ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 2 (T 1)
2025

Kirov, Russian Federation

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2025) ISSUE 2 (T.1), 183 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

Olga Bermant-Polyakova, *PhD, Israel*

Tatyana Fedotova, *PhD, Professor, Ukraine*

Alla Gabidullina, *PhD, Professor, Ukraine*

Pavel Gorev, *PhD, Associate Professor, Russia*

Mariya Greb, *PhD, Associate Professor, Ukraine*

Natalya Korableva, *PhD, Associate Professor, Ukraine*

Nikolay Kotryahov, *PhD, Professor, Russia*

Kanat Lakbaev, *PhD, Associate Professor, Kazakhstan*

Galina Nekrasova, *PhD, Professor, Russia*

Aleksander Nosov, *PhD, Professor, Russia*

Gennadiy Senkevich, *PhD, Associate Professor, Ukraine*

Samvel Sukiasyan, *PhD, Professor, Armenia*

Eugene Vechtomov, *PhD, Professor, Russia*

Elena Visotskaya, *PhD, Professor, Ukraine*

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,

KIROV, RUSSIAN FEDERATION

PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806

Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.
Editorial opinion can differ from opinion of authors.
If reprinted, the reference to the journal is required.
© All Rights Reserved
Printed in Russian Federation, 2025

CONTENTS

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ
ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ,
ИМЕЮЩИХ НЕСТАНДАРТНЫЙ ВИД
Ахметова Фания Харисовна, Головина Анастасия Михайловна,
Чигирёва Ольга Юрьевна
5-11

ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД ТОЖДЕСТВ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
Белоусов Алексей Иванович
12-23

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ
Береснева Евгения Викторовна
24-31

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ»
В РАМКАХ ШКОЛЬНОГО ФАКУЛЬТАТИВА
Бирюков Олег Николаевич, Келдыш Елизавета Петровна
32-37

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ И КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ»
Вергазова Ольга Бухтияровна
38-44

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОВЕРКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ»
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ
Власов Павел Александрович, Хорькова Нина Григорьевна,
Велищанский Михаил Александрович
45-50

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ СРАВНЕНИЯ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ МОЩНОСТИ
КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ
Горяинов Владимир Борисович, Горяинова Елена Рудольфовна
51-60

МНОГОЧЛЕНЫ В ЗАДАЧАХ ОГЭ И ЕГЭ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
Грибов Александр Федорович, Краснов Игорь Константинович,
Жидков Евгений Николаевич
61-69

ИСТОРИКО-МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
ИЗУЧЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН
Забелина Светлана Борисовна, Пинчук Ирина Александровна
70-82

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»
Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович
83-91

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ
Ивахненко Наталья Николаевна, Бадекин Максим Юрьевич
92-103

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ АЛГОРИТМОВ
МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ: kNN и k-Means
Игнатова Варвара Андреевна, Терентьева Марина Александровна,
Федянин Денис Николаевич
104-110

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ
Канатников Анатолий Николаевич, Крищенко Александр Петрович
111-121

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ
«ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ,
ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ»
Ласковая Татьяна Алексеевна, Косова Анна Владимировна
122-128

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ»
Одинцова Вера Александровна
129-136

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФУНКЦИЙ АКТИВАЦИИ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ
Попов Кирилл Сергеевич, Федянин Денис Николаевич
137-142

ПРЕПОДАВАНИЕ ОСНОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В РОССИИ
ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XVIII ВЕКА
Птицына Инга Вячеславовна, Бахтиярова Ольга Николаевна,
Птицына Елена Владимировна
143-152

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Скосарева Екатерина Петровна
153-158

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВ АНИЗОТРОПИЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ
Титов Александр Дмитриевич, Забелина Светлана Борисовна
159-166

МЕТОДОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ПРИНЦИПАМ РАБОТЫ ПОЛНОСВЯЗНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
Федянин Денис Николаевич, Намлеев Кирилл Вадимович,
Соколова Елизавета Петровна
167-173

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ»
Чигирёва Ольга Юрьевна, Ахметова Фания Харисовна,
Головина Анастасия Михайловна
174-182

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ НЕСТАНДАРТНЫЙ ВИД

Аннотация

Современные подходы к построению графиков функций включают использование специализированных методов, применение цифровых инструментов и решение задач с учетом особенностей функций. Безусловно, привлечение программных средств позволяет повысить скорость решения поставленной задачи и облегчает труд исследователя. Однако, не менее важно и полезно развивать у студентов геометрическое мышление и пространственное воображение при самостоятельном построении графиков функций. Цель работы заключается в том, чтобы показать, как достаточно быстро можно построить график с помощью знаний основных линейных преобразований, свойств модуля и свойств четных, нечетных тригонометрических функций. В рамках поставленной задачи, в работе рассмотрены практические приемы построения графиков тригонометрических функций, имеющих нестандартный вид. Содержание статьи будет актуально преподавателям и студентам младших курсов при изучении дисциплины «Математический анализ».

Ключевые слова

тригонометрические функции; графики функций, имеющих нестандартный вид; линейные преобразования; модуль

АВТОРЫ

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-5-11

Введение

Авторы продолжают рассмотрение цикла статей, посвященных методике преподавания построения эскизов графиков функций различной степени сложности.

Этот предмет обсуждения всегда вызывает высокий интерес при решении задач как у старшеклассников, так и у первокурсников различных высших учебных заведений.

Бесспорно, что тема построения графиков функций не новая и имеется целый ряд учебников, справочников и учебно-методических пособий по этой тематике. В ставших уже классическими учебниках И.М. Гельфанда и соавторов [1], М.Я. Выгодского [2], Л.Э. Гендштейна и соавторов [3], В.А. Ильина, Э.Г. Позняка [4], рассматриваются подходы при построении различного рода функций, таких как: линейно-зависимых, квадратичных, дробно-рациональных, тригонометрических и других.

В зарубежных статьях эта тема также вызывает живой интерес, предлагается целый ряд программных продуктов, например, Gnuplot, MathCAD, Python, Tableau и другие. В частности, Gnuplot – портативная, управляемая командами, интерактивная программа. Она позволяет строить графики и диаграммы для Linux, OS/2, MS Windows и многих других платформ (см. электронные ресурсы [5]). Авторами в [6] также было показано применение среды MathCAD в учебном процессе на примерах графического исследования некоторых вопросов поведения функций с использованием этого пакета прикладных программ.

Без всякого сомнения, привлечение программных средств повышает скорость решения задач. В то же время, целесообразно обучать старшеклассников и студентов различным способам выбора нахождения ответа: аналитическим, графическим и с применением программной среды. Кроме того, полезно развивать геометрическое мышление и пространственное воображение у студентов при самостоятельном построении графиков функций.

Ранее в работах [7-11] авторами уже были рассмотрены особенности поведения тригонометрических функций, в которых присутствовал только внешний или только внутренний модуль, или одновременно внешний и внутренний модули. Более того, были разобраны графики многозначных функций, с использованием основных линейных преобразований, свойств модуля и свойств четных, нечетных тригонометрических функций.

В данной работе, речь пойдет о построении графиков тригонометрических функций, имеющих нестандартный вид.

Методология и результаты исследования

В предыдущих работах авторов речь шла о методике построения графиков тригонометрических функций вида $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=|f|x||$, $|y|=|f(x)|$, $|y|=f(|x|)$, $|y|=|f|x||$, в которых присутствовал только внешний или только внутренний модуль, или одновременно внешний и внутренний модуль. Однако, на практике часто встречаются тригонометрические функции, содержащие знак модуля, но не относящиеся ни ко одному из вышеперечисленных видов. Возникает вопрос: как строить графики таких функций? Процесс построения индивидуален для каждого примера в отдельности.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Построить график функции $y=\sin x+|\sin x|$.

Представим функцию $y=\sin x+|\sin x|$ в виде $y=y_1+y_2$, где $y_1=\sin x$, $y_2=|\sin x|$.

А теперь построим графики каждой из этих функций.

Складывая ординаты y_1 и y_2 в соответствующих точках, получим итоговый график функции $y=y_1+y_2=\sin x+|\sin x|$, который изображен на Рис. 1.

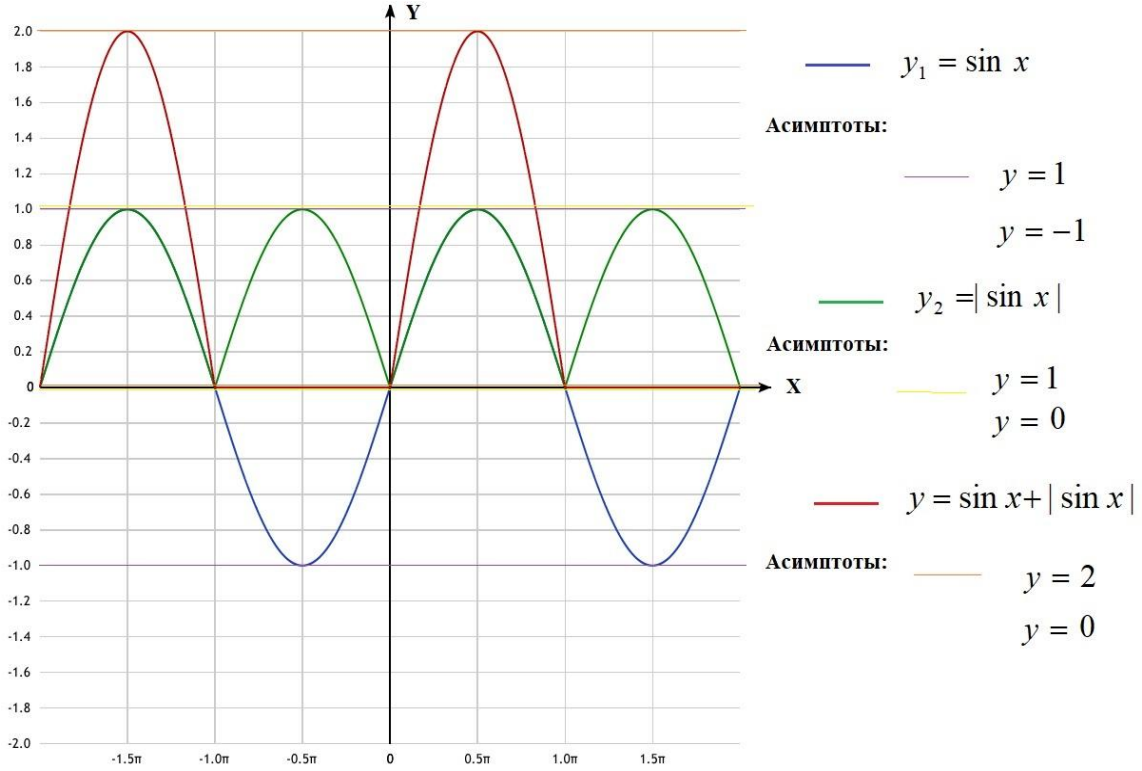


Рис. 1. Графики функций $y_1 = \sin x$, $y_2 = |\sin x|$, $y = \sin x + |\sin x|$

Замечание: отметим, что итоговый график суммы функций $y_1 = \sin x$, $y_2 = |\sin x|$ получился следующим образом.

На промежутках $[\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ – «волна» первого графика функции, расположена ниже оси Ox, а второго – выше оси Ox. Обе «волны» одинаковые. Именно поэтому они компенсируют друг друга и образуются участки, на которых функция обращается в тождественный нуль.

На промежутках $[2\pi k, 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ обе «волны» расположены выше оси Ox. Следовательно, при сложении их получается новая «волна» с удвоенной амплитудой колебаний.

Пример 2. Построить график функции $y = \sin x|\cos x| + \cos x|\sin x|$.

В этом примере лучше раскрыть оба модуля, то есть рассмотреть четыре случая:

1 случай: $\cos x \geq 0$, $\sin x \geq 0$.

Оба модуля раскрываются со знаком «плюс». В итоге имеем:

$$y = \sin x|\cos x| + \cos x|\sin x| = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x.$$

Пользуясь тригонометрической формулой двойного угла, получаем:

$$y = \sin 2x.$$

2 случай: $\cos x < 0$, $\sin x < 0$.

Оба модуля раскрываются со знаком «минус». В итоге имеем:

$$y = \sin x|\cos x| + \cos x|\sin x| = -\sin x\cos x - \cos x\sin x = -2\sin x\cos x = -\sin 2x.$$

3 случай: $\cos x < 0$, $\sin x \geq 0$.

Первый модуль раскрывается со знаком «минус», а второй – со знаком «плюс». В итоге имеем:

$$y = \sin x|\cos x| + \cos x|\sin x| = -\sin x\cos x + \cos x\sin x = 0.$$

4 случай: $\cos x \geq 0$, $\sin x < 0$.

