области G^*.

Замечание 3. В результате замены переменных в двойном интеграле область интегрирования изменяется. В общем случае нужно построить новую область интегрирования (в новых переменных) и в ней провести расстановку пределов интегрирования, как это было рассмотрено, к примеру, в статье М.А. Велищанского с соавторами [5]. Однако в простейших ситуациях расстановку пределов интегрирования можно провести и по исходной области интегрирования.

На наш взгляд, следует особо обратить внимание студентов именно на это замечание, поскольку в большинстве случаев, рассматриваемых на семинаре по данной теме, изображение области интегрирования происходит именно в исходной системе координат. Для лучшего понимания студентами процесса расстановки пределов интегрирования в новых координатах, желательно, хотя бы раз, изобразить сразу обе области интегрирования: исходную и преобразованную.

Так же в начале занятия следует обратить внимание студентов на тот факт, что замену переменных в двойном интеграле, используют для приведения его к виду, более удобному для вычисления. Это достигается не только упрощением подынтегральной функции, но и упрощением области интегрирования. Упрощение вида области интегрирования облегчает расстановку пределов и вычисление повторного интеграла.

Наиболее известными из криволинейных координат, используемых при преобразовании двойного интеграла, являются полярные координаты [6] (см. рис. 1):

$$x = r\cos\varphi\,,\ y = \sin\varphi\,,\ J(r,\varphi) = r. \tag{1}$$

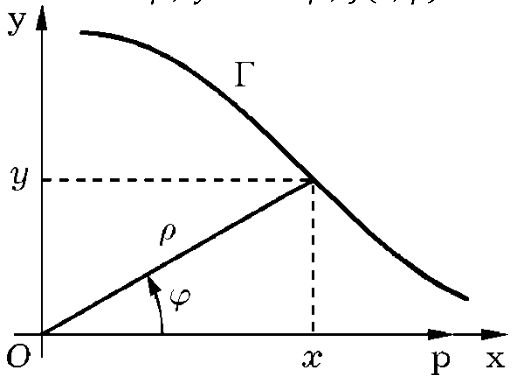

Рис. 5 Полярная и декартовая системы координат

Наиболее удобными для представления в полярной системе координат являются области, которые могут быть представлены в декартовой системе координат в виде криволинейного сектора, представленного на рис. 2.

Действительно, двойной интеграл по области D может быть записан в виде повторного интеграла по полярным координатам следующим образом:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r,\varphi)rdr. \tag{2}$$

Заметим, что представление данного интеграла в виде повторного в декартовых координатах гораздо более трудоемко. Данный факт легко объяснить, если изобразить данный криволинейный сектор в «родных» координатах ρ и φ (см. рис. 3). В новой системе координат ρ и φ образом исходной области D является область G (см. рис. 3), которая представляет собой обычную криволинейную трапецию, т.е. является Y-правильной (в данном случае роль оси Oy выполняет ось Or) (М.А. Велищанский с соавторами [7]). Сведение двойного интеграла к повторному для подобной области обычно разбирают со студентами на предыдущем семинаре.

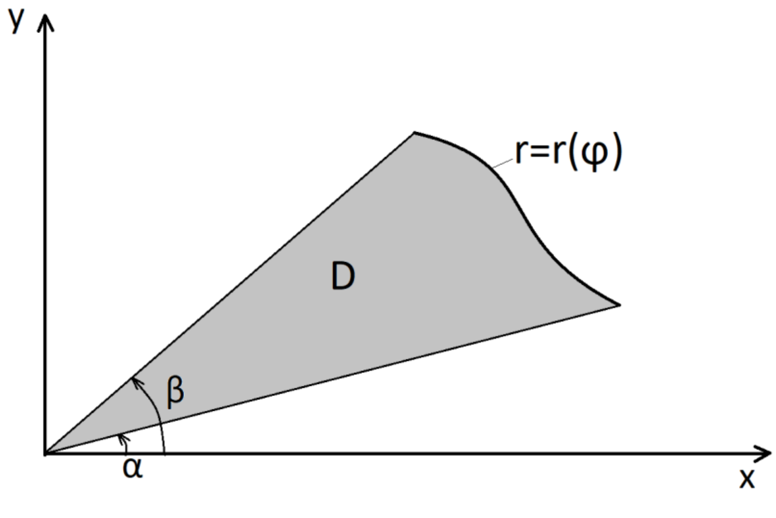

Рис. 6 Криволинейный сектор в декартовой системе координат

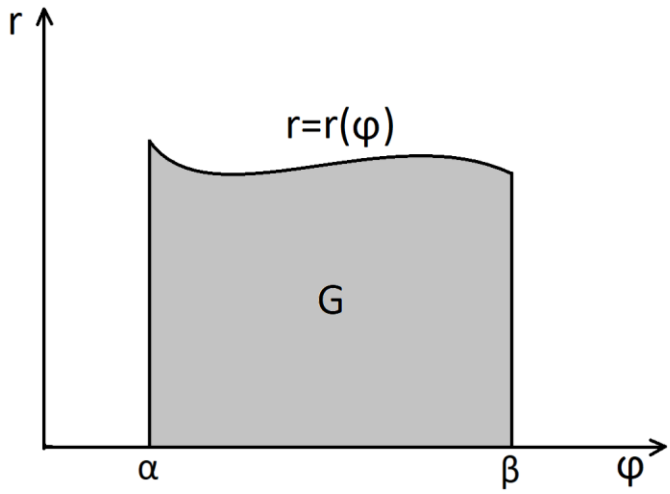

Рис. 7 Криволинейный сектор в полярной системе координат

Для того чтобы избежать построения области интегрирования в двух системах координат (поскольку, как правило, изначально область интегрирования задается в декартовой системе координат), обычно на семинаре студентам предлагают следующий способ сведения двойного интеграла к повторному с использованием полярных координат. Данный способ основан на использовании координатных линии полярной системы координат.

Пусть область интегрирования $\boldsymbol{D}$ описывается следующими соотношениями (см. рис. 4):

$$D = \{(r, \varphi) | \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}, \qquad (3)$$

где функции $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ непрерывны при $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Сначала определяется диапазон изменения полярного угла φ в котором лежит рассматриваемая область D. Иногда это диапазон можно определить непосредственно из рисунка области D, иногда он определяется как решение некоторого уравнения. В рассматриваемом случае $\varphi \in [\alpha, \beta]$, следовательно, α и β будут соответственно нижней и верхней границами внешнего интеграла. Далее проводим вспомогательные лучи $\varphi = \varphi_0$ при условии, что $\varphi_0 \in (\alpha, \beta)$. По каждому лучу мысленно перемещаем точку от $r = 0$ (т.е. выходим из полюса) в сторону увеличения значения r. Перемещая таким образом точку мы ждем, когда данная точка пересечет некоторую кривую - границу области D и мы окажемся внутри данной области (на рис. 4 это $r = r_1(\varphi)$). Уравнение данной кривой будет являться нижней границей внутреннего интеграла. Продолжая далее движение вдоль луча внутри области D, мы ждем, когда данная точка пересечет границу области D, и мы покинем эту область. Уравнение кривой, задающей данную границу, будет являться верхней границей внутреннего интеграла (на рис. 4 это $r = r_2(\varphi)$). Таким образом, мы получаем следующее представление двойного интеграла по области $\boldsymbol{D}$ в виде повторного интеграла:

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r, \varphi) r dr. \qquad (4)$$

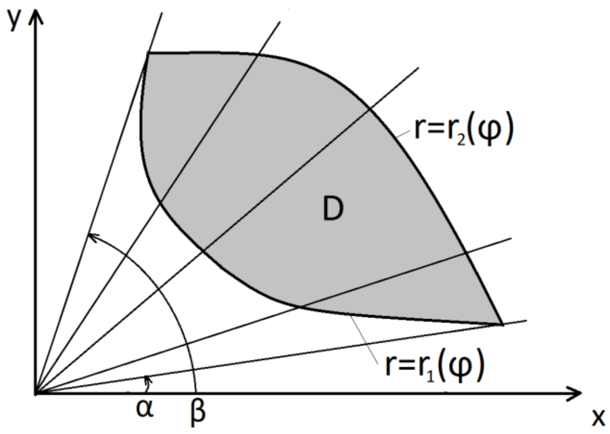

Рис. 8 Область $\boldsymbol{D}$, описываемая соотношениями (3)

Далее будет рассмотрен ряд примеров [8], которые, по нашему мнению, могут быть полезны при рассмотрении данной темы на семинаре. При этом основное внимание будет уделено именно переходу в новую систему координат и расстановке пределов по новым координатам, нежели дальнейшему вычислению повторного интеграла, поскольку, именно в этой части задачи у студентов возникают наибольшие трудности.

Пример 1. Перейти к полярным координатам ρ, φ и расставить пределы интегрирования по новым переменным в интеграле:

$$\int_0^2 dx \int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$$

Область интегрирования в декартовой системе координат представляет собой треугольник (см. рис. 5) и описывается неравенствами $0 \le x \le 2, 0 \le y \le x$. Для определения пределов интегрирования в полярной системе координат проведем из полюса (совпадает с началом координат) вспомогательные лучи (тонкие линии на рис. 5). Вся область интегрирования заключена между лучами с углом $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{4}$. Эти значения будут нижней и верхней границы интегрирования во внешнем интеграле соответственно. Далее определяем границы интегрирования для внутреннего интеграла. Нижней границей, в данном примере, будет значение $r = 0$, поскольку область интегрирования начинается непосредственно с $r = 0$. Далее, мысленно передвигая точку вдоль вспомогательных лучей, определяем, что область интегрирования покидается при пересечении с прямой $x = 2$. Для получения уравнения этой кривой в полярной системе координат воспользуемся уравнениями связи (1):

$$x = r\cos\varphi \Rightarrow 2 = r\cos\varphi \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\varphi} -$$

это будет верхней границей внутреннего интеграла.

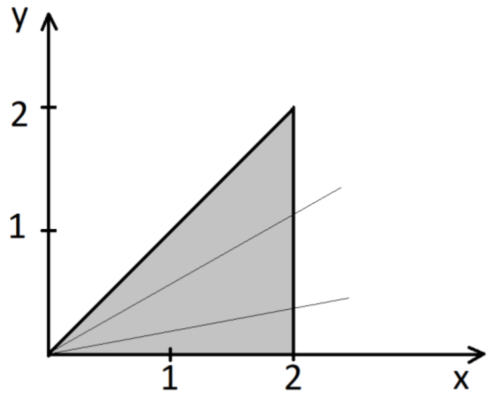

Рис. 9 Область интегрирования из примера 1

Таким образом, имеем:

$$\int_0^2 dx \int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \\ J(r,\varphi) = r \\ x^2+y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2 \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r) r dr.$$

Пример 2. Перейти к полярным координатам ρ, φ и расставить пределы интегрирования по новым переменным в интеграле:

$$\int_0^2 dx \int_0^2 f(x,y)\, dy.$$

Область интегрирования в декартовой системе координат представляет собой квадрат $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$ (см. рис. 6а).

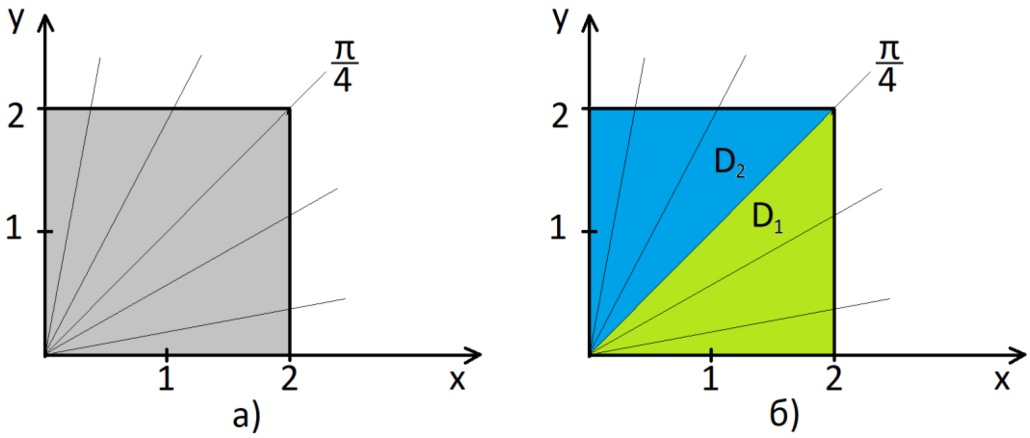

Рис. 10 Область интегрирования из примера 2

Для определения пределов интегрирования в полярной системе координат, как и в предыдущем примере, проведем из полюса вспомогательные лучи (тонкие линии на рис. 6а). Вся область интегрирования заключена между лучами с углом $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$. Как и в примере 1, нижней границей внутреннего интеграла будет $r = 0$. А вот верхнюю границу внутреннего интеграла одним уравнением, в данном примере, задать не удастся. Если полярный угол φ_0 лежит в диапазоне от 0 до $\frac{\pi}{4}$, то луч $\varphi = \varphi_0$ пересекает внешнюю границу области интегрирования на прямой $x = 2$ (область D_1, см. рис. 6б). Если же полярный угол φ_0 лежит в диапазоне от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, то луч $\varphi = \varphi_0$ пересекает внешнюю границу области интегрирования на прямой $y = 2$ (область D_2 см. рис. 6б). Поэтому область интегрирования представляется в виде объединения двух областей вида (3). Аналогично примеру 1, уравнение внешней границы будет иметь вид $r = \frac{2}{\cos\varphi}$ для области D_1 и $r = \frac{2}{\sin\varphi}$ для области D_2. Таким образом, данный двойной интеграл будет представлен в полярной системе координат как сумма двух повторных:

$$\int_0^2 dx \int_0^2 f(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Пример 3. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dxdy$$

где S – область, ограниченная кривой $x^2+y^2=2ax$.

В данном случае область интегрирования в декартовой системе координат представляет собой круг радиуса a с центром в точке $(a,0)$: $0 \le x \le 2a$, $-\sqrt{2ax-x^2} \le y \le \sqrt{2ax-x^2}$ (см. рис. 7).

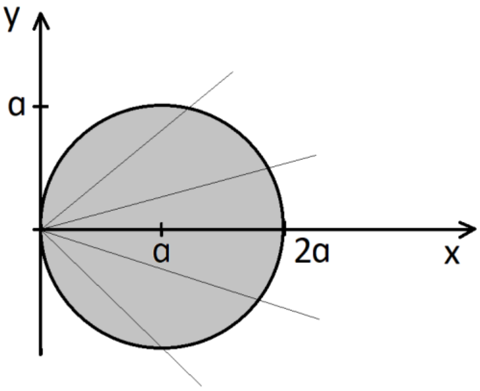

Рис. 11 Область интегрирования из примера 3

В отличие от предыдущих 2х примеров, в данном случае определение границы области интегрирования по полярному углу φ на основе лишь рисунка достаточно проблематично. Особенно это хорошо заметно на семинарах, когда студенты изображают данную область лишь примерно, «на глазок». Заметим, что границы области интегрирования по полярному углу соответствуют случаю $r(\varphi)=0$, поскольку окружность проходит через начало координат. Чтобы решить данное уравнение нам необходимо записать уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$ в полярных координатах. Имеем:

$$x^2+y^2=2ax \Rightarrow \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow (r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2 = 2ar\cos\varphi \Rightarrow r = 2a\cos\varphi.$$

Тогда

$$0 = 2a\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Проводя вспомогательные лучи $\varphi=\varphi_0$, $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (тонкие линии на рис. 7) определяем, что нижней и верхней границами области интегрирования по переменной r будут 0 и $2a\cos\varphi$ соответственно. В итоге имеем:

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ x^2+y^2=r^2 \end{vmatrix} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$= a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = a^4 \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi a^4.$$

Отметим, что с геометрической точки зрения, найденное нами значение двойного интеграла представляет собой объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$, цилиндром $x^2+y^2=2ax$ и параболоидом $x^2+y^2=z$. Так же стоит заметить, что хоть в декартовой системе координат данный двойной интеграл так же представляется в виде одного повторного, использование полярных координат позволило упростить как область интегрирования, так и подынтегральную функцию.

Как известно [9], двойной интеграл можно использовать для вычисления площади плоской фигуры. Использование полярных координат в подобных задачах часто позволяет существенно облегчить требуемые вычисления. Продемонстрируем сказанное, на следующем примере.

Пример 4. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = a(1 + \cos\varphi) \text{ и } r = a\cos\varphi \ (a > 0).$$

В данном случае искомая область ограничена кардиоидой и окружностью, смещенной по оси Ox (см. пример 3). В силу симметрии области, можно найти площадь фигуры, лежащей в верхней полуплоскости, т.е. при $0 \le \varphi \le \pi$. Основной ошибкой, совершаемой студентами при решении данной задачи, является попытка представить область интегрирования в виде одной области вида (3). Проводя вспомогательные лучи (тонкие линии на рис. 8а) определяем, что при изменении полярного угла φ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, область интегрирования по переменной r будет от $a\cos\varphi$ и до $a(1+\cos\varphi)$. При изменении полярного угла φ в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до π, область интегрирования по переменной r будет уже в пределах от 0 и до $a(1+\cos\varphi)$. Таким образом, как и в примере 2, область интегрирования, в рассматриваемом случае, представляется в виде объединения двух областей D_1 и D_2 вида (3) (см. рис. 8б):

$$D_1 = \left\{(r,\varphi) | 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, a\cos\varphi \le r \le a(1 + a\cos\varphi)\right\} \text{ и}$$

$$D_2 = \left\{(r,\varphi) | \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le a(1 + a\cos\varphi)\right\}.$$

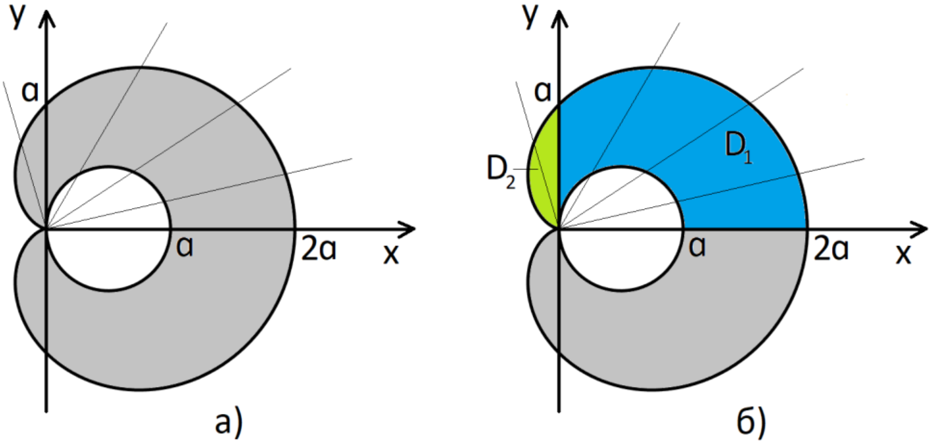

Рис. 12 Область интегрирования из примера 4

Таким образом, искомая площадь может быть найдена при помощи следующих двух повторных интегралов:

$$\frac{1}{2}S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r dr =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{a\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} - \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{5\pi a^2}{8} \Rightarrow S = \frac{5\pi a^2}{4}.$$

Заметим, что использование декартовой системы координат привело бы к весьма затруднительным вычислениям.

Заключение

На основании собственного опыта, авторами рассматривается методика преподавания решения задач по вычислению двойного интеграла с использованием замены переменных. Основное внимание в работе уделяется рассмотрению полярной системы координат, как основной используемой на соответствующих семинарах. Приводятся краткие теоретические сведения, а также примеры, иллюстрирующие использование полярной системы координат при вычислении двойных интегралов. В работе приводятся характерные ошибки, совершаемые студентами при решении задач по данной теме, и даются методические рекомендации по их устранению. Представленная методика преподавания быть использована при проведении соответствующих занятий со студентами технических специальностей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Методологические аспекты вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат // Modern European Researches. Salzburg, 2023. - №3. - P. 50-59. - URL: https://doaj.net/issues/55
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - Т. 2. - М.: «Наука», 1985. - 560 с.
3. В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. - 497 с.
4. Там же.
5. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Указ.соч.
6. Блинова И.В., Попов И.Ю. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах. Учебное пособие. - СПб: Университет ИТМО, 2017. - 56 с.
7. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Указ.соч.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель, 2010. - 496 с.
9. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Указ.соч.

Mikhail A. Velishchanskiy,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
velmiha@yandex.ru
Elena A. Vlasova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
skupova189@yandex.ru
Vladimir S. Popov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
vspopov@bk.ru

Methodological aspects of using variable substitution to calculate a double integral

Abstract. Students of almost any university, especially technical ones, face the task of calculating double integrals. The need to calculate such integrals arises when solving many different problems: engineering, physical, etc. Therefore, the formation of skills for competently calculating double integrals is an urgent task in the training of engineering personnel. The paper examines the features of the methodology for teaching the calculation of a double integral using polar coordinates. Typical mistakes made in solving such problems and ways to eliminate them are given. The brief theoretical information necessary to substantiate the considered method is given. Examples are given illustrating the use of polar coordinates to calculate a double integral.

Keywords: double integral, interated integral, substitution of variables, polar coordinates.

ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МЕТОДИКИ НАПИСАНИЯ АНГЛОЯЗЫЧНОГО НАУЧНОГО ТЕКСТА

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена распространенностью английского как средства научного общения. Цель работы – выявить лингвистические особенности методики написания научных англоязычных текстов. Идентифицированы основные языковые трудности написания научных исследовательских работ на английском языке. Результаты работы могут быть использованы при составлении статей по разным дисциплинам на английском языке.

Ключевые слова

английский язык, англоязычный научный текст, языковые трудности научного текста

АВТОРЫ

Голубев Алексей Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, г. Москва
v-algolu@hotmail.com

Уткина Надежда Вениаминовна,
кандидат философских наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, г. Москва
utkina-nv@yandex.ru

Злобина Ирина Сергеевна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», г. Киров
zlo-irina@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-45

Введение

Английский язык становится все более важным средством научного общения. Во многих дисциплинах его доминирование в настоящее время является фактом, хотя и не бесспорным, но все же неоспоримым. Данная тенденция привела к преобладанию английских письменных текстов в международных изданиях. Многим приходится читать на английском языке, выступать на семинарах и излагать свои мысли в письменной форме. Не представляет труда заметить последствия такой англизации науки, которая происходит иногда довольно болезненным образом. Исследователи оказываются перед сложным выбором: либо принимать эти соглашения, либо не публиковаться в англоязычных журналах и издательствах, которые читают во всем мире. Тот, кто выбирает последнее и отвергает английский язык в качестве языка публикации, может иметь вес в русскоязычном научном сообществе, однако будет испытывать сложности с международным признанием. Последствия этого огромны, как для индивидуальной карьеры, так и для международного присутствия и авторитета национальных сообществ исследователей. На микроуровне это касается в совокупности всех языков, поскольку англизация может привести к тому, что языки постепенно «разучатся быть научными языками». Данная ситуация является и ни хорошей, и ни справедливой, это просто очевидный факт, поэтому важно не только как-то общаться, когда пишешь на английском языке, а, скорее всего, необходимо овладеть подходящим стилем и риторикой, то есть рассуждать максимально эффективно и умело. Тот, кто хочет соответствовать высоким стандартам в отношении качества научной субстанции, будет руководствоваться формой, в которой содержание передается, вряд ли удовлетворяясь минимально приемлемым стандартам.

Если бы научное письмо было просто «записью» теории, методов и результатов, тогда не было бы необходимости слишком много суетиться по этому поводу. Учебник по грамматике, словарный запас и средство проверки орфографии были бы достаточными помощниками, а любые тексты можно было бы переводить на английский язык слово за словом и предложение за предложением. Проблема в том, что в академической литературе представляет собой нечто значительно большее, чем просто «фиксация» реальности. Даже при самых больших усилиях авторов по обеспечению объективности язык неизбежно выступает в качестве фильтра перед содержанием. Это явление само по себе относится к языку в целом. Таким образом, разница между языками заключается не в том, что одни фильтруют реальность, а другие нет, а в том, что эти фильтры разные, как например, Д. Зипманн четко определил для английского, французского и немецкого зыков [1]. К этому добавляются также формирующие условности научных дисциплин, которые создают свои собственные дискурсивные миры. Основываясь на предыдущие высказывания, можно сделать вывод, о том, что написания работ на английском языке прежнему остается актуальным.

Методология и результаты исследования

Заниматься наукой означает находиться на стыке как региональных, так и специализированных научных культур. В свою очередь, отдельный научный текст, с одной стороны, является продуктом их культур, которые его породили. В написании работ на английском языке важно распознавать лексические формы и функции. Хорошо функционирующее предложения образуется путем выбора слов, наилучшим образом подходящих к данному контексту. Когда дело доходит до отбора слов, у писателей есть обширный репертуар, который нужно изучать и в котором нужно ориентироваться. Особенно это заметно в английском языке, поскольку на протяжении многих веков он открыто заимствовал и адаптировал слова из других языков. На сегодняшний день английский язык обладает самым большим словарным запасом из всех языков мира. В него вошло множество слов из латыни, греческого и другого языков, а также префиксы (ab-, com-, de-, dis-, inter,- mis-, non-, ob-, pre-, re-, trans,- un-) и суффиксы (- able, --tion, -ology, -atic), которые используются для модификации слов и представляют собой множественные и разнообразные значения.

Тезаурус, или словарь синонимов, представляющий собой справочное издание, где слова расположены в соответствии с их значениями, позволяет выявить смысл не только с помощью определения, но и посредством соотнесения слова с другими понятиями и их группам. Хотя синонимы схожи по значению, они не взаимозаменяемы. Решить, какое слово лучше подойдет в конкретном тексте представляет собой непростую задачу. Использование языка изысканным образом требует хорошего словарного запаса. Как грамматический, так и лексический выбор в хорошо оформленном тексте соотносится с нормами и паттернами дискурса.

В обычном разговорном английском языке большинство используемых слов, заимствованы из более старых версий немецкого языка, из которых развился современный английский. В английском научном языке, как правило, гораздо больше слов, пришедших из латыни или греческого. Изобилие слов из «классических» языков объясняется несколькими факторами. Во-первых, до изобретения книгопечатания и развития массовой грамотности английский язык был языком грамотных профессий, а социально значимым дискурсом в Англии была латынь. Однако в течение XV и XVI веков ситуация постепенно изменилась. Разговорный язык все чаще стал использоваться для написания учебных пособий, с помощью которых светские учреждения вели свою деятельность. Расширяя использование английского языка в письменной коммуникации, писатели свободно заимствовали его из латыни и греческого языка, с помощью которых уже создавались юридические и политические документы, профессиональные и научные дискурсы. Используя латинские и греческие слова, а также префиксы и суффиксы, писатели, писавшие на английском (и других европейских языках), смогли значительно расширить свой словарный запас, адаптировав свой родной язык к новым и разнообразным ситуациям и коммуникативным требованиям. М. Халлидеу и Дж. Мартин [2] глубоко оценивают значимость древних языков для развития академического английского языка и подчеркивают важность знания истории слова при написании академической работы.

В английском языке существует очень сильное стремление к формальному использованию латинских слов. Данная тенденция выступает одним из ключевых различий между разговорным и письменным английским в целом, а также между формальным и повседневным регистрами. Лексика, основанная на латинице, по-прежнему пользуется большим уважением в английском языке и традиционно ассоциируется с официальным письмом.

Другой ключевой особенностью, отличающей академическое письмо от неформальной письменной и устной речи, по мнению К. Гайлэнда [3], является объем информации, содержащейся в группах существительных внутри отдельных предложений. Академическое письмо кардинально отличается, а это значит, что в каждый текст, в каждое предложение вкладывается большое количество информации. То, что в устной речи может быть передано несколькими предложениями, в письменной форме может быть сведено в одно единственное предложение. Для того, чтобы использовать сжатый язык в письменной форме существует несколько причин. Во-первых, устная речь менее трудоемкая, в то время как создание письменного текста требует большего времени и средств, поэтому сжатое изложение может сэкономить ресурсы. Во-вторых, повторение в письменной форме может быть достигнуто за счет того, что читатель возвращается к тому, что он пропустил и забыл. В речи же говорящий должен постоянно повторять информацию, чтобы слушатели могли удерживать сказанное в голове в течение некоторого времени. Люди просто не могут запомнить очень много информации в одном сообщении, им нужны небольшие фрагменты информации, и они должны быть четко и постоянно связаны с предыдущими и последующими сообщениями. С другой стороны, читатель вмещает в одно предложение гораздо больше информации, потому что он может удерживать текст, сосредотачиваться на небольших его фрагментах и перечитывать их.