Первый модуль раскрывается со знаком «плюс», а второй – со знаком «минус». В итоге имеем:

$$y = \sin x\,|\cos x| + \cos x\,|\sin x| = \sin x \cos x - \cos x \sin x = 0 .$$

Объединяя все четыре случая, получаем кусочную функцию вида:

$$y = \sin x\,|\cos x| + \cos x\,|\sin x| = \begin{cases} \sin 2x, \cos x \geq 0, \sin x \geq 0, \\ -\sin 2x, \cos x < 0, \sin x < 0, \\ 0, \cos < 0, \sin x \geq 0, \\ 0, \cos \geq 0, \sin < 0. \end{cases} = \begin{cases} \sin 2x, \left[2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], \\ -\sin 2x, \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], \\ 0, \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right], \\ 0, \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k\right]. \end{cases}$$

Строим теперь график полученной кусочной функции.

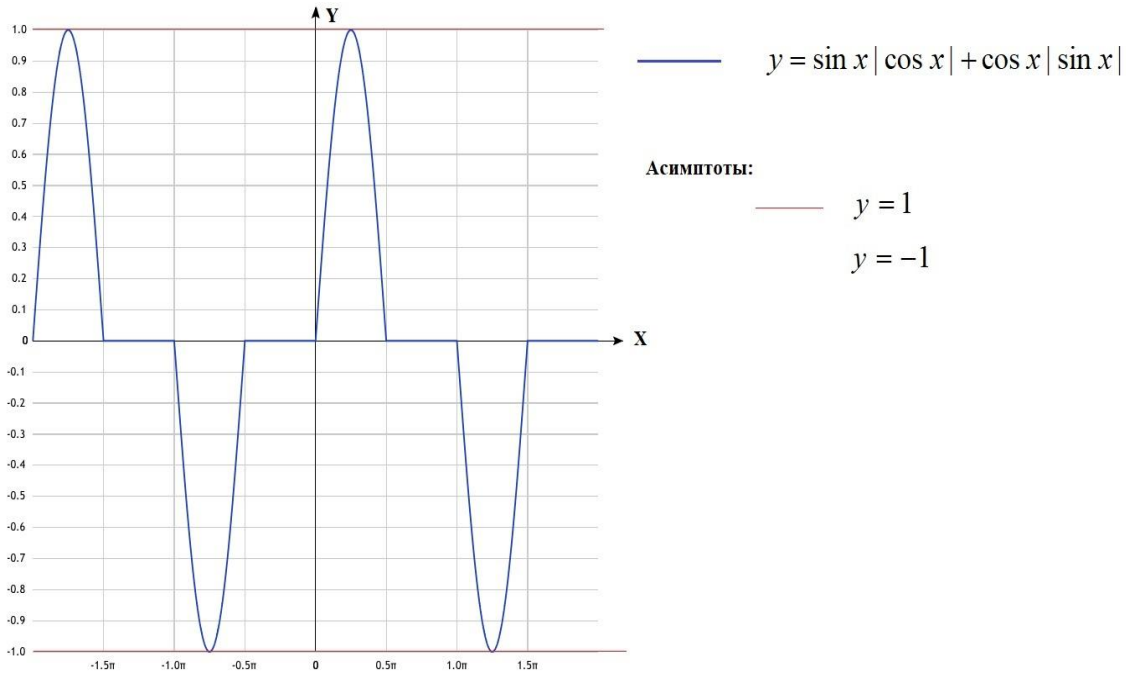


Рис. 2. График функции $y = \sin x\,|\cos x| + \cos x\,|\sin x|$.

Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x$.

Преобразуем аналитический вид функции $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x$, пользуясь основным тригонометрическим тождеством:

$$y = \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = |\cos x| + \cos x .$$

Теперь остается только построить график функции $y = |\cos x| + \cos x$. При построении графика данной функции следует воспользоваться тем же методом, что и в примере 1. Итак, в начале строим графики функций $y_1 = \cos x$, $y_2 = |\cos x|$. Складывая ординаты графиков функций y_1, y_2 в соответствующих точках, получаем итоговый график $y = y_1 + y_2 = |\cos x| + \cos x$, который изображен на Рис. 3.

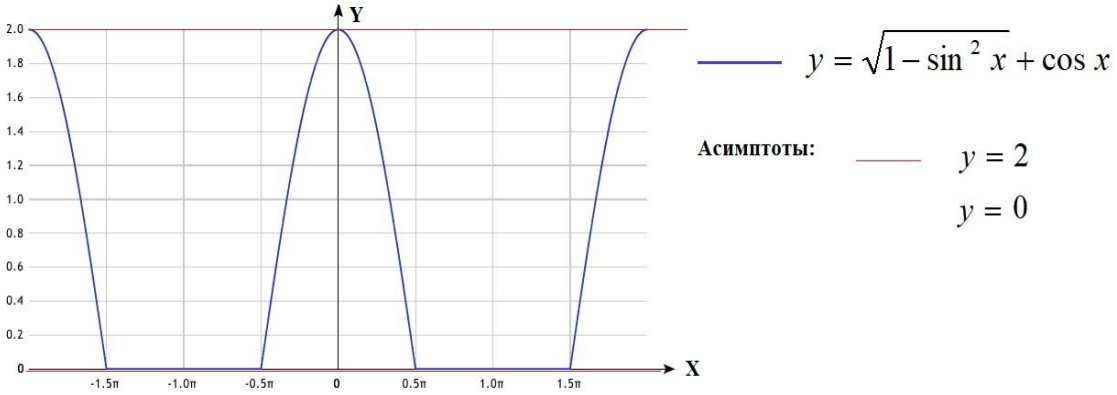


Рис. 3. График функции $y = \sqrt{1-\sin^2 x} + \cos x$.

Замечание: отметим, что итоговый график суммы функций $y_1 = \cos x$, $y_2 = |\cos x|$ получился следующим образом.

На промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$ две «положительные волны» накладываются друг на друга (одна описывает график функции $y_1 = \cos x$, а вторая – график функции $y_2 = |\cos x|$). В итоге получается новая «волна» с удвоенной амплитудой.

На промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ складываются две «волны»: одна «положительная» от графика функции $y_2 = |\cos x|$, а другая – «отрицательная» от графика функции $y_1 = \cos x$. «Положительная» и «отрицательная» волны на одном промежутке компенсируют друг друга. В итоге получаем, что на указанном промежутке функция y тождественно равна нулю.

Пример 4. Построить график функции $y = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$.

Преобразуем аналитический вид исходной функции, пользуясь основным тригонометрическим тождеством. В итоге получаем $y = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x}$.

Для построения графика этой функции следует использовать тот же метод, что и в примере 2. Рассмотрим два случая:

1 случай: $\sin x \geq 0$.

Модуль раскрывается со знаком «плюс» и получаем функцию $y = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$.

2 случай: $\sin x < 0$.

Модуль раскрывается со знаком «минус» и получаем функцию $y = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$.

Объединяя оба случая, получаем кусочную функцию вида:

$$y = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x} = \begin{cases} tgx, x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k), \\ -tgx, x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k), \end{cases} k \in Z .$$

Далее, строим график полученной кусочной функции.

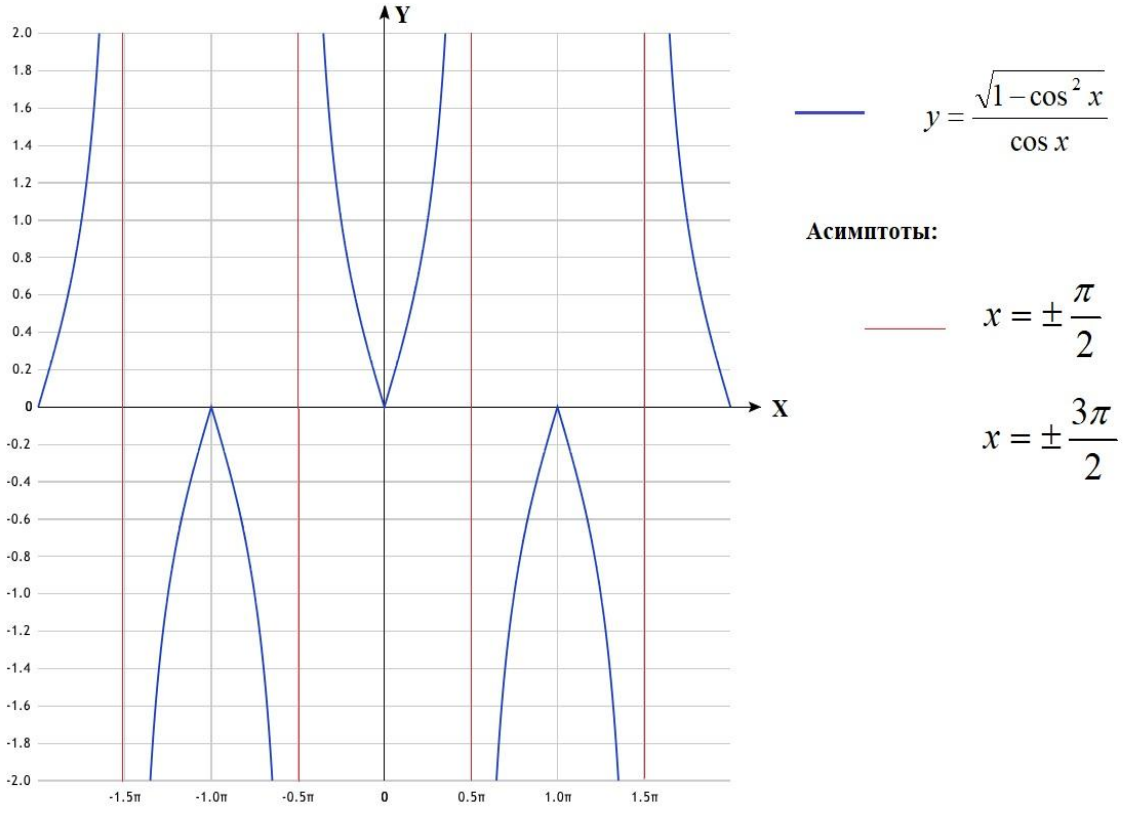


Рис. 4. График функции $y = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$.

Заключение

Отметим, что данная работа будет полезна студентам первого курса МГТУ им. Н.Э. Баумана практически всех специальностей при выполнении первого контрольного домашнего задания по дисциплине «Математический анализ». Кроме того, на занятиях будет интересно рассмотреть графики тригонометрических функций, имеющих нестандартный вид и визуально проанализировать поведение функции.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э.: Функции и графики (основные приемы). – 10-е, стереотипное, – М: МЦНМО, 2019. – 120 с.
2. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ Астрель, 2021. – 509 с.
3. Генденштейн Л. Э., Ершова А. П., Ершова А. С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей. - М.: Илекса, 2024, 192 с.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2021. – 616 с.
5. Интернет-ресурс. – URL: https://www.geeksforgeeks.org/plotting-functions-in-gnuplot/
6. Ахметова Ф. Х., Буякевич А. Е. Исследование некоторых вопросов поведения функций и построение графиков с привлечением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – No V9. – С. 77-87. – URL: http://e-koncept.ru/2017/171024.htm
7. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Построение графиков тригонометрических функций с помощью линейных преобразований // Modern European Researches. - Salzburg, 2021.–Т. 1. No 3. – P. 5-17. – URL: https://doaj.net/uploads/issue/issue_42.pdf
8. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внешнего модуля // Modern European Researches. - Salzburg, 2022. – Т. 1. No3. - P. 17-25. – URL: https://doaj.net/uploads/issue/issue_47.pdf

9. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методы построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак внутреннего модуля // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. – Т. 1. No1. – P. 18-28. – URL: https://doaj.net/uploads/issue/issue_53.pdf
10. Ахметова Ф. Х., Головина А. М., Власов П. А. Методика преподавания построения графиков тригонометрических функций, содержащих знак модуля как внешнего, так и внутреннего // Modern European Researches. - Salzburg, 2024. - Т. 1. No1. - P. 5-11. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=65473069
11. Ахметова Ф. Х., Головина А. М. Методика преподавания построения графиков многозначных тригонометрических функций // Modern European Researches. - Salzburg, 2025. - Т. 1. No1. - P. 12-18. – DOI: 10.24412/2311-8806-2025-1-1-12

***Faniya Kh. Akhmetova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
dobrich2@mail.ru
***Anastasiya M. Golovina*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nastya_gm@mail.ru
***Olga Yu. Chigiryova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
mkfn12@yandex.ru

Methods of teaching the construction of graphs of trigonometric functions that have a non-standard form

Abstract. Modern approaches to plotting functions include the use of specialized methods, the use of digital tools, and the solution of problems taking into account the specific features of functions. Of course, the use of software tools can increase the speed of solving a given problem and make the researcher's work easier. However, it is equally important and beneficial to develop students' geometric thinking and spatial imagination when they independently plot functions. The purpose of this work is to demonstrate how to quickly plot a function using knowledge of basic linear transformations, the properties of the modulus, and the properties of even and odd trigonometric functions. Within the framework of the task, the work considers practical techniques for plotting trigonometric functions that have a non-standard form. The content of the article will be relevant for teachers and junior students when studying the discipline "Mathematical Analysis".