Один из способов вместить много информации в предложении заключается, по мнению Г. Хантли [4], в нагружении группы существительных большей части содержания сообщения. Группы существительных можно значительно расширить и манипулировать ими с помощью глагола, например: «I can bathe, bath repeatedly, choose not to bathe at all» и с помощью именной структуры, например: «I can take a bath, have three or four consecutives baths, have any number of carefree delicious deep hot after-work baths as I like, and have baths with lots of bubbles» [5, C.56] . При написании эссе необходимо уметь поддерживать плавный паток информации, и одновременно не быть повторяющимся и скучным. Нужно находить способы связать сообщения и придать им последовательность и направленность. Получение контроля над группой существительных является ключевой стратегией в этом начинании. Чтобы научиться управлять группой существительных и понимать, как ею можно манипулировать в соответствии с вашими целям, необходимо уметь четко определять группы существительных и ведущее существительное в них. Например, «This inexplicable failure of the technology. (Talking about failures, and specifying what kind) ». Как только появиться уверенность в понимании сути сообщения, нужно учиться преобразовывать фрагменты смысла из вербальных или наречных выражений в номинальные, чтобы создавать несложные номинальные группы, несущие большее количество информации. Развитие данного навыка дает возможность говорить об идеях, о которых действительно должно быть написано в эссе, важно манипулировать информацией, которую вы читаете, и используете ее в своих собственных целях.

При написании научных работ важен анализ грамматических моделей в языке. Сходства и различия между отдельными текстами, которые мы распознаем и описываем с точки зрения жанра и регистра, создаются множеством взаимосвязанных вариантов слов и грамматической структуры. Академическое письмо изобилует сложными группами существительных и глаголами отношения, такими как «be», «have», а не простыми существительными и глаголами действия. Это имеет смысл, если подходить к написанию с точки зрения жанра: если цель текста заключается в том, чтобы рассказать захватывающую историю, то будут преобладать глаголы, обозначающие материальные действия или психологические процессы. Цель многих научных работ состоит в том, чтобы проанализировать и обсудить структурные детали явлений, проблем и ситуаций, а это значит, что все должно восприниматься в более статичных терминах. В академическом письме мы в основном пытаемся представить сложные переживания как неподвижные, чтобы разделить их и увидеть, из чего они состоят и как работают. Представление о реальности как о довольно статичном целом, состоящем из осязаемых частей, стало настолько укоренившейся традицией, что вряд ли имеет смысл изучать и представлять мышление каким-либо другим способом. Важно обсуждать именно те идеи, которые можно извлечь из собственного опыта, из литературы, из фильмов, из общественных событий, а не пересказывать или рассказывать истории о том, что было прочитано. Абстрактные идеи демонстрируют переосмысление информации, и они не отделимы от грамматики сложных групп существительных и номинализации.

Другой отличительной чертой академического письма является степень наполненности информацией номинальных структур. Рассмотрим два сообщения:

а) «People benefit from modern technology because it has improved our standard of living. Modern technology provides many good jobs and services for society, but also damages the environment and causes pollution. We know that modern technology damages the environment and causes pollution, so why do we still use it? Because we just can’t live without it. Scientist are trying to reduce pollution and control the problems it causes, and if they don’t, our environment will be destroyed. Modern technology is surely necessary and important, but how can we use it without causing negative effects? »

б) «The social benefits of modern technology include the increased provision of goods, services and employment. While this technology has many negative side-effects on the environment, particularly in regards to pollution, modern society is dependent on the benefits that this technology provides. In recent years, increasing public awareness of the extent of environmental destruction as a result of this technology has spurred scientific investigation into technologies which provide a more sustainable outcome for the environment. In this sense, modern society may continue to sustain itself and the environment through more sophisticated technology» [6, С. 79]

Данные тексты подчеркивают разницу в номинальной сложности между устным способом (а) и академическим письменным способом (б). Мы видим, что хотя все предложения содержат ту или иную форму существительного, не все группы существительных содержат одинаковое количество информации, и не во всех текстах в одинаковой степени преобладают именные структуры.

Сложность в группе существительных может сопрягаться и с выбором глагола. Наиболее распространённым типом глаголов, используемых в академическом письме, являются глаголы отношений «be», «have, «include», используемые для связи мыслей. Многие из групп существительных в академическом письме включают номинализацию - грамматическую стратегию представления событий и качеств как «вещей». Например, предложение «A river, which is flowing fast, eroding the riverbanks and causing slit to build up rapidly at the river mouth» динамично описывает события, используя несколько глаголов действия «flow, erode, build up». Номинализация одних и тех же событий с целью изучения, анализа и обсуждения их как абстрактных явлений, может привести к тому, что в системе будет наблюдаться «very rapid flow», «dangerous levels of erosion» и «significant silt accumulation». Глаголы «flow», «erode» и «build up» были превращены в «вещи», чтобы взглянуть на них, изменить их и ощущать несколько по-другому, с другой целью. Логическая связь между этими событиями может быть выражена глаголом «cause» или союзом «silt is building up because the river is flowing faster and eroding the river banks». Эту логическую взаимосвязь также можно условно сформулировать следующим образом: «the cause of the sudden increase in silt at the river mouth is obvious». А информация, которая может быть выражена прилагательным «this once beautiful river» также может быть номинализирована: «the beauty of rivers like these needs preservation». Таким образом, важно уметь манипулировать словами так, чтобы они располагались в вашем тексте в соответствии с вашими желаниями и интересами, чтобы вы решали, будет ли ваш текст посвящен рекам, красоте или причинам. «Вещи», которые вы вкладываете в текст – это то, что читатель почувствует.

Уточнение и модификация содержания сообщения достигается за счет выбора существительного и расположения элементов. Первая позиция важна, поскольку она указывает на то, о чем идет речь в предложении, и может быть названа грамматической темой предложения. Представление информации посредством сложных идей, которые должны быть связаны с другими идеями и оценками, также в значительной степени достигается с помощью группы существительных. Другим важным аспектом академического письма является степень уверенности, с которой исследователь верит в то, что пишет. Одна из самых серьезных ошибок при написании работ заключается в чрезмерном догматизме в отношении того, что излагается, как будто аргументы являются фактами и как будто у читателя нет собственного мнения.

Заключение

Таким образом, написание академической работы на английском языке имеет свои лингвистические особенности, среди которых значимыми являются знание этимологии слова; объем важной информации, содержащейся в группах существительных внутри отдельных предложений; плотность и сжатость текста на основе группы существительных; использование сложных групп существительных и глаголов, а также анализ грамматических моделей в языке. К сожалению, на пути к написанию английском языке, ориентированном на стиль, нет простого решения. Часто цитируемое высказывание о том, что для достижения успеха нет лифта, а нужно подниматься по лестнице, особенно актуально.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Siepmann, D. Academic writing and culture. Cambridge University Press, 2021. - 125 p.
2. Halliday, M, Martin, J. Writing Science: Litteracy and Discursive Power. Bristol, London: The Falme Press. - 2000. - 204 p.
3. Hyland, K. Stance and engagement: A model of interaction in academic discourse. Discourse Study 7(2) 2025. - 173-192 p.
4. Huntley, H. Essential Academic Vocabulary. Mastering the Complete Academic World List. Boston, Mass.: Houghton Mifflin. - 2021. - 157 p.
5. Там же.
6. Maunter, G. Wissenschaftliches English. Verlag Hunter & Roth KG, 2020. - 264 S.

Nadezhda V. Utkina
Candidate of Sciences in Philosophy, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
utkina-nv@yandex.ru
Alexey E. Golubev
Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
v-avgolu@hotmail.com
Irina Zlobina,
Candidate of Sciences in Philosophy, Vyatka State University, Kirov, Russia
zlo-irina@yandex.ru

Linguistic aspects of the writing methods in English scientific text

The relevance of the research is due to the prevalence of English as a means of scientific communication. The purpose of the work is to identify the linguistic features of the methodology of writing scientific English texts. The main linguistic difficulties of writing scientific research papers in English are identified. The results of the work can be used in the compilation of articles on various disciplines in English.

Keywords: English, English scientific text, linguistic difficulties of scientific text.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СМЫСЛА ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация

В работе содержится материал, который может оказаться полезным преподавателю, готовящему конспект лекций по теме “Геометрический смысл производной”. Сначала рассматривается вещественный случай. Здесь уточняются некоторые вспомогательные понятия, для формулировки основного положения. Далее рассматривается комплексный случай, где также подробно рассматривается не только геометрический смысл модуля и аргумента производной, но и проведён разбор сопутствующих понятий.

Ключевые слова

касательная, угол наклона прямой, модуль и аргумент производной

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
wiktorobuhov@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-51

Введение

При подготовке к лекции по теме “Геометрический смысл производной” требуется уточнить вспомогательные понятия. Речь идёт не только о таких понятиях как угол наклона к координатной оси и угловой коэффициент прямой, но и о понятии касательной к графику функции. При этом приходится считаться с тем, что в учебной и справочной литературе эти понятия определяются по-разному, и следует выбрать наиболее целесообразное определение. В некоторых случаях осуществить такой выбор нелегко.

Особого внимания здесь требует комплексный случай, т. к. в некоторых популярных учебниках соответствующий материал изложен небрежно. Последнее обстоятельство может привести к тому, что часть студентов может плохо усвоить данный материал.

Методология и результаты исследования

1. Вещественный случай.

Пусть E – некоторое множество вещественных чисел, и пусть x_0 — предельная точка E, принадлежащая этому множеству. Производной функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ по множеству по множеству E в точке x_0 называется предел

$$f'_E(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \in E} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

при условии, что он существует. Если ясно, о каком множестве E идёт речь, то производную обозначают просто $f'(x_0)$. Не требуется ссылка и в том случае, когда x_0 является внутренней точкой E. Последнее означает, что у этой точки существует окрестность, целиком лежащее в множестве E. Говорят также, что существует окрестность точки x_0, принадлежащая множеству E. Это " неправильный" оборот речи, т.к. упомянутая окрестность не может принадлежать множеству E (множеству E принадлежат лишь его элементы, а окрестность точки таким элементом не является). По сложившейся традиционной терминологии такое словоупотребление, однако, допускается. Заметим ещё, что сформулированное определение производной охватывает случаи односторонних производных, и оно равносильно определению производной с помощью предела

$$f'_E(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

где предполагается, что $x_0 + \Delta x \in E$.

При изучении данной темы далее обычно вводится понятие дифференцируемой функции, которая характеризуется тем, что её приращение может быть записано в виде

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \ \ \Delta x \to 0, \qquad (1)$$

где A — константа, не зависящая от Δx (но, вообще говоря, зависящая от x_0; здесь,

как обычно, " вообще говоря " означает, что, может как зависеть, так и не зависеть).

Устанавливается также, что дифференцируемость функции равносильна существованию производной в соответствующей точке, и что $A = f'(x_0)$. Отметим ещё, что понятие дифференцируемости вводится обычно в случае, когда функция f определена в окрестности точки x_0.

С геометрическим смыслом производной на первый взгляд всё просто: производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведённой в точке $\left(x_0, f(x_0)\right)$ этого графика. Рассмотрим этот геометрический смысл более подробно. Во - первых здесь предполагается, что функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 (возможно односторонней, т. е. в точках множества $(x_0 - \delta, \ x_0]$ или $[x_0, x_0 + \delta); \delta > 0$). Во - вторых надо определить понятия касательной и углового коэффициента прямой. Угловой коэффициент прямой на плоскости характеризует положение этой прямой по отношению к системе координат, введённой на этой плоскости. Прежде чем определить угловой коэффициент обычно рассматривают вспомогательное понятие угла наклона прямой к оси абсцисс. Впервые в учебном курсе это понятие обычно встречается в аналитической геометрии при изучении различных видов уравнений прямых на плоскости. Например, в учебнике И. И. Привалова [1, с.46] читаем: " Назовём углом наклона прямой к оси Ox тот угол, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей)." Аналогичного характера определение приводится также и в учебнике по аналитической геометрии Н. В. Ефимова [2]. При таком определении угол наклона прямой к оси Ox определяется с точностью до целого кратного π. Это означает, что если φ — одно из значений угла наклона, то все значения этого угла имеют вид

$$\varphi + 2n\pi\,, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{2}$$

В большей части руководств по аналитической геометрии (см. например, А.Н.Канатников, А. П. Крищенко [3] или В. А. Ильин, Э. Г. Позняк [4]) даётся другое определение угла наклона прямой l к оси абсцисс. Сначала на прямой l вводится направление с помощью такого ненулевого вектора $\boldsymbol{e}$, параллельного этой прямой, для которого упорядоченные пары векторов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{e})$ и $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ соответственно орты осей абсцисс и ординат, имеют одинаковую ориентацию, т. е. они обе правые или обе левые. Мы будем считать, что эти пары обе правые. По определению это означает, что кратчайший поворот от первого вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки. После этого углом наклона прямой l к оси абсцисс объявляется угол между векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{e}$**.** Поскольку для пар коллинеарных векторов понятие ориентации не вводится, то здесь следует добавить замечание о том, что в случае, когда l параллельна оси Ox, угол её наклона к этой оси считается равным нулю. Это определение не равносильно приведённому выше из учебников И. И Привалова [5] и Н. В. Ефимова [6]. Если φ_0 — одно из значений угла наклона прямой l к оси Ox, то все прочие углы содержатся в выражении

$$\varphi_0 + 2n\pi\,, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{3}$$

Ясно, что множества чисел (2) и (3) не могут совпадать (даже если $\varphi = \varphi_0$). Для геометрического смысла производной в вещественном случае это различие в определениях не является существенным. Угловым коэффициентом k прямой l называется тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox. Как видим, угловой коэффициент не зависит от различий в рассмотренных выше вариантах определения угла наклона, т. к. тангенс является π — периодической функцией. При рассмотрении геометрического смысла аргумента производной в комплексном случае беспечное отношение к указанным выше различным определениям угла наклона прямой к оси абсцисс может привести к ошибочным выводам.

Определим теперь понятие касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$. Для этого на рассматриваемом графике функции возьмём точку

$M_1\big(x_0 + \Delta x\,, f(x_0 + \Delta x\,)\big)$ и проведём секущую MM_1. Одним из значений угла наклона секущей MM_1 к оси абсцисс будет угол между ортом $\boldsymbol{i}$ этой оси и вектором $\overrightarrow{MM_1}$. Угловой коэффициент k_1секущей равен, следовательно, отношению

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Если при $M_1 \to M$ секущая стремится занять определённое предельное положение, то это предельное положение называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M. На самом деле, конечно, “ предельное положение “ и прямая не одно и то же; поскольку касательная является всё - таки прямой, а не “предельным положением”, то приведённое определение нуждается в разъяснениях. Пример таких разъяснений можно найти в учебнике Л. Д. Кудрявцева [7, с. 164], где по существу предлагается прямую в предельном положении называть “предельным положением”.

При таком подходе приведённое выше определение касательной не вызывает вопросов. В педагогической практике, по-видимому, нет особой необходимости критиковать приведённое выше традиционное определение и подвергать сомнению его правильность. Любопытно отметить, что в популярном иностранном учебнике Р.Курант [8, гл. II, 3.,1], который был издан в 1934 году и с тех пор переиздавался более 20 раз и был переведён на несколько языков (в том числе на русский), касательная также определяется как «limiting position of the secant», т.е. опять же как предельное положение секущей. Любопытно, что в справочниках общего характера (см., например, в Большой Советской Энциклопедии [9]) касательная определяется именно как предельное положение секущей. В словаре С. И. Ожегова, однако, мы читаем, что касательная это "прямая, имеющая общую точку с кривой, но не пересекающая её", см. [10, с. 239].

Если функция f имеет конечную производную $f'(x_0)$ в точке x_0 ,то угловой коэффициент k_1 секущей, определяемый формулой (4), стремится к значению $k = f'(x_0)$, а сама секущая стремится занять положение прямой T, проходящей через точку $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ графика функции $y = f(x)$ и имеющей угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Отсюда такой геометрический смысл производной $f'(x_0)$: эта производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Наличие бесконечной производной не является препятствием к существованию касательной к графику функции в соответствующей точке. Например, касательной к графикам функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[3]{x^2}$ в начале координат служит ось ординат.

2. Геометрический смысл модуля производной.

В этом разделе и далее мы будем в основном рассматривать комплекснозначные функции комплексного переменного. Как следует говорить "комплексное переменное или "комплексная переменная"? Ответ здесь состоит в том, что надо выбрать какой-либо вариант и всегда придерживаться именно его. Не все авторы, однако, следуют этому правилу. Например, в книге В. И. Смирнова [11, с. 11] читаем: "Вся настоящая глава и будет посвящена изложению основ теории функций комплексного переменного, имеющих производную". Далее на следующей странице видим: "Если комплексная переменная z меняется, то соответствующая точка двигается на плоскости". На стр. 13 находим более интересный пример, в котором оба варианта рассматриваемого субстантивированного прилагательного встречаются в одном и том же предложении: "Необходимое и достаточное условие существования предела комплексного переменного z состоит в следующем: при любом заданном положительном ε существует такое значение переменной z, что $|z' - z''| < \varepsilon$, если только z'и z'' — любые два значения, следующие после упомянутого значения".

Пусть $E \subset \mathbb{C}, f{:}\, E \to \mathbb{C}$, и пусть z_0— предельная точка множества E , принадлежащая этому множеству. Функция f называется дифференцируемой в точке z_0 по множеству $E,$ если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Этот предел (если он существует) называется производной функции f в точке z_0 по множеству E и обозначается $f'_E(z_0)$ или $f'(z_0)$, если ясно о каком множестве идёт речь. В большинстве учебных руководств по рассматриваемой тематике авторы поступают именно так: они не вводят отдельно понятие производной и дифференцируемой функции, а объединяют эти понятия, считая по определению, что смысл их одинаков, но при этом аналог равенств (1) всё же рассматривают. В некоторых учебниках по теории функций комплексного переменного существование производной и дифференцируемость считаются, однако, различными (хотя и эквивалентными) понятиями; см., например, П. И. Романовский [12].

Рассмотрим геометрический смысл модуля производной. Пусть функция w=$f(z)$ определена в окрестности $U(z_0)$ точки z_0 и принимает комплексные значения. Пусть далее, эта функция дифференцируема в точке z_0, и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда для всех точек z∈ $U(z_0)$ достаточно близких к точке z_0 и не совпадающих с ней, $f(z) \neq f(z_0)$. Как известно, модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками изображающими эти числа (стало быть, у модуля разности двух комплексных чисел есть геометрический смысл). Поэтому отношение

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \tag{5}$$

равно растяжению (при $|f(z) - f(z_0)| > |z - z_0|$; при $|f(z) - f(z_0)| < |z - z_0|$ имеем сжатие, а если $|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0|$ не будет ни растяжения, ни сжатия)

расстояния между точками z и z_0 при рассматриваемом отображении. Заметим, что у А. В. Бицадзе [13, с. 64] вместо термина “растяжение” (которое на деле может оказаться сжатием, или не будет изменения расстояния) говорится об “изменении масштаба”. Этот же термин используется и в некоторых других учебниках.

Предел отношения (5) при $z \to z_0$ называется растяжением в точке z_0 при отображении f. Ясно, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

Поэтому $|f'(z_0)|$ есть по определению растяжение в точке z_0 при отображении f.
В этом и состоит геометрический смысл модуля производной функция $w = f(z)$.

3. Геометрический смысл аргумента производной.

Перед рассмотрением данного вопроса следует напомнить некоторые сведения, относящиеся к вектор-функциям. Обратимся к § 16, п.16.4 книги Л. Д. Кудрявцева [14]. Здесь достаточно подробно излагаются вопросы, связанные с понятием касательной к плоской кривой. Такая кривая γ задаётся уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t)\}, \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \tag{6}$$

и если в точке t_0 этой кривой существует отличная от нуля производная $\boldsymbol{r}' = \{x'(t), y'(t)\}$, то в точке $M(x_0, y_0) = M(x(t_0), y(t_0))$ существует

одна касательная l к кривой γ, и вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ является направляющим вектором этой касательной, причём этот вектор в сторону возрастания параметра. Дело в том, что с помощью уравнения (6) можно указать направление обхода кривой γ, т. е. задать её ориентацию. Именно, мы считаем, что точка $M_1(x(t_1), y(t_1))$ предшествует на кривой γ точке $M_2(x(t_2), y(t_2))$, если $t_1 < t_2$. О таком направлении обхода говорят, что оно отвечает возрастанию параметра. В рассматриваемом разделе книги Л. Д. Кудрявцева [15] почему-то нет определения того, что значит, что касательный вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$, направлен в сторону возрастания параметра. При отсутствии такого определения нельзя, разумеется, доказать указанное свойство вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$. В книге Л. Д. Кудрявцева [16] утверждается лишь, что “естественно говорить”, что упомянутый вектор направлен в указанную сторону.

Любопытно отметить, что в большинстве учебных пособий по вещественному анализу такого определения также нет, хотя дать это определение не представляет особого труда: будем считать, что вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ направлен в сторону возрастания параметра, если существует положительное число δ такое, что векторы $\boldsymbol{r}'(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$ образуют острый угол при $0<t<\delta$. Можно распространить это определение и на точку $t_0=\beta$. Здесь надо потребовать, чтобы векторы $\boldsymbol{r}'(\beta)$ и $\boldsymbol{r}(\beta+\Delta t)-\boldsymbol{r}(\beta)$ образовывали тупой угол при $-\delta<t<0$. С помощью этого определения можно без труда доказать требуемое свойство вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

Пусть теперь кривая γ задана на комплексной плоскости уравнением

$$z=z(t)=x(t)+\,i\,y(t)\,,\qquad \alpha\,\leq t\,\leq\beta,$$

причём эта кривая проходит через точку $z_0=z(t_0)$, $\alpha\,\leq\,t_0\,\leq\beta$. Ясно, что для изучения ситуации с касательной к кривой γ в точке z_0 мы можем использовать перечисленные выше сведения из вещественного анализа. Поэтому, если предположить, что функция $z(t)$, рассматриваемая как комплекснозначная функция вещественного переменного, имеет в точке $z_0=z(t_0)$ ненулевую производную $z'(t_0)=\,x'(t_0)+i\,y'(t_0)$, то существует касательная l к кривой γ в указанной точке $M\big(x(t_0),\mathrm{y}(t_0)\big)$. При этом вектор $(x'(t_0),x'(t_0))$ будет служить направляющим вектором этой касательной. Пусть теперь в точках кривой γ определена функция $w=f(z)$. На плоскости комплексного переменного w мы будем иметь кривую Г, заданную равенством $w=f\big(z(t)\big)$, $\alpha\,\leq t\,\leq\beta$, и если в точке z_0 существует производная $f'(z_0)\neq 0$, по множеству $E=\{z\colon z=z(t)\,,\alpha\,\leq t\,\leq\beta\}$, то кривая Г также будет иметь касательную L в точке $w_0=f(z_0)$, направляющим вектором которой будет вектор $f'(z_0)\cdot\,z'(t_0)$, что вытекает из правила дифференцирования сложной функции. Поскольку аргумент произведения ненулевых комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей, а сам аргумент ненулевого комплексного числа равен углу, который составляет вектор, изображающий соответствующее комплексное число, с положительным направлением вещественной оси, то мы имеем такое равенство

$$\operatorname{Arg}\Big(f'(z_0)\cdot\,z'(t_0)\Big)=\operatorname{Arg}\Big(f'(z_0)\Big)+\operatorname{Arg}\big(\,z'(t_0)\big).\qquad(7)$$

Каждое из слагаемых, входящих в это равенство, определено с точностью до слагаемого вида $2\pi n$, где $n\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. Понимать это равенство можно по-разному. Можно, например, зафиксировать значения каких-либо двух аргументов, а значение третьего подобрать так, чтобы получилось точное равенство. Можно понимать (7) как равенство множеств чисел, входящих в левую и правую части. Для этого надо предварительно определить понятие суммы числовых множеств, фигурирующих в правой части. Из равенства (7) вытекает такое свойство аргумента производной $f'(z_0)$: $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ есть угол, на который следует повернуть касательную к кривой γ в точке z_0 при переходе к касательной к кривой Г в точке w_0. Здесь γ есть кривая $z=z(t)$, а Г – кривая $w=f\big(z(t)\big)$.

Именно это свойство называют геометрическим смыслом аргумента производной функции комплексного переменного.

При рассмотрении геометрического смысла аргумента производной часто в качестве вспомогательного средства используют угол наклона касательной к вещественной оси.

При этом связывают угол с аргументом производной $f'(z_0)$. Заметим по этому поводу, что определение угла наклона φ прямой к оси абсцисс из руководств по аналитической геометрии таковы, что они не дают гарантии выполнения равенства $\varphi = f'(z_0)$. По этой причине привлекать этот угол при рассмотрении геометрического смысла аргумента производной вряд ли целесообразно.

Заключение

Таким образом, мы рассмотрели оба варианта геометрического смысла производной (вещественный и комплексный). В вещественном случае мы в основном уточняли терминологию, т. к. сам по себе геометрический смысл производной в данной ситуации трудным не является. Основной проблемой в комплексном случае является уточнение вспомогательных понятий. Без такого уточнения возможны ошибки в доказательствах.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. - М.:” Наука”, 1972, 272с.
2. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.:” Наука”, 1967, 228с.
3. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000, 388с.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. - ФИЗМАТЛИТ, 2004, 224с.
5. Привалов И. И. Указ. соч.
6. Ефимов Н. В. Указ. соч.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т.1.-М: “Высшая школа”, 1981, 687с.
8. Courant P. Differential and Integral Calculus v.1, 611p
9. Большая Советская Энциклопедия, третье издание, т.11.-М: “Советская энциклопедия”, 1973, 608с.
10. Ожегов С. И. Словарь русского языка. - М.: “Русский язык”, 1983, 816с.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, часть вторая. - М: “Наука”,1974, 672с.
12. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. - М.: Наука, 1973, 336с.
13. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М: “Наука”, 1984, 320с.
14. Кудрявцев Л. Д. Указ. соч.
15. Кудрявцев Л. Д. Указ. соч.
16. Кудрявцев Л. Д. Указ. соч.

Pavel L. Ivankov,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
ivankovpl@mail.ru
Victor P. Obuhov*,*
Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
wiktorobuhov@yandex.ru

Methodology teaching the geometric sense of derivative

Abstract. In this paper we propose material that can be made use of by a professor preparing a conspectus for the lecture on the theme “Geometric sense of a derivative”. At first, we consider real case. Here we make more precise some auxiliary concepts necessary for the formulation. After that we take into consideration a complex case. Here we examine in detail not only the geometric sense of the modulus and argument of f derivative but we also discuss some relevant
concepts.

Keywords: Tangent, angle of a straight line, modulus and argument of derivative.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В учебном курсе по дифференциальным уравнениям важную роль играют приемы решения дифференциальных уравнений, которые, как правило, изучаются технически и слабо связаны с понятием решения дифференциального уравнения. В этой статье рассмотрены особенности решения дифференциальных уравнений первого порядка. Показана роль зависимой и независимой переменных в дифференциальном уравнении первого порядка, а также связь процесса решения дифференциального уравнения с вопросами существования и единственности решений. Материал будет полезен при организации учебного курса по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова

дифференциальное уравнение, общее решение, особое решение, общий интеграл, разделение переменных

АВТОРЫ

Канатников Анатолий Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
skipper@bmstu.ru

Крищенко Александр Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
apkri@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-58

Введение

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) — важная составная часть в математической подготовке любой инженерной специальности. В МГТУ имени Н.Э. Баумана этот курс входит в учебную дисциплину «Интегралы и дифференциальные уравнения».

В освоении обыкновенных дифференциальных уравнений важны как теоретические знания (в частности, вопросы существования решений ОДУ, а также вопросы их единственности), так и обучение приемам решения конкретных задач.

Однако на практике в преподавании курса ОДУ теория и приемы решения задач зачастую сильно расходятся, теряя связь друг с другом. Сложность здесь состоит в том, что дифференциальное уравнение сильно отличается от алгебраического, поскольку в алгебраическом уравнении неизвестные имеют числовые значения, в то время как в дифференциальном неизвестные — это функции.

В настоящей статье мы остановимся на особенностях ОДУ, ограничившись уравнениями первого порядка.

Методология и результаты исследования

Дифференциальное уравнение — это уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где x — независимая переменная, которая может принимать любые значения на некотором промежутке X числовой оси $\mathbb{R}$, переменная y обозначает неизвестную функцию, а символ y' — ее производную. Решение дифференциального уравнения (1) — это функция h, определенная и дифференцируемая на промежутке X, для которой равенство $F\big(x, h(x), h'(x)\big) = 0$ верно на всем промежутке X (говорят: «превращается в тождество»).