Keywords: trigonometric functions; graphs of functions that have a non-standard form; linear transformations; module.

.

ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД ТОЖДЕСТВ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Аннотация

Актуальность рассматриваемой методической задачи обусловлена тем, что математическая логика занимает важное место в подготовке специалистов в области программных технологий, разработчиков баз данных и систем искусственного интеллекта. Необходимо поэтому совершенствовать методику преподавания разных разделов математической логики Цель предлагаемой статьи – рассмотреть логический вывод тождеств (аксиом) булевой алгебры. Главный результат состоит в построении в рамках определенной аксиоматики исчисления высказываний формальных доказательств тождеств булевой алгебры.

Ключевые слова

математическая логика, исчисление высказываний, формальные теории, булевы алгебры, методические проблемы

АВТОР

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-12-23

Введение

Данная статья является продолжением публикаций А.И. Белоусова [1], [2], А.И. Белоусова и Н.В. Безверхнего [3], а также А.И. Белоусова и П.А. Власова [4] по методике изложения разделов курса логики и теории алгоритмов и посвящена рассмотрению выводов (формальных доказательств) основных тождеств (аксиом) булевой алгебры в рамках одной из аксиоматик исчисления высказываний. Точнее говоря, речь идет о логическом выводе тождеств той модели теории булевых алгебр, которая представляет алгебру высказываний.

Известно, что математическая логика строилась, в частности, как инструмент обоснования аксиом булевой алгебры, которые в рамках самой алгебры вводились по определению.

Метаматематика алгебры – ключевая проблема на стыке алгебры и логики. Достаточно упомянуть книгу А. Робинсона [5]. Но в этой книге рассмотрено обоснование алгебры в свете теории моделей и исчисления предикатов. Настоящая статья посвящена другому аспекту проблемы: выводу основных тождеств (аксиом) булевой алгебры в рамках формальной теории исчисления высказываний.

Среди различных аксиоматик исчисления высказываний можно выделить систему, рассмотренную в книге Д. Гильберта и В. Аккермана [6]. Эта система наиболее последовательно избегает ссылок на алгебру, исходит из простых чисто логических предпосылок, и тождества булевой алгебры получаются в результате написания формальных выводов логической теории, зачастую весьма сложных. Подробный анализ этой аксиоматики дан в статье А.И. Белоусова и П.А. Власова [7]

В предлагаемой статье формальные доказательства даны в другой, технически более удобной, аксиоматике, рассмотренной в книге Э. Мендельсона [8], а также в статье А.И. Белоусова [9]. В указанной выше статье А.И. Белоусова и П.А. Власова [10] доказывается, что аксиомы этой формальной теории могут быть доказаны как теоремы в системе Гильберта и Аккермана. Далее эта теория называется теорией L.

Для некоторых тождеств даются разные варианты выводов в зависимости от ограничений, накладываемых на использование тех или иных инструментов.

Новизна рассматриваемого методического подхода к изучению некоторых разделов математической логики состоит в подробном анализе разных вариантов формального доказательства основных тождеств булевой алгебры, что должно способствовать приобретению студентами навыков решения логических задач при тех или иных ограничениях. Причем, этим вопросам в учебной литературе не уделяется должного внимания. Так в недавно опубликованных работах Е.А. Киреевой [11] и А.Г. Пинуса [12] эти вопросы никак не затрагиваются. Одна из целей настоящей статьи – восполнить этот пробел.

Методология и результаты исследования

Рассматриваемая в статье методика основана на известных из перечисленных источников концепциях изложения математической логики с учетом особенностей аудитории, в которой читается курс.

Далее рассматриваются основные рубрики, по которым раскладывается теоретический материал, включая полученные результаты.

Теория L

В книге Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» [13] (в сети доступно последнее издание на английском языке (Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic [14]) исчисление высказываний аксиоматизируется следующим образом.

Три схемы аксиомы:

(1) $(A \to (B \to A))$,

(2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$,

(3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

Правило вывода – modus ponens.

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

(Далее это правило обозначается MP.)

Определение связок дизъюнкции и конъюнкции (как способов сокращения записи формул):

$$A \vee B = \neg A \to B; A \& B = \neg(A \to \neg B).$$

Заметим, что всюду в дальнейшем обычный знак равенства понимается как «имеет место по определению». То есть внутри шага вывода можно раскрывать дизъюнкцию и конъюнкцию по определению, или, наоборот, «свертывать» соответствующие формулы в дизъюнкцию или конъюнкцию.

На основе двух первых схем может быть доказана простая, но важная объектная теорема:

$$\vdash (A \to A)$$

Затем после доказательства теоремы дедукции, которая также может быть доказана на основе первых двух схем и записанной выше объектной теоремы,

доказываются следующие секвенции (под этим термином в данном контексте понимаются любые утверждения о выводимости в объектной теории):

1) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
2) $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
3) $\vdash \neg\neg A \to A$
4) $\vdash A \to \neg\neg A$
5) $\vdash A \to (\neg A \to B)$
6) $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
7) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
8) $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
9) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

Следует заметить, что две первые секвенции доказываются на основе только двух первых схем. Каждой из этих секвенций сопоставляется дополнительное правило вывода, и эти правила можно использовать наряду с основным (MP):

Правило R1: $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$

Правило R2: $\dfrac{A \to (B \to C), B}{A \to C}$

Правило R3: $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

Важно: правилом R3 можно пользоваться только для снятия *внешнего* двойного отрицания. Применять его для снятия двойного отрицания с некоторой подформулы нельзя.

Правило R4: $\dfrac{A}{\neg\neg A}$

Опять-таки навесить двойное отрицание согласно этому правило можно только как внешнее.

Правило R5: $\dfrac{A, \neg A}{B}$

Правило R6: $\dfrac{\neg B \to \neg A}{A \to B}$

(правило контрапозиции)

Правило R7: $\dfrac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$

(правило обратной контрапозиции)

Правило R8: $\dfrac{A, \neg B}{\neg(A \to B)}$

Правило R9: $\dfrac{A \to B, \neg A \to B}{B}$

Кроме этого, доказываются элементарные свойства дизъюнкции и конъюнкции:

1) Свойства дизъюнкции:

1.1) $A \vdash A \vee B$, $B \vdash A \vee B$ (из любого члена дизъюнкции выводится вся дизъюнкция);

1.2) $A \vee B \vdash B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции).

2) Свойства конъюнкции:

2.1) $A \& B \vdash A, B$ (каждый аргумент конъюнкции выводим из всей конъюнкции)

2.2) $A, B \vdash A \& B$ (из обоих аргументов конъюнкции выводится вся конъюнкция)

2.3) $A \& B \vdash B \& A$ (коммутативность конъюнкции).

Отсюда легко получить соответствующие правила вывода.

Можно также доказать эквивалентности, выражающие законы де Моргана в булевых алгебрах:

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B; \neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Далее рассматриваются варианты выводов, в которых допускается применение правил, основанных на свойствах дизъюнкции и конъюнкции, и законах де Моргана, так и варианты, где такое использование запрещено. Смысл таких запретов – максимально устранить ссылки на алгебру, коль скоро ставится задача логического обоснования ее тождеств. С методической точки зрения введение этих запретов преследует цель научить студентов решать задачи в условиях жестких ограничений.

Приступаем к рассмотрению логических выводов (формальных доказательств в теории L) тождеств булевой алгебры. Каждое такое тождество записывается в виде эквивалентности двух формул, и эта эквивалентность доказывается стандартно: доказывается обоюдная выводимость двух формул.

Ассоциативность дизъюнкции

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

Слева направо:

1. $A \vee (B \vee C) = \neg A \to (\neg B \to C)$ - гипотеза
2. $\neg(A \vee B)$ - гипотеза
3. $\neg A \& \neg B$ - закон де Моргана, (2)
4. $\neg A, \neg B$ - свойства конъюнкции, (3)
5. C - дважды MP, (1) и (4).

Справа налево:

1. $(A \vee B) \vee C = \neg(\neg A \to B) \to C$ - гипотеза
2. $\neg A$ - гипотеза
3. $\neg B$ - гипотеза
4. $\neg(\neg A \to B)$ - R8, (2) и (3)
5. C - MP, (1) и (4)

Заметим, что вывод справа налево построен без использования законов де Моргана, хотя можно было «сшить» конъюнкцию отрицаний из 2-го и 3-го шагов и заменить ее на отрицание соответствующей дизъюнкции (4 шаг).

Вывод слева направо тоже может быть проведен без использования законов де Моргана.

1. $A \vee (B \vee C) = \neg A \to (\neg B \to C)$ - гипотеза
2. $\neg(A \vee B)$ - гипотеза

3. $A \to (A \vee B)$ - свойства дизъюнкции (или, что-то же, секвенция 5)
4. $\neg(A \vee B) \to \neg A$ - R7, (3)
5. $\neg A$ - MP, (2) и (4)
6. $\neg B \to C$ - MP, (1) и (5)
7. $B \to (A \vee B)$ - схема (1) (или свойства дизъюнкции)
8. $\neg(A \vee B) \to \neg B$ - R7, (7)
9. $\neg B$ - MP, (2) и (8)
10. C - MP, (6) и (9).

Ассоциативность конъюнкции

$A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$

С использованием правил, основанных на свойствах конъюнкции, доказательство тривиально.
Рассмотрим поэтому доказательство без использования указанных правил.
Раскроем определение конъюнкции:
$\neg(A \to \neg\neg(B \to \neg C)) \equiv \neg(\neg(A \to \neg B) \to \neg C)$
Снимая внешнее отрицание, сведем задачу к доказательству эквивалентности
$A \to \neg\neg(B \to \neg C) \equiv \neg(A \to \neg B) \to \neg C$.
Слева направо:
1. $A \to \neg\neg(B \to \neg C)$ - гипотеза
2. $\neg(A \to \neg B)$ - гипотеза
3. $\neg A \to (A \to \neg B)$ - секвенция (5)
4. $\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A$ - R7, (3)
5. $\neg\neg A$ - MP, (2) и (4)
6. A - R3, (5)
7. $\neg\neg(B \to \neg C)$ - MP, (1) и (6)
8. $B \to \neg C$ - R3, (7)
9. $\neg B \to (A \to \neg B)$ - схема (1) при $A := \neg B, B := A$
10. $\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B$ - R7, (9)
11. $\neg\neg B$ - MP, (2) и (10)
12. B - R3, (11)
13. $\neg C$ - MP, (8) и (12).

Итак, $A \to \neg\neg(B \to \neg C), \neg(A \to \neg B) \vdash \neg C$.
Применяя теорему дедукции, получим утверждение о выводимости правой части из левой.
Справа налево:
1. $\neg(A \to \neg B) \to \neg C$ - гипотеза
2. A - гипотеза
3. B - гипотеза (временно «забываем» про двойное отрицание)
4. $\neg\neg B$ - R4, (3)
5. $\neg(A \to \neg B)$ - R8, (2) и (4)
6. $\neg C$ - MP, (1) и (5).

Мы доказали секвенцию $\neg(A \to \neg B) \to \neg C$, A, $B \vdash \neg C$, то есть

$\neg(A \to \neg B) \to \neg C$, $A \vdash B \to \neg C$, но $B \to \neg C \vdash \neg\neg(B \to \neg C)$, откуда $\neg(A \to \neg B) \to \neg C \vdash A \to \neg\neg(B \to \neg C)$, что и требовалось.

Другой вывод справа налево:

1. $\neg(A \to \neg B) \to \neg C$ - гипотеза
2. A - гипотеза
3. $C \to (A \to \neg B)$ - R6, (1)
4. $C \to \neg B$ - R2, (2) и (3)
5. $\neg\neg B \to \neg C$ - R7, (4)
6. $B \to \neg\neg B$ - секв. (4)
7. $B \to \neg C$ - R1, (6) и (5)
8. $\neg\neg(B \to \neg C)$ - R4, (7).

Остается применить теорему дедукции.

Коммутативность дизъюнкции

1. $\neg A \to B = A \vee B$ - гипотеза
2. $\neg B \to \neg\neg A$ - правило R7 к шагу 1
3. $\neg\neg A \to A$ - секвенция 3
4. $\neg B \to A = B \vee A$ - R1 (секвенция 1), 2 и 3

Что и требовалось доказать.

Коммутативность конъюнкции

С использованием правил, основанных на свойствах конъюнкции, доказательство тривиально.

Без них:

1. $A \to \neg B$ - гипотеза
2. $\neg\neg B \to \neg A$ - R7, (1)
3. $B \to \neg\neg B$ - секвенция 4
4. $B \to \neg A$ - R1, (3) и (2)

Итак, $A \to \neg B \vdash B \to \neg A$.

Обратную выводимость получим, просто меняя ролями буквы в написанной выше секвенции.

Следовательно, мы доказали эквивалентность $(A \to \neg B) \equiv (B \to \neg A)$, откуда $\neg(A \to \neg B) = A \,\&\, B \equiv \neg(B \to \neg A) = B \,\&\, A$.

Идемпотентность дизъюнкции

$A \vee A \equiv A$

Имеем: 1. $A \vee A = \neg A \to A$ - гипотеза,

2. $(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to A)$ - схема (3) при $B := A$,
3. $\neg A \to \neg A$ - теорема,
4. $(\neg A \to \neg A) \to A$ - MP, (2)и (3),
5. A - MP. (1) и (4).

Итак, $A \vee A \vdash A$. То, что $A \vdash A \vee A$, следует сразу из первой схемы аксиомы: $A \to (\neg A \to A)$

Идемпотентность конъюнкции

Достаточно доказать, что

$A \vdash A \& A$

1. A - гипотеза
2. $\neg\neg A$ - R4, (1)
3. $\neg(A \to \neg A) = A \& A$ - R8, (1) и (2)

Взаимная дистрибутивность

а) $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$

(дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции)

Слева направо:

1. $A \& (B \vee C)$ - гипотеза
2. $\neg(A \& B)$ - гипотеза
3. $\neg A \vee \neg B = \neg\neg A \to \neg B$ - закон де Моргана
4. A - свойства конъюнкции, (1)
5. $\neg\neg A$ - R4, (4)
6. $\neg B$ - MP, (3) и (5)
7. $B \vee C = \neg B \to C$ - свойства конъюнкции, (1)
8. C - MP, (6) и (7)
9. $A \& C$ - свойства конъюнкции, (4) и (8).

Замечание. Можно обойтись и без законов де Моргана:

1. $A \& (B \vee C)$ - гипотеза
2. $\neg(A \& B) = \neg\neg(A \to \neg B)$ - гипотеза
3. $A \to \neg B$ - R3, (2)
4. A - свойства конъюнкции, (1)
5. $\neg B$ - MP, (3) и (5)
6. $B \vee C = \neg B \to C$ - свойства конъюнкции, (1)
7. C - MP, (6) и (7)
8. $A \& C$ - свойства конъюнкции, (4) и (7).

Справа налево:

1. $(A \& B) \vee (A \& C) = \neg(A \& B) \to (A \& C)$ - гипотеза
2. $(A \& C) \to A, C$ - свойства конъюнкции;
3. $\neg(A \& B) \to A, B$ - R1, (1) и (2);
4. $(A \& B) \to A$ - свойства конъюнкции;
5. A - R9, (3) и (4);
6. $\neg B \to \neg(A \& B)$ - свойства конъюнкции;
7. $\neg B \to (A \& C)$ - R1, (6) и (1);
8. $\neg B \to C$ - R1, (7) и (2);
9. $A \& (\neg B \to C) = A \& (B \vee C)$ - свойства конъюнкции, (5) и (8).

b) $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$

(дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции)

Вывод правой части из левой:

$A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$

1. $A \vee (B \& C) = \neg A \to (B \& C)$ - гипотеза
2. $(B \& C) \to C$ - свойства конъюнкции
3. $\neg A \to C$ - R1, (1) и (2)
4. $(B \& C) \to B$ - свойства конъюнкции,
5. $\neg A \to B$ - R1, (1) и (3)
6. $(\neg A \to B) \& (\neg A \to C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$ - свойства конъюнкции (3) и (5).

Вывод левой части из правой:

$(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee (B \& C)$

1. $(A \vee B) \& (A \vee C)$ - гипотеза,
2. $\neg A$ - гипотеза,
3. $A \vee B = \neg A \to B$ - свойства конъюнкции, (1)
4. B - MP, (2) и (3)
5. $A \vee C = \neg A \to C$ - свойства конъюнкции, (1)
6. C - MP, (2) и (5)
7. $B \& C$ - свойства конъюнкции (4) и (6).

Можно ввести запрет на использование свойств конъюнкции (правил и соответствующих импликаций) Тогда эти свойства доказываются внутри вывода. Выводы дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции тогда должны быть записаны так:

$A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$

1. $A \vee (B \& C) = \neg A \to \neg(B \to \neg C)$ - гипотеза
2. $\neg B \to (B \to \neg C)$ - секв. (5a)
3. $\neg(B \to \neg C) \to \neg\neg B$ - R7, (2)
4. $\neg A \to \neg\neg B$ - R1, (1) и (3)
5. $\neg\neg B \to B$ - секв. (3)
6. $\neg A \to B = A \vee B$ - R1, (4) и (5)
7. $\neg C \to (B \to \neg C)$ - схема (1)
8. $\neg(B \to \neg C) \to \neg\neg C$ - R7, (7)
9. $\neg A \to \neg\neg C$ - R1, (1) и (8)
10. $\neg\neg C \to C$ - секв. (3)
11. $\neg A \to C = A \vee C$ - R1, (9) и (10)
12. $\neg\neg(A \vee C)$ - R4, (11)
13. $\neg((A \vee B) \to \neg(A \vee C)) = (A \vee B) \& (A \vee C)$ - R8, (6) и (12)

В обратную сторону:

1. $\neg((A \vee B) \to \neg(A \vee C)) = (A \vee B) \& (A \vee C)$ - гипотеза
2. $\neg(A \vee B) \to ((A \vee B) \to \neg(A \vee C))$ - секв. (5a)
3. $\neg((A \vee B) \to \neg(A \vee C)) \to \neg\neg(A \vee B)$ - R7, (2)
4. $\neg\neg(A \vee B)$ - MP, (1) и (3)
5. $A \vee B = \neg A \to B$ - R3, (4)

6. $\neg(A\vee C)\to((A\vee B)\to\neg(A\vee C))$ - схема (1)
7. $\neg((A\vee B)\to\neg(A\vee C))\to\neg\neg(A\vee C)$ - R7, (6)
8. $\neg\neg(A\vee C)$ - MP, (1) и (7)
9. $A\vee C=\neg A\to C$ - R3, (8)
10. $\neg A$ - гипотеза
11. B - MP, (5) и (10)
12. C - MP, (9) и (10)
13. $\neg\neg C$ - R4, (12)
14. $\neg(B\to\neg C)=B\,\&\,C$ - R8, (11) и (13)

Как видно, доказательство свойств конъюнкции встроено в общий вывод через использование схемы аксиомы (1), секвенции (5а) и правила R8. Тот же прием использован выше и при доказательстве свойств конъюнкции.

Тождества поглощения

Надо доказать эквивалентности
$A\equiv A\&(A\vee B)\equiv A\vee(A\&B)$.
Поскольку секвенции $A\&(A\vee B)\vdash A$ и $A\vdash A\vee(A\&B)$ очевидны, докажем
$A\vdash A\&(A\vee B)$ и $A\vee(A\&B)\vdash A$.
При выводе первой секвенции используем контрапозицию, то есть пишем:
1. $\neg(A\&(A\vee B))$ - гипотеза
2. $\neg A\vee\neg(A\vee B)$ - закон де Моргана, (1)
3. $(\neg\neg A\to\neg(A\vee B))\to((\neg\neg A\to(A\vee B))\to\neg A)$ - схема (3) при
$A:=A\vee B, B:=\neg A$
4. $(\neg\neg A\to(A\vee B))\to\neg A$ - MP, (2) и (3)
5. $\neg\neg A\to(A\vee B)=\neg\neg A\to(\neg A\to B)$ - секвенция (5)
6. $\neg A$ - MP, (4) и (5).
Еще один вывод (без использования свойств конъюнкции и законов де Моргана):
Доказываем
$A\vdash\neg(A\to\neg(A\vee B))$, что равносильно
$\neg\neg(A\to\neg(A\vee B))\vdash\neg A$.
1. $\neg\neg(A\to\neg(A\vee B))$ - гипотеза
2. $A\to\neg(A\vee B)$ - R3, (1)
3. $A\to(A\vee B)$ - свойство дизъюнкции
4. $\neg(A\vee B)\to\neg A$ - R7, (3)
5. $A\to\neg A$ - R1, (2) и (3)
6. $\neg\neg A\to A$ - секв. (3)
7. $\neg\neg A\to\neg A$ - R1, (6) и (5)
8. $(\neg\neg A\to\neg A)\to\neg A$ -теорема
9. $\neg A$ - MP, (7) и (8)
Вторая секвенция доказывается так:
1. $A\vee(A\&B)=\neg A\to(A\&B)$ - гипотеза
2. $(A\&B)\to A$ - свойства конъюнкции

3. $\neg A \to A = A \vee A$ - R1, (1) и (2)
4. $(A \vee A) \to A$ - теорема (идемпотентность дизъюнкции)
5. A - MP, (3) и (4).

Доказано.

Нейтральные элементы

Положим $T = A \vee \neg A, F = A \& \neg A$.

Легко доказать эквивалентность $T \equiv \neg F$,или, что равносильно, $\neg T \equiv F$.

Действительно,

1. $T = A \vee \neg A = \neg A \to \neg A$ - гипотеза
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A = \neg\neg A \vee \neg A$ - секвенция (3)
3. $\neg(\neg A \& A)$ - закон де Моргана, (2)
4. $(A \& \neg A) \to (\neg A \& A)$ - коммутативность конъюнкции
5. $\neg(\neg A \& A) \to \neg(A \& \neg A)$ - R7, (4)
6. $\neg(A \& \neg A) = \neg F$ - MP, (3) и (5).

В обратную сторону:

1. $\neg(A \& \neg A) = \neg F$ - гипотеза
2. $\neg A \vee \neg\neg A$ - закон де Моргана, (1)
3. $\neg\neg A \vee \neg A = \neg\neg\neg A \to \neg A$ - коммутативность дизъюнкции, (2)
4. $\neg A \to \neg\neg\neg A$ - секвенция (4)
5. $\neg A \to \neg A = A \vee \neg A = T$ - R1, (4) и (3)

Теперь докажем следующие эквивалентности:

$A \vee F \equiv A \& T \equiv A,$

$A \& F \equiv F; A \vee T \equiv T$

Для первой пары достаточно доказать секвенции:

a) $A \vee F \vdash A$ и b) $A \vdash A \& T$

(a)

1. $A \vee F = \neg A \to F$ - гипотеза
2. $\neg F \to \neg\neg A$ - R7, (1)
3. $T \to \neg F$ - теорема
4. $T \to \neg\neg A$ - R1, (3) и (2)
5. $T = A \vee \neg A$ - теорема (тавтология)
6. $\neg\neg A$ - MP, (4) и (5)
7. A - R3, (6)

(b) Используем контрапозицию

1. $\neg(A \& T)$ - гипотеза
2. $\neg A \vee \neg T = \neg\neg A \to \neg T$ - закон де Моргана, (1)
3. $\neg\neg T \to \neg\neg\neg A$ - R7, (2)
4. T - теорема
5. $\neg\neg T$ - R4, (4)
6. $\neg\neg\neg A$ - MP, (3) и (5)
7. $\neg A$ - R3, (6)

Вторая пара эквивалентностей. Здесь достаточно доказать секвенции

c) $F \vdash A \& F$ и d) $A \vee T \vdash T$

(c)

1. $F = A \& \neg A$ - гипотеза
2. A - свойства конъюнкции, (1)
3. $A \& F$ - свойства конъюнкции, (1) и (2)

(d)

$\neg T \equiv F \equiv \neg A \& F \equiv \neg(A \vee T)$

(можно и в виде вывода эту цепочку расписать).

Строгая дизъюнкция и эквивалентность

$A \oplus B \equiv \neg(A \sim B)$

Предполагается, что даны такие определения (способы «сокращения записи») указанных связок:

$A \oplus B = (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$,

$A \sim B = (A \to B) \& (B \to A)$.

Тогда надо доказать эквивалентность

$(A \& \neg B) \vee (\neg A \& B) \equiv \neg((A \to B) \& (B \to A))$.