Среди ОДУ первого порядка выделяют уравнения вида

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

которые называют обычно разрешенными относительно производной. Чтобы уравнение (1) можно было представить в виде (2), нужно, чтобы алгебраическое уравнение $F(x, y, p) = 0$ при любой точке $(x,\ y)$ из заданной области имело решение относительно p, и притом единственное, иначе говоря уравнение $F(x, y, p) = 0$ должно неявно задавать функцию $p = f(x, y)$. Однако отметим, что даже если подобная функция $p = f(x, y)$ существует, она может не быть элементарной, т.е. ее нельзя представить какой-либо формулой.

Уравнение (1) или (2) имеет, как правило, бесконечное множество решений (исключения, конечно, есть, вот пример: $y^2 + (y')^2 = 0$). Чтобы обеспечить единственность решения, ставят дополнительные условия, например, начальное условие $y(x_0) = y_0$, тем самым превращая задачу решения ОДУ (2) в задачу Коши.

Условиями существования и единственности решения задачи Коши являются непрерывность функции f из (2) в некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ и непрерывность частной производной f'_y (см. М.В. Федорюк [1], также Nagle R.K. et al. [2, p. 11]). Добавим, что интегральная кривая продолжается так, что выходит на границу области Ω или уходит в бесконечность.

Наряду с отдельным решением ОДУ (частным) есть понятие общего решения, а именно формулы $h(x, C)$, которая при каждом из возможных значений C дает решение ОДУ. Типично каждое решение определяется формулой $y = h(x, C)$ при некотором значении C, но исключения есть. Например, ОДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ имеет общее решение $y = (x + C)^3$, но оно не включает решение $y = 0$ — особое, поскольку состоит из точек, в которых нарушены условия существования и единственности решения. Для уравнения $y' = \cos^2 y$ условия существования и единственности решения, наоборот, выполнены во всей плоскости. Но общее решение $y = \operatorname{arctg}(x + C) + k\pi$, $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, не содержит решений вида $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, причем пропущенные решения не особые. Представленные примеры указывают на то, что концепция общего решения в случае дифференциальных уравнений оказывается не такой простой и изящной, как в случае систем линейных алгебраических уравнений.

Уравнения с разделяющимися переменными

Умение находить решение ОДУ (частное или общее) в элементарных функциях или, по крайней мере, в виде интегралов от элементарных функций (как говорят, в квадратурах) остается важной составной частью стандартного курса дифференциальных уравнений. Обычно в процесс обучения включается класс уравнений с разделяющимися переменными (они интегрируются непосредственно), а также некоторые классы уравнений, которые можно свести к уравнениям с разделяющимися переменными.

Далее обсудим методические аспекты приемов решения ОДУ первого порядка.

Уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде

$$y' = f_1(x) f_2(y). \tag{3}$$

В качестве области определения правой части ОДУ естественно выбрать прямоугольник $a < x < b$, $c < y < d$.

Инвариантность дифференциалов 1-го порядка позволяет найти решение такого уравнения путем непосредственного интегрирования. Действительно, из равенства (3), умножая на дифференциал независимой переменной, получаем

$$\frac{y'\,dx}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'\,dx}{f_2(y)} = \int_{x_0}^{x} f_1\,(x)\,dx + C,$$

или, используя подведение под дифференциал,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f_2(y)} = \int_{x_0}^{x} f_1\,(x)\,dx.$$

В результате приходим к уравнению вида

$$F_1(y) = F_2(x) + \mathrm{C}, \tag{4}$$

где $F_1(y)$ — одна из первообразных функции $\frac{1}{f_2(y)}$, а $F_2(x)$ — одна из первообразных функции $f_1(x)$.

Если функция $f_2(y)$ непрерывна и на интервале (c, d) не обращается в нуль, то сохраняет знак. Следовательно, функция $F_2(y)$ монотонна и имеет обратную функцию $G(y)$, так что $G\big(F(y)\big) = y$. Но тогда из равенства (4) вытекает, что

$$y = G(F_1(x) + C). \tag{5}$$

Точки y_1 , y_2 , …, y_k , в которых $f_2\big(y_j\big) = 0$, $j = \overline{1, k}$, если они есть, при интегрировании оказываются особыми. Однако нетрудно увидеть, что постоянные функции $h_j(x) = y_j$, $j = \overline{1, k}$, являются решениями уравнения (3). Отметим, что, во-первых, решения $h_j(x) = y_j$ не включаются в формулу (5) ни при каком значении параметра C . А во-вторых, область определения правой части уравнения (3) разделяется на полосы $[a, b] \times \big[y_j, y_{j+1}\big]$, $j = \overline{1, k-1}$, для каждой из которых формула (5) будет своей, т.е. единой формулы, описывающей все решения рассматриваемого уравнения, нет.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$xy' = y. \tag{6}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\ln\,|y| = \ln\,|x| + C.$$

В результате потенцирования (применения функции e^x, обратной функции $\ln\,x$) получаем

$$|y| = |x| \cdot e^C.$$

Потеряно решение $y = 0$, которое разделяет плоскость на две части: $y < 0$ и $y > 0$. В нижней полуплоскости имеем семейство решений

$$y = -|x| \cdot e^C,$$

а в верхней — семейство решений

$$y = |x| \cdot e^C.$$

Прямая $x = 0$ представляет собой множество точек, в которых не выполнены условия существования и единственности решения. Знак модуля в записанных семействах — следствие этого множества особых точек. Фактически плоскость разделилась на 4 квадранта, в каждом из них общее решение будет записываться своей формулой. Их можно объединить. При $x > 0$ две формулы $y = -x \cdot e^C$ и $y = x \cdot e^C$ с учетом потерянного решения $y = 0$ можно объединить в одну: $y = xC_1$, где C_1 — это либо e^C, либо $-e^C$, либо 0. Аналогично при $x < 0$ получаем формулу $y = -xC_2$, где C_2 пробегает те же значения, что и C_1.

В данном случае удачно то, что решения при $x > 0$ можно состыковать с решениями при $x < 0$ так, чтобы состыкованная функция оказалась дифференцируемой при $x = 0$. Получим одно семейство $y = C_1 x$, $C_1 \in \mathbb{R}$, в нем каждая функция есть решение уравнения на всей числовой оси.

Отметим, что, например, задача Коши

$$xy' = y, \quad y(0) = 1.$$

решений не имеет, в то время как задача

$$xy' = y, \quad y(0) = 0$$

имеет бесконечное множество решений (все решения рассматриваемого ОДУ).

Замечание. Условия $y = 0$ и $x = 0$ имеют совершенно разный смысл. Первое условие — это потерянное при разделении переменных решение, в то время как второе — условие особой точки ОДУ, так как ОДУ (6) относительно производной не разрешено, а разрешить его относительно y' можно лишь при $x \neq 0$.

В литературе уравнение первого порядка часто записывают в форме дифференциалов, т.е. симметричной форме:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0,$$

имея в виду уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

или при измененных ролях переменных

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

При этом в процессе разделения переменных могут появиться значения $x = x_0$ и $y = y_0$, при которых знаменатели дробей обращаются в нуль. Однако и то, и другое одновременно решениями ОДУ не являются — только одно из них, в зависимости от того, какая переменная является зависимой (т.е. обозначает неизвестную функцию). Интерпретация в задачнике под ред. Н.В. Ефимова, Б.П. Демидовича [3, с. 46] в примере 5 или в задачнике Б.П. Демидовича [4, с. 324] некорректна. Она дана в рамках расширенного толкования уравнения в дифференциалах, которое в программу курса обычно не входит. Еще пример: в учебном пособии Е.В. Сумина, И.Б. Шерстюкова зависимая и независимая переменные вообще не разделяются, а решение $x = -1$ соседствует с $y = C(x+1)e^{-x}$ [5, с. 8].

Приемы решения дифференциальных уравнений первого порядка

Некоторые классы ОДУ можно свести к уравнениям, в которых переменные разделяются. Для этого используют замены зависимой и независимой переменных. Также в некоторых случаях помогает изменение роли зависимой и независимой переменных. Рассмотрим такие классы, типично входящие в программу учебного курса.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка — это уравнения в форме (2), в которых функция $f(x,y)$ однородная порядка 0 , т.е. для любого параметра $\lambda \neq 0$

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y).$$

Однородная функция порядка 0 является постоянной на любой прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, с выколотой точкой $(0,\ 0)$. В самой точке $(0,\ 0)$ она разрывна (и типично не определена), если не является постоянной (постоянная функция — тривиальный случай). Здесь предполагается для упрощения рассуждений, что функция $f(x,y)$ определена в плоскости с выколотой точкой, т.е. в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$, причем в этой области как она сама, так и ее частная производная по y, непрерывны.

В областях $x > 0$ и $x < 0$ функцию можно свести к функции одного переменного:

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $h(y) = f(1,y)$. Замена $y(x) = z(x)x$ (или проще $y = zx$) приводит к разделению переменных:

$$xz' + z = h(z). \qquad (7)$$

Если $F(z)$ — первообразная функции $\frac{1}{h(z)-z}$, то общее решение ОДУ (7) можно записать в неявном виде:

$$F(z) = \ln\,|x| + C. \qquad (8)$$

Поскольку $F'(z)$ не обращается в нуль, локально в окрестности любой точки z функция $F(z)$ обратима. Поэтому локально формула (8) определяет функцию $z = F^{-1}(\ln\,|x| + C)$, являющуюся решением уравнения (7). Отсюда находим и решение исходного уравнения $y' = f(x,y)$:

$$y = xF^{-1}(\ln\,|x| + C). \qquad (9)$$

Формула не содержит решений вида $y = y_0$, где y_0 — корень уравнения $h(y_0) - y_0 = 0$. Они оказываются потерянными вследствие деления уравнения на $h(z) = z$.

Отметим, что формула (9) определяет отдельно решения при $x > 0$ и отдельно — при $x < 0$. Решения в левой и правой полуплоскости могут непрерывно «сшиваться», но это не всегда так. Это будет в случае, когда в окрестности точек $(0, y)$, $y \neq 0$, и $f(x, y)$, и $f'_y(x, y)$ непрерывны, т.е. имеют место условия существования и единственности решения.

Пример 2. Уравнение

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{10}$$

однородное, его заменой $y = zx$ зависимой переменной можно свести к уравнению, в котором переменные разделены:

$$z'x = -\frac{z^3}{1 + z^2}.$$

Решение указанного уравнения записывается в неявной форме:

$$-\frac{1}{2z^2} + \ln\ |z| = -\ln\ |x| + C,$$

или, потенцируя

$$ze^{-\frac{1}{2z^2}} = \frac{C_1}{x}.$$

Замена $C_1 = \pm e^C$ добавляет значение $C_1 = 0$, отвечающее потерянному решению $z = 0$.

Обратная замена $z = \frac{y}{x}$ позволяет получить общий интеграл ОДУ (10):

$$ye^{-\frac{x^2}{2y^2}} = C_1. \tag{11}$$

Левая часть равенства (11) непрерывна в $\mathbb{R}^2$, если ее доопределить нулем при $y = 0$. Она дифференцируема по y и ее частная производная по y неотрицательна. Нетрудно понять, что при фиксированном x функция $G(x, y) = ye^{-\frac{x^2}{2y^2}}$ монотонно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, уравнение (11) неявно задает функцию $y = F(x)$, определенную на промежутках $x > 0$ и $x < 0$. При $x = 0$ правые и левые ветви гладко сшиваются, образуя единые функции, определенные на числовой оси. При этом из-за симметрии «сшитая» функция $F(x)$ имеет при $x = 0$ производную, равную нулю. и мы видим, что она при $x = 0$ удовлетворяет ОДУ (10). Единственное исключение — точка $(0, 0)$, в которой правая часть ОДУ не определена, а функция $y = 0$ оказывается решением только на интервалах $x > 0$ и $x < 0$, но не на всей числовой оси.

К уравнению с разделяющимися переменными может быть сведено *линейное дифференциальное уравнение*

$$y' + a(x)y = b(x),$$

и уравнение Бернулли

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha,$$

которое можно интерпретировать как обобщение линейного дифференциального уравнения. Замену независимой переменной (и в том, и в другом случае) можно найти, решив однородное линейное ОДУ $y' + a(x)y = 0$. Его общее решение в соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений можно представить в виде $y(x) = Cy_0(x)$. Оно определено на любом интервале непрерывности функции $a(x)$.

При известном решении $y_0(x)$ используется замена $y = zy_0(x)$. Для уравнения Бернулли (повторим: линейное уравнение — это уравнение Бернулли при $\alpha = 0$) имеем

$$z'y_0(x) + zy_0{}'(x) + a(x)zy_0(x) = b(x)z^\alpha y_0(x)^\alpha,$$

или

$$z'y_0(x) + z(y_0{}'(x) + a(x)y_0(x)) = b(x)z^\alpha y_0(x)^\alpha.$$

Учитывая, что $y_0{}'(x) + a(x)y_0(x)$, приходим к разделению переменных:

$$z'y_0(x) = b(x)z^\alpha y_0(x)^\alpha,$$

или

$$z' = b(x)y_0(x)^{\alpha-1}z^\alpha.$$

В зависимости от значений α могут возникать особенности: при $\alpha < 1$ правая часть не определена в нулях функции $y_0(x)$, а при $\alpha < 0$ правая часть не определена при $z = 0$. Отметим, что дробное значение α означает, что y^α определено лишь при $y > 0$. При целом значении α такого ограничения нет.

Расширенная трактовка дифференциального уравнения

Произвольное ОДУ, разрешенное относительно производной, можно записать в симметричной форме, используя дифференциалы:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \qquad (12)$$

Такая запись может трактоваться шире, нежели само дифференциальное уравнение первого порядка.

Во-первых, dx и dy можно интерпретировать как дифференциалы некоторой вектор-функции $\big(x(t), y(t)\big)$. При такой интерпретации равенство (12) будет означать, что параметрически заданная кривая $\big(x(t), y(t)\big)$ в каждой своей точке ортогональна векторному полю $\big(M(x,y), N(x,y)\big)$. Ортогональность векторному полю преобразуется в условие коллинеарности векторному полю $\big(N(x,y), -M(x,y)\big)$. В указанной интерпретации решение уравнения (12) — это любая вектор-функция $\big(x(t), y(t)\big)$, дифференциалы dx и dy которой превращают уравнение (12) в тождество. Отметим, что если $\big(x(t), y(t)\big)$ — решение (12), то замена параметра $t = t(\tau)$ дает вектор-функцию $\Big(x\big(t(\tau)\big), y\big(t(\tau)\big)\Big)$, которая также является решением уравнения (12).

Указанная интерпретация интересна тем, что в ней переменные x и y симметричны не только в самом уравнении, но и в его решении. Кривая $\big(x(t), y(t)\big)$ представляет собой график некоторой функции, если $x(t)$ строго монотонна. В таком случае определена обратная функция $t(x)$, с ее помощью вектор-функцию $\big(x(t), y(t)\big)$ можно преобразовать в функцию $y\big(t(x)\big)$.

Во-вторых, один из методов решения ОДУ в дифференциалах — метод интегрирующего множителя — представляет собой нахождение такой функции $\mu(x,y)$, что выражение

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy$$

есть полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$. Уравнение

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

можно представить в эквивалентной форме

$$dF(x,y) = 0,$$

откуда приходим к уравнению $F(x,y) = C$. Ему подчиняются все решения уравнения (12) и его называют общим интегралом ОДУ (12).

Функция F определяется неоднозначно, мы можем заменить ее любой функцией $G\big(F(x,y)\big)$, где G дифференцируема.

В теории дифференциальных уравнений функцию F (как и $G \circ F$) называют первым интегралом ОДУ (11). Задачу решения уравнения (12) мы можем понимать как поиск его первых интегралов, которые позволяют описать все решения с помощью общего интеграла.

Пример 3. Рассмотрим ОДУ $y' = -\frac{x}{y}$. Умножив на ydx, приходим к уравнению в дифференциалах:

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Левая часть здесь — полный дифференциал функции $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Функция $F_1(x,y) = x^2 + y^2$ — также первый интеграл рассматриваемого уравнения. Таким образом, формула $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$, описывает все решения дифференциального уравнения. При $C = 0$ у уравнения $x^2 + y^2 = 0$ единственное решение, так что оно не формирует графика функции. При этом абсцисса $y = 0$ не входит в область определения правой части ОДУ. Поэтому решения следует искать при $C > 0$. Выражая из общего интеграла зависимую переменную y, мы получаем решения

$$y = \sqrt{C - x^2}, \quad -\sqrt{C} < x < \sqrt{C}; \qquad y = -\sqrt{C - x^2}, \quad -\sqrt{C} < x < \sqrt{C}. \tag{13}$$

Найденные решения исчерпывают всю совокупность решений. В самом деле, для любой точки $(x_0,\, y_0)$ одно из найденных решений удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$, а именно то, которое отвечает значению $C = x_0^2 + y_0^2$; при $y_0 > 0$ оно принадлежит первому семейству (13), а при $y_0 < 0$ — второму.

Заключение

В статье затронута связь между теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и приемами решения конкретных задач. Проблема рассмотрена в рамках уравнений первого порядка.

В учебном курсе по обыкновенным дифференциальным уравнениям тема уравнений первого порядка типично сводится к чисто техническому преобразованию дифференциального уравнения к выражению типа $F(x,y) = C$ или $F(x,y,C) = 0$. При этом связь полученного ответа с постановкой задачи, как поиска соответствующих функций, теряется.

В статье показано, что корректное решение ОДУ должно завершаться анализом полученного решения: решение во многих случаях представлено общим интегралом и необходимо выделение соответствующих функций, заданных неявно.

Показано, что перевод ОДУ первого порядка в уравнение в дифференциалах позволяет расширить толкование понятия «решение дифференциального уравнения». Однако расширенное толкование выходит за рамки темы ОДУ первого порядка. И в самом деле, симметричная интерпретация двух переменных, без разделения на зависимую и независимую, фактически означает сведение дифференциального уравнения к автономной системе двух дифференциальных уравнений. Да, системы дифференциальных уравнений включаются в учебный курс, но происходит это в конце, а в момент изучения уравнений первого порядка она теоретически еще ничем не подкреплена.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Ленанд. - 2023. - 448 с.
2. Naggle R.K., Saff E.B., Snider A.D. Fundamentals of Differential Equations. 8th ed. - Boston: Pearson, 2012. - 719 p.
3. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для вузов / Под общей ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 3-е изд., испр., стер. - М.: Альянс, 2016. - 364 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. - М.: АСТ, 2010. - 495 с.
5. Сумин Е.В., Шерстюков В.Б. Дифференциальные уравнения: Учеб.-мет. пособие. - М.: НИЯУ МИФИ, 2019. - 168 с.

Anatoly N. Kanatnikov,
Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
skipper@bmstu.ru
Alexander P. Kryshchenko,
Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
apkri@bmstu.ru

Features of solving first-order ordinary differential equations

Abstract. In the course on differential equations, techniques for solving differential equations play an important role, which, as a rule, are studied purely technically and are poorly related to the concept of solution of a differential equation. This article discusses the features of solving first-order differential equations. The role of dependent and independent variables in a first-order differential equation is shown, as well as the relationship between the process of solving a differential equation and the issues of the existence and uniqueness of solutions. The material will be useful in organizing a educational course on ordinary differential equations.

Keywords: Differential equation, general solution, special solution, general integral, separation of variables.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ» В КУРСЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация

Тема «Скалярное произведение» является обязательной и входит во все курсы аналитической геометрии для студентов математических и технических специальностей. Успешное освоение этой темы необходимо для изучения ряда других математических дисциплин. Особое внимание в статье уделено работе с теоретическим материалом при решении задач. Цель работы - показать, на каких примерах можно изучить и использовать основные свойства и доказательства теорем, а также показать методические аспекты изложения этой темы. Результатом исследования стал материал, который может служить основой для подготовки занятий и представлять интерес для студентов и преподавателей.

Ключевые слова

скалярное произведение, базис, разложение вектора по базису, координаты вектора

АВТОРЫ

Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель кафедры математического моделирования
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
talaskovy@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,
доцент кафедры математического моделирования
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
inpt@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-67

Введение

Развитие алгоритмического мышления школьников и студентов имеет как преимущества, так и недостатки. С одной стороны, разделение задачи на этапы, их последовательное четкое выполнение по предложенным алгоритмам, как правило, способствует ее быстрому решению. Это особенно ценно при ограниченном времени на выполнение задачи. Однако, использование алгоритмов без проверки условий их применимости иногда приводит к неверному ответу при полной уверенности исполнителя в его правильности. Поэтому перед тем, как приступить к решению, необходимо обращать внимание обучающихся на то, возможно ли в данной задаче применять тот или иной алгоритм. Набор задач и соответствующих примеров всегда должен быть в багаже у педагога. Покажем это на примере понятия скалярного произведения.

Методология и результаты исследования

Курсы аналитической геометрии и линейной алгебры являются одними из фундаментальных курсов математического образования во всех технических вузах. В указанных курсах изучают основные математические понятия, необходимые для дальнейшего математического образования. Более того, при изучении этих и других базовых математических курсов, учащиеся знакомятся с дедуктивно-аксиоматическим методом научного познания на примере построения математических теорий и учатся использовать его на практике. Однако, на практике, в процессе решения задач, обучающиеся часто заучивают алгоритмы вычислений без осмысления критериев их применимости и за счет этого неверно используют в отдельных задачах.

Примерами таких алгоритмов являются вычисление скалярного произведения векторов, длин векторов и углов между ними по стандартным формулам, выведенным для ортонормированного базиса. Как и многие доказательства теорем, эти выводы быстро забываются, а сами формулы дольше остаются в памяти, поскольку отрабатываются на семинарских занятиях. В случае, когда базис не является ортонормированным, использование этих формул дает неверные результаты.

И в аналитической геометрии, и в линейной алгебре скалярное произведение определяется независимо от выбора базиса в пространстве, но выводы формул для вычисления скалярного (а также векторного и смешанного произведений) обычно проводятся в этом базисе.

Напомним, что в аналитической геометрии первичными понятиями являются понятия длин векторов и углов между ними, опирающиеся на естественные практические понятия длин отрезков и величин углов, а скалярное произведение является вторичным понятием: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi$ (Канатников А. Н., Крищенко А. П. [1], Ильин В. А., Позднях Э. Г. [2]).

В линейной алгебре, наоборот, первичным является понятие скалярного произведения, оно вводится аксиоматически (Канатников А. Н., Крищенко А. П. [3]), а длины (нормы) векторов и косинус угла между ними являются вторичными, им может не соответствовать никакого привычного геометрического образа. То, что в аналитической геометрии доказывается как алгебраические свойства скалярного произведения, в линейной алгебре берется в качестве определяющих его аксиом.

Такими свойствами (аксиомами) являются симметричность, линейность по первому аргументу, положительная определенность и невырожденность скалярного произведения. Линейность по второму аргументу (следовательно, билинейность) доказываются с помощью симметричности и линейности по первому аргументу.

Равенства $\left(\bar{a},\bar{a}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\bar{a}\right|^2\Rightarrow\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\left(\bar{a},\bar{a}\right)}$ и $\cos\varphi=\dfrac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$ являются в аналитической геометрии следствиями из определения скалярного произведения, а в линейной алгебре — определениями.

Геометрические свойства доказываются обычно в аналитической геометрии, в линейной алгебре их смысл отчасти утрачивается, так как в качестве векторов могут рассматриваться функции, матрицы и другие объекты. К геометрическим свойствам относят связь угла между векторами (прямой, острый, тупой) и знаком их скалярного произведения (равенство нулю, больше нуля, меньше нуля).

В силу важности алгебраических свойств студентам надо уверенно овладеть ими. В школе в курсе геометрии многие из них умели это делать. Почему же в вузе возможны проблемы? Ответ заключается в том, что в школьном курсе скалярное произведение имело другое обозначение: $a \cdot b$ или $\bar{a} \cdot \bar{b}$, кроме того, векторы даже в высшей школе часто обозначаются жирным шрифтом без стрелок над ними. Поэтому вычисления скалярных произведений производятся обучающимися автоматически, как действия с действительными числами. Симметричность (коммутативность) и линейность скалярного произведения по обоим аргументам не вызывает трудностей, пока используются привычные обозначения. Отработанные алгоритмы в данном случае ведут по правильному пути. Трудности начинаются при смене обозначений: скалярное произведение обозначается в круглых скобках, между векторами ставится запятая. Теперь обучающимся нужно осознавать смысл симметричности и билинейности. А ведь вслед за скалярным произведением будет изучаться векторное произведение, также имеющее два разных обозначения, и оно уже не симметрично, а кососимметрично, хотя билинейно.

Именно для овладения алгебраическими свойствами скалярного произведения обучающиеся вначале учатся решать задачи, в которых векторы являются линейными комбинациями других векторов, аналогичные тем, что приводятся в сборнике под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича [4], и учебнике Привалова И.И. [5].

Задача 1.

Найти скалярное произведение и длины векторов $\bar{m} = 2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{n} = \bar{a} - \bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 3,\ |\bar{b}| = 2$, а угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

Решение.

Для начала найдем $\left(\bar{a},\bar{b}\right) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Тогда в соответствии с алгебраическими свойствами

$$\left(\bar{m},\bar{n}\right) = \left(2\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}\right) = \left(2\bar{a},\bar{a}-\bar{b}\right) + \left(\bar{b},\bar{a}-\bar{b}\right) = 2\left(\bar{a},\bar{a}\right) - 2\left(\bar{a},\bar{b}\right) + \left(\bar{b},\bar{a}\right) - \left(\bar{b},\bar{b}\right) =$$

$$= 2|\bar{a}|^2 - \left(\bar{a},\bar{b}\right) - |\bar{b}|^2 = 2 \cdot 3^2 - 3 - 2^2 = 11;$$

$$|\bar{m}| = \sqrt{\left(\bar{m},\bar{m}\right)} = \sqrt{\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)^2} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 4\left(\bar{a},\bar{b}\right) + \bar{b}^2} = \sqrt{4 \cdot 9 + 4 \cdot 3 + 4} = 2\sqrt{13};$$

$$|\bar{n}| = \sqrt{\left(\bar{n},\bar{n}\right)} = \sqrt{\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2} = \sqrt{\bar{a}^2 - 2\left(\bar{a},\bar{b}\right) + \bar{b}^2} = \sqrt{9 - 2 \cdot 3 + 4} = \sqrt{7}.$$

Задача 2.

Определить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если вектор $\bar{a} + 3\bar{b}$ перпендикулярен вектору $7\bar{a} - 5\bar{b}$, а вектор $\bar{a} - 4\bar{b}$ перпендикулярен вектору $7\bar{a} - 2\bar{b}$.

Решение.

Косинус угла найдем по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$

Из геометрических свойств скалярного произведения, условия перпендикулярности векторов имеют вид:

$$\begin{cases} \left(\bar{a}+3\bar{b},7\bar{a}-5\bar{b}\right) = 0 \\ \left(\bar{a}-4\bar{b},7\bar{a}-2\bar{b}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\bar{a}^2 - 15\bar{b}^2 + 16\left(\bar{a},\bar{b}\right) = 0 \\ 7\bar{a}^2 + 8\bar{b}^2 - 30\left(\bar{a},\bar{b}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\bar{a},\bar{b}\right) = \frac{1}{2}\bar{b}^2 \\ \bar{a}^2 = \bar{b}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\bar{a},\bar{b}\right) = \frac{1}{2}|\bar{b}|^2 \\ |\bar{a}| = |\bar{b}| \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в формулу для вычисления косинуса угла между векторами $\cos\varphi = \dfrac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|} = \dfrac{\frac{1}{2}\left|\bar{b}\right|^2}{\left|\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

После решения задач на использование алгебраических свойств переходят к задачам, когда векторы заданы своими координатами в некотором базисе пространства.

В классическом курсе аналитической геометрии рассматривается декартова прямоугольная система координат, отвечающая правой тройке $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$ (в пространстве) или паре $\left(\bar{i},\bar{j}\right)$ (на плоскости) взаимно ортогональных и единичных базисных векторов. Такие базисы называются ортонормированными.

Доказывается, например, в курсе лекций Александрова П.С. [6], что если на плоскости известны координаты векторов $\overline{u_1} = \left(x_1, y_1\right)$ и $\overline{u_2} = \left(x_2, y_2\right)$ в ортонормированном базисе, то

$$\left(\overline{u_1},\overline{u_2}\right) = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \left|\overline{u_1}\right| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}, \quad \left|\overline{u_2}\right| = \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}}. \qquad (1)$$

Так же, если в пространстве известны координаты векторов $\overline{u_1} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\overline{u_2} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ в ортонормированном базисе, то

$$\left(\overline{u_1},\overline{u_2}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad \left|\overline{u_1}\right| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}, \quad \left|\overline{u_2}\right| = \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}.$$

Эти формулы выводятся с помощью свойств скалярного произведения и знакомы многим студентам еще со школьной скамьи. Однако в школе не рассматриваются никакие другие системы координат, кроме декартовой прямоугольной и поэтому возникает соблазн применять эти формулы даже в тех случаях, когда векторы заданы своими координатами в произвольном базисе.

Рассмотрим другой пример, показывающий, что неверное использование этих формул может привести к неверному результату.

Задача 3.

Найти скалярное произведение, длины и угол между векторами $\bar{x} = \left(2,2\right)$ и $\bar{y} = \left(2,-2\right)$, заданные в ортонормированном базисе $B_1\left(\bar{i};\bar{j}\right)$. Затем найти скалярное произведение, длины и угол между теми же векторами, предварительно вычислив их координаты в базисе $B_2\left(\overline{e_1} = 2\bar{i}; \overline{e_2} = 2\bar{i} + 2\bar{j}\right)$. Сравнить полученные результаты.

Решение.

По формулам (1) для базиса $B_1\left(\bar{i};\bar{j}\right)$, получим:

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=2\cdot 2+2\cdot(-2)=0$$

$$\left|\overline{x}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2},\quad \left|\overline{y}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|}=0\Rightarrow\varphi=90^\circ \qquad (2)$$

Затем вычислим координаты векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ в базисе B_2.

$$\begin{cases}\overline{e_1}=2\bar{i}\\ \overline{e_2}=2\bar{i}+2\overline{j}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\bar{i}=\overline{e_1}\\ 2\overline{j}=\overline{e_2}-\overline{e_1}\end{cases}$$

Следовательно,
$\overline{x}=2\bar{i}+2\overline{j}=\overline{e_2}=0\cdot\overline{e_1}+\overline{e_2}$, $\overline{y}=2\bar{i}-2\overline{j}=\overline{e_1}-\left(\overline{e_2}-\overline{e_1}\right)=2\overline{e_1}-\overline{e_2}$. Это означает, что в базисе B_2 координаты векторов будут иметь вид $\overline{x_{B_2}}=(0,1)$ и $\overline{y_{B_2}}=(2,-1)$.

Найдем скалярное произведение, длины векторов и угол между ними, используя координаты векторов в базисе B_2 и свойства скалярного произведения. Сначала вычислим:

$$\left(\overline{e_1},\overline{e_1}\right)=\left(\overline{2i},\overline{2i}\right)=4\left(\bar{i},\bar{i}\right)=4\left|\bar{i}\right|^2=4$$

$$\left(\overline{e_2},\overline{e_2}\right)=\left(\overline{2i}+2\overline{j},\overline{2i}+2\overline{j}\right)=4\left(\bar{i},\bar{i}\right)+4\left(\bar{i},\overline{j}\right)+4\left(\overline{j},\bar{i}\right)+4\left(\overline{j},\overline{j}\right)=4\left|\bar{i}\right|^2+4\cdot 0+4\cdot 0+4\left|\overline{j}\right|^2=4+4=8$$

$$\left(\overline{e_1},\overline{e_2}\right)=\left(\overline{e_2},\overline{e_1}\right)=\left(\overline{2i},\overline{2i}+2\overline{j}\right)=4\left(\bar{i},\bar{i}\right)+4\left(\bar{i},\overline{j}\right)=4\left|\bar{i}\right|^2+4\cdot 0=4$$

Следовательно:

$$\left|\overline{x}\right|=\sqrt{\left(\overline{x},\overline{x}\right)}=\sqrt{\left(\overline{e_2},\overline{e_2}\right)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$$

$$\left|\overline{y}\right|=\sqrt{\left(\overline{y},\overline{y}\right)}=\sqrt{\left(2\overline{e_1}-\overline{e_2},2\overline{e_1}-\overline{e_2}\right)}=\sqrt{4\left(\overline{e_1},\overline{e_1}\right)-2\left(\overline{e_1},\overline{e_2}\right)-2\left(\overline{e_2},\overline{e_1}\right)+\left(\overline{e_2},\overline{e_2}\right)}=$$

$$=\sqrt{4\cdot 4-2\cdot 4-2\cdot 4+8}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$$

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\left(0\cdot\overline{e_1}+\overline{e_2},2\overline{e_1}-\overline{e_2}\right)=0\cdot 2\left(\overline{e_1},\overline{e_1}\right)+0\cdot(-1)\left(\overline{e_1},\overline{e_2}\right)+1\cdot 2\left(\overline{e_2},\overline{e_1}\right)+1\cdot(-1)\left(\overline{e_2},\overline{e_2}\right)= \qquad (3)$$

$$=2\left(\overline{e_2},\overline{e_1}\right)-\left(\overline{e_2},\overline{e_2}\right)=2\cdot 4-8=0.$$

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|}=0\Rightarrow\varphi=90^\circ$$

Сравним полученные результаты (2) и (3) и убедимся, что они совпадают.

Важно обратить внимание учащихся на то, что если находить скалярное произведение векторов $\overline{x_{B_2}}=(0,1)$ и $\overline{y_{B_2}}=(2,-1)$ по формулам (1), не учитывая тот факт, что базис B_2 не ортонормированный, то получится неверный результат, а именно:

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=0\cdot 2+1\cdot\left(-1\right)=-1\neq 0,$$

$$\left|\overline{x}\right|=\sqrt{0^2+1^2}=1\neq 2\sqrt{2},\quad \left|\overline{y}\right|=\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{5}\neq 2\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{-1}{1\cdot\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\neq 0.$$

В конце занятия можно вместе со студентами вывести общие формулы для вычисления скалярного произведения в произвольном базисе.

На примере решенных задач, обучающиеся должны твердо усвоить следующее:

1. Формулы для нахождения скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированном базисе, их длин и углов между ними, значительно легче, чем для векторов, заданных в произвольном базисе;
2. Формулы (1) можно использовать только в ортонормированном базисе;
3. Результат вычисления не зависит от базиса, если правильно применять свойства.

Хотелось бы отметить, что простое приведение примера, показывающего неприменимость стандартных формул в нестандартных ситуациях, недостаточно для прочного овладения навыками решения соответствующих задач. Вычисления можно предварять вопросами:

– В каком базисе заданы координаты векторов?
– Какие формулы будем использовать?

Также возможны частные случаи, когда неверное применение формул дает правильные результаты. Эту ситуацию обучающиеся могут использовать как аргумент для вычисления по упрощенным формулам. В подобном случае быстро подобранный преподавателем пример должен разубедить обучающегося.

Заключение

Авторы статьи считают, что приведенные примеры помогут студентам более глубоко и неформально изучить данный раздел аналитической геометрии, глубже понимать теоретический материал и научиться использовать его при решении практических задач. В дальнейшем, в курсе линейной алгебры, скалярное произведение вводится аксиоматически, но оно обладает алгебраическими свойствами скалярного произведения в обычном трехмерном пространстве. Поэтому, навыки работы со скалярным произведением так важно отработать на более простых и наглядных примерах в курсе аналитической геометрии, они помогут учащимся легко освоить такие понятия, как метрику, то есть способ измерять длины и углы, а также изучать евклидовы пространства.

Кроме того, желательно включать в занятия задачи, аналогичные Примеру 3, чтобы показать, использование алгоритмов должно быть подкреплено теоретическими знаниями, иначе сила привычки и неверная интуиция могут подвести обучающихся в ответственные моменты. Подобные случаи возможны при изучении других математических разделов. Важно показать студентам, что возможны различные, в том числе и неправильные пути рассуждений, и в этом случае нужно уметь из множества различных путей находить правильные.

Изучение математических дисциплин должно формировать у обучающихся способность критически осмысливать условия задач, которые требуется решить, и подбирать подходящее решение или решения. Оно далеко от автоматического воспроизведения набора известных алгоритмов. Преподаватели способствуют этому процессу только в том случае, если имеют соответствующую методическую и математическую подготовку.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. – 9-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2019. - 374 с.
2. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. – 8-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024. - 224 с.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. – 5-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. - 335 с.
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1.Учеб. пособие для втузов. Под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. 3-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1993. - 480 с.
5. Привалов И.И. Аналитическая геометрия: Учебник. 38-е изд.- М.: Изд-во Лань, 2010. - 304 с.
6. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии: Учеб. для вузов. 6-е изд. стер. - М.: Изд-во Лань, 2025. - 512 с.

Tatiana A. Laskovaya,
Senior Lecturer, Department of mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
talaskovy@mail.ru
Inga V. Ptitsyna,
Associate Professor, Department of mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru

On some methodological aspects of presenting the topic "Scalar product" in the course of analytical geometry.

Abstract. The topic "Scalar product" is a must-learn and is included in all courses of analytical geometry for students of mathematical and technical specialties. Successful mastery of this topic is necessary for studying a number of other mathematical disciplines. Particular attention in the article is paid to working with theoretical material when solving problems. The purpose of the work is to show which examples can be used to study and use the basic properties and proofs of theorems, as well as to show the methodological aspects of presenting this topic. The result of the study was material that can serve as a basis for preparing classes and be of interest to students and teachers.

Keywords: scalar product, basis, decomposition of a vector in a basis, coordinates of a vector.

ФАСИЛИТАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ОСНОВНЫМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПОНЯТИЯМ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ В ВУЗАХ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОФИЛЯ

Аннотация

Подготовка современных специалистов во многих областях народного хозяйства непосредственно связана с углублением их знаний в области фундаментальных наук. Поэтому любые исследования и методические разработки, направленные на повышение уровня математического образования в высших учебных заведениях всегда актуальны. В данной статьи предъявляются методические материалы, посвященные изучению одной из ключевых алгебраических структур, а именно группы. Теоретический материал излагается в виде большого числа задач, как разобранных, так и предназначенных для самостоятельного решения. Такой подход позволяет существенной облегчить процесс изучения студентами такого абстрактного понятия, как алгебраическая группа.

Ключевые слова

алгебраическая структура, группа, подгруппа, изоморфизм, гомоморфизм, нормальная подгруппа, факторгруппа

АВТОР

Пинчук Ирина Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»; доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
irenepin@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-74

Введение

Качественное овладение основными математическими понятиями существенно повышает профессионализм специалистов и делает их конкурентно способными и востребованными в различных сферах деятельности. Подтверждение такой позиции можно найти во многих исследованиях и научных работах, например в статье В.П. Прокопьева [1].

Теория алгебраических структур давно лежит в основе математической подготовки студентов математических специальностей университетов и является одним из ведущих разделов классического математического образования. Так, например, авторы Е.М. Вечтомов и В.В. Чермных в [2] обосновывают важность изучения этого раздела математики в подготовке студентов такого направления подготовки как «Математика и компьютерные науки».

Однако и в профессиональной подготовке специалистов других естественных направлений, как физика, химия, инженерные специальности, роль алгебраических структур также велика, так как алгебраические структуры имеют важные прикладные применения. Кроме того, теория алгебраических структур незаменима для развития абстрактного мышления, что, например, обосновывается М.А. Городиловой и П.В. Виноградовой в [3].

Зарубежные авторы разделяют мнения российских исследователей о важной роли абстрактным алгебраических структур и, в первую очередь, алгебраических групп в образовании студентов широкого профиля. Об этом прежде всего свидетельствует анализ значительной части учебных пособий. Обзор книг, выпущенных иностранными издательствами, в частности, в последние 2-3 года также позволяет выделить и подчеркнуть важную роль алгебраических структур не только в теоретических рассуждениях, но и при решении прикладных задач. Отметим некоторые из них.

Y. Shapira в [4] отмечает особое значение теории групп в подготовке специалистов технического профиля, физиков и химиков, подчеркивая преимущество изучения этой теории параллельно с основами линейной алгебры. J. Bünemann в [5] демонстрирует возможности теории групп для специалистов-физиков, в то время как A.J. Ceulemans в [6] большое внимание уделяет специальным вопросам этой теории, необходимым для подготовки будущих специалистов-физиков.

Вместе с тем, изучение именно этого раздела математики часто вызывает большие трудности, так как предлагаемый материал является очень абстрактным и, как утверждают некоторые студенты, сильно оторван от жизни. Поэтому он кажется очень сложным для восприятия. Особенно это касается студентов нематематических профилей.

Все изложенное выше подчеркивает важность поиска путей преодоления выявленной проблемы и разработки методики обучения, направленной на фасилитацию процесса обучения.

Методология и результаты исследования

Традиционно изучение основных алгебраических структур, таких, как группа, кольцо, поле, линейное и евклидово пространство, начинаются с определения бинарных операций и их свойств. Такое развитие изложения можно найти как в учебнике по общей алгебре А.И. Кострикина [7], который уже стал классическим, так и в учебном пособии, посвященным алгебраическим структурам, автора А.А. Туганбаева [8], изданном в недавнем времени.

Одной из основных алгебраических структур является алгебраическая группа. Опишем один из возможных подходов обучения элементам теории групп, который, по нашему мнению, может оказаться эффективным и позволит достичь поставленной цели: фасилитации процесса обучения.

После введения определения группы полезно обсудить основные примеры групп, опираясь на уже имеющиеся знания студентов, а также расширить класс примеров, например, определив симметрическую группу S_n , которая является важным примером конечной некоммутативной группы. Изучение этого примера позволит далее изложить углубиться в изучение конечных групп, которые составляют важный раздел общей теории групп.

Можно выделить ключевые теоретические вопросы, которые входят в базовые понятия теории групп:

1. Подгруппы, разложение по подгруппе. Теорема Лагранжа для конечных групп. Нормальная подгруппа.
2. Изоморфизм групп.
3. Степень элементов группы, циклические конечные и бесконечные группы, их изоморфизм. Порядок элементов группы.
4. Гомоморфизмы, виды гомоморфизмов групп (мономорфизмы и эпиморфизмы), примеры. Факторгруппы.
5. Теорема об эпиморфизмах групп.

Для фасилитации усвоения этих понятий все теоремы и свойств предлагаются студентам в виде задач, что делает изложение материала менее абстрактном и формальным. Это уменьшает психологический барьер перед новыми понятиями и тем самым повышает эффективность обучения и качество образования.

Приведем основные определения, с которых начинается изучение этого раздела математики.

Говорят, что на непустом множестве G определена бинарная операция $\star$, если указан закон, по которому паре элементов a, b из G однозначным образом ставится в соответствие третий элемент того же множества, обозначаемый $a \star b$.

Примеры бинарных операций были приведены, например, в пособии на основным алгебраическим структурам И.А. Пинчук [9]. В частности, бинарными операциями являются сложение и умножение на множествах $\mathbb{R}$ - всех действительных, $\mathbb{C}$ - всех комплексных, $\mathbb{Q}$ - всех рациональных, $\mathbb{Z}$ - всех целых и $\mathbb{N}$ - всех натуральных чисел, а также сложение и умножение квадратных матриц $M(n, \mathbb{R})$ порядка n с действительными элементами.

Непустое множество G с определенной на нем бинарной операцией $\star$ называется группой, если выполнены следующие условия.

1. Операция $\star$ ассоциативна, т.е. $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ для любых $a, b, c \in G$.

2. Существует элемент $e \in G$, нейтральный относительно операции $\star$, т.е. такой, что $a \star e = e \star a = a$ для любого $a \in G$.

3. Для каждого элемента $a \in G$ существует обратный элемент $a' \in G$ такой, что $a \star a' = a' \star a = e$.

Группа G называется коммутативной (или абелевой), если $a \star b = b \star a$ для любых a, $b \in G$.

Если группа G конечна и состоит из n элементов, то число n называется порядком группы G.

Обычно операцию в группе называют умножением (обозначение $\cdot$) и говорят о мультипликативной записи группы; реже – сложением (обозначение +). Такую запись называют аддитивной и чаще используют для коммутативных групп. В дальнейшем, если не оговорено противное, используем мультипликативную запись операции в группе.

Примерами групп являются, в частности, множества $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ являются группами относительно сложения, а множества $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, соответственно ненулевых действительных, комплексных или рациональных чисел – группами относительно умножения. Все эти группы коммутативны. Множество всех квадратных невырожденных матриц $M(n, \mathbb{R})$ порядка n с действительными элементами является группой по умножению (как и множество всех таких матриц с элементами из $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}$. Эти группы некоммутативны, если $n >$1.

Приведем еще один важный класс примеров некоммутативных групп. Подстановкой на множестве $M = \{1,2,3\}$ называется взаимно однозначное отображение множества M на себя. Подстановка, отображающая 1 в i_1, 2 в i_2, 3 в i_3 обозначается $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ i_1 i_2 i_3 \end{pmatrix}$.

Если $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ i_1 i_2 i_3 \end{pmatrix}$ и $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ j_1 j_2 j_3 \end{pmatrix}$ - подстановки на множестве M, то отображение, состоящее в последовательном выполнении сначала τ_1 , а потом τ_2 также будет взаимно однозначным отображением множества M на себя, т.е. тоже является подстановкой. Эта подстановка τ_3 называется произведением подстановок τ_1 и τ_2.

Если $M = \{1,2, \cdots, n\}$, то понятие подстановки на M и операция умножения подстановок определяются аналогично.

Предложение 1. Для любого целого $n \geq 1$ умножение подстановок на множестве $\{1,2,\cdots,n\}$ ассоциативно (оставим это утверждение без доказательства).

Далее приведем систему задач, которая характеризует свойства операции умножения подстановок.

Задача 2. Доказать, что подстановки на множестве $\{1,2,\cdots,n\}$ образуют группу по умножению. (Эта группа обозначается символом S_n).

Решение. В силу предложения 1 умножение - ассоциативная операция на множестве подстановок. Нейтральным элементом будет тождественная подстановка $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, а обратным элементом для подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, будет подстановка $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Задача 3. Доказать, что группа S_n некоммутативна при $n \geq 3$.

Указание. Рассмотреть подстановки $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ и $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ (обе подстановки оставляют на месте все элементы, начиная с 4) и убедиться, что $\tau_1 \cdot \tau_2 \neq \tau_2 \cdot \tau_1$.

Группа G и G' называются изоморфными (обозначение: $G \simeq G'$, если между ними можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если a_1 и a_2 - произвольные элементы из G и им соответствуют соответственно элементы a_1' и a_2' из G' , то произведению $a_1 \cdot a_2$ соответствует элемент $a_1' \cdot a_2'$ (такое соответствие называется сохраняющим операцию).

Изоморфные группы «устроены» одинаково, поэтому в алгебре их не различают - «подобно тому, как мы не различаем экземпляров одного и того же романа, напечатанных разным шрифтом и на разной бумаге, если интересуемся только содержанием романа», как отмечали в уже хрестоматийном издании М.И. Каргаполов и Ю.И. Мерзляков [10].

Задача 4. Доказать, что если группы G и G' изоморфны, то нейтральному элементу e группы G соответствует нейтральный элемент e' группы G'.

Решение. Пусть b' - элемент группы G', соответствующий e; так как $e \cdot e = e$, то $b' \cdot b' = b'$. Умножая обе части последнего равенства на $(b')^{-1}$ и учитывая, что $b' \cdot b' \cdot (b')^{-1} = b' \cdot e' = b'$, $b'^{\cdot (b')^{-1}} = e'$, получаем $b' = e'$.

Задача 5. Доказать, что если группы G и G' изоморфны, a - произвольный элемент из G , a' - соответствующий ему элемент из G' , то элементу a^{-1} соответствует элемент $(a')^{-1}$.

Указание. Показать, что если b' - элемент, который соответствует элементу a^{-1}, то $\mathrm{b}' \cdot a' = a' \cdot b' = e'$.

Задача 6. Доказать, что группа $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению изоморфна группе $2\mathbb{Z}$ всех четных целых чисел по сложению.

Решение. Установим взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $\mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z}$, поставив в соответствие каждому числу $k \in \mathbb{Z}$ четное число $2k \in 2\mathbb{Z}$. Пусть k_1, k_2 - произвольные числа из $\mathbb{Z}$. Им будут соответствовать числа $2k_1, 2k_2 \in 2\mathbb{Z}$, а их сумме $k_1 + k_2$ - число $2(k_1 + k_2)$. Так как $2(k_1 + k_2) = 2k_1 + 2k_2$, то определенное нами соответствие сохраняет групповую операцию, т.е. $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$.

Задача 7. Доказать, что группа $\mathbb{R}$ всех действительных чисел по сложению изоморфна группе $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел по умножению.

Указание. Поставить в соответствие каждому числу $r \in \mathbb{Z}$ положительное число $e^r \in \mathbb{R}_+$ и воспользоваться тождеством $e^{r_1+r_2} = e^{r_1} \cdot e^{r_2}$.

Задача 8. Пусть M - произвольное множество, состоящее из n элементов. Доказать, что группа подстановок на множестве M изоморфна группе S_n.

Указание. Пусть $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Поставить в соответствие каждой подстановке $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_{i_1} & m_{i_2} & \dots & m_{i_n} \end{pmatrix}$ из множества M подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ из S_n.

Если подмножество H группы G само является группой относительно бинарной операции в G, то H называют подгруппой (обозначение: $H \le G$). Так, по сложению $\mathbb{Z}$ является подгруппой в $\mathbb{Q}$, а $\mathbb{Q}$, в свою очередь, - подгруппой в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$; по умножению группа $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ является подгруппой в $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, а последняя - подгруппой в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Подгруппами в группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению является множество всех целых четных чисел $2\mathbb{Z}$. И вообще любое множество чисел $m\mathbb{Z}$, делящихся без остатка на m, где $m \in \mathbb{N}$.

Задача 9. Доказать, что непустое подмножество H группы G является подгруппой в G тогда и только тогда, когда

1) для любых $h_1, h_2 \in H$ выполнено $h_1 \cdot h_2 \in H$;
2) для любого $h \in H$ выполнено $h^{-1} \in H$.

Решение. Если H - подгруппа в G, то условия 1) и 2), очевидно, выполнены. Покажем, что верно и обратное. Пусть H - непустое подмножество в G, удовлетворяющее условиям 1) и 2). Тогда из 1) следует, что в H задана та же бинарная операция, что и в группе G, ее ассоциативность очевидна. Если $h \in H$, то в силу 2) $h^{-1} \in H$ и тогда в силу 1) $h \cdot h^{-1} = e \in H$, то есть $e \in H$. Наконец, условие 2) гарантирует существование в H обратного элемента h^{-1} для любого элемента $h \in H$.

Задача 10. Доказать, что множество квадратных матриц порядка n с определителем, равным 1, является подгруппой (по умножению) группы всех невырожденных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$.

Указание. Воспользоваться задачей 9.

Задача 11. (теорема Кэли). Пусть G - конечная группа порядка n. Тогда G изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок S_n.

Указание. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ - различные элементы группы G. Поставить в соответствие каждому элементу b группы G подстановку $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ (a_{i_1}b) & (a_{i_2}b) & \dots & (a_{i_n}b) \end{pmatrix}$.

Далее остановимся на блоке задач, раскрывающих важный класс групп - циклические группы. Введем необходимые определения.

Пусть G - группа, $a \in G$. Символом a^n $(n \ge 1)$ обозначим произведение из n элементов $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$; в силу ассоциативности бинарной операции элемент a^n определен однозначно. Отрицательные степени элемента a определим, полагая $a^{-n} = (a^{-1})^n$; наконец, положим $a^0 = e$. Обозначим через $\langle a \rangle$ множество всех степеней элемента a.

Задача 12. Доказать, что $\langle a \rangle$ - подгруппа в G.

Указание. Проверить, что при любых показателях m и n, положительных, отрицательных или нулевых, выполняется равенство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, а затем, пользуясь этим равенством и задачей 9, проверить, что $\langle a \rangle$ - подгруппа в G.

Группу $\langle a \rangle$ называют циклической группой, порожденную элементом a. Отметим, что если все степени элемента a различны, то группа $\langle a \rangle$ бесконечна.

Задача 13. Доказать, что если $a^k = a^l$ при некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \ne l$, то группа $\langle a \rangle$ конечна.

Решение. Пусть $a^k = a^l$ и $k < l$. Тогда $a^{l-k} = e$, т.е. существуют положительные степени элемента a, равные e. Пусть n - наименьшая такая степень. В этом случае элементы $e, a, a^2, \dots a^{n-1}$ попарно различны (в противном случае n не будет наименьшим). Всякая другая степень элемента a равна одному из этих элементов. Действительно, если q - любое целое число, то, разделив q с остатком на n, получим

$q = nr + s,\ 0 \leq s < n$, а поэтому $a^q = a^{nr+s} = (a^n)^r \cdot a^s = a^s$. Таким образом, группа $\langle a \rangle$ конечна.

Если такое число n существует, то оно называется порядком элемента a. Из решения задачи 13 следует, что если элемент a порядка n, то $\langle a \rangle = \{ e, a, a^2, \dots a^{n-1}\}$, т.е. порядок группы $\langle a \rangle$ совпадает с порядком порождающего эту группу элемента a.

Замечание. При аддитивной записи операции в группе G следует говорить не о степенях, а о кратных элемента a, и писать не a^n , а na.

Задача 14. Доказать, что все бесконечные циклические группы изоморфны между собой.

Решение. Пусть $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ - бесконечные циклические группы. Установим взаимно однозначное соответствие между элементами этих групп, ставя в соответствие элементу a^n элемент b^n . Тогда нетрудно проверить, что это соответствие сохраняет групповую операцию. Следовательно, $\langle a \rangle \simeq \langle b \rangle$.

Замечание. Так как группа $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению - бесконечная циклическая (все ее элементы кратны 1), то любая бесконечная циклическая группа изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению.

Задача 15. Доказать, что все циклические группы одного порядка изоморфны между собой.

Следующий набор задач посвящен универсальной конструкции в теории алгебраических структур – факторструктуре.

Пусть G - группа, A, B - подмножества в G . Произведением $A \cdot B$ этих подмножеств называется множество всех произведений $a \cdot b$, где $a \in A,\ b \in B$. Если одно из подмножеств A, B состоит из одного элемента, например $A = \{a\}$, то вместо $A \cdot B$ пишут aB .

Пусть G - группа, H - подгруппа в G. Для любого $a \in G$ левым смежным классом группы G по подгруппе H, порожденным элементом a, называется множество $aH = \{ab \mid b \in H\}$.

Задача 16. Доказать, что если $a_2 \in a_1H$, то $a_1H = a_2H$.

Указание. Пользуясь тем, что $a_2 = a_1b$ для некоторого $b \in H$, показать, что $a_2H \subseteq a_1H$, а так как из $a_2 = a_1b$ следует $a_1 = a_2b^{-1}$, то $a_1H \subseteq a_2H$.

Задача 17. Доказать, что любые два смежных класса группы G по подгруппе H либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

Решение. Пусть a_3 - общий элемент классов a_1H и a_2H , тогда в силу предыдущей задачи $a_1H = a_3H = a_2H$.

Следствие 18. Если G - группа, H - подгруппа в G, то G является объединением попарно непересекающихся левых смежных классов по подгруппе H.

Задача 19. Доказать, что $a_1H = a_2H$ тогда и только тогда, когда $a_1a_2^{-1} \in H$.

Задача 20. Пусть $m \in \mathbb{Z},\ m > 1$. Найти смежные классы группы целых чисел по сложению $\mathbb{Z}$ по подгруппе $m\mathbb{Z}$ чисел, делящихся без остатка на m.

Решение. В силу задачи 19 числа $k, l \in \mathbb{Z}$ лежат в одном смежном классе по подгруппе $m\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $k - l$ делится на m без остатка. Последнее же имеет место тогда и только тогда, когда k и l дают одинаковые остатки при делении на m . Следовательно, смежными классами по подгруппе $m\mathbb{Z}$ будут: сама подгруппа $m\mathbb{Z}$, множество 1+$m\mathbb{Z}$ целых чисел, дающих при делении на m остаток 1, множества 2+$m\mathbb{Z}$, 3+$m\mathbb{Z}$,…, (m-1)+$m\mathbb{Z}$.

Задача 21. Пусть H - конечная подгруппа в G и m - порядок подгруппы H. Тогда каждый левый смежный класс aH $(a \in G)$ состоит из m элементов.

Указание. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_m$ - попарно различные элементы, составляющие H. Показать, что тогда левый смежный класс состоит из попарно различных элементов $ab_1, ab_2, \dots, ab_m$.

Задача 22. (теорема Лагранжа). Пусть G - конечная группа, H - подгруппа в G. Тогда порядок G делится на порядок подгруппы H.