Или, с учетом законов Де Моргана:

$(A \& \neg B) \vee (\neg A \& B) \equiv \neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)$.

Докажем следующую секвенцию:

$\Phi \to \Theta, \Psi \to \mathrm{H} \vdash (\Phi \vee \Psi) \to (\Theta \vee \mathrm{H})$.

1. $\Phi \to \Theta, \Psi \to \mathrm{H}$ - гипотезы
2. $(\Phi \vee \Psi) \to (\Theta \vee \Psi)$ - свойства дизъюнкции, (1, гипотеза 1)
3. $\Phi \vee \Psi$ - гипотеза
4. $\Theta \vee \Psi = \neg\Theta \to \Psi$ - MP, (2) и (3)
5. $\neg\Theta \to \mathrm{H} = \Theta \vee \mathrm{H}$ - R1, (4) и (1, гипотеза 2)

Применив один раз теорему дедукции, получим доказываемое.

Если к тому же $\Phi \equiv \Psi, \Theta \equiv \mathrm{H}$, то $(\Phi \vee \Psi) \equiv (\Theta \vee \mathrm{H})$, что и доказывает записанную выше эквивалентность (в силу известных эквивалентностей $(A \& \neg B) \equiv \neg(A \to B), (\neg A \& B) \equiv \neg(B \to A)$).

Заключение

В статье подробно рассмотрена методика изложения одного из разделов математической логики, а именно построение формальных доказательств тождеств булевой алгебры (точнее, одной из моделей теории булевых алгебр) в рамках определенной аксиоматики исчисления высказываний.

Методическая новизна состоит в подробном анализе разных вариантов формального вывода в условиях варьируемых ограничений на используемые инструменты. Кроме того, представляется полезным и интересным показать учащимся, как система аксиом булевой алгебры может быть выведена из простых и прозрачных логических оснований.

Результаты, изложенные в статье, могут быть полезны как студентам, проходящим курс математической логики, так и ведущим этот курс преподавателям при разработке ими планов учебных занятий.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам // Modern European Researches. - 2021. - № 2-1. - С. 42-58.

2. Безверхний Н.В., Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам: основы исчисления предикатов // Modern European Researches. – 2022. – № 1-2. – С. 46-54.
3. Белоусов А.И. Некоторые методические аспекты изложения метода резолюций для студентов-программистов // Modern European Researches 2024. – № 1-1. – С. 23-37.
4. Белоусов А.И., Власов П.А. Сравнение различных аксиоматик исчисления высказываний в курсе математической логики для студентов-программистов// Modern European Researches 2023. – № 3-1. – С. 24-40.
5. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М. Наука, 1967. – 376 с.
6. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. – М. Гос. изд. иностранной лит., 1947. 307 с.
7. Белоусов А.И., Власов П.А., Сравнение различных аксиоматик исчисления высказываний в курсе математической логики для студентов-программистов.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. - 320 с.
9. Белоусов А.И. О некоторых методических вопросах преподавания математической логики студентам-программистам.
10. Белоусов А.И., Власов П.А., Сравнение различных аксиоматик исчисления высказываний в курсе математической логики для студентов-программистов.
11. Киреева Е.А. Особенности преподавая математической логики студентам технических вузов // Дневник науки. – 2024. – №10. – С. 1-7.
12. Пинус, А. Г. Булевы алгебры и булевы функции. Дополнительные главы дискретной математики / А. Г. Пинус. Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. – 83 с.
13. Мендельсон Э. Введение в математическую логику.
14. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. 6 ed. N.Y., CRC Perss. – 2015. – 499 pp.

***Alexey I. Belousov*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
al_belous@bk.ru

Logical derivation of identities of Boolean algebra in the course of mathematical logic

Abstract. The relevance of the methodological problem under consideration is due to the fact that mathematical logic occupies an important place in the training of specialists in the field of software technologies, database developers and artificial intelligence systems. Therefore, it is necessary to improve the methodology of teaching different sections of mathematical logic. The purpose of the proposed article is to consider the logical derivation of identities (axioms) of Boolean algebra. The main result consists in constructing formal proofs of identities of Boolean algebra within the framework of a certain axiomatics of propositional calculus.

Keywords: mathematical logic, propositional calculus, formal theories, Boolean algebras, methodological problems

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Аннотация

Статья будет полезна для студентов технических вузов, изучающих такие дисциплины как «Математическая физика» и «Дифференциальные уравнения в частных производных», а также педагогам, ведущим практические занятия по вышеуказанным предметам. Самым распространенный методом решение различных задач на этих курсах является метод Фурье (метод разделения переменных). Этот метод традиционно очень тяжело осваивается студентами, большие сложности возникают при решении задач в пространстве. В работе рассмотрен детальный, структурированный алгоритм метода Фурье для нескольких пространственных переменных, который позволит быстро и эффективно приходить к решению. В работе рассмотрен структурный алгоритм для решения задачи свободного колебание прямоугольной мембраны с закрепленными концами, приведен пример.

Ключевые слова

метод Фурье, колебание прямоугольной мембраны, дифференциальное уравнения в частных производных гиперболического типа в пространстве

АВТОР

Береснева Евгения Викторовна,
кандидат технических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
доцент ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт»,
г. Москва
jane_gal@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-24-31

Введение

Уравнения гиперболического типа с частными производными используются при математическом описании процессов, имеющих связь с различными колебаниями. В этой работе рассмотрим самый простой случай подобных задач с несколькими пространственными переменными: колебание прямоугольной мембраны без учета внешних сил, что математически интерпретируется следующим видом уравнения: $U_{tt} - a^2 \cdot (U_{xx} + U_{yy}) = 0$, при этом концы мембраны зафиксированы. Такое состояние описывается условиями: $U(0,y,t) = 0$, $U(a,y,t) = 0$, $U(x,0,t) = 0$, $U(x,b,t) = 0$. Начальными состояние определяют две функции, одна из которых определяет начальное положение мембраны $U(x,y,0) = f(x,y)$, а вторая из них начальное распределение скоростей: $U_t(x,y,0) = g(x,y)$.

Главным способом поиска решения сформулированной задачи является метод Фурье, который вызывает сложности у студентов при освоении, особенно самостоятельно. Продолжаем серию статей, посвященных методике преподавания этого метода [1]. Существует много учебников, таких авторов, как А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [2], Л.К. Мартинсон, Ю.Н. Малов [3], различные учебные и учебно-методических пособия, таких авторов, как В.С. Владимиров, В.В. Жаринов [4] и Т.Н. Михащенко [5] рассматривающий метод Фурье для множества типов задач. В этой

статье излагается методика преподавания метода Фурье, сформированная на алгоритме, который обеспечит студенту пошаговое решение поставленной задачи, что существенно минимизирует количество ошибок в вычислениях и облегчит освоение метода.

Методология и результаты исследования

С учетом поставленных условий, формулировка задачи выглядит следующим образом:

Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения на прямоугольнике:

$$U_{tt} - a^2 \cdot \left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0 \quad , \quad t \in [0, +\infty) \quad , \quad x \in [0, a],\ y \in [0, b]$$

при
$U(x, y, 0) = f(x, y)$
$U_t(x, y, 0) = g(x, y)$

и зафиксированных концах
$U(0, y, t) = 0$
$U(\alpha, y, t) = 0$
$U(x, 0, t) = 0$
$U(x, \beta, t) = 0.$

Алгоритм.

1. Находим вспомогательные решения $v(x, y, t)$ уравнения $U_{tt} - a^2 \cdot \left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0$ в виде $v(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$, причем $v(0, y, t) = v(\alpha, y, t) = v(x, 0, t) = v(x, \beta, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(\alpha) = 0$ и $Y(0) = Y(\beta) = 0$. Для этого подставляем $v(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y)T(t)$ в уравнение $U_{tt} - a^2 \cdot \left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0$ и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\overline{X}(x)}{X(x)} + \frac{\overline{Y}(y)}{Y(y)} = \frac{\overline{T}(t)}{a^2 T(t)} = const.$$

2. Поэтому функции $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $\overline{X}(x) - \delta \cdot X(x) = 0,$
$X(0) = X(\alpha) = 0$

б) $Y^{//}(y) - \mu \cdot Y(y) = 0$,
$Y(0) = Y(\beta) = 0$

с) $\overline{T}(t) - a^2(\delta + \mu) \cdot T(t) = 0$

3. Подробно рассмотрим решение задачи (а):

Выражение $\overline{\mathrm{X}}(x) - \delta \cdot \mathrm{X}(x) = 0$ определяет характеристическое тождество $z^2 - \delta = 0$, у которого можно найти два корня $z = \pm\sqrt{\delta}$. Общее решение выражения $\overline{\mathrm{X}}(x) - \delta \cdot \mathrm{X}(x) = 0$ в зависимости от знака δ может принять несколько видов:

$\delta > 0 \quad : \quad X(x) = C \cdot e^{\sqrt{\delta}x} + D \cdot e^{-\sqrt{\delta}x}$
$\delta = 0 \quad : \quad X(x) = C + D \cdot x$
$\delta < 0 \quad : \quad X(x) = C \cdot sin\sqrt{-\delta}x + D \cdot cos\sqrt{-\delta}x$е отыщем C и D, учитывая $X(O) = X(\alpha) = 0$.

Пусть $\delta > 0$
$X(0) = C \cdot e^{\sqrt{\delta}0} + D \cdot e^{-\sqrt{\delta}0} = C + D = 0 \rightarrow D = -C.$
$X(\alpha) = C \cdot e^{\sqrt{\delta}\alpha} + D \cdot e^{-\sqrt{\delta}\alpha} = C\left(e^{\sqrt{\delta}\alpha} - e^{-\sqrt{\delta}\alpha}\right) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow D = C = 0.$

Если $\delta > 0$ то существует только нулевой ответ выражения $\overline{X}(x) - \delta \cdot X(x) = O.$

Пусть $\delta = 0$
$X(O) = C + D \cdot 0 = C = 0$
$X(\alpha) = C + D \cdot \alpha = D \cdot \alpha = O \rightarrow D = 0$

Если $\delta = 0$ то можно найти единственный нулевой ответ выражения $\overline{X}(x) - \delta \cdot X(x) = O.$

Пусть $\delta < 0$
$X(O) = C \cdot sin\sqrt{-\delta}0 + D \cdot cos\sqrt{-\delta}0 = D = 0$
$X(\alpha) = C \cdot sin\sqrt{-\delta}\alpha + D \cdot cos\sqrt{-\delta}\alpha = C \cdot sin\sqrt{-\delta}\alpha = O \rightarrow sin\sqrt{-\delta}\alpha = 0 \rightarrow \sqrt{-\delta}\alpha = \pi n$
$$\rightarrow -\delta = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 \rightarrow \delta = -\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2$$
Ненулевые соотношения $X_n = C_n\, sin(\frac{\pi n}{\alpha}x),\ n \in N$, которые обзываются собственные функциями задачи (а), существующие только при $\delta_n = -(\frac{\pi n}{\alpha})^2,\ n \in N$, которые обзываются собственными значениями сформулированной задачи.

Таким образом решением задачи (а) является:

$$\delta_n = -(\frac{\pi n}{\alpha})^2, \quad X_n = C_n\, sin(\frac{\pi n}{\alpha}x), \quad n \in N$$

4. Аналогично необходимо провести решение задачи (б), в результате которого получатся следующее решение:

$$\mu_m = -(\frac{\pi m}{\beta})^2, \quad Y_m = B_m\, sin(\frac{\pi m}{\beta}y), \quad m \in N$$

5. Решаем задачу (с) для каждого собственного значения задачи (а) и (б), то есть при $\delta + \mu = \delta_n + \mu_m = -\pi^2\left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}\right)$. Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение при данных условиях выглядит следующим образом: $\overline{T}_{nm}(t) - a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}\right)T_{nm}(t) = 0$, общее решение этого уравнения ищется аналогично решению задачи (а) и выглядит следующим образом:
$$T_{nm} = \bar{A}_{nm}\cos(\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}}t) + \bar{B}_n\sin(\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}}t).$$
Итак, вспомогательные решения $v_{nm} = X_n \cdot Y_m \cdot T_{nm}$ имеют вид

$$v_{nm}(x,y,t)=C_{nm}(\bar{A}_{nm}\cos(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t)+\bar{B}_{nm}\sin(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t))\cdot\sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\cdot\sin(\frac{\pi m}{\beta}y)=$$

$$=(A_{nm}\cos(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t)+B_{nm}\sin(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t))\cdot\sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\cdot\sin(\frac{\pi m}{\beta}y)$$

Где $A_{nm}=A_{nm}\cdot C_{nm}$, $B_n=B_{nm}\cdot C_{nm}$ - постоянные, которые надо найти.