Указание. Пусть n - порядок группы G, m - порядок подгруппы H, k - число различных левых смежных классов G по H. Используя следствие 18 и задачу 21, показать, что $n = m \cdot k$.

Задача 23. Пусть G - конечная группа порядка n, $a \in G$. Доказать, что $a^n = e$.

Наряду с левыми смежными классами группы G по подгруппе H можно рассматривать и правые смежные классы $Ha = \{ba \mid b \in H\}$. Для коммутативных групп левый и правый смежные классы, порожденные любым элементом a, совпадают, для некоммутативных групп это на всегда так.

Если N - подгруппа в G, и $aN = Na$ для любого $a \in G$, то подгруппу N называют нормальной и записывают $N \trianglelefteq G$.

Задача 24. Пусть N - подгруппа в G. Доказать, что N нормальна в G тогда и только тогда, когда N вместе с любым своим элементом b содержит и элементы $a^{-1}ba$, где $a \in G$.

Решение. Пусть N - нормальная подгруппа в G, $a \in G$ и $b \in N$ - произвольные элементы. Так как $ba \in Na$, а $Na = aN$, то найдется элемент $b' \in N$ такой, что $ba = ab'$, т.е. $a^{-1}ba = b' \in N$.

Пусть теперь N - подгруппа в G, содержащая вместе с любым своим элементом b содержит и элементы $a^{-1}ba$, $a \in G$. Пусть c - произвольный элемент из G, докажем, что $cN = Nc$. Пусть $bc \in Nc$, так как $b' = c^{-1}bc \in N$, то $bc = cb' \in cN$, т.е. $Nc \subseteq cN$. Аналогично доказывается включение $cN \subseteq Nc$, откуда N - нормальная подгруппа в G.

Задача 25. Доказать, что в группе невырожденных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$ по умножению подгруппа матриц с определителем, равным 1 (см. задачу 10), нормальна.

Задача 26. Пусть H - подгруппа в G. Тогда $H \cdot H = H$.

Решение. Так как H - подгруппа, то для любых $b_1, b_2 \in H$ выполнено $b_1 \cdot b_2 \in H$, то есть $H \cdot H \subseteq H$, а так как для любого $b \in H$ выполнено $b = b \cdot e \in H \cdot H$, то $H \subseteq H \cdot H$, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 27. Пусть N - нормальная подгруппа в G. Тогда$(aN) \cdot (bN) = (ab)N$ для любых $a, b \in G$.

Решение. Так как N - нормальная подгруппа в G, то $bN = Nb$ для любого $b \in G$, поэтому $(aN) \cdot (bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)(N \cdot N) = (ab)N$ для любых $a, b \in G$.

Замечание. Из задачи 27 следует, что если N - нормальная подгруппа в G, то произведение смежных классов G по N снова смежный класс G по N, то есть на множестве смежных классов определена бинарная операция умножения.

Задача 28. Пусть N - нормальная подгруппа в G. Тогда смежные классы G по N образуют группу по умножению классов.

Указание. Пусть K - множество смежных классов G по N. Проверить, что $N = eN$ является нейтральным элементом в K относительно умножения классов, а смежный класс $a^{-1}N$ - обратным к смежному классу aN для любого $a \in G$.

Группа смежных классов группы G по нормальной подгруппе N называется факторгруппой G по N и обозначается $\frac{G}{N}$.

Задача 29. Построить «таблицу сложения» для факторгруппы $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ группы целых чисел $\mathbb{Z}$ по сложению по подгруппе $3\mathbb{Z}$ чисел, делящихся без остатка на 3.

Решение. Обозначим через $\overline{k}$ смежный класс по подгруппе $3\mathbb{Z}$, порожденный числом k : $\overline{k} = k + 3\mathbb{Z}$. Всего существует три различных смежных класса в этом случае (см. задачу 20): $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$. Учитывая, что $\overline{k} + \overline{l} = (k + 3\mathbb{Z}) + (l + 3\mathbb{Z}) = (k + l) + 3\mathbb{Z} = \overline{k + l}$, и $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, получаем таблицу 1.

Таблица 1

Таблица сложения в группе $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Задача 30. Построить таблицы сложения для факторгрупп $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$.

Отображение φ группы G в группу G' называется гомоморфизмом, если φ сохраняет групповую операцию, а именно: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ для любых $a, b \in G$.

Задача 31. Пусть $\varphi : G \longrightarrow G'$ - гомоморфизм, e и e' - нейтральные элементы групп G и G' соответственно. Тогда $\varphi(e) = e'$.

Решение. Так как $e \cdot e = e$, то $\varphi(e \cdot e) = \varphi(e)$, откуда $\varphi(e) = e'$.

Задача 32. Пусть $\varphi : G \longrightarrow G'$- гомоморфизм, $a \in G$. Тогда $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}$.

Указание. Пусть $\varphi(a^{-1}) = b'$. Проверить, что $b' \cdot \varphi(a) = \varphi(a) \cdot b' = e'$.

Пусть $\varphi : G \longrightarrow G'$ - гомоморфизм. Множество $\varphi(G)$ всех элементов $\varphi(a)$, $a \in G$, называют образом гомоморфизма φ , а множество всех таких элементов $a \in G$, что $\varphi(a) = e'$ - ядром гомоморфизма φ . Если $\varphi(G) = G'$, то φ называется эпиморфизмом.

Задача 33. Доказать, что образ $\varphi(G)$ гомоморфизма φ является подгруппой группы G'.

Указание. Воспользоваться задачей 9.

Задача 34. Доказать, что ядро гомоморфизма φ является нормальной подгруппой в группе G .

Указание. Воспользоваться задачами 9 и 24.

Задача 35. Пусть $\varphi : G \longrightarrow G'$- гомоморфизм, N - его ядро; пусть $a' \in \varphi(G)$. Доказать, что множество всех элементов $a \in G$ таких, что $\varphi(a) = a'$, является смежным классом группы G по нормальной подгруппе N.

Указание. Пусть a_0 - элемент из G такой, что $\varphi(a_0) = a'$. Показать, что, во-первых, $\varphi(a) = a'$ для любого $a \in a_0N$; во-вторых, если $a \in G$, $\varphi(a) = a'$, то $a \in a_0N$ (воспользоваться задачей 19).

Задача 36. (Теорема об эпиморфизмах). Пусть $\varphi : G \longrightarrow G'$- эпиморфизм, N - его ядро. Тогда N - нормальная подгруппа в G и $\frac{G}{N} \simeq G'$.

Указание. Поставить в соответствие элементу $a' \in G'$ смежный класс группы G по N, элементы которого отображаются в a'.

Задача 37. Пусть G - группа невырожденных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$ по умножению, N - подгруппа матриц с определителем, равным 1. Пусть $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - группа ненулевых действительных чисел по умножению. Доказать, что $\frac{G}{N} \simeq H$.

Решение. Определим отображение φ группы G в H, полагая $\varphi(A) = \det(A)$ для любой матрицы A из G . Так как $det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ для любых матриц A и B, то φ - гомоморфизм групп. Для любого числа $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, найдется невырожденная матрица A такая, что $\det(A) = r$, следовательно, φ - эпиморфизм. Наконец, ядром φ оказывается подгруппа матриц с определителем 1, т.е. N. Откуда получаем, что по теореме об эпиморфизмах $\frac{G}{N} \simeq H$.

Задача 38. Пусть $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ - группа ненулевых комплексных чисел по умножению, N - множество чисел $z \in G$ таких, что $|z| = 1$, $\mathrm{H} = \mathbb{R}_+$ - группа положительных действительных чисел по умножению. Доказать, что $\frac{G}{N} \simeq H$.

Указание. Доказать, что отображение $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{H}$ по закону $\varphi(z) = |z|$ для всех $z \in G$ оказывается эпиморфизмом, а N - его ядро.

Задача 39. Пусть $G = \mathbb{R}$ - группа действительных чисел по сложению, $N = \mathbb{Z}$ - подгруппа целых чисел в $\mathbb{R}$. Пусть также H - группа по умножению всех комплексных чисел z таких, что $|z| = 1$. Доказать, что $\frac{G}{N} \simeq H$.

Указание. Показать, что эпиморфизмом является отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{H}$ по закону: $\varphi\ (r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$ для всех $r \in \mathbb{R}$.

Заключение

Таким образом, в данной работе мы демонстрируем, что для изучения основ теории групп можно разработать систему задач, позволяющую существенно облегчить ее восприятие и систематизировать процесс усвоения теоретического материала. Такой подход особенно окажется полезным для студентов нематематических специальностей, которым порой не очень просто оперировать абстрактными понятиями современной алгебры. Такой подход может способствовать, по нашему мнению, не только расширению знаний студентов, но и формированию их профессиональных компетенций, математической культуры и абстрактного мышления, а также интереса к математике.

Результатами работы могут заинтересовать преподаватели математических дисциплин инженерных вузов, а также все желающие познакомиться с введением в теорию групп самостоятельно.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Прокопьев В.П. О роли математики в подготовке специалистов для высокотехнологического производства//Современные наукоемкие технологии. - 2010. - №8. - С. 128–129.
2. Вечтомов У.М., Чермных В.В. Изучение алгебраических структур//Вестник Вятского государственного университета. - 2012. - С. 41–48.
3. Городилова М.А., Виноградова П.В. О развитии абстрактного мышления студентов при изучении математических дисциплин в технических вузах//Общество: социология, психология, педагогика. - 2021. - 11. - С. 166–170.
4. Shapira Y. Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers. – Birkhäuser, Springer international, 2023. - 583 c.
5. Bünemann J. Group Theory in Physics. Springer, 2024. - 233 c.
6. Ceulemans A.J. Group Theory Applied to Chemistry. Springer, 2024. - 352 c.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. -М.: МЦНМО, 2024. - 272 с.
8. Туганбаев А.А. Алгебраические структуры. - М.: Лань, 2024. – 2024.
9. Пинчук И.А. Основные структуры современной алгебры. Учебное пособие. - М.: Изд-во МГОУ, 2016. - 64 с.
10. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - М.: Наука, 1982. - 288с.

***Irina A. Pinchuk*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
irenepin@yandex.ru

Facilitation of the process of teaching the main fundamental concepts of modern algebra in engineering universities

Abstract. The training of modern specialists in many areas of the national economy is directly related to deepening their knowledge in the field of fundamental sciences. Therefore, any research and methodological developments aimed at improving the level of mathematical education in higher educational institutions are always relevant. This article presents methodological materials devoted to the study of one of the key algebraic structures, namely, a group. The theoretical material is presented in the form of a large number of problems, both analyzed and intended for independent solution. This approach allows to significantly facilitate the process of studying such an abstract concept as an algebraic group by students.

Keywords: algebraic structure, group, subgroup, isomorphism, homomorphism, normal subgroup, factor group.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Аннотация

Данная статья будет актуальна для студентов, которые проходят дисциплины «Уравнения математической физики» и «Математическое моделирование», а также для преподавателей, ведущих лекционные и семинарские занятия по этим предметам. Цель работы: продемонстрировать методику подхода для решения краевых задач с помощью метода Фурье (метода разделения переменных), освоение которого из-за сложности и громоздкости необходимых вычислений вызывает большие трудности у студентов. В работе рассмотрен алгоритм для решения задачи колебания мембраны в двумерном случае, приведены результаты расчетов и графики.

Ключевые слова

метод разделения переменных, метод Фурье, уравнения гиперболического типа, волновое уравнение, дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения математической физики, Wolfram Mathematica

АВТОРЫ

Титов Александр Дмитриевич,
аспирант,
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
titov.alex31@yandex.ru

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-83

Введение

Мембраной принято называть пленку, то есть очень тонкое твердое тело, натянутое равномерно по всем направлениям и не сопротивляющееся изгибу. Для описания колебаний мембраны можно обойтись использованием тригонометрических функций. Волновое уравнение задает эти колебания. Это — линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, которое также задает малые поперечные колебания струны и другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах), электромагнетизме (электродинамике), применяется в изучении распространения световых волн. В частности, позволяет описать продольные или крутильные колебания стержня постоянного поперечного сечения, плоские акустические волны в жидкостях и газах, распространение электрических возмущений в линии при отсутствии потерь, плоские электромагнитные волны в непроводящих средах. Находит применение и в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн. Является одним из основных уравнений математической физики. Гиперболические уравнения довольно часто возможно решить аналитически, не прибегая к использованию численных методов. Это отмечено в основных пособиях по уравнениям математической физики, авторами которых являются Пикулин В.П., Похожаев С.И. [1], Владимиров В.С., Жаринов В.В. [2].

Методология и результаты исследования

Постановка задачи

Исследовать положение мембраны в моменты времени $t = 0.001\ c$; $t = 0.01\ c$; $t = 0.02\ c$; $t = 0.1\ c$ в двумерном пространстве. Её колебания описываются волновым уравнением. Заданы начальные данные (начальное перемещение и начальная скорость) и граничные условия первого рода:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\ 0 \le x \le 0.5 \text{ м};\ 0 \le y \le 0.4 \text{ м} \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) = \sin x \sin y \sin(x-0.5)\sin(y-0.4) \\ u_t(t=0) = v_0(x,y) = 0 \\ u(x=0) = u(y=0) = u(x=0.5) = u(y=0.4) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Применение волнового уравнения

О применении волнового уравнения в практических целях указано во множестве источников. В частности, подробно выделено в учебниках и пособиях Мартинсона Л.К., Малова Ю.И. [3], Михащенко Т.Н. [4]

В многомерном случае однородное волновое уравнение записывается в виде

$$\Delta u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где Δ — оператор Лапласа, $u(x, y, z, t)$ — неизвестная функция, t — время, x, y, z — пространственные координаты, v — фазовая скорость.

В одномерном случае уравнение называется также уравнением колебания струны или уравнением продольных колебаний стержня и записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Стоит отметить, что колебания мембраны описывает двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Допустимо также рассматривать неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u + f,$$

где $f = f(x, t)$ — некая заданная функция внешнего воздействия (внешние силы).

Зачастую рассматривают уравнение вида

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

где $\rho(x)$ — линейная плотность, T_0 можно трактовать как начальное натяжение, $F(x, t)$ — внешние силы. Полученное соотношение описывает процесс малых поперечных колебаний струны, и его называют неоднородным одномерным волновым уравнением или уравнением плоских волн.

В случае постоянной линейной плотности $\rho = \rho_0 = const$ уравнение колебаний однородной струны принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $a = \sqrt{T_0 \rho_0}$; $f(x,y) = F(x,y)/\rho_0$.

Если $f(x,y) \equiv 0$, то однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

описывает свободные колебания струны без воздействия вынуждающей силы.

Последние три формы записи волнового уравнения имеют наиболее обширное и наглядное применение. Они описывают не только колебания струны, но и ряд других физических процессов, которые называют волновыми. К ним, в частности, относят следующие:

1) Продольные или крутильные колебания стержня постоянного поперечного сечения (см. рис. 1). Для продольных колебаний $u(x,y)$ — продольное смещение в момент времени t элемента стержня с координатой x от своего положения равновесия, а $a = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга материала стержня, ρ — плотность.

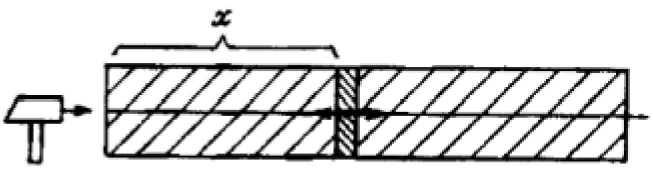

Рис. 1. Изображение колебания стержня постоянного поперечного сечения

Для крутильных колебаний $u(x,y)$ — угол поворота поперечного сечения стержня с координатой x в момент времени t, а $a = \sqrt{C/I}$. Здесь C — крутильная жесткость стержня, а I — момент инерции единицы длины стержня относительно его продольной оси. Для стержня кругового сечения радиуса R их можно рассчитывать по формулам $C = G\frac{\pi R^4}{2}$; $I = \rho\frac{\pi R^4}{2}$. Поэтому $a = \sqrt{G/\rho}$, где G — модуль сдвига материала.

2) Плоские акустические (звуковые) волны в жидкостях и газах (см. рис. 2). В этом процессе волновому уравнению подчиняются возмущения давления p и плотности ρ среды или потенциал скорости. Для адиабатических течений сред с уравнением состояния $p = f(\rho)$ скорость a распространения возмущений (скорость звука) определяется выражением $a^2 = f'(\rho_0)$. В частности, если $p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ является показателем адиабаты газа, то $a = \sqrt{\gamma\, p_0/\rho_0}$, где p_0 и ρ_0 можно интерпретировать как невозмущенные значения давления и плотности среды.

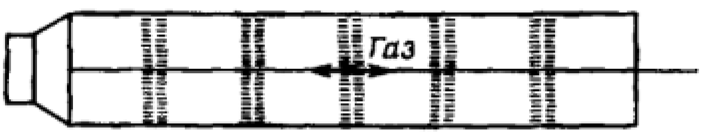

Рис. 2. Форма плоских акустических волн

3) Распространение электрических возмущений в линии при отсутствии потерь (см. рис. 3). Для такого процесса $u(x,y)$ — напряжение или сила тока в момент времени t на элементах проводов, имеющих координату x . Если L и C — распределенные индуктивность и емкость проводов на единицу длины, то $a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

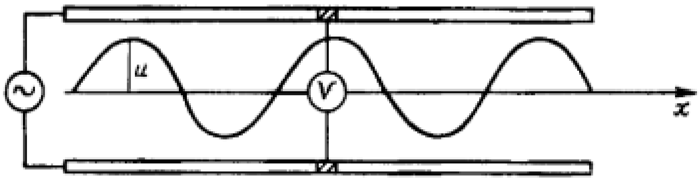

Рис. 3. Вид распространения электрических возмущений

4) Плоские электромагнитные волны в непроводящих стенах (см. рис. 4). Здесь $u(x,y)$ — напряженность электрического (E) или магнитного (H) полей; $a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где c — скорость света в вакууме, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно.

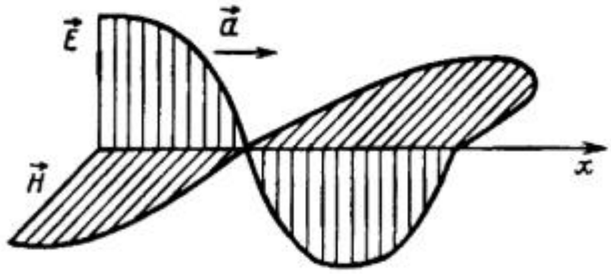

Рис. 4. Форма плоских электромагнитные волны в непроводящих стенах

Описание метода Фурье

Одним из наиболее распространенных способов аналитического решения уравнений в частных производных является метод разделения переменных, называемый также методом Фурье. Этот метод был впервые предложил Ж. Л. Д'Аламбер в середине XVIII века для решения волнового уравнения. А в начале следующего века метод был развит Ж. Б. Ж. Фурье и обоснован М. В. Остроградским и П. Г. Дирихле.

По сути, это — метод решения дифференциальных уравнений, основанный на алгебраическом преобразовании исходного уравнения к равенству двух и более выражений, зависящих от разных независимых переменных. В применении к уравнениям в частных производных схема разделения переменных приводит к нахождению решения в виде ряда (в том числе и бесконечного) или интеграла Фурье (предполагает использование методов операционного исчисления). Метод разделения переменных применяется для решения краевых задач для линейных уравнений второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов, а также для некоторых классов нелинейных уравнений и уравнений высших порядков.

Метод разделения переменных для неоднородных уравнений иногда называют методом Крылова в честь советского математика А. Н. Крылова. В данном случае предусматривается, что решение и правая часть разлагаются в ряды Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для соответствующего однородного уравнения. Подстановка полученных рядов дает уравнение, которое может быть найдено как решение задачи Коши для уравнений с начальными условиями, полученными из начальных условий исходной краевой задачи. Эти аспекты тщательно разъяснены в научно-технической литературе у Тихонова А.Н., Самарского А.А. [5], Мартинсона Л.К., Малова Ю.И. [6]

Существует множество работ, где при проведении исследования опираются на данный метод. Стоит отметить, что он распространяется не только на одномерные и двумерные случаи. Из современных работ стоит отметить публикацию H. Gad Elseed, M. Hashim Albashir, H. Diab Aljaly, N. Abdalaziz [7], где представлено описание способа решения уравнение Клейна-Гордона (модификация волнового уравнения) в трехмерном случае.

Нахождение аналитического решения

Данную задачу можно решить методом Фурье (методом разделения переменных). Соответствующее описание подробно приведено в учебнике Пикулина В.П., Похожаева С.И. [8]. Для этого нужно представить решение в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от пространственных координат, а другая — от временной $u(x, y, t) = v(x, y)\, T(t)$.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (1), получим:

$$v\, T'' = T\, v_{xx} + T\, v_{yy},$$

откуда делением на vT обеих частей уравнения будем иметь

$$\frac{T''}{T} = \frac{v_{xx}+v_{yy}}{v}. \tag{2}$$

Видно, что левая часть уравнения (2) зависит только от t, а правая — от x и y. Поскольку эти переменные изменяются независимо друг от друга, то равенство (2) возможно только в том случае, когда

$$\frac{T''}{T} = \frac{v_{xx}+v_{yy}}{v} = -\lambda. \tag{3}$$

Из соотношений (3) получаем уравнение с частными производными

$$v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0 \tag{4}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{5}$$

фундаментальная система решений которого являются функции $\cos(\sqrt{\lambda} t)$ и $sin(\sqrt{\lambda} t)$.

Стоит отметить, что из граничных условий следует

$$v(0, y) = v(0.5, y) = v(x, 0) = v(x, 0.4) = 0.$$

Тогда для функции $v(x,y)$ имеем следующую краевую задачу

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0;\ \ 0 \le x \le 0.5\ \text{м};\ \ 0 \le y \le 0.4\ \text{м} \\ v(x=0) = v(y=0) = v(x=0.5) = v(y=0.4) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Задачу (6) решается методом разделения переменных, полагая

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (6), найдём

$$YX'' + XY'' + \lambda XY = 0,$$

откуда делением на произведение XY получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0,$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda. \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) зависит только от x, правая часть — только от y. Значит, это равенство возможно только в случае, когда

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu. \tag{9}$$

Для нахождения функций $X(x)$ и $Y(y)$ в итоге получаем две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \mu\, X = 0 \\ X(0) = X(0.5) = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} Y + \vartheta Y = 0,\ \vartheta = \lambda - \mu \\ Y(0) = Y(0.4) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Решениями этих задач будут функции $X(x) = \sin\left(\sqrt{\mu_n}x\right)$ и $Y(y) = \sin\left(\sqrt{\vartheta_m}y\right)$, где $\mu_n = (2\pi n)^2$ и $\vartheta_m = (2.5\pi m)^2$.

Тогда собственные значения исходной задачи равны:

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \vartheta_m = (2\pi n)^2 + (2.5\pi m)^2.$$

Значит, собственные функции примут вид:

$$v_{nm}(x,y) = \sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny).$$

Таким образом, решение (5) выглядит следующим образом:

$$T(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\cos\left(\sqrt{(2\pi n)^2 + (2.5\pi m)^2}\, t\right) + \\ + b_{nm}\sin\left(\sqrt{(2\pi n)^2 + (2.5\pi m)^2}\, t\right). \tag{12}$$

Следовательно, решение задачи (1) представляется в виде ряда:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{nm}\cos\left(\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\,t\right)+$$
$$+b_{nm}\sin\left(\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\,t\right))\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny). \quad (13)$$

Теперь нужно определить коэффициенты a_{nm} и b_{nm}. Нижеприведенный поход для их вычисления описан в книге Волкова И.К., Канатникова А.Н. [9], которая является частью серии «Математика в техническом вузе». Учтём начальные данные

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny).$$

Значит,

$$a_{nm}=\frac{1}{\left|\left|v(x,y)\right|\right|^2}\int_0^{0.5}\int_0^{0.4}u_0(x,y)\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny)\,dy\,dx,$$

где с помощью специальных выражений для коэффициентов имеем:

$$\left|\left|v(x,y)\right|\right|^2=\int_0^{0.5}\int_0^{0.4}(\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny))^2\,dy\,dx=0.05.$$

Эти интегралы подсчитаны с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 10.

В итоге,

$$a_{nm}=(0.0015333\cdot(-0.602299+0.602299\cos(\pi m)+\mathrm{m}\sin(\pi m))(-0.582662+$$
$$+0.582662\cos(\pi n)+n\sin(\pi n)))-((-0.0648456\,m+m^3)\,(-0.101321\,n+n^3)).$$

Теперь выясним значение коэффициента b_{nm}. Производная функции $u(x,y,t)$ по времени равна:

$$u_t=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-a_{nm}\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\sin\left(\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\,t\right)+$$
$$+b_{nm}\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\cos\left(\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\,t\right))\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny);$$

$$u_t(t=0)=b_{nm}\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny)\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}=0.$$

Последнее равенство возможно только когда $b_{nm}=0$.

Итого, решение будет задачи (1) будет выглядеть так:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\cos\left(\sqrt{(2\pi n)^2+(2.5\pi m)^2}\,t\right)\sin(2\pi nx)\sin(2.5\pi ny). \quad (14)$$

Результаты моделирования

Ниже представлены колебания мембраны в моменты времени $t=0.001\,c$; $t=0.01\,c$; $t=0.02\,c$; $t=0.1\,c$ (см. рисунки 5-8).

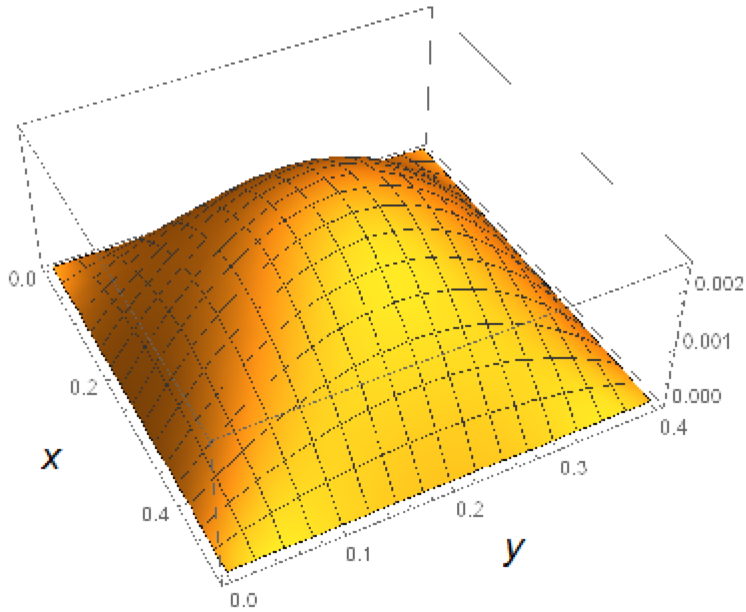

Рис. 5. Колебания мембраны в момент времени $t = 0{,}001\ c$.

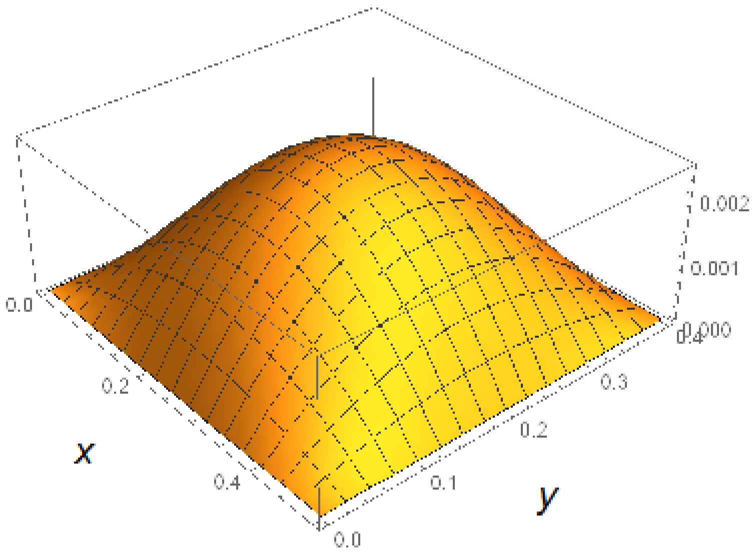

Рис. 6. Колебания мембраны в момент времени $t = 0{,}01\ c$.

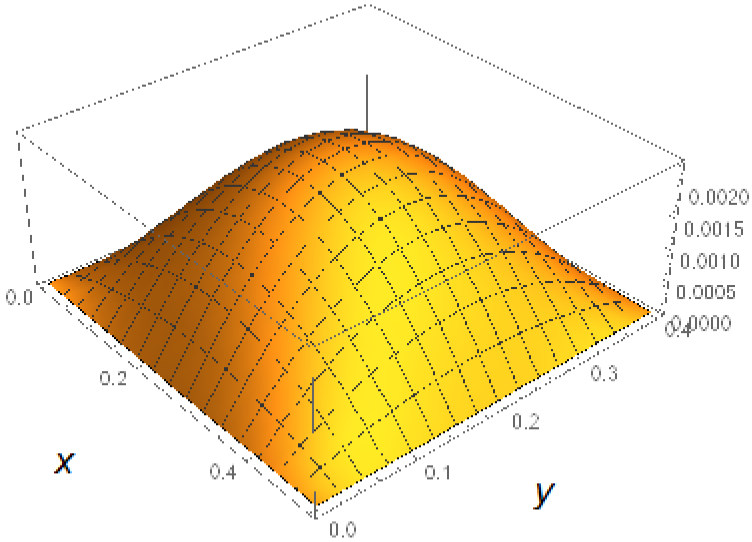

Рис. 7. Колебания мембраны в момент времени $t = 0{,}02$ *с.*

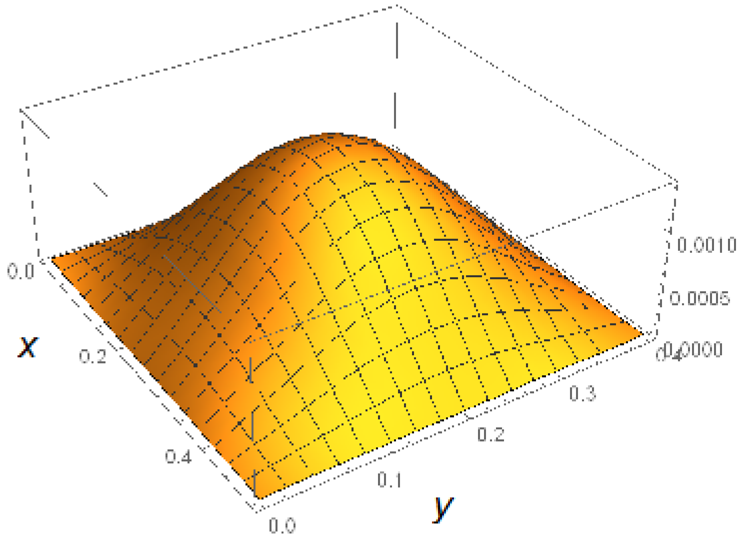

Рис. 8. Колебания мембраны в момент времени $t = 0{,}1$ *с.*

Заключение

Проведено исследование колебания мембраны: найдена аналитическое решение волнового уравнения с граничными условиями первого рода методом Фурье, представлены результаты зависимости функции перемещения от пространственных координат u(x,y) при фиксированном значении времени. Для визуализации решения использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 10.

Используемый подход применим при выполнении типовых расчетов и курсовых проектов по дисциплине «Уравнения математической физики» в рамках изучения аналитических методов решения гиперболических уравнений. Этот курс изучается студентами второго и третьего курсов физико-математических и технических специальностей. Данная дисциплина является основополагающей для следующих курсов, которые читают студентам на старших курсах: «Методы вычислений», «Математическое моделирование», «Теория оптико-электронных систем» и т.п. Также возможно освоение изложенной методики при самостоятельном прохождении данного курса в рамках подготовки к различным видам вступительных испытаний в магистратуру.

Стоит отметить, что метод Фурье является основным аналитическим методом решения дифференциальных уравнений в частных производных (в том числе, гиперболического типа), которые описывают различные физические процессы. Сложность вычислений требует структурированного алгоритма действий, позволяющего не допускать ошибок при нахождении решения задач.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. - М.: МЦНМО, 2004. - 208 с.
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В.: Уравнения математической физики. - М: Главная редакция физико-математической литературы, 2004 г. - 512 с.
3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. - 368 с.
4. Михащенко Т.Н.: Уравнение с частными производными: Учебное пособие. Изд-во Курганского государственного университета, 2022 г. - 76 с.
5. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Указ. Соч.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Издательство «Наука», 1977. - 734 с.
7. H. Gad Elseed, M. Hashim Albashir, H. Diab Aljaly, N. Abdalaziz, The Separation Of Variables Method For Solving The Klein-Gordon Equation In Curved Spacetime — EPRA International Journal of Multidisciplinary Research (IJMR) Vol. 9 Issue. - 2 (February-2023). DOI: https://doi.org/10.36713/epra12352
8. Пикулин В. П., Похожаев С. И. Указ. Соч.
9. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996 г. - 288 с.

Alexander D. Titov,
Graduate Student, Department of Mathematical Simulation, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
titov.alex31@yandex.ru
Svetlana B. Zabelina,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
zabelina_sb@mail.ru

Application of the method of separation of variables for studying membrane vibrations in the two-dimensional case

Abstract. This article will be relevant for students who study the disciplines "Equations of Mathematical Physics" and "Mathematical Modeling", as well as for teachers who conduct lectures and seminars in these subjects. The purpose of the work: to demonstrate the methodology of the approach for solving boundary value problems using the Fourier method (method of separation of variables), which, due to the complexity and cumbersomeness of calculations, causes great difficulties for students to master. The paper considers an algorithm for solving the problem of membrane oscillation in the two-dimensional case, presents the results of calculations and graphs.

Keywords: method of separation of variables, Fourier method, hyperbolic type equations, wave equation, partial differential equations, equations of mathematical physics, Wolfram Mathematica.

ГРАММАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ НАПИСАНИЯ АНГЛОЯЗЫЧНОГО НАУЧНОГО ТЕКСТА

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена распространенностью английского как языка международной и межкультурной деятельности. Цель работы - выявить грамматические особенности написания научных англоязычных текстов. Идентифицированы основные грамматические трудности при создании исследовательских работ на английском языке. Результаты работы могут быть использованы при составлении статей по разным дисциплинам на английском языке.

Ключевые слова

английский язык, англоязычный научный текст, грамматические трудности научного текста

АВТОРЫ

Уткина Надежда Вениаминовна,
кандидат философских наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, г. Москва
utkina-nv@yandex.ru

Голубев Алексей Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, г. Москва
v-algolu@hotmail.com

Нещадим Ирина Олеговна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, г. Москва
irinaneschadim@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-93

Введение

В XXI веке научные исследования, представляют собой международную и межкультурную деятельность, а авторы научных трудов принадлежат к самым разным языковым культурам. В силу данных обстоятельств основная часть научных исследований, публикуемых по всему миру, издается на английском языке, который также является одним из основных рабочих языков международных конференций и семинаров. Для того, чтобы читать, понимать и писать сложные материалы высокого уровня в области своего исследования и быть полноценным участником научной коммуникации необходимо изучать особенности английского языка, в том числе и грамматические.

Методология и результаты исследования

Полвека назад большинство научных работ было написано в страдательном залоге, например, «has become apparent», «was conducted». Академическая легитимность опиралась на идею о том, что научные открытия и знания объективны и возникают независимо от людей, проводивших исследования. Иногда ученые использовали «we» по отношению к самим себе, даже если они писали в одиночку. «I» следовало избегать любой ценой.

С тех пор произошел серьезный сдвиг в понимании науки и процесса производства научных знаний. Социология научного познания, например, показала в ходе подробных эмпирических исследований, как знания получаются из научных практик и технологий. Данный факт не умаляет важности конкретных результатов, однако ведет к ожесточенным спорам о значении термина «объективность». Это также привело к изменению стиля написания статей в некоторых научных областях. Все большее число академических дисциплин в настоящее время использует обращение от первого лица «I» или «we» для описания своих исследований. Аспиранты и ученые, изучающие английский язык, как правило, испытывают дискомфорт из-за этого, поскольку на занятиях английского они учили, что в данных ситуациях необходимо использовать страдательных залог. В текстах социальных и гуманитарных наук, написанных одним автором, может показаться необычным многоразовое употребление «we». Вместо этого авторы пишут «I» или формулируют предложение в активном залоге с существительными в качестве действующего лица. Например, «In this chapter, I aim to review the DSSC-device». Если вы единственный автор публикации и в тексте часто упоминается «I», тог замена личного местоимения на «the book», «the chapter», «the findings» в качестве действующего лица в предложении может стать элегантным способом избежать как пассивного залога, так и чрезмерного употребления первого лица, например, «The chapter aims to review the DSSC-device».

По мнению Д. Витли [1], любой текст в активном залоге выглядит обычно более точным и лаконичным, чем в пассивном. Лингвист высказывает предположение, что данная «вредная привычка» является результатом ошибочного представления о том, что употреблять местоимения от первого лица как-то невежливо [2, С. 35]. В результате обычно используются такие многословные (и неточные) утверждения, как «It was found that» в предпочтение коротким, недвусмысленным «I found». Таким образом, не следует бояться называть в предложении субъекта действия, даже если это «I» или «we». Кроме того, необходимо обратить внимание, что утверждение в активном залоге состоит из трех слов, тогда как для пассивного залога требуются все пять. Страдательного залога можно избежать также, написав «The authors found» вместо «it was found». Однако по сравнению с простым «we» слово «authors» звучит претенциозно, многословно и неточно (какие авторы?).

Ф. Макгилкрист [3, С. 18] рассматривает следующие примеры и выясняет, какие отношения выстраиваются между автором и читателем; и между автором и экспериментальными процедурами.

А) «To initiate analysis of the mechanism by which Pcdgs mediate self-avoidance, we next asked whether they act xell-autonomously. We selectively removed Pcdhg genes from SACs using a ChAT-Cre line».

Б) «To illustrate the connectivity of the hydrogen-bonded network in the interstitial regions between the stakes., Hirshfeld surface analysis was used to measure the distribution of close contact interaction».

В первом отрывке ученые представляют себя (нас) как часть экспериментальной процедуры. Во втором отрывке «люди» отодвинуты на второй план (was used). В большинстве опубликованных сегодня статей по естественным наукам используются сочетание «we» и страдательного залога. «We» относится к группе авторов. Очень редко можно встретить современные тексты, написанные только в страдательном залоге. В дополнение к вышеупомянутым эпистемологическим проблемам, «we» и активный залог делают текст более динамичным по сравнению со страдательным.

Однако Г. Маунтлер [4] придерживается стойкой позиции необходимости использования предложений как в активном, так и в пассивном залоге. По её мнению, «предложения в пассивной форме, вместо активной ни в коем случае нельзя отвергать в научных текстах, однако это должно происходить в каждом отдельном случае по уважительной причине» [5, С.134]. Во-первых, когда исполнитель действия не должен быть назван, потому что он в любом случае понятен из предыдущего текста или контекстных знаний читателя. Во-вторых, когда распределение информации в соответствии с принципами end focus и end weight должно быть изменено таким образом, чтобы исполнитель действия был помещен в конец предложения, потому что он является вновь введенным объектом в тексте или описывается длинной и сложной фразой. Например, «He was bitten by the monkey that had achieved higher test scores than any animal in the previous ten years». В-третьих, если мы хотим избежать того, чтобы в нескольких предложениях подряд исполнитель действия находился в начале предложения, например «we did X, we did Y…». Особенно это актуально для раздела «Methods», где нередко употребляются предложения в страдательном залоге. Пассивные конструкции также можно встретить в ряде идиом, используемых в научных текстах. Например, «it was been shown that; it has been suggested that». Пассивный залог удачно используется, если необходимо вести вымышленный диалог, формулируя свои возражения безличным образом, например «it could be argued that; it might be objected that». Кроме того, существуют пассивные конструкции с глаголами «говорения» и «полагания», которые ослабляют высказывания, например «the theory is assumed to be…; the recession is thought to have been caused by…».

При написании научных работ Х. Гласман-Дил [6] считает, что, необходимо уделять особое внимание также использованию видовременных форм глаголов. После опубликования научное исследование становиться достоянием гласности. При любом цитировании опубликованной ранее работы научная этика требует уважительного к ней отношения и рекомендует употреблять видовременные формы «the present tense», как, например, в предложении «Streptomycin inhibits the growth of M. Tuberculosis». Каждый раз, когда вы цитируете или обсуждаете уже опубликованную работу, вам следует использовать «the present tense», так как вы говорите о доказанном, обоснованном знании. Это тот же самый случай, как и с утверждением «The Earth is round». Если более поздние эксперименты подтвердили бы ложность ранее опубликованных результатов, было бы уместно использовать прошедшее время, а не настоящее.

О текущей работе можно было бы упомянуть в прошедшем времени только в том случае, когда предполагается, что данный труд не является общеизвестным до тех пор, пока он не будет опубликован. Если вы определили, что оптимальная температура роста для «Streptomyces everycolor» составляет 37 C», вам следует указать, что «everycolor S. Grew best at 37 C». Если вы ссылаетесь на предыдущую работу, возможно, на свою собственную, правильнее сказать, что «S. Everycolor grew best at 37 C».

При написании статьи можно переходить от прошедшего времени к настоящему времени и наоборот. Большая часть аннотации должна быть написана в «the past tense», потому что вы ссылаетесь на свои собственные текущие результаты. Этого же правила целесообразно придерживаться и при создании разделов «Methods» и

«Results», поскольку вы описываете то, что уже сделали и что вы обнаружили. С другой стороны, большая часть раздела «Discussion» должна быть представлена в «the present tense», так как в этих разделах часто делается акцент на ранее полученные знания.

Предположим, что ваше исследование касалось влияния стрептомицина на «Streptomyces everycolor», тогда времена глаголов могут несколько отличаться. В аннотации вы бы написали «The effect of the streptomycin on S. everycolor grown in various media was tested. Growth of S. everycolor, measured in terms of optical density, was inhibited in all media tested. Inhibition was most pronounced at high pH levels». В разделе «Introduction» типичными предложениями могли бы быть: «Streptomycin is an antibiotic produced by Streptomyces griseus». «This antibiotic inhibits the growth of certain». Таким образом, временные формы глагола легко могут сконфузить человека без языковой подготовки, а их знание облегчит создание научных статей и исследований.

Следующей распространенной грамматической ошибкой, допускаемой при написании научных статей, является неправильное использование форм единственного и множественного числа существительных. Особенно данное явление актуально в биологии, так как там имеется много слов латинского происхождения. Большинство этих слов сохранили латинское множественное число. Многие из этих слов (например, «data», «media») вошли в повседневную речь, где латинское окончание множественного числа на букву «а» просто не распознается как множественное число. Большинство людей, употребляющие конструкции «data is», вероятно, никогда не использовали настоящее единственное число данного существительного - «datum». К сожалению, это неточное употребление стало настолько распространенным явлением за пределами науки, что с этим мирятся даже некоторые лингвистические словари. Например, в словаре «Oxford Advanced Lerner's Dictionary» в качестве примера общепринятого употребления приводится фраза «the data was collected from 69 countries» [7, С. 384].

Трудности из-за многословия выявляются и при использования абстрактных существительных. Этот недостаток устраняется путем преобразования существительных в глаголы. Например, «examination of the patients was carried out» следует заменить на более точное «I examined the patients»; выражение «separation of the compound was accomplished» можно заменить на «the compounds were separated»; «transformation of the equations was achieved» заменим на - «the equation were transformed».

Недопонимание возникает и при употреблении прилагательных, которые содержат дополнительную информацию и, следовательно, должны следовать за существительным. Б. Леглер [8] предполагает, что для носителей романских языков данное явление – обычное дело, однако может вызвать раздражение у тех, кто привык традиционно ставить прилагательные только перед существительными. Значение некоторых прилагательных будет меняться в зависимости от места их расположения по отношению к существительному. Например, это касается прилагательных «present» и «proper». «The element present» — это элемент, который находится здесь, под рукой, доступный, но «the present government» — это правительство, действующее в настоящее время. Аналогично, «the tests proper» — это сами тесты, а «the proper tests» — это те, которые необходимы или подходят.

Недоразумения могут возникнуть даже и при написании чисел. Однозначные числа следует прописывать словами, а числа, состоящие из двух или более цифр, должны быть выражены цифрами, например, «three experiments» или «13 «experiments». Однако, при использовании стандартных единиц измерения всегда используются цифры, например, «3 ml» или «13 ml». Единственное исключение из правил заключается в том, что не следует начинать само предложение с цифры. В данном случае нужно либо перефразировать предложение, либо указать как число, так и его единицу измерения, например, «Reagent A (3ml) was added» или «Three milliliters of reagent A was added». Следующее исключение, встречающееся в письменной речи, касается последовательности чисел. Если хотя бы одно из них состоит из более чем одной цифры, все числа должны быть выражены цифрами, например, «I gave water to 3 scientists, milk to 6 scientists, and beer to 11 scientists».

При написании научных статей на английском языке С. Белли [9] настоятельно рекомендует соблюдать довольно жесткий порядок слов, установленный английским языком из-за отсутствия склонений существительных: подлежащее, сказуемое, дополнение (S-P-O). Однако любой строй языка может отклонятся от данного правила и иногда можно заметить случайные отклонения от главного правила, регулирующего порядок слов. Чтобы добиться стилистически эффективного изменения порядка слов, требуется крайняя осторожность. Важно понять, что какое-то необычное расположение частей предложения не обязательно должно быть ошибкой и что, когда возникает необходимость, вы можете по-своему изменить или разделить предложение. Например, инверсия предикативного прилагательного: «There now exist several effects of this type which may be utilized for smth. There will undoubtedly be a change in the relative amounts of the various energy sources used by industry in the future» [10, С. 190].

Кроме того, необходимо учитывать, что главные предложения могут сочетаться как друг с другом, например через «and» и «by» или «so», так и с придаточными предложениями (subordinate clause). К наиболее важным типам придаточных предложений относятся дополнительные предложения, со связующими словами такими, как «that», «whether», определительные предложения, вводимые относительными местоимениями «that», «which», «who», «whose», которые при определенных условиях также могут быть пропущены. Предложения, в начале которых есть причастия на «-ing» и на «-ed», например «Published more than twenty years ago, the paper continues to be quoted». Обстоятельственные предложения, которые определяют место и время с помощью связующих слов, таких как «when», «while», «where», которые обосновывают с помощью «because», «as», «since» и ограничивают посредством «although», «even» или «though». Вопросительные предложения напрямую обращаются к читателям, помогают им ориентироваться в тексте и вовлекают их в аргументацию.

Распределение информации в английском предложении подчиняется принципу конечной направленности. Динамика смещается от привычных и, соответственно, устаревших, переходит от текста к элементам в начале предложения к новым элементам в конце предложения. В каждом следующем предложении новый элемент предыдущего предложения уже известен и, в свою очередь, становится отправной точкой для следующего утверждения. Данное движение является важным средством формирования связности текста таким образом, чтобы читатели могли без труда понять его. Необходимо учитывать, что более длинные и сложные элементы предложения с большей вероятностью будут помещены в конец предложения, поскольку эти элементы обычно также содержат много новой информации, принципы конечного фокуса могут положительно усиливать друг друга. Оптимальная длина предложений зависит от нескольких факторов. Английские предложения могут быть длиннее, если они хорошо структурированы и каждое из этих предложений подчиняется принципам конечной направленности, пунктуация правильная и удобная для читателя, короткие предложения также расположены вокруг длинного предложения, что позволяет читателю сосредоточиться. Короткие предложения могут быть очень эффективными, особенно в начале и в конце абзацев (тематическое предложение, двухмерное предложение), в результате чего образуется слишком много коротких предложений.

Еще один пример трудностей научного текста заключается в неправильном использовании слов. Например, «Case» - является самым распространенным жаргонным словом, которое лучше и короче использовать вместо «in this case», «here in most case usually in all case always in no case never». «It» - распространенное, полезное местоимение может вызвать проблему, если предшествующее слово не ясно, как например, «Free information about VD. To get it, call 555-7000». А вот «like» часто используется неправильно как союз. В случае, если необходим предлог, «like» следует заменить на «as». Многие предложения понятны лишь частично, так как слово «only» лишь в редких случаях стоит на своем месте. «I hit him in the eye yesterday». Слово «only» можно добавить в начале и в конце предложения или поставить между двумя словами. Однако результат понимания будет совершенно разный. Слово «quite» часто используется в научной литературе, однако никакой смысловой нагрузки оно не несет и в большинстве случаев является лишним. «Varying» означает «changing» и часто употребляется неверно, когда имеется в виду «various». «Various concentration» — это концентрации, которые не меняются. Хотя «which» и «that» часто взаимозаменяемы, но встречаются случаи, когда они не синонимичны. Слово «which» правильно употребляется в «неограничивающем» смысле, чтобы ввести предложение, которое не является существительным для остальной части предложения. «That» вводит главное предложение. Например, «GetB mutants, which are tolerant to colicin E2 also have an altered…», «GetB mutants that are tolerant to colicin». В первом предложении указано, что все мутанты GetB, которые устойчивы к колицину, а во втором предложении указано, что только некоторые из мутантов GetB устойчивы к колицину. «While» когда существует временная зависимость, правильным будет использовать «while», в противном случае «whereas» было бы лучшим выбором.

Заключение

Таким образом, развитие навыков написания научных работ – один из способов присоединиться к международному научному сообществу. Поскольку создание научных текстов является общепринятым, объем грамматики и лексики довольно невелик. Однако необходимо учитывать те особенности, с которыми можно столкнуться на грамматическом уровне. Трудности могут касаться использования видовременных форм глаголов, активного и пассивного залога глагола, категории числа существительных, абстрактных существительных, единственного и множественного числа существительных, а также написания чисел. Зная данные особенности, можно избежать грамматических ошибок при написании научного текста на английском языке и сделать содержание вашей работы более эффективной и точной.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Wheatley, D. Scientific writing and publishing. Cambridge University Press, 2021. - 225 p.
2. Там же.
3. Macgilchrist, F. Academic writing. UTB GmbH, 2024. – 191 p.
4. Maunter, G. Wissenschaftliches English. Verlag Hunter & Roth KG, 2020. – 264 S.
5. Там же.
6. Glasman-Deal, H. Science research writing for non-native speakers of English. - London: Imperial College Press. - 2021. - 257 p.
7. Oxford Advanced Lerner's Dictionary. Oxford University Press, 2020. - 1820 p.
8. Legler, B. Sciencenglish. – Bock, 2022. – 527 p.
9. Baily, S. The Essentials of Academic Writing for International Students. Taylor & Francis, 2024. – 205 p.
10. Там же.

Nadezhda V. Utkina,
Candidate of Sciences in Philosophy, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
utkina-nv@yandex.ru
Alexey E. Golubev,
Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
v-avgolu@hotmail.com
Irina O. Neschadim,
Candidate of Sciences in Pedagogy, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
irinaneschadim@bmstu.ru

Grammatical difficulties with writing English scientific texts

Abstract: The relevance of the study is due to the prevalence of English as the language of international and intercultural activity. The purpose of the work is to determine the grammatical features of writing scientific English-language texts. The main grammatical difficulties in writing English research papers are identified. The results of the work can be used when writing papers in English.

Keywords: English language, scientific English, grammatical difficulties.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ СЕМИНАРА ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ ОТ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН»

Аннотация

Одним из разделов теории вероятностей является теория функций от двумерных случайных величин. И основная задача, рассматриваемая в этом разделе, - по заданному распределению вероятностей двумерной случайной величины уметь находить распределение вероятностей для функции от данной случайной величины. Целью работы является помощь в нахождение оптимальной методики проведения семинара по теме «Функции от двумерных случайных величин». В работе приведены основные теоретические понятия и формулы, разобраны многочисленные примеры, даны ценные указания. Материалы статьи могут быть полезными преподавателям при подготовке к проведению практических занятий по данному разделу теории вероятностей.

Ключевые слова

случайные величины, функции от двумерных случайных величин,
плотность распределения вероятностей

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-100

Введение

Нахождение функций от случайных векторов является обязательной темой в курсе теории вероятностей для студентов математических и технических специальностей. Данный раздел предоставляет хороший материал для совершенствования навыка работы с теоретическим материалом. Поэтому для преподавателя возникает методическая задача грамотно выстроить семинарское занятие на эту тему. Достаточно подробное изложение этой теории можно найти в учебнике А.В. Печинкина [1], а примеры задач, в том числе с решениями, - в учебниках Г.И. Агапова [2], В.А. Ватутина [3] и А.В. Лебедева [4].

Данная работа является логическим продолжением работы О.Н. Бирюкова [5], в которой подробно разобрана методика проведения семинарского занятия по теме «функции от случайных величин». Целью данной работы является обсуждение методики проведения семинара по теме «Функции от двумерных случайных величин». В работе рассматриваются основные теоретические понятия и формулы, необходимые для нахождения распределений функций от двумерных случайных векторов, и подробно разбираются основные типы заданий.

Работа будет полезна преподавателям вузов для подготовки к семинарам по теории вероятностей, а также студентам, желающим самостоятельно разобраться в способах решения задач по рассматриваемой теме. Эти навыки помогут студентам в понимание курса «математическая статистика», который идет следом за курсом «теория вероятностей» и рассматривает в большом количестве функции от многомерных случайных величин.

Методология и результаты исследования

Пусть имеется в наличие непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) и пусть случайная величина $Z=\phi(X,Y)$, где функция ϕ - непрерывная функция двух переменных. Тогда функцию распределения случайной величины Z можно получить следующим образом:

$$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{\phi(X,Y)<z\}=\iint\limits_{\phi(x,y)<z} p_{X,Y}(x,y)dxdy .$$

Где $p_{X,Y}(x,y)$ - совместная плотность распределения случайных величин X и Y, а интегрирование ведется по всем областям плоскости переменных (x,y), удовлетворяющим неравенству $\phi(x,y)<z$.

Пример 1. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), каждая из независимых координата которого распределена равномерно на интервале $(0,5)$. Установим закон распределения вероятностей случайной величины $Z=X/Y$.

Известно, что плотность случайных величин X и Y имеет вид:

$$p_X(x)=p_Y(x)=\begin{cases}1/5, \text{ при } x\in(0,5);\\ 0, \text{ при } x\notin(0,5).\end{cases}$$

Учитывая их независимость, имеем:

$$p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)=\begin{cases}1/25, \text{ при } x\in(0,5) \text{ и } y\in(0,5);\\ 0, \text{ при } x\notin(0,5) \text{ или } y\notin(0,5).\end{cases}$$

Нам надо рассмотреть 2 случая.

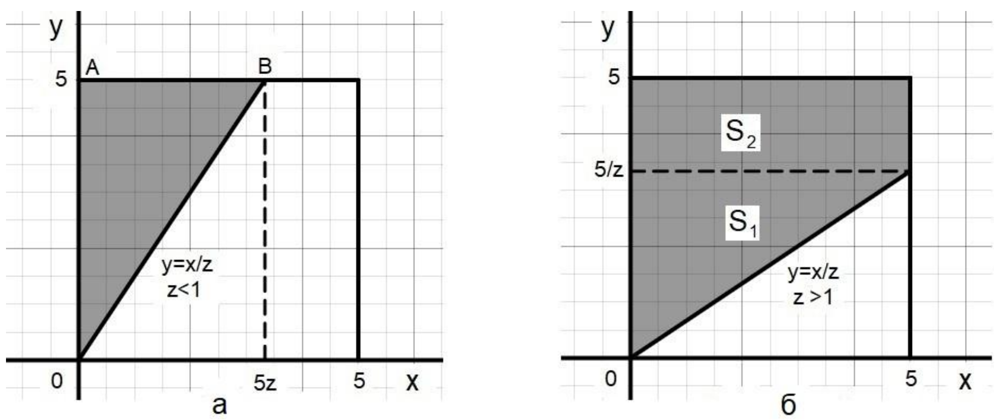

Рис. 1. Плоскость переменных (x,y), соответствующая примеру 1: а - случай 0<z<1, б - случай z>1

При $z\in(0,1]$, согласно рисунку 1а, имеем:

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}<z} p_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint\limits_{\frac{x}{z}<y}\frac{1}{25}dxdy=\frac{1}{25}S_{\Delta OAB}=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5z=\frac{z}{2}.$$

При $z \in (1, +\infty)$, согласно рисунку 1б, имеем:

$$F_Z(z) = \iint\limits_{\frac{x}{y}<z} p_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint\limits_{\frac{x}{z}<y} \frac{1}{25}dxdy = \frac{1}{25}(S_1 + S_2) = \frac{1}{25}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{z} + 5\cdot(5-\frac{5}{z})) = 1-\frac{1}{2z}.$$

Здесь S_1 - площадь треугольника, а S_2 - площадь прямоугольника, соответственно рисунку.