6. Решение задачи ищем в виде суммы всех собственных решений задачи (с):

$$U(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}v_{nm}(x,y,t)=$$

$$(A_{nm}\cos(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t)+B_{nm}\sin(a\pi\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t))\cdot\sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\cdot\sin(\frac{\pi m}{\beta}y)$$

Эта функция является решением уравнения $U_{tt}-a^2\cdot\left(U_{xx}+U_{yy}\right)=0$ и удовлетворяет граничным условиям при любых A_{nm} и B_{nm}, при которых ряд сходится и его можно дважды почленно дифференцировать.

7. Находим A_{nm} и B_{nm}, при которых $U(x,y,t)$ удовлетворяет начальным условиям. Полагая в найденном решении $t=0$ получаем

$$U(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\cdot\sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\sin(\frac{\pi m}{\beta}x)=f(x,y).$$

Отсюда $$A_{nm}=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta}f(x,y)\cdot sin(\frac{\pi nx}{\alpha})\cdot\sin(\frac{\pi my}{\beta})dxdy.$$

Дифференцируя найденное решение, получаем

$$\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}A_{nm}\sin(\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}t)+$$

$$+\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}B_{nm}\cos(\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}at))\times\sin(\frac{\pi nx}{\alpha})\cdot\sin(\frac{\pi my}{\beta})$$

Полагая $t=0$ и используя начальное условие, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}B_{nm}\cdot\sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\cdot\sin(\frac{\pi m}{\beta}y)=g(x,y).$$

$$B_{nm}=\frac{1}{\pi a\sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}}}\cdot\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta}g(x,y)\cdot sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\sin(\frac{\pi m}{\beta}y)dxdy.$$

8. Подставляя найденные коэффициенты в ряд, получаем искомое решение. Записываем ответ.

Пример.

Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения в прямоугольнике:

$U_{tt} - 4\cdot(U_{xx} + U_{yy}) = 0$, $t \in (0,\infty)$, $x \in (0,2)$, $y \in (0,1)$

при начальных условиях и граничных условиях

$U(x,y,0) = 0$ $U(0,y,t) = 0$ $U(x,0,t) = 0$

$U_t(x,y,0) = (2-x)(1-y)xy$ $U(2,y,t) = 0$ $U(x,1,t) = 0$

Решение.

1. Находим вспомогательные решения $v(x,y,t)$ уравнения $U_{tt} - 4\cdot\left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0$ в виде $v(x,y,t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t)$, причем $v(0,y,t) = v(2,y,t) = v(x,0,t) = v(x,1,t) = 0$, т.е. $X(0) = X(2) = 0$ и $Y(0) = Y(1) = 0$. Для этого подставляем $v(x,y,t) = X(x)\cdot Y(y)T(t)$ в уравнение $U_{tt} - 4\cdot\left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0$ и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X^{//}(x)}{X(x)} + \frac{Y^{//}(y)}{Y(y)} = \frac{T^{//}(t)}{4T(t)} = const.$$

2. Поэтому функции $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:
   а) $X^{//}(x) - \lambda\cdot X(x) = 0$,
   $X(0) = X(2) = 0$
   б) $Y^{//}(y) - \mu\cdot Y(y) = 0$,
   $Y(0) = Y(1) = 0$
   с) $T^{//}(t) - 4(\lambda+\mu)\cdot T(t) = 0$

3. Решаем задачу (а) и (б). Получаем

$$\lambda_n = -(\frac{\pi n}{2})^2 , \quad X_n = A_n \sin(\frac{\pi n}{2}x) , \quad n = 1,2,3...$$

$$\mu_m = -(\frac{\pi m}{1})^2 , \quad Y_m = B_m \sin(\pi m y) , \quad m = 1,2,3...$$

4. Решаем задачу (с). При $\lambda + \mu = \lambda_n + \mu_m = -\pi^2\left(\frac{n^2}{4} + m^2\right)$ имеем $\overline{T}_{nm}(t) - 4\pi^2\left(\frac{n^2}{4} + m^2\right)T_{nm}(t) = 0$, общее решение этого уравнения:

$$T_{nm} = \bar{A}_{nm}\cos(2\pi\sqrt{\frac{n^2}{4} + m^2}\,t) + \bar{B}_n \sin(2\pi\sqrt{\frac{n^2}{4} + m^2}\,t) .$$

5. Итак, вспомогательные решения $v_{nm} = X_n\cdot Y_m\cdot T_{nm}$ имеют вид

$$v_{nm}(x,y,t) = C_{nm}(\bar{A}_{nm}\cos(\pi\sqrt{n^2+4m^2}t) + \bar{B}_{nm}\sin(\pi\sqrt{n^2+4m^2}t))\cdot\sin(\frac{\pi n}{2}x)\cdot\sin(\pi m y) =$$

$$= (A_{nm}\cos(\pi\sqrt{n^2+4m^2}t) + B_{nm}\sin(\pi\sqrt{n^2+4m^2}t))\cdot\sin(\frac{\pi n}{2}x)\cdot\sin(\pi m y)$$

Где $A_{nm} = A_{nm}\cdot C_{nm}$, $B_n = B_{nm}\cdot C_{nm}$ - постоянные, которые надо найти.

6. Решение задачи ищем в виде

$$U(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} v_{nm}(x,y,t) = (A_{nm}\,cos(\pi\sqrt{n^2+4m^2}t) + B_{nm}\,sin(\pi\sqrt{n^2+4m^2}t))\cdot sin(\frac{\pi n}{2}x)\cdot sin(\pi m y)$$

7. Эта функция является решением уравнения $U_{tt} - 4\cdot(U_{xx}+U_{yy}) = 0$ и удовлетворяет граничным условиям при любых A_{nm} и B_{nm}, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

8. Находим A_{nm} и B_{nm}, при которых $U(x,y,t)$ удовлетворяет начальным условиям. Полагая в найденном решении $t = 0$ получаем,

$$U(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\cdot\sin(\frac{\pi n}{\alpha}x)\sin(\frac{\pi m}{\beta}x) = 0$$

Отсюда $A_{nm} = 0$

Дифференцируя найденное решение и подставляя $t = 0$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\pi\sqrt{n^2+4m^2}B_{nm}\cdot\sin(\frac{\pi n}{2}x)\cdot\sin(\pi m y) = xy(2-x)(1-y)$$

$$B_{nm} = \frac{2}{\pi\sqrt{n^2+4m^2}}\cdot\int_0^2\int_0^1 xy(2-x)(1-y)\cdot sin(\frac{\pi n}{2}x)\sin(\pi m y)dxdy =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{n^2+4m^2}}[\int_0^2 x(2-x)sin(\frac{\pi n}{2}x)dx]\cdot[\int_0^1 y(1-y)\sin(\pi m y)dy]$$

Так как:

$$\int_0^1 x\sin(\pi n x)dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \sin(\pi n x)dx & V = -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi n x)\end{vmatrix} = -\frac{1}{(\pi n)}x\cos(\pi n x)\,|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{(\pi n)}\int_0^1\cos(\pi n x)dx = -\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n) + \frac{1}{(\pi n)^2}\sin(\pi n x)\,|_0^1 = -\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n)$$

$$\int_0^2 x\sin(\frac{\pi n}{2}x)dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \sin(\frac{\pi n}{2}x)dx & V = -\frac{2}{\pi n}\cos(\frac{\pi n}{2}x)\end{vmatrix} = -\frac{2}{(\pi n)}x\cos(\frac{\pi n}{2}x)\,|_0^2 +$$

$$+\frac{2}{(\pi n)}\int_0^2\cos(\frac{\pi n}{2}x)dx = -\frac{4}{(\pi n)}\cos(\pi n) + \frac{1}{(\pi n)^2}\sin(\pi n x)\,|_0^2 = -\frac{4}{(\pi n)}\cos(\pi n)$$

$$-\int_0^1 x^2\sin(\pi nx)dx=\left|\begin{matrix}U=-x^2 & dU=-2xdx\\ dV=\sin(\pi nx)dx & V=-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx)\end{matrix}\right|=+\frac{1}{(\pi n)}x^2\cos(\pi nx)\,|_0^1-$$

$$-\frac{2}{(\pi n)}\int_0^1 x\cos(\pi nx)dx=\left|\begin{matrix}U=x & dU=dx\\ dV=\cos(\pi nx)dx & V=\frac{1}{\pi n}\sin(\pi nx)\end{matrix}\right|=\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n)-$$

$$-\frac{2x}{(\pi n)^2}\sin(\pi nx)\,|_0^1+\frac{2}{(\pi n)^2}\int_0^1\sin(\pi nx)dx=\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n)-\frac{2\cos(\pi nx)}{(\pi n)^3}\,|_0^1=$$

$$=\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n)-\frac{2\cos(\pi n)}{(\pi n)^3}+\frac{2}{(\pi n)^3}$$

$$-\int_0^2 x^2\sin(\frac{\pi n}{2}x)dx=\left|\begin{matrix}U=-x^2 & dU=-2xdx\\ dV=\sin(\pi nx)dx & V=-\frac{2}{\pi n}\cos(\pi nx)\end{matrix}\right|=+\frac{2}{(\pi n)}x^2\cos(\frac{\pi n}{2}x)\,|_0^2-$$

$$-\frac{4}{(\pi n)}\int_0^2 x\cos(\frac{\pi n}{2}x)dx=\left|\begin{matrix}U=x & dU=dx\\ dV=\cos(\frac{\pi n}{2}x)dx & V=\frac{2}{\pi n}\sin(\frac{\pi n}{2}x)\end{matrix}\right|=\frac{8}{\pi n}\cos(\pi nx)-$$

$$-\frac{8x}{(\pi n)^2}\sin(\frac{\pi n}{2}x)\,|_0^2+\frac{8}{(\pi n)^2}\int_0^2\sin(\frac{\pi n}{2}x)dx=\frac{8}{\pi n}\cos(\pi nx)-\frac{16\cos(\frac{\pi n}{2}x)}{(\pi n)^3}\,|_0^2=$$

$$=\frac{8}{\pi n}\cos(\pi nx)-\frac{16\cos(\pi n)}{(\pi n)^3}+\frac{16}{(\pi n)^3}$$

Следовательно

$$B_{nm}=\frac{2}{\pi\sqrt{n^2+4m^2}}\cdot\int_0^2\int_0^1 xy(2-x)(1-y)\cdot sin(\frac{\pi n}{2}x)\sin(\pi my)dxdy=$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{n^2+4m^2}}[\int_0^2 x(2-x)sin(\frac{\pi n}{2}x)dx]\cdot[\int_0^1 y(1-y)\sin(\pi my)dy]=$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{n^2+4m^2}}[-2\frac{4}{\pi n}\cos(\pi n)+\frac{8}{\pi n}\cos(\pi n)+-\frac{16\cos(\pi n)}{(\pi n)^3}+\frac{16}{(\pi n)^3}]\times$$

$$\times[-\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n)+\frac{1}{(\pi n)}\cos(\pi n)-\frac{2\cos(\pi n)}{(\pi n)^3}+\frac{2}{(\pi n)^3}]$$

Получаем, что B_{nm} не равно нулю, только если n и m нечетных,

$$B_{kl}=\frac{2}{\pi\sqrt{(2k+1)^2+4(2l+1)^2}}\cdot[\frac{32}{\pi^3(2k+1)^3}]\times[\frac{4}{\pi^3(2l+1)^3}]=$$

$$=\frac{265}{\pi^7\sqrt{(2k+1)^2+4(2l+1)^2}(2k+1)^3(2l+1)^3}$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд, получаем искомое решение.

Ответ: $$U(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{265}{\pi^7\sqrt{(2k+1)^2+4(2l+1)^2}(2k+1)^3(2l+1)^3}\times$$
$$\times\sin(\frac{\pi}{2}(2k+1)x)\sin(\pi(2l+1)y))\sin(\pi\sqrt{(2k+1)^2+4(2l+1)^2}t)$$

Заключение

Метод Фурье самый главный аналитический метод для решения дифференциальных уравнений в частных производных не только гиперболического типа, но и параболического, и эллиптического типа с различными граничными условиями, которые описываю важные физические процессы. Громоздкость метода, сложность вычислений, требует структурированного алгоритма, позволяющего не допустить ошибок при решение поставленных задач.