Объединив оба этих случая, и, учитывая, что $F_z(z) = 0$ при $z \in (-\infty, 0]$, получим в итоге:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ при } z \le 0; \\ \frac{z}{2}, \text{ при } z \in (0,1]; \\ 1-\frac{1}{2z}, \text{ при } z > 1. \end{cases}$$

Пример 2. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), для которого

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, \text{ при } x \in (0,1) \text{ и } y \in (0,1); \\ 0, \text{ при } x \notin (0,1) \text{ или } y \notin (0,1). \end{cases}$$

Установим закон распределения вероятностей случайной величины $Z = X \cdot Y$.

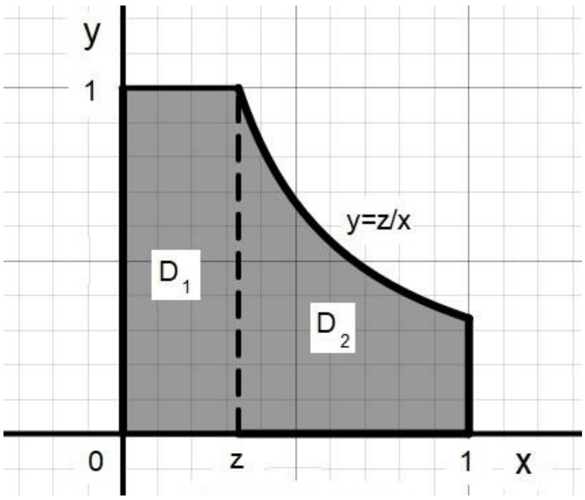

Рис. 2. Плоскость переменных (x,y), соответствующая примеру 2

В нашем случае $z = xy$ и ввиду того, что $x \in (0,1)$ и $y \in (0,1)$, эта функция допускает значения только из интервала $(0,1)$. Поэтому, при $z \in (0,1)$, согласно рисунку 2, имеем:

$$F_Z(z) = \iint\limits_{xy<z} p_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint\limits_{y<\frac{z}{x}} (x+y)dxdy = \iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy =$$

$$= \int_0^z dx \int_0^1 (x+y)dy + \int_z^1 dx \int_0^{z/x} (x+y)dy = \int_0^z (x+\frac{1}{2})dx + \int_z^1 (z+\frac{z^2}{x^2})dx = 2z - z^2.$$

В итоге получаем:

$$F_Z(z)=\begin{cases}0,\ при\ z\le 0;\\ 2z-z^2,\ при\ z\in(0,1);\\ 1,\ при\ z\ge 1.\end{cases}$$

Пример 3. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), каждая из независимых координата которого имеет стандартное нормальное распределение. Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$.

Как известно, плотность стандартного нормального распределения имеет вид:

$$p_X(x)=p_Y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Учитывая их независимость, имеем:

$$p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

В нашем случае $z=\sqrt{x^2+y^2}$, эта функция допускает только неотрицательные значения. Поэтому, при $z\in[0,+\infty)$, переходя к полярным координатам, имеем:

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}<z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^z re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\int_0^z re^{-\frac{r^2}{2}}dr=1-e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

В итоге получаем:

$$p_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}0,\ при\ z<0;\\ ze^{-\frac{z^2}{2}},\ при\ z\ge 0.\end{cases}$$

Формула свертки. Если случайные величины X и Y независимы, то плотность распределения случайной величины $Z=X+Y$ можно найти при помощи формулы свертки

$$p_Z(z)=(F_Z(z))'=(\iint\limits_{x+y<z}p_{X,Y}(x,y)dxdy)'_z=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)\left(\int_{-\infty}^{z-x}p_Y(y)dy\right)'dx=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx.$$

Пример 4. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), независимые координаты которого распределены равномерно на интервалах $(0,1)$ и $(0,2)$, соответственно. Установим закон распределения вероятностей случайной величины $Z=X+Y$.

Известно, что плотность случайных величин X и Y имеет вид:

$$p_X(x)=\begin{cases}1,\ при\ x\in(0,1);\\ 0,\ при\ x\notin(0,1);\end{cases}\quad и\quad p_Y(y)=\begin{cases}1/2,\ при\ y\in(0,2);\\ 0,\ при\ y\notin(0,2).\end{cases}$$

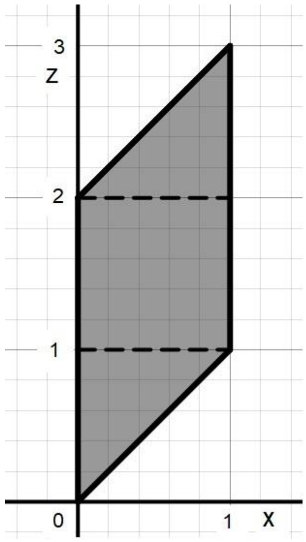

Рис. 3. Плоскость переменных (x,z), соответствующая примеру 4

По формуле свертки получаем:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(z-x) dx .$$

Подынтегральная функция равна 1/2 в области $\{(x,z) \mid x \in (0,1)\ и\ (z-x) \in (0,2)\}$ плоскости переменных (x,z), изображенной на рисунке 3, и равна нуля вне этой области.

Нам надо рассмотреть 3 случая. При $z \in (0,1)$, $P_z(z) = \int_0^z \frac{1}{2} dx = \frac{z}{2}$; при $z \in [1,2]$, $P_z(z) = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$; при $z \in (2,3)$, $P_z(z) = \int_{z-2}^1 \frac{1}{2} dx = \frac{3}{2} - \frac{z}{2}$.

В итоге получаем:

$$P_Z(z) = \begin{cases} 0,\ при\ z \le 0; \\ \frac{z}{2},\ при\ z \in (0,1); \\ \frac{1}{2},\ при\ z \in [1,2]; \\ \frac{3}{2} - \frac{z}{2},\ при\ z \in (2,3); \\ 0,\ при\ z \ge 3. \end{cases}$$

Пример 5. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), независимые координаты которого распределены экспоненциально с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно. Как и в предыдущем примере, $Z = X + Y$.

Плотность экспоненциально распределенных случайных величин имеет вид:

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x},\ при\ x > 0; \\ 0,\ при\ x \le 0; \end{cases} \quad и \quad p_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y},\ при\ y > 0; \\ 0,\ при\ y \le 0. \end{cases}$$

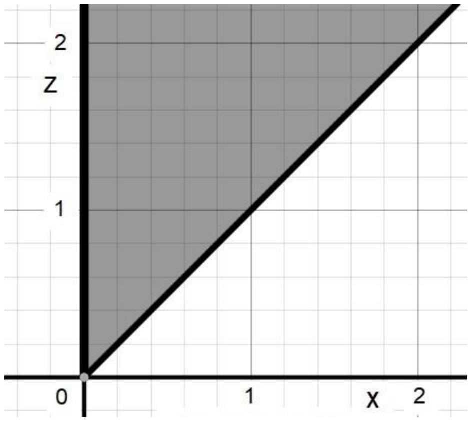

Рис. 4. Плоскость переменных (x,z), соответствующая примеру 5

Функция $p_X(x)p_Y(z-x)$ отлична от нуля в области $\{(x,z)\,|\, x>0 \; и \; (z-x)>0\}$ плоскости переменных (x,z), изображенной на рисунке 4.

Поэтому, для $z>0$ по формуле свертки получаем:

$$p_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int\limits_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}dx=\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\int\limits_0^z e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx=$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 z}e^{-\lambda_1 x}\Big|_0^z=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}),\; при\; \lambda_1\neq\lambda_2\,.$$

Если же $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то $p_Z(z)=\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\int\limits_0^z e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx=\lambda^2 e^{-\lambda z}\int\limits_0^z 1dx=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$.

В итоге получаем 2 случая:

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}),\; при\; z>0;\\ 0,\; при\; z\le 0;\end{cases} \quad \text{или} \quad p_Z(z)=\begin{cases}\lambda^2 z e^{-\lambda z},\; при\; z>0;\\ 0,\; при\; z\le 0.\end{cases}$$

Пример 6. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), независимые координаты которого распределены нормально с параметрами (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2), соответственно. Найдем функцию распределения вероятностей случайной величины $Z=X+Y$.

Плотности нормально распределенных случайных величин имеют вид:

$$p_X(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \text{и} \quad p_Y(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,.$$

Поэтому, для $z\in(-\infty,\infty)$ по формуле свертки получаем:

$$p_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_1^2\mu_1-\sigma_2^2\mu_2+\sigma_2^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}dx\,.$$

Сделав теперь замену $t=\dfrac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\left(x-\dfrac{\sigma_1^2\mu_1-\sigma_2^2\mu_2+\sigma_2^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$, получим:

$$p_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\,.$$

Таким образом, полученная случайная величина $Z = X + Y$ распределена нормально с параметрами $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Ее функция распределения имеет вид:

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} dy.$$

Пример 7. Предположим, что у нас в наличие имеется случайный вектор (X,Y), независимые координаты которого распределены экспоненциально с параметрами $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Найдем функцию распределения вероятностей случайной величины $Z = X - Y$.

Это задание также можно сделать при помощи формулы свертки, достаточно представить $Z = X - Y = X + (-Y)$. При этом плотности распределения случайных величин X и $-Y$ равны:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, \text{при } x > 0, \\ 0, \text{при } x \le 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad p_{-Y}(y) = \begin{cases} 4e^{4y}, \text{при } y < 0, \\ 0, \text{при } y \ge 0. \end{cases}$$

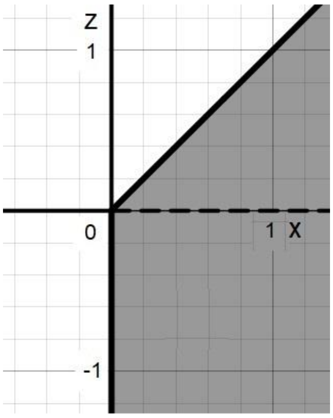

Рис. 5. Плоскость переменных (x,z), соответствующая примеру 7

Функция $p_X(x)p_{-Y}(z-x)$ не равна нулю только в области $\{(x,z) \mid x > 0 \text{ и } (z-x) < 0\}$ плоскости переменных (x,z), изображенной на рисунке 5.

И нам надо рассмотреть два случая.

При $z \le 0$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_{-Y}(z-x)dx = \int_0^{\infty} 4e^{-4x}4e^{4(z-x)}dx = 16e^{4z}\int_0^{\infty} e^{-8x}dx = -2e^{4z}e^{-8x}\Big|_0^{\infty} = 2e^{4z}.$$

При $z > 0$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_{-Y}(z-x)dx = \int_z^{\infty} 4e^{-4x}4e^{4(z-x)}dx = 16e^{4z}\int_z^{\infty} e^{-8x}dx = -2e^{4z}e^{-8x}\Big|_z^{\infty} = 2e^{-4z}.$$

В итоге имеем:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 2e^{-4z}, \text{при } z > 0, \\ 2e^{4z}, \text{при } z \le 0. \end{cases}$$

Функция распределения полученной случайной величины имеет вид:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}p_Z(t)dt=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-4z},\ при\ z>0,\\ \dfrac{1}{2}e^{4z},\ при\ z\le 0.\end{cases}$$

Важно отметить, что формулу свертки можно использовать и для дискретных случайных величин.

Если дискретные случайные величины X и Y независимы и $Z=X+Y$, то

$$P\{Z=X+Y=k\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P\{X=n\}\cdot P\{Y=k-n\}.$$

При этом, если случайные величины X и Y принимают лишь неотрицательные значения, то

$$P\{Z=X+Y=k\}=\sum_{n=0}^{k}P\{X=n\}\cdot P\{Y=k-n\}.$$

Пример 8. Пусть независимые случайные величины X и Y распределены по закону Пуассона с параметрами λ и μ, соответственно. Найдем закон распределения вероятностей случайной величины $Z=X+Y$.

Известно, что $P\{X=n\}=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $P\{Y=n\}=\dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$, $n=0,1,2,...$

Тогда по формуле свертки:

$$P\{Z=X+Y=k\}=\sum_{n=0}^{k}P\{X=n\}\cdot P\{Y=k-n\}=\sum_{n=0}^{k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\ \frac{\mu^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\mu}=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{n!(k-n)!}\lambda^n\mu^{k-n}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{n=0}^{k}C_k^n\lambda^n\mu^{k-n}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.$$

В итоге мы получили, что случайная величина $Z=X+Y$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda+\mu$.

Заключение

В работе подробно рассмотрены решения основных типов заданий, связанных с поиском распределений функций от двумерных случайных величин. Приведены примеры решения задач различной сложности, что позволяет преподавателю теории вероятностей спланировать семинар по данной теме. Акцент также сделан на разнообразии рассмотренных задач, использовании различных формул и методов решения.

Изучение данной темы поможет учащимся лучше разобраться не только в этих задачах, но в остальных разделах теории вероятностей и далее математической статистики, поскольку функции от многомерных случайных величин встречаются в теории вероятностей и математической статистике повсеместно.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.- 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).
2. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1994. - 112 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. 3-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2005. - 315 с.
4. Лебедева А.В., Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Под ред. А.В. Лебедева. Изд. 4-е, перераб. и доп. - М., 2018. - 480 с.

5. Бирюков О. Н. Методические аспекты проведения семинара по теме «функции от случайных величин» / О. Н. Бирюков, Н. А. Хасанов // Modern European Researches. - 2024. - Т. 1, № 2. - С. 12-17.

Nail A. Khasanov.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
nail_khasanov@mail.ru
Oleg N. Biryukov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru

Methodological aspects of the seminar on the topic “Functions of two-dimensional random variables"

Abstract. One of the branches of probability theory is the theory of functions of two-dimensional random variables. And the main task considered in this section is to be able to find the probability distribution for a function of a given random variable according to a given probability distribution of a two-dimensional random variable. The purpose of the work is to help in finding the optimal methodology for conducting a seminar on the topic "Functions of two-dimensional random variables". The paper presents the basic theoretical concepts and formulas, analyzes numerous examples, and provides valuable guidance. The materials of the article may be useful to teachers in preparing for practical classes on this section of probability theory.

Keyword: random variables, functions of two-dimensional random variables, probability distribution density.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аннотация

В статье обсуждается методика преподавания линейной алгебры студентам технических университетов. Рассмотрение данного вопроса представляется важным, так как данный раздел математики является обязательным для изучения всеми студентами инженерных специальностей. Целью статьи является разбор комплекта контрольно-оценочных материалов для организации текущего контроля результатов освоения дисциплины. Представлена методика составления билетов для проведения рубежного контроля по дисциплине. Статья может быть полезна преподавателям технических университетов и студентам.

Ключевые слова

линейная алгебра, линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы

АВТОРЫ

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-109

Введение

Образовательные программы по различным направлениям подготовки студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана предполагают изучение линейной алгебры в качестве обязательной дисциплины всеми студентами первого курса. Объём дисциплины зависит от того, на каком факультете и по какой специальности обучается студент. Так, например, для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», читается отдельный семестровый курс, тогда как студенты факультетов «Специальное машиностроение», «Информатика и управление» и многих других изучают данную дисциплину в рамках одного модуля объёмом до 34 аудиторных часов, который включен в дисциплину «Линейная алгебра и теория функций нескольких переменных». В данной работе будет обсуждаться сокращенный вариант курса. Базовым учебником для студентов нашего университета является учебник Канатникова А.Н. и Крищенко А.П. [1], изданный в серии «Математика в техническом университете» и выдержавший с 2002 года четыре переиздания. Этот учебник позволяет изучать линейную алгебру и в расширенном, и в сокращенном вариантах. Студентам можно предложить познакомиться и с другими классическими учебниками, например, с учебником Ильина В.Л. и Позняка Э.Г. [2], рекомендованным студентам физических специальностей и специальности «Прикладная математика» университетов, и современным университетским учебником Головиной Л.И. [3], изданным в серии «Классический учебник МГУ». Отметим, что учебник Ильина В.Л. и Позняка Э.Г. был удостоен Государственной премии СССР за 1980 год и до сих пор используется в учебном процессе. Можно порекомендовать также современное учебное пособие Золотаревской Д.И. [4] для студентов, обучающихся по специальностям прикладная математика, прикладная информатика, информационные технологии и др. Интересно также сравнить традиции российского математического образования с зарубежными (см., например, P. Olver [5]).

Методология и результаты исследования

Модуль «Линейная алгебра» объёмом 34 аудиторных часа предполагает знакомство студентов с понятиями линейного пространства и его подпространства, евклидовыми пространствами, процедурой ортогонализации Грама-Шмидта, линейными отображениями линейных пространств, собственными векторами и собственными значениями линейных операторов, сопряженными и самосопряженными операторами в евклидовых пространствах, билинейными и квадратичными формами, критерием Сильвестра, процедурой приведения квадратичных форм и уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду. При изложении теоретического материала курса «Линейная алгебра» принят аксиоматический подход, что приводит к тому, что теория становится более сложной для восприятия студентами по сравнению с другими дисциплинами. Для многих студентов технических университетов «Линейная алгебра» является самой абстрактной среди изучаемых ими математических дисциплин.

С точки зрения профессионального математика структура курса понятна и логична. В ограниченных рамках краткого курса мы отвечаем на вопросы:

1. *Что изучает дисциплина?* – В духе подхода теории категорий (см., например, Н. Бурбаки [6]) изучается теория линейных категорий, объектами являются линейные пространства, морфизмами – линейные отображения (и, конечно, многое другое). Идея линейности является одной из самых общих естественнонаучных идей. Важным частным случаем этой идеи является принцип линейности малых приращений, который утверждает, что почти всякий естественный процесс в малом линеен. Этот принцип лежит в основе математического анализа и его приложений.

2. *Как изучает?* – Выбирается базис, векторы задаются столбцами координат, линейные операторы (а затем и квадратичные формы) – матрицами. Проблема состоит в том, что в разных базисах объекты задаются разными матрицами и приходится устанавливать связь между этими матрицами (выводить тензорные законы преобразования координат вектора, матриц линейного оператора и квадратичной формы при переходе к новому базису). В классических университетских курсах алгебры изучают тензоры, в кратких курсах первого семестра технического университета такой темы нет. Векторы, линейные операторы и квадратичные формы – примеры простейших тензоров. Студенты некоторых инженерных специальностей на старших курсах будут изучать основы дифференциальной геометрии и тензорного исчисления. Но подчеркнуть удобство координатного подхода для различных вычислительных алгоритмов и обозначить проблему множественности матриц, которые определяют изучаемое понятие, следует и в рамках краткого курса. Можно также обсудить в этой связи различные виды определений математических понятий: инвариантных (не использующих координаты) и «координатных» определений, которые вводят новое понятие с использованием предварительно заданного базиса.

Примером определений первого типа являются определения, в которых вводимые понятия определяются набором аксиом, например, линейных и евклидовых пространств, линейных операторов. Квадратичные формы часто вводят, используя «координатное» определение (см., например, учебник Канатникова А.Н. и Крищенко А.П. [7]). Однако можно дать и инвариантное определение с использованием понятия билинейной формы (см. Дополнение 8.1. в учебнике Канатникова А.Н. и Крищенко А.П. [8]). Это не потребует много аудиторного времени, но может способствовать более глубокому пониманию студентами изучаемого курса. Задача на проверку знаний законов преобразования должна быть включена в каждый билет рубежного контроля.

3. *Зачем изучает?* Определение дифференциала функции как главной линейной части приращения функции поддержит идею линейности в рамках дифференциального исчисления функций многих переменных. Результаты использования собственных векторов и критерия Сильвестра студенты увидят уже в том же семестре в других дисциплинах, изучая методы решения систем линейных дифференциальных уравнений и теорию экстремальных задач для функций многих переменных. В курсе линейной алгебры рассматривается процедура приведения квадратичных форм и уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду, которая позволяет провести их классификацию. Полагаем, что задача на канонические виды, при решении которой студент продемонстрирует умение применять на практике алгоритм нахождения собственных чисел и собственных векторов, должна быть включена в каждый билет рубежного контроля. Отметим, что находит свое практическое применение и процедура ортогонализации Грама-Шмидта. Задачи на перечисленные темы также должны присутствовать в билетах.

Процедура контроля знаний студентов, регулярная оценка знаний, умений и компетенций студентов — важная составляющая учебного процесса. Для повышения эффективности контроля знаний студентов в течение семестра осуществляется проведение различных контрольных мероприятий: выполнение индивидуальных домашних заданий, контрольных работ, рубежных контролей. Проведение промежуточных контролей стимулирует работу студентов в течение всего семестра, способствует более равномерному распределению учебной нагрузки, снижает роль случайностей при сдаче экзаменов и зачетов, повышает состязательность в учебе. Количество контрольных мероприятий зависит от количества часов, выделяемых на изучение дисциплины или модуля дисциплины. Для контроля знаний студентов, изучающих линейную алгебру в объёме 34 часов, в нашем университете используется индивидуальное домашнее задание и рубежный контроль.

Рассмотрим здесь принципы составления билетов для проведения рубежного контроля. Объём заданий определяется количеством аудиторных часов, выделяемым учебным планом на проведение контрольного мероприятия, как правило, выделяется два академических часа. Билет должен содержать теоретический вопрос и задачи разного уровня сложности. Теоретический вопрос должен быть сформулирован предельно четко: сформулировать определение (теорему), сформулировать и доказать теорему (понятие и теорема однозначно определяются). Часть задач (например, три задачи из четырех или две из трех) должны быть близки по своему уровню к тестовым. Здесь под термином «тестовая задача» понимается задача, для решения которой достаточно применить четкий и не очень длинный алгоритм. Все типы таких задач должны быть заранее известны студентам и разобраны на семинарах. Эти задачи проверяют базовые знания и умения студентов, необходимые для дальнейшего обучения. Дополнительная четвертая задача представляет собой задачу по произвольной теме курса, типы таких задач студентам не сообщаются.

В соответствии с обозначенными выше тремя вопросами формируется базовая часть заданий рубежного контроля, состоящая из трех задач: проверить замкнутость подмножества относительно введенных в него линейных операций или линейность отображения линейных пространств; применить тензорные законы преобразования координат вектора, матриц линейного оператора или квадратичной формы при переходе к новому базису; диагонализировать матрицу линейного оператора, привести квадратичную форму или уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Предполагается, что все образцы задач базовой части рубежного контроля должны быть известны студентам (здесь реализуется подход, описанный в статье Хорьковой Н.Г. [9]). В заданиях рубежного контроля, которые получат студенты, численные данные будут изменены. При составлении задач предполагается подбирать такие численные данные, чтобы решения не требовали длинных вычислений, так как прежде всего контролируются знания студентов по линейной алгебре. При этом использование калькуляторов не рекомендуется. Поэтому, как правило, используем линейные пространства размерности два в задачах на тензорные законы преобразования и матрицы третьего порядка специального вида, для которых процедура нахождения собственных значений и собственных векторов не потребует большого количества времени. Таким образом будут созданы три базы заданий по каждой из указанных выше тем. Подчеркнем еще раз, что первые три задачи относятся к базовой части рубежного контроля, поэтому число вариантов заданий на каждую из выбранных выше тем должно быть ограничено. Например, несмотря на возможное разнообразие задач на первую тему, можно ограничиться всего двумя вариантами (см. ниже примеры задачи 1). Больше всего получается вариантов задачи 2, так как используются три тензорных закона преобразования и свойства матрицы перехода. Также число вариантов этой задачи легко увеличить в два раза, задавая векторы наборами их координат или в виде разложения по базису. Перечислять все возможные типы таких задач здесь нет необходимости. Ниже приводится для примера лишь одно задание, формулировка которого отличается от общепринятых и отсылает к тензорной природе изучаемого понятия. По третьей теме предлагаются задания трех типов. Приведем несколько примеров базовой части заданий.

Задача 1. Линейные пространства и подпространства, базис, размерность. Линейные отображения.

1. Доказать, что подмножество векторов линейного пространства $\mathbb{R}^5$ $V = \{(0, x_2, 0, x_4, x_5)|x_2 = x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$ является подпространством. Найти его размерность и базис.

2. Доказать, что отображение $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2 - x_1, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$, является линейным оператором. Найти его матрицу в каноническом базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 2. Преобразование координат вектора, матриц линейного оператора и квадратичных форм при замене базиса.

1. Являются ли матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицами одного и того же линейного оператора в базисах $\{e_1, e_2\}$ и $\{e'_1, e'_2\}$ соответственно, если $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$.

Задача 3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, диагонализация матрицы линейного оператора. Приведение к каноническому виду квадратичных форм, уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемого формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 3x_2, -x_1 + 2x_3)$. Записать его матрицу в базисе из собственных векторов и матрицу перехода к этому базису.

2. Квадратичная форма в некотором ортонормированном базисе имеет вид $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, указать канонический вид.

3. Привести уравнение поверхности второго порядка $2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 6xy = 20$ к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования декартовой прямоугольной системы координат, в котором задано это уравнение. Указать ортогональное преобразование, канонический вид и назвать поверхность.

Комплект из трех тестовых задач дополняется еще одной задачей по теме любого раздела курса. Формулировки четвертых задач не сообщаются студентам. Это могут быть как задания, использующие понятия и навыки, не задействованные в базовой части, например процедура ортогонализации, а также более разнообразные задачи по первой или третьей темам. Предлагается также для ряда специальностей при формировании билетов оставить только две тестовые задачи 2 и 3, а вариантами задачи 1 пополнить базу «Разные задачи по всему курсу». Тематика задач из данного раздела, естественно, определяется содержанием читаемого курса, тем, в каком объёме была изложена каждая тема, и может варьироваться в зависимости от целей обучения по разным специальностям. Подобные задачи и многие другие можно найти в многочисленных учебных пособиях по линейной алгебре или составить самостоятельно. Приведем пример.

Задача 4. Разные задачи по всему курсу.

1. Найти размерность и какой-нибудь базис ядра $\ker A$ линейного отображения $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, задаваемого формулой $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_1 + x_3, 2x_2 - x_1, x_1 - x_4)$. Записать матрицу линейного отображения A в канонических базисах линейных пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

При формировании билетов задачи подбираются таким образом, чтобы охватить основные понятия: векторы, линейные пространства; линейные операторы; квадратичные формы (поверхности второго порядка). При этом заданий на каждое из них в билете должно быть не более двух. Приведем пример билета, состоящего из пяти заданий: один теоретический вопрос и четыре задачи. Для упрощенного варианта рубежного контроля удаляем задачу 2.

Билет 1.

1. Сформулировать определение линейного пространства. Доказать единственность нулевого и обратного элементов.

2. Доказать, что отображение $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, задаваемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2 - x_1, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$, является линейным оператором. Найти его матрицу в каноническом базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

3. Дан базис $\{e_1, e_2\}$ линейного пространства $L, \dim L = 2$ и векторы $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = 3e_1 + 2e_2$. Доказать, что $\{e_1', e_2'\}$ - базис линейного пространства L. Найти координаты вектора $x = 4e_1 - 7e_2$ в базисе $\{e_1', e_2'\}$.

4. Квадратичная форма в некотором ортонормированном базисе имеет вид $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, указать канонический вид.

5. Дана матрица $A' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\{e_1', e_2'\}$, где $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = 3e_1 + 2e_2$, $\{e_1, e_2\}$– ортонормированный базис евклидова пространства L, $\dim L = 2$. Является ли линейный оператор А самосопряженным?

При составлении заданий для проведения контрольных работ, рубежных контролей и т.п. следует учитывать, что каждое контрольное мероприятие дает свой вклад в итоговую оценку по изучаемой дисциплине. Поэтому для повышения объективности контроля знаний студентов при проведении контрольного мероприятия в различных группах потока в разное время необходимо иметь несколько комплектов заданий. Также требуется каждый год обновлять материалы для контроля знаний студентов. Это приводит к необходимости разработки алгоритма автоматического генерирования заданий для создания большого числа комплектов билетов. Приведенные типы задач базовой части позволяют создавать сколь угодно большое количество заданий, просто меняя численные данные. Также легко организовать автоматическую проверку ответов на такие задания. Но отметим, что стандартные алгоритмы генерирования заданий, выбирающие задачу билета под определенным номером из соответствующей базы заданий с использованием случайных чисел, для рассматриваемых целей не подходят, так как могут привести к созданию билета, содержащего, например, пять заданий на линейные операторы (для рассматриваемого комплекта было введено разумное ограничение не более двух). Отметим, что подобная ситуация может возникнуть и в других дисциплинах, например, при изучении темы «Числовые ряды» необходимо контролировать знание разных признаков сходимости при ограниченном числе заданий в билете. Таким образом, вопрос автоматического генерирования заданий в подобных ситуациях требует отдельной проработки.

Заключение

В работе представлена методика составления комплектов контрольно-оценочных заданий для организации текущего контроля результатов изучения дисциплины «Линейная алгебра» студентами технических университетов с учетом разного объёма часов, выделяемых на изучение дисциплины. Перечислены принципы формирования базового комплекта билетов рубежного контроля с учетом объёма дисциплины, дано описание структуры билетов, приведены примеры задач, которые могут использоваться для формирования билетов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов – 5-е изд. М.: Изд-во МГТУ, 2015. - 335 с.
2. Ильин В.Л., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 6-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 280 с.
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. - 6-е изд. - URSS, 2024. - 400 с. - Серия: ФУНДАМЕНТ БУДУЩЕГО: Юбилейная серия в честь 270-летия МГУ имени М.В. Ломоносова
4. Золотаревская Д.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Все вопросы учебных программ. – URSS, 2022. - 504 с.
5. Olver, P. J.; Shakiban, C. Applied Linear Algebra. 2nd Ed. Springer, 2018. - 679 p. doi:10.1007/978-3-319-91041-3, ISBN 978-0131473829.
6. Бурбаки Н. Теория множеств. 2-е изд. Либроком, 2010. - 456 с.
7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Указ. соч.
8. Там же.
9. Хорькова Н.Г. Особенности модульно-рейтинговой системы организации преподавания дисциплин профессионального цикла в техническом университете // Гуманитарный вестник, 2015, вып. 4. - URL: https://hmbul.bmstu.ru/catalog/edu/pedagog/231.html.

Nina G. Khorkova,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Department of Applied Mathematics, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia
ninakhorkova@bmstu.ru
Pavel A. Vlasov,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

pvlx@mail.ru

The methodology of teaching linear algebra at a technical university

Abstract. The article discusses the methodology of teaching linear algebra to students of technical universities. Consideration of this issue is important, since this section of mathematics is mandatory for all engineering students to study. The purpose of the article is to discuss a set of control and evaluation materials for the organization of ongoing monitoring of the results of mastering the discipline. The method of drawing up tickets for border control in the discipline is presented. The article may be useful for teachers of technical universities and students.

Keywords: linear algebra, linear spaces, linear operators, quadratic forms.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА»

Аннотация

Актуальность рассматриваемой проблемы обусловлена важностью приобретения студентами навыков владения математическими методами решения задач с прикладным содержанием. Целью работы является помочь студентам освоить приёмы вычисления тройного интеграла в различных системах координат. Приведен разбор типовых задач с подробными разъяснениями всех этапов решения. Статья может быть полезна для организации самостоятельной работы студентов, а также преподавателям при подготовке к проведению семинарских занятий.

Ключевые слова

тройной интеграл, геометрический смысл тройного интеграла, объём тела, цилиндрические координаты, статический момент, центр масс тела

АВТОР

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-116

Введение

Дисциплина «Кратные и криволинейные интегралы, теория поля, ряды» является фундаментальной и читается студентам всех специальностей технического университета. Интегральное исчисление нашло широкое применение в различных областях науки и техники. Приведём лишь некоторые примеры. Кратные интегралы используются при решении задач термодинамики, электродинамики, оптики и других разделов физики. В теоретической механике с помощью тройных интегралов вычисляют объём и массу неоднородного тела, а также его моменты инерции относительно координатных плоскостей, статические моменты, координаты центра масс. Приложения кратных интегралов играют важную роль в медицине при изучении действия лекарственных препаратов, а также при анализе изображений диагностических исследований. Среди других областей применения кратных интегралов можно выделить следующие: биомеханика, астрофизика, механика сплошной среды. Поскольку при конструировании приборов и деталей машин, а также при исследовании различных процессов и явлений используются приложения кратных интегралов, то важную роль при изучении данной дисциплины играет формирование у студентов навыков применения математических методов для решения прикладных задач в дальнейшей профессиональной деятельности.

Методология и результаты исследования

В результате изучения темы «Вычисление тройного интеграла» студенты должны *знать* определение понятия «тройной интеграл» и его свойства, а также геометрический смысл; *уметь* вычислять тройной интеграл в различных системах координат; *владеть* математическими методами решения задач на приложения тройного интеграла.

При проведении семинарского занятия важно обратить внимание на те этапы решения задачи, которые вызывают у студентов наибольшие затруднения. Поскольку изложению темы, рассматриваемой в данной статье, предшествует изучение темы «Двойной интеграл», то студенты знают определение и свойства двойного интеграла, а также владеют способами сведения двойного интеграла к повторному и методами его вычисления. Здесь, как правило, у студентов не возникает трудностей, так как область интегрирования представляет собой *плоскую* фигуру, для изображения которой не требуется пространственное воображение. При решении задач на применение тройного интеграла сложность вызывает не только техника вычисления, но и правильная расстановка пределов интегрирования. С целью помочь студентам приобрести навыки решения задач данного типа можно предложить организовать работу на семинаре следующим образом.

Актуализация знаний по ранее изученным дисциплинам проводится в форме домашнего задания, выполняемого студентами с использованием пакета прикладных программ (см., например, работу Ф.Х. Ахметовой с соавторами [1]). Для формирования пространственных представлений можно включить задания на определение вида тела по его проекциям, а также задания на распознавание простых геометрических тел, например, в деталях машин, архитектурных сооружениях. Полезно также будет студентам повторить способы сведения двойного интеграла к повторному, для этого можно рекомендовать разобранные решения задач в работах В.Р. Гаврилова с соавторами [2] и М.А. Велищанского с соавторами [3].

Для того чтобы вызвать у студентов интерес к изучению тройных интегралов, приведём пример задачи из курса теоретической механики (см. сборник задач И.В. Мещерского [4]), иллюстрирующий прикладной характер обозначенной темы.

Задача №1. Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, состоящее из цилиндра и полушара, одинаковой плотности $\rho = const$ и одинакового радиуса R, теряет устойчивость в положении равновесия, когда оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость (см. рис. 1).

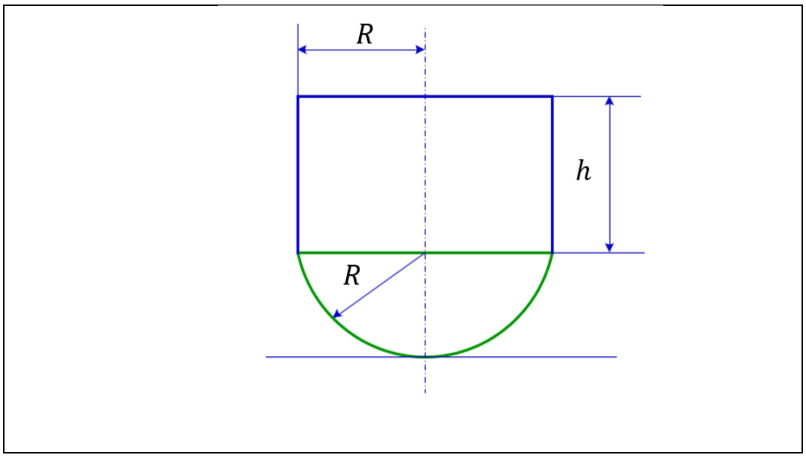

Рис. 1. Сечение тела

Далее необходимый для решения задач теоретический материал приведем в конспективной форме, основываясь на изложение в учебниках В.А. Ильина и Э.Г. Позняка [5], Л.Д. Кудрявцева [6], а также В.Р. Гаврилова с соавторами [7].

Вычисление объёма и массы тела
в прямоугольной декартовой системе координат

Для нахождения объёма тела применяется геометрический смысл тройного интеграла.

Пусть замкнутая область $T \subset \mathbb{R}^3$ ограничена снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ соответственно, причём функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяют неравенству $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$ $\forall (x, y) \in D$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Здесь D – проекция области T на координатную плоскость Oxy (см. рис. 2).

Кроме того, функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна в области T.

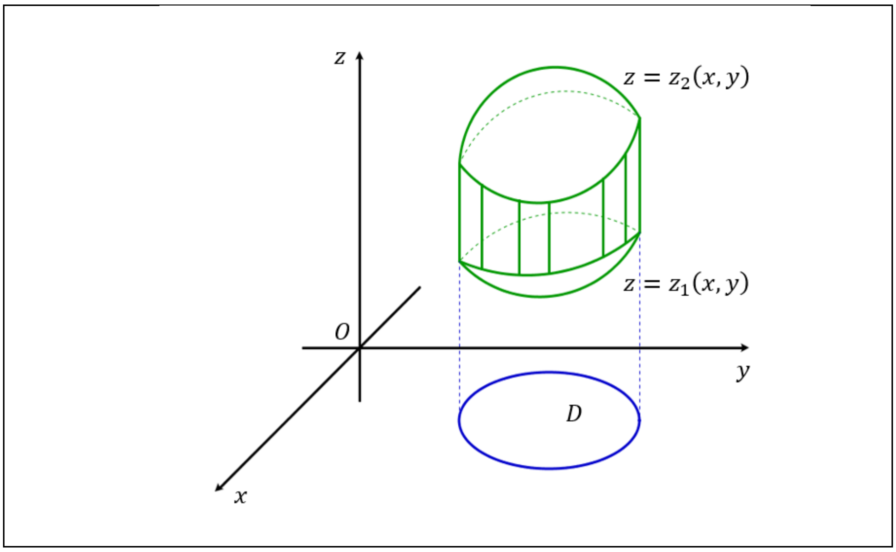

Рис. 2. Тело и его проекция на координатную плоскость Oxy

Тогда

1) объём тела T может быть найден с помощью тройного интеграла

$$V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz;$$

2) масса тела T плотности $\rho(x, y, z)$ может быть вычислена по формуле

$$m = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x, y, z)dz.$$

Замечание. Замкнутую область $T \subset \mathbb{R}^3$ описанного вида называют *z-цилиндрической*.

На начальном этапе усвоения нового материала студентам можно выдать задания следующих типов:

- ✓ на распознавание объектов (задача №1);
- ✓ на применение формулы для вычисления объёма тела (задача №2).

Задача 1. Нарисовать тела, объёмы которых выражаются следующими тройными интегралами:

$$1) V = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,; \quad 2) V = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dz\,;$$

$$3)V=\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{0}^{h}dz\,;\quad 4)V=\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h}dz\,.$$

Прежде чем перейти к разбору задачи на применение формулы для вычисления объёма тела, приведём *алгоритм* решения задачи данного типа.

Для вычисления объёма тела в прямоугольной декартовой системе координат необходимо

1) назвать поверхности, ограничивающие тело, и выполнить рисунок (изобразить тело и его проекцию D на координатную плоскость Oxy);

2) записать формулу для вычисления объёма тела

$$V=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz;$$

3) расставить пределы интегрирования во внутреннем интеграле по переменной z: через фиксированную точку $(x,y)\in D$ провести прямую, параллельную оси Oz , и определить поверхности, которые пересекает данная прямая, т.е. поверхности, ограничивающие тело снизу и сверху; выразить из уравнений этих поверхностей z и записать $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ –нижний и верхний пределы в интеграле;

4) проинтегрировав по z, свести задачу к известной задаче на вычисление двойного интеграла:

$$V=\iint_D\big(z_2(x,y)-z_1(x,y)\big)\,dxdy;$$

5) расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области D;

6) найти объём тела, вычислив значение двойного интеграла;

7) выполнить проверку, исходя из теории размерностей физических величин;

8) записать ответ.

Проиллюстрируем применение теории на конкретном примере. Для этого разберём подробно все шаги решения задачи из сборника, рекомендованного для втузов, под редакцией Б.П. Демидовича [8]. Данный этап проведения семинарского занятия организуется в соответствии с теорией П.Я. Гальперина [9], где в качестве ориентировочной основы действия выступает алгоритм решения задачи, ранее изложенный преподавателем. Действие студента – запись на доске решения задачи, в соответствии с алгоритмом, сопровождается громкой речью с разъяснением всех шагов решения.

Задача 2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2ax$, $z=\alpha x$ и $z=\beta x$, $\alpha<\beta$.

Решение. Тело ограничено прямым круговым цилиндром $x^2+y^2=2ax$, снизу и сверху – плоскостями $z=\alpha x$ и $z=\beta x$ соответственно, следовательно нижним и верхним пределами во внутреннем интеграле по переменной z являются $z_1(x,y)=\alpha x$ и $z_2(x,y)=\beta x$. Преобразовав уравнение цилиндра к виду $(x-a)^2+y^2=a^2$, видим, что проекция D тела на координатную плоскость Oxy представляет собой круг радиуса a с центром в точке $(a,0)$. Ниже приведено решение задачи с подробными пояснениями.

$$V=\iint_D dxdy\int_{\alpha x}^{\beta x}dz=\left|\begin{matrix}\text{вычислим интеграл}\\ \text{по переменнной } z\end{matrix}\right|=\iint_D (z)\big|_{\alpha x}^{\beta x}dxdy=$$

$$= \iint_D (\beta x - \alpha x) dx dy = \left| \begin{matrix} \text{расставим пределы интегрирования} \\ \text{в двойном интеграле} \end{matrix} \right| =$$

$$= (\beta - \alpha) \int_{-a}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} x dx = \left| \begin{matrix} \text{вычислим интеграл} \\ \text{по переменнной } x \end{matrix} \right| =$$

$$= (\beta - \alpha) \int_{-a}^{a} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} dy = \left| \begin{matrix} \text{подставим пределы} \\ \text{интегрирования} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-a}^{a} \left(\left(a + \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 - \left(a - \sqrt{a^2 - y^2} \right)^2 \right) dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{применим формулу} \\ \text{"разность квадратов"} \end{matrix} \right| = \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-a}^{a} 4a\sqrt{a^2 - y^2}\, dy =$$

$$= 2a(\beta - \alpha) \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \left| \begin{matrix} \text{вычислим определенный интеграл,} \\ \text{выполнив подстановку:} \\ y = a \sin t, \quad dy = a \cos t\, dt \\ y = \pm a \quad \Rightarrow t = \pm \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2a(\beta - \alpha) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 |\cos t| \cos t\, dt = |\text{раскрываем "модуль"}| =$$

$$= 2a^3(\beta - \alpha) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \left| \begin{matrix} \text{применим формулу} \\ \text{"понижение степени"} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2a^3(\beta - \alpha) \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \left| \begin{matrix} \text{вычислим} \\ \text{определенный интеграл} \end{matrix} \right| =$$

$$= a^3(\beta - \alpha) \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^3(\beta - \alpha).$$

Анализ решения задачи

Во-первых, обратим внимание студентов на то, что рассмотренная выше задача представляет собой базовую задачу. Используемый здесь метод решения применяется и при решении других задач на приложения тройного интеграла. В частности, при нахождении массы тела отличие состоит только в том, что подынтегральная функция $\rho(x, y, z)$ в тройном интеграле, зависящая в общем случае от переменных x, y, z задана в условии, и при вычислении внутреннего интеграла по переменной z необходимо сначала найти первообразную этой функции, считая x и y фиксированными, а затем применить формулу Ньютона-Лейбница. В результате эта задача также будет сведена к известной задаче – *задаче о вычисления двойного интеграла*. Ниже будут приведены и другие механические приложения тройного интеграла, где как мы увидим, различия будут состоять только в подынтегральной функции. Таким образом, для успешного освоения студентами данной темы важно приобретение навыков сведения тройного интеграла к повторному.

Во-вторых, следует отметить, что решение задачи с использованием декартовых координат может оказаться в значительной степени трудоёмким. Это связано не только с тем, какие поверхности ограничивают тело, но и с видом подынтегральной функции. В связи с чем, далее целесообразно перейти к рассмотрению других систем координат, позволяющих решать более сложные задачи. Примером таких координат являются цилиндрические и сферические координаты, используемые при решении широкого класса прикладных задач (см., например, работы В.В. Феоктистова и О.Ю. Чигирёвой [10], Chigireva O.Yu. [11]).

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Далее будет показано, как при решении задач на приложения тройного интеграла можно применять цилиндрические координаты.

Цилиндрические координаты (r, φ, z) точки M связаны с прямоугольными декартовыми координатами (x, y, z) следующими соотношениями (см. рис. 3):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

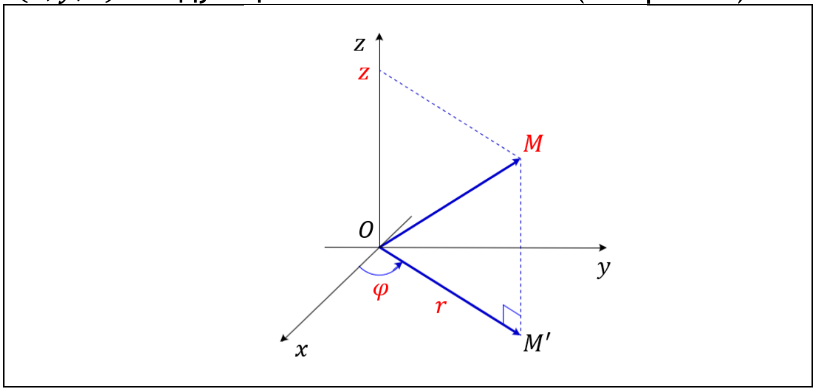

Рис. 3. Связь цилиндрических координат с прямоугольными декартовыми координатами

В соответствии с теоремой о замене переменных в тройном интеграле (см., например, учебники В.А. Ильина и Э.Г. Позняка [12], Л.Д. Кудрявцева [13]), формулы для вычисления объёма и массы тела в цилиндрических координатах примут вид

$$V = \iiint\limits_{T'} r dr d\varphi dz; \quad m = \iiint\limits_{T'} \rho(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Следующий этап проведения занятия–освоение различных способов расстановки пределов в тройном интеграле в цилиндрической системе координат. Здесь важно обратить внимание студентов на то, что при решении конкретной задачи рекомендуется свести тройной интеграл к повторному двумя способами, а затем для вычисления выбрать наиболее простой. С этой целью:

- ✓ на примере решения задачи №3 преподаватель показывает эти два способа;
- ✓ для освоения рассмотренных способов студентам предлагается выполнить самостоятельно задачу №4 (на применение1-го способа) и задачу №5 (на применение 2-го способа) с последующей проверкой на занятии.

Задача 3. Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z = \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2)$ и плоскостью $z = h$.

Решение. Покажем два способа сведения тройного интеграла к повторному с применением цилиндрических координат.

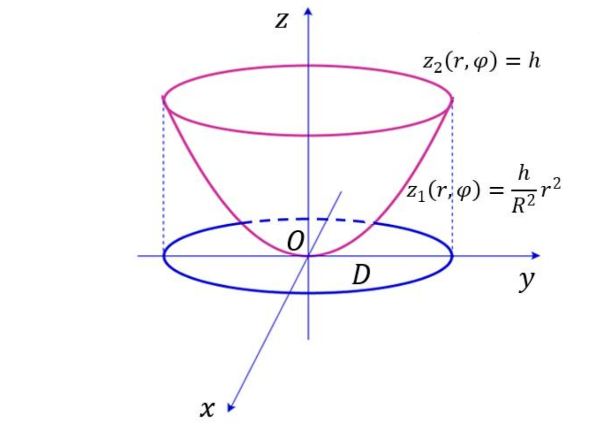

Рис. 4. Пояснения к расстановке пределов во внутреннем интеграле по переменной z

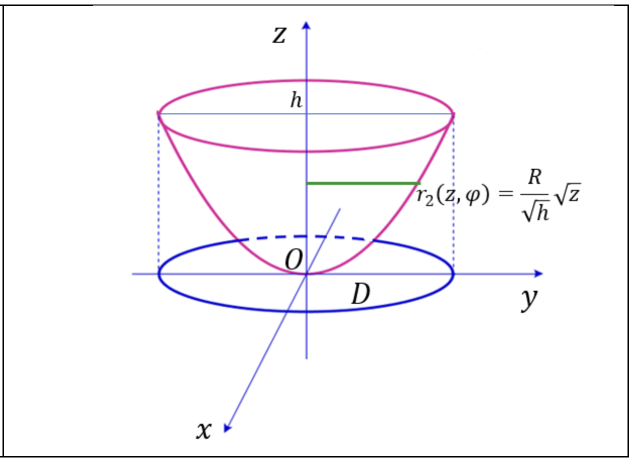

Рис. 5. Пояснения к расстановке пределов во внутреннем интеграле по переменной r

1-й способ (внутренний интеграл записывается по переменной z, см. рис. 4):

1) найдём проекцию D тела на координатную плоскость Oxy; для этого определим линию пересечения L параболоида и плоскости, записав уравнения этих поверхностей в цилиндрических координатах $L:\begin{cases} z = \frac{h}{R^2}r^2 \\ z = h \end{cases}$; подставив $z = h$ в 1-е уравнение, получим $L:\begin{cases} r = R \\ z = h \end{cases}$, т.е. линия пересечения поверхностей представляет собой окружность радиуса R, лежащую в плоскости $z = h$;

таким образом, область D – круг радиуса R с центром в начале координат;

2) для того чтобы расставить пределы интегрирования во внутреннем интеграле по переменной z, необходимо через фиксированную точку области D провести прямую параллельно оси Oz и определить поверхности, которые пересекает данная прямая: снизу тело ограничено

параболоидом, а сверху – плоскостью; это означает, что $z_1(r,\varphi) = \frac{h}{R^2}r^2$ и $z_2(r,\varphi) = h$ – нижний и верхний пределы во внутреннем интеграле;

3) сведение тройного интеграла к повторному и результаты вычислений

$$V = \iint\limits_D r dr d\varphi \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r dr \int\limits_{\frac{h}{R^2}r^2}^{h} dz = 2\pi \int\limits_0^R r\left(h - \frac{h}{R^2}r^2\right) dr = \frac{\pi}{2}hR^2;$$

2-й способ (внутренний интеграл записывается по переменной r, см. рис. 5):

1) для того чтобы расставить пределы интегрирования во внутреннем интеграле по переменной r, необходимо через фиксированную точку M_0 оси Oz провести прямую перпендикулярно Oz; пусть эта прямая пересекает внутреннюю и внешнюю поверхности, ограничивающие тело, в точках M_1 и M_2, тогда расстояния $r_1(z,\varphi)$ и $r_2(z,\varphi)$ от точки M_0 до этих точек и будут определять пределы интегрирования; в данном примере $r_1(z,\varphi) = 0$, а $r_2(z,\varphi) = \frac{R}{\sqrt{h}}\sqrt{z}$ получаем, выражая переменную r из уравнения параболоида;

2) ниже приведена краткая запись решения

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h dz \int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{h}}\sqrt{z}} r dr = 2\pi \int\limits_0^h \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sqrt{h}}\sqrt{z}\right)^2 dz = \frac{\pi}{2}R^2 h.$$

Задача 4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (внутреннего по отношению к конусу).

Задача 5. Найти объём тела, ограниченного гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ и плоскостями $z = 0$ и $z = a$.

Как отмечалось выше, задачи №4 и №5 студенты решают самостоятельно. В зависимости от уровня подготовки студентов возможны подсказки: *«для решения задачи №4 примените 1-й способ, записав внутренний интеграл по переменной z»*, *«для решения задачи №5 примените 2-й способ, записав внутренний интеграл по переменной r »*. После проверки выполненного задания рекомендуется обсудить выбор рационального способа решения, обратив внимание обучающихся на то, что при применении 2-го способа решения для задачи №4 объём тела записать с помощью одного тройного интеграла не удастся, в этом случае объём тела следует искать как сумму объёмов двух тел — шарового сегмента и конуса; аналогичная ситуация возникает и при выборе 1-го способа решения для задачи №5.

Отметим также, что общих рекомендаций по применению того или иного метода решения задачи (выбор системы координат и способа сведения тройного интеграла к повторному) нет. Для поиска рационального способа решения *конкретной* задачи необходимо обращать внимание на вид подынтегральной функции, и выбирать такой, при котором отыскание первообразной будет наиболее простым.

Следующий этап проведения занятия — применение полученных навыков для решения задач с прикладным содержанием.

Механические приложения тройного интеграла

В учебнике В.Р. Гаврилова с соавторами [14], рекомендованном для втузов, представлены формулы для вычисления моментов инерции неоднородного тела относительно координатных плоскостей, его статических моментов, а также центра масс, записанные в прямоугольной декартовой системе координат.

Напомним, что *статические моменты тела T* относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy вычисляются по формулам

$$I_{yz} = \iiint\limits_T x\rho(x, y, z)dxdydz, \qquad I_{xz} = \iiint\limits_T y\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_T z\rho(x, y, z)dxdydz,$$

разделив эти величины на значение массы m тела T, получаем координаты центра масс $x_C = \frac{I_{yz}}{m}$, $y_C = \frac{I_{xz}}{m}$, $z_C = \frac{I_{xy}}{m}$.

Приведём примеры заданий на закрепление изученного материала.

Задача 6. Найти статические моменты и центр масс тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ и $z = y \operatorname{tg} \alpha$, если плотность имеет вид $\rho(x, y) = \rho_0 \left(1 + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)$.

Ответ:

$$m = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^R \rho_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right) r dr \int\limits_0^{r \sin\varphi \operatorname{tg}\alpha} dz = \frac{7}{6}\rho_0 R^3 \operatorname{tg}\alpha\,;$$

$$I_{xy}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}\rho_0\left(1+\frac{r}{R}\right)rdr\int_0^{r\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}zdz=\frac{9}{80}\rho_0\pi R^4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha;$$

$$I_{xz}=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}\rho_0\left(1+\frac{r}{R}\right)rdr\int_0^{r\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}r\sin\varphi\,dz=\frac{9}{40}\rho_0\pi R^4\,\mathrm{tg}\,\alpha\,;$$

$$x_C=0,\quad y_C=\frac{27}{140}\pi R,\qquad z_C=\frac{27}{280}\pi R\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Примером задания повышенного уровня сложности является задача №1, которая может быть предложена студентам в качестве домашнего задания.

Для подготовки к контрольной работе можно рекомендовать сборник задач И.А. Виноградовой с соавторами [15].

Заключение

Работа основана на многолетнем опыте автора преподавания дисциплины «Кратные и криволинейные интегралы, теория поля, ряды». В статье рассмотрены ключевые моменты изложения темы «Вычисление тройного интеграла». Необходимый для решения задач теоретический материал приведён в конспективной форме. С целью успешного освоения студентами данной темы основное внимание уделено составлению системы задач, в которой последовательно разбираются приёмы решения базовых задач и проводится анализ полученных результатов, что позволит студентам научиться вычислять тройной интеграл в прямоугольной декартовой и цилиндрической системах координат. Для закрепления изученного материала и приобретения навыков владения математическими методами при решении практических задач предложены задания на механические приложения тройного интеграла. Успешное освоение данной темы поможет студентам при изучении не только раздела «теория поля», входящего в программу данной дисциплины, но и при дальнейшем изучении курса «Теория вероятностей и математическая статистика», а также дисциплины «Уравнения математической физики» и других инженерных дисциплин.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

2. Ахметова Ф.Х., Акимова И.Я., Чигирёва О.Ю. Методика приведения уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду с применением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». - 2016. - №11. - С. 151-161. - URL: http://e-koncept.ru/2016/16250.htm
3. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 492 с.
4. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Методологические аспекты вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат // Modern European Researches. - 2023. - Т.1, №3. - С. 50-59.
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Наука, 1972. - 448 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть II: учеб. для вузов. - М.: Физматлит, 2009. - 464 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3-х т. Т. 2. - М.: Высшая школа, 1988. - 576 с.
8. Гаврилов В.Р. Указ. соч.
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Астрель, 2003. - 472 с.
10. Гальперин П.Я. Введение в психологию. М.: Книжный дом «Университет», 1999. - 332 с.
11. Феоктистов В.В., Чигирёва О.Ю. Уравнения математической физики и специальные функции: методические указания к выполнению домашнего задания. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. - 45 с.

12. Chigireva O.Yu. Mathematical modeling of the process of warming up of a cylindrical surface by a moving intense heat source // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. - 2006. - T. 79. - №6. - C. 1078-1084.
13. Ильин В.А. Указ. соч.
14. Кудрявцев Л.Д. Указ. соч.
15. Гаврилов В.Р. Указ. соч.
16. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. - М.: МЦНМО, 2018. - 256 с.

Olga Yu. Chigiryova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
mkfn12@yandex.ru

Methodological aspects of the presentation of the topic “Calculating the triple integral”

Abstract. The relevance of the problem under consideration is due to the importance of students acquiring skills in mathematical methods for solving problems with applied content. The purpose of the work is to help students master the techniques of calculating the triple integral in various coordinate systems. An analysis of typical tasks is provided with detailed explanations of all stages of the solution. The article can be useful for organizing independent work of students, as well as teachers in preparation for seminars.

Keywords: triple integral, geometric meaning of the triple integral, body volume, cylindrical coordinates, static moment, center of mass of the body.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 1 (T.1), 2025
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS
610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”

Sent for printing 12-05-2025
Circulation 1000
Order 013120/127