Данная работа будет интересна почти всем студентам второго курса МГТУ Баумана на занятиях «Математической физики», а также преподавателям, которые ведут этот курс.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Береснева Е.В. Методика преподавания метода Фурье для решения однородного волнового уравнения на отрезке. Modern European Researches No 1 (T/2)/2024. - с 5-11.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А.: Уравнение математической физики. - М: наука. Изд. 7-е, 2004 г, 735 с.
3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.Н.: Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник для студентов вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко, - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996 г. - 364 с.
4. Владимиров В.С., Жаринов В.В.: Уравнения математической физики. - М: Главная редакция физико-математической литературы, 2004 г. - 512 с.
5. Михащенко Т.Н.: Уравнение с частными производными: Учебное пособие. Изд-во Курганского гос. ун-та. - 2022 г. - 76 с.

***Evgenia V. Beresneva*,**
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman; Associate Professor of the Moscow Aviation Institute, Moscow
jane_gal@mail.ru

The methodology of teaching the Fourier method for solving a homogeneous wave equation in a rectangle

Abstract. This article will be useful for students of technical universities who study such disciplines as "Mathematical Physics" and "Partial Differential Equations," as well as for teachers who conduct practical classes in these subjects. The most common method for solving various problems in these courses is the Fourier method (the method of separation of variables). This method is traditionally difficult for students to master, and solving problems in space can be particularly challenging. This article provides a detailed and structured algorithm for the Fourier method for multiple spatial variables, which can be used to quickly and effectively solve problems. The paper considers a structural algorithm for solving the problem of free vibration of a rectangular membrane with fixed ends, and provides an example.

Keywords: Fourier method, vibration of a rectangular membrane, hyperbolic partial differential equation in space.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ» В РАМКАХ ШКОЛЬНОГО ФАКУЛЬТАТИВА

Аннотация

Диофантовы уравнения рассматриваются в теории чисел и играют важную роль в теории алгоритмов. Линейные диофантовы уравнения с двумя переменными часто встречаются при решении олимпиадных задач по математике в школе. Цель работы заключается в рассмотрении методики преподавания темы «Диофантовы уравнения» в рамках школьного факультатива. В работе последовательно излагаются алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя и основанный на этом алгоритме метод решения диофантовых уравнений, приводятся примеры олимпиадных задач по математике, решение которых сводится к диофантовым уравнениям. Работа будет полезна школьным учителям математики при проведении факультативных занятий и, в частности, при подготовке школьников к олимпиадам.

Ключевые слова

диофантовы уравнения, алгоритм Евклида, целые числа

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Келдыш Елизавета Петровна,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
liza.keldysh@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-32-37

Введение

Диофантовы уравнения представляют собой алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, для которых надо найти целочисленные решения. Такие уравнения рассматриваются в теории чисел и играют важную роль в теории алгоритмов. В данной работе рассматриваются линейные диофантовы уравнения с двумя переменными. Для решения таких уравнений есть разные методы (см. книги А.О. Гельфонда [1] и В.Н. Серпинского [2]). В книге И.Г. Башмаковой [3] можно найти информацию не только о методах решения диофантовых уравнений, но и об их роли в математике.

Диофантовы уравнения часто встречаются при решении олимпиадных задач по математике в школе. Множество разных примеров олимпиадных задач на составление диофантовых уравнений можно найти, например, в книгах А.А. Косярского [4] и В.Я. Галкина [5].

В данной работе рассматривается метод решения линейных диофантовых уравнений с двумя переменными, основанный на алгоритме Евклида для нахождения

наибольшего общего делителя целых чисел. Этот достаточно простой метод иногда называют методом рассеивания или также методом измельчения. Его можно использовать в процессе преподавания темы «Диофантовы уравнения» в рамках школьного факультатива.

Помимо изложения самого метода в работе приводятся примеры олимпиадных задач по математике, решение которых сводится к диофантовым уравнениям. Работа будет полезна школьным учителям математики при проведении факультативных занятий и, в частности, при подготовке школьников к олимпиадам.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим алгоритм Евклида для нахождения $\text{НОД}(a, b)$.

Перед рассмотрением самого алгоритма заметим вначале, что:

если $a \vdots b$, то $\text{НОД}(a, b) = b$.

Если же a не делится нацело на b, то поделим с остатком и получим следующее утверждение:

если $a = bq + r$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

В самом деле, если a и b делятся нацело на некоторое число, то и $r = a - bq$ делится на это число. Наоборот, если b и r делятся нацело на некоторое число, то и $a = bq + r$ делится на это число. Получаем, что множество чисел, на которые делятся a и b, совпадает с множеством чисел, на которые делятся b и r. Значит, и наибольшие элементы этих множеств совпадают, т. е. $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$. □

Рассмотрим теперь алгоритм Евклида нахождения $\text{НОД}(a, b)$. Положим вначале

$r_0 = \max\{a, b\}$ и $r_1 = \min\{a, b\}$

Ясно, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r_0, r_1)$. Поделим r_0 на r_1.

Если r_0 делится нацело на r_1, то $\text{НОД}(a, b) = r_1$. Если же при делении r_0 на r_1 получается ненулевой остаток r_2, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r_0, r_1) = \text{НОД}(r_1, r_2)$. Поделим r_1 на r_2.

Если r_1 делится нацело на r_2, то $\text{НОД}(a, b) = r_2$. Если же при делении r_1 на r_2 получается ненулевой остаток r_3, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r_1, r_2) = \text{НОД}(r_2, r_3)$. Поделим r_2 на r_3.

Продолжая так далее, получим последовательность чисел

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_k, 0,$$

в которой каждый очередной член получается из двух предыдущих как остаток от деления. При этом, начиная с некоторого момента, остаток r_{k-1} делится нацело на r_k, так что остаток r_k является последним ненулевым остатком. Он-то и будет искомым наибольшим общим делителем:

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r_{k-1}, r_k) = r_k\,.$$

Пример. Найдём $\text{НОД}(300, 144)$ с помощью алгоритма Евклида. Поделим $r_0 = 300$ на $r_1 = 144$. Получим неполное частное 2 и остаток $r_2 = 12$. Поделим теперь $r_1 = 144$ на $r_2 = 12$. Получим частное 12 и остаток $r_3 = 0$. Так что $\text{НОД}(300, 144) = r_2 = 12$. □

Алгоритм Евклида тесно связан с решением ***диофантовых уравнений*** первой степени, т. е. уравнений следующего вида:

$$ax + by = c,$$

где a, b и c - целые коэффициенты ($a \neq 0$ и $b \neq 0$), а x и y - неизвестные.

В общем случае у такого уравнения может быть бесконечно много решений. Однако, *решить диофантово уравнение означает найти все его целочисленные (!) решения*.

Пример. Рассмотрим диофантово уравнение:

$$x + 2y = 5.$$

У этого уравнения даже целочисленных решений бесконечно много. Например, легко проверить, что решениями будут: $x = 1,\ y = 2;\quad x = -1,\ y = 3;\quad x = 3,\ y = 1$ и т. д.

Чтобы найти все целочисленные решения, выразим из этого уравнения переменную x:

$$x = 5 - 2y.$$

Из этого равенства по любому целому значению переменной y можно вычислить соответствующее ему целое значение переменной x. Так можно охарактеризовать всё множество решений.

Ответ: $x = 5 - 2y,\ y \in \mathbb{Z}$. □

Пример. Рассмотрим следующее диофантово уравнение:

$$2x - 4y = 3.$$

Это уравнение, очевидно, вообще не имеет целочисленных решений.

В самом деле, для любых целых значений переменных x и y левая часть уравнения будет чётным числом, а правая – нечётным.

Ответ: нет целых решений. □

Пример. Рассмотрим следующее диофантово уравнение:

$$238x + 308y = 42.$$

Решить это уравнение описанными выше приёмами уже не выйдет: переменные и y не выражаются друг через друга с целыми коэффициентами.

В то же время не получится и доказать, что решений нет: у коэффициентов левой части (238 и 308) наибольший общий делитель равен 14, но правая часть 42 делится нацело на 14.

Коэффициенты при неизвестных в этом уравнении равны 238 и 308. Вспоминаем алгоритм Евклида: $r_0 = 308$, $r_1 = 238$. Делим 308 на 238 и представляем 308 в виде суммы $238 + 70$:

$$238x + (238 + 70) \cdot y = 42.$$

Раскрываем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$238 \cdot (x + y) + 70y = 42.$$

Обозначим $z = x + y$. Получим:

$$238z + 70y = 42,$$

т. е. мы от коэффициентов $r_0 = 308$ и $r_1 = 238$ перешли к $r_1 = 238$ и $r_2 = 70$. Делим 238 на 70 и представляем 238 в виде суммы 210 и 28:

$$(210 + 28) \cdot z + 70y = 42.$$

Вновь раскрываем скобки и группируем:

$$70 \cdot (3z + y) + 28z = 42.$$

Обозначим $t = 3z + y$. Получим:

$$70t + 28z = 42.$$

Тем самым перешли к коэффициентам $r_2 = 70$ и $r_3 = 28$. Делим 70 на 28.

$$(56 + 14) \cdot t + 28z = 42,$$

$$28 \cdot (2t + z) + 14t = 42.$$

Обозначим $s = 2t + z$:

$$28s + 14t = 42.$$

Здесь, поскольку 28 делится нацело на 14, можно выразить t:

$$t = 3 - 2s.$$

Как видим, для любого целого значения переменной s с помощью этого выражения можно посчитать соответствующее ему целое значение переменной t.

Таким образом, пусть s – произвольное целое число. Тогда $t = 3 - 2s$. Вспоминаем сделанные обозначения, только перебираем их в обратном порядке – от последнего к первому.

Обозначение: $s = 2t + z$. Выражаем отсюда z:

$$z = s - 2t.$$

Подставляем вместо переменной t её выражение через s:

$$z = s - 2(3 - 2s) = 5s - 6.$$

Далее обозначение: $t = 3z + y$. Выражаем отсюда y:

$$y = t - 3z.$$

Подставляем вместо переменных t и z их выражения через s:

$$y = (3 - 2s) - 3(5s - 6) = 21 - 17s.$$

Наконец, обозначение: $z = x + y$. Выражаем отсюда x:

$$x = z - y.$$

Подставляем вместо переменных z и y их выражения через s:

$$x = (5s - 6) - (21 - 17s) = 22s - 27.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 22s - 27, \\ y = 21 - 17s, \end{cases}$ где $s \in \mathbb{Z}$.

Можно выполнить проверку, подставив найденные решения в исходное уравнение:

$$238 \cdot (22s - 27) + 308 \cdot (21 - 17s) = 42.$$

После преобразований получаем верное равенство:

$$5236s - 6426 + 6468 - 5236s = 42. \quad \square$$

Задача. Можно ли отвесить 18 грамм некоторого вещества на чашечных весах, имея только гири по 7 грамм и по 20 грамм? И если да, то какое минимальное количество гирь по 7 грамм потребуется?

Решение.

Пусть 18 грамм вещества лежат на левой чашке весов. Чтобы уравновесить это количество вещества, на чашки весов надо помещать гири весом 7 и 20 грамм. Ясно, что гири по 7 грамм достаточно помещать либо только на левую чашку, либо только на правую. То же самое касается гирь по 20 грамм.

Пусть для решения потребуется x гирь по 7 грамм и y гирь по 20 грамм. Положительное значение переменной x означает, что гири помещены на правую чашку, отрицательное – на левую. То же самое касается y. Запишем условие равновесия чашечных весов в виде уравнения:

$$7x + 20y = 18.$$

Ясно, что в задаче значения переменных x и y должны быть целыми: нельзя взять дробное количество гирь. Поэтому получаем диофантово уравнение. Решаем его.

$$7x + (14 + 6)y = 18, \qquad 7(x + 2y) + 6y = 18.$$

Обозначим $z = x + 2y$.

$$7z + 6y = 18, \qquad (6 + 1)z + 6y = 18, \qquad 6(z + y) + z = 18.$$

Обозначим $t = z + y$.

$$6t + z = 18, \qquad z = 18 - 6t,$$

$$y = t - z = t - (18 - 6t) = 7t - 18.$$

$$x = z - 2y = (18 - 6t) - 2(7t - 18) = 54 - 20t.$$

Подставляя вместо переменной t различные целые числа, будем получать различные решения диофантова уравнения. Значит, отвесить 18 грамм на чашечных весах можно, причём возможных способов бесконечно много. Например, при $t = 0$ имеем $x = 54$ и $y = -18$, т. е. надо положить 54 гири по 7 грамм на правую чашку и 18 гирь по 20 грамм на левую.

Найдём теперь минимальное количество гирь по 7 грамм. Для этого найдём значение t, при котором x будет минимально по абсолютной величине. Как несложно заметить, это условие достигается при $t = 3$. Тогда $x = -6$ и $y = 3$, т. е. надо 6 гирь весом 7 грамм положить на левую чашку и 3 гири по 20 грамм на правую.

Ответ: 6 гирь весом 7 грамм на левую чашку и 3 гири по 20 грамм на правую. $\square$

Задача. Можно ли отмерить отрезок длиной 1 м, используя отрезки длиной 7 см и 12 см? Можно ли это сделать, только складывая отрезки?

Решение.

Пусть для построения отрезка в 1 м = 100 см использовалось x отрезков по 7 см и y отрезков по 12 см. Положительное значение переменной x означает, что отрезки откладываются в положительную сторону (вправо), отрицательное – наоборот (влево). То же самое касается y. Составим уравнение:

$$7x + 12y = 100.$$

В этом уравнении значения переменных x и y должны быть целыми: нельзя взять дробное количество отрезков. Значит, это диофантово уравнение. Решим его.

$$7x + (7 + 5)y = 100, \qquad 7(x + y) + 5y = 100.$$

Обозначим $z = x + y$.

$$7z + 5y = 100, \qquad (5 + 2)z + 5y = 100, \qquad 5(z + y) + 2z = 100.$$

Обозначим $t = z + y$.

$$5t + 2z = 100, \qquad (4 + 1)t + 2z = 100, \qquad 2(2t + z) + t = 100.$$

Обозначим $s = 2t + z$.

$$2s + t = 100, \qquad t = 100 - 2s,$$
$$z = s - 2t = s - 2(100 - 2s) = 5s - 200,$$
$$y = t - z = (100 - 2s) - (5s - 200) = 300 - 7s.$$
$$x = z - y = (5s - 200) - (300 - 7s) = 12s - 500.$$

Подставляя вместо переменной s различные целые числа, будем получать различные решения диофантова уравнения. Значит, отмерить отрезок в 1 м можно, причём возможных способов бесконечно много. Например, при $s = 0$ имеем $x = -500$ и $y = 300$, т. е. надо отложить 500 отрезков по 7 см влево и потом 300 отрезков по 12 см вправо.

Наложим теперь дополнительное условие: отрезки можно только складывать. Математически это условие будет записываться так: $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 12s - 500 \geq 0, \\ 300 - 7s \geq 0. \end{cases}$$

После преобразований получаем двойное неравенство:

$$\frac{500}{12} \leq s \leq \frac{300}{7}, \qquad \text{т. е.} \qquad 41\frac{2}{3} \leq s \leq 42\frac{6}{7}.$$

И поскольку значение переменной s должно быть целым, получаем $s = 42$. Откуда $x = 4$ и $y = 6$. Значит, отмерить отрезок длиной 1 м можно, даже если отрезки по 7 см и 12 см разрешается только складывать.

Ответ: 4 отрезка длиной 7 см и 6 отрезков длиной 12 см. □

Задача. Мороженое стоит 19 рублей, а у покупателя и продавца только трёх- и пятирублёвые монеты (можно считать, что в неограниченных количествах). Сможет ли покупатель расплатиться с продавцом? А что, если у покупателя есть только трёхрублёвые монеты, а у продавца – только пятирублёвые?

Решение.

Пусть x – количество трёхрублёвых монет, которые заплатил покупатель продавцу. Отрицательное значение переменной x будет означать, что монеты покупатель получил от продавца в качестве сдачи. Аналогично, y – количество пятирублёвых монет.

Суммарная стоимость монет должна быть равна стоимости мороженого: $3x + 5y = 19$.

Решение уравнения: $x = 38 - 5t$, $y = 3t - 19$. Существует бесконечно много способов расплатиться.

Дополнительное условие: $x \geq 0$, $y \leq 0$.

Тогда $t = 6$, $x = 8$, $y = -1$. Покупатель платит 8 трёхрублёвых монет и получает одну пятирублёвую сдачи.

Ответ: существует бесконечно много способов расплатиться, в частности, покупатель платит 8 трёхрублёвых монет и получает одну пятирублёвую сдачи.

Задача. В лифте 24-этажного дома есть только две кнопки: «подняться на 7 этажей вверх» и «опуститься на 4 этажа вниз». Когда сверху меньше 7 этажей, кнопка «вверх» не работает; аналогично – вниз. Лифт находится на первом этаже. Можно ли подняться на последний 24-й этаж? Если да, то как это сделать и какое минимальное количество раз надо нажать кнопки лифта?

Решение.

Пусть x – количество нажатий кнопки «вверх», а y – «вниз».

Необходимо поднять лифт на 23 этажа вверх (с 1-го на 24-й): $7x - 4y = 23$.

Решение уравнения: $x = 4t - 23$, $y = 7t - 46$.

Количество нажатий может быть только положительное: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Минимальное количество нажатий при $t = 7$. Откуда $x = 5$ и $y = 3$.

Ответ: нажимаем 3 раза «вверх», потом 3 раза «вниз», потом 2 раза «вверх».

Заключение

В данной статье рассмотрен метод решения линейных диофантовых уравнений с двумя переменными, основанный на алгоритме Евклида для поиска НОД и доступный школьникам, начиная с 7-го класса. Приведённые в работе примеры олимпиадных задач, решение которых сводится к диофантовым уравнениям, помогут учителю подготовить и провести факультативное занятие по соответствующей теме. Изучение диофантовых уравнений поможет школьникам не только освоить новый раздел математики, но и увидеть довольно сложную теорию, которая появляется при рассмотрении, казалось бы, очень простых линейных уравнений в целых числах.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1978. – (Популярные лекции по математике).
2. Серпинский В.Н. О решении уравнений в целых числах. – М.: Физматлит, 1961. – 88 с.
3. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
4. Косярский А.А. Олимпиадная математика. Числа: классические задачи. Введение в теорию чисел: учебно-методическое пособие. – Казань: Бук, 2023. – 84 с.
5. Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2002. – 180 с.

***Oleg N. Biryukov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru
***Elizaveta P. Keldysh*,**
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
liza.keldysh@bmstu.ru

Methods of teaching the topic "Diophantine equations" in the framework of the school elective

Abstract. Diophantine equations are considered in number theory and play an important role in the theory of algorithms. Linear Diophantine equations with two variables are often found when solving Olympiad math problems at school. The purpose of the work is to consider the methodology of teaching the topic "Diophantine equations" in the framework of a school elective. The paper consistently describes Euclid's algorithm for finding the greatest common divisor and a method for solving Diophantine equations based on this algorithm, and provides examples of Olympiad problems in mathematics, the solution of which is reduced to Diophantine equations. The work will be useful for school mathematics teachers when conducting elective classes and, in particular, when preparing students for Olympiads.

Keywords: Diophantine equations, Euclid's algorithm, integers.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ И КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ»

Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена необходимостью развития и совершенствования у студентов навыка построения графиков и кривых при различных типах задания. Такие навыки необходимы для успешного освоения различных дисциплин. В статье рассматривается система задач, выстроенных по возрастанию сложности, с помощью которой можно сформировать и развить навык построения кривых и графиков в случае параметрического задания. Также приведены результаты практического применения системы упражнений на семинарских занятиях у первокурсников. Содержание статьи будет интересным преподавателям, студентам, старшеклассникам.

Ключевые слова

методика решения задач по математическому анализу,
параметрическое задание функции, график функции, кривая

АВТОР

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана», г. Москва
vergazova@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-38-44

Введение

Первые семинарские занятия по математическому анализу у студентов первого курса посвящены основным понятиям по теме «Действительная функция действительного аргумента». Первокурсники вспоминают основные понятия из школьного курса математики: функция, основные свойства функции (четность-нечетность, периодичность) и ее график. На первых занятиях студенты решают задачи на построение графиков функции с помощью элементарных преобразований, с использованием основных свойств функции, но без применения производных. При этом большинство студентов первого курса впервые встречаются с таким способом задания функции, как параметрический. Необходимо в сжатые сроки (один-два семинара) познакомить и сформировать навык построения графиков функций и кривых, заданных параметрически. Такой навык будет необходим для дальнейшего успешного освоения курса математического анализа и ряда других дисциплин.

Методология и результаты исследования

В традиционных курсах математического анализа приводится следующее определение (Морозова В. Д. [1], Ляшко И.И. [2], Фихтенгольц Г.М. [3]). Если зависимость y от переменной x не задана в явном аналитическом виде $y = f(x)$, но при этом известны зависимости переменных x и y от некоторой третьей переменной

t в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, то такой способ задания функции называется ***параметрическим***. Вспомогательную переменную t называют ***параметром***.

Если при параметрическом задании $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ возможно исключить параметр t, то тогда можно получить явную или неявную аналитическую зависимость y от x.

Пример 1. $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$

Решение.

Так как $y(-t) = y(t)$, то при $t = 0$ $x = 1$ - ось симметрии. Составим таблицу (Таблица 1).

Таблица 1

t	0	1	2	3	$t \to +\infty$
x	1	0	-1	-2	$x \to -\infty$
y	1	0	-3	-8	$y \to -\infty$

Учтем симметричность и построим график функции (Рис. 1).

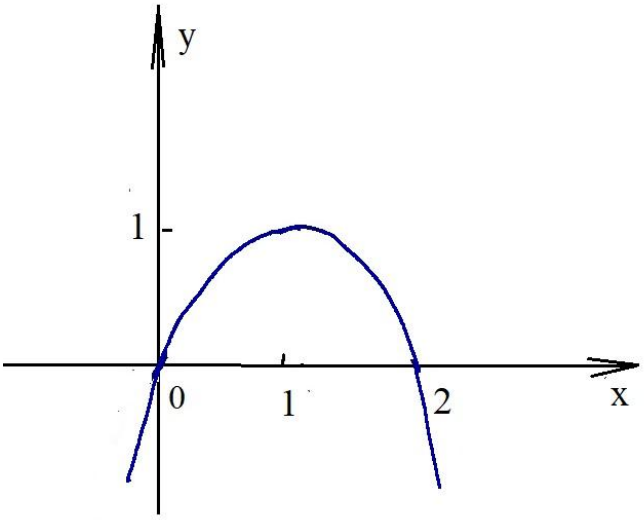


Рис. 1. График функции $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$.

При решении этой задачи обратим внимание студентов на то, что, если перейти к явному заданию, то получим:

$$t = 1 - x,$$
$$y = 1 - (1 - x)^2,$$

преобразуем и придем к квадратичной функции $y = 2x - x^2$.

На рисунке 1 изображена хорошо известная из школьного курса парабола $y = 2x - x^2$. (Рис. 1).

После решения задачи подчеркнем, что при решении таких задач необходимо анализировать, насколько рациональным будет построение графика в том или ином задании.

При решении задач всегда обращаем внимание студентов, что решение начинаем с анализа, удобно ли будет строить график (изображать кривую) при таком задании или необходимо перейти к заданию в полярных координатах, в неявном задании и т.д. Всегда отмечаем области допустимых значений переменных или параметра, основные свойства функции (четность-нечетность, периодичность и др.). В литературе (Блинова И. В. [4], Васильев Н.В. [5]) приводится множество задач и

примеров по теме. Рассмотрим систему задач, направленную на формирование и развитие навыка построения графиков и кривых, заданных параметрически.

Пример 2. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, \\ y = t + \frac{1}{t^2} \end{cases}$

Решение.

Возведем равенство $x = t + \frac{1}{t}$ в квадрат:

$x^2 = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 = 1 + 2t\frac{1}{t} \cdot t + t^2$, $x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$, $x^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$.

Очевидно, что $|x| = \left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2$.

Функция определена, если $-\infty < x \leq -2$ и $2 \leq x < +\infty$. Заметим, что $y - x = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \to 0$ при $t \to \infty$. При $t \to +\infty$ $y - x \to 0-$, при $t \to -\infty$ $y - x \to 0+$.

Значит, $y = x$ - асимптота при $x \to \infty$.

Далее, $y = x^2 - 2 - t^2 + t$, $y - x^2 + 2 \to 0+$ при $t \to 0+$ и $y - x^2 + 2 \to 0-$ при $t \to 0-$. Значит, $y = x^2 - 2$ - асимптота графика функции при $x \to \infty$.

Составим таблицу, в которой отразим зависимость переменных от параметра $t = \pm\frac{1}{n}$, $t = \pm n$, $n \in N$. (Таблица 2):

Таблица 2

t	$-\frac{1}{n}$	$-n$	$\frac{1}{n}$	n
x	$-\left(n + \frac{1}{n}\right)$	$-\left(n + \frac{1}{n}\right)$	$n + \frac{1}{n}$	$n + \frac{1}{n}$
y	$n^2 - \frac{1}{n}$	$-n + \frac{1}{n^2}$	$n^2 + \frac{1}{n}$	$n + \frac{1}{n^2}$

Построим график (Рис. 2).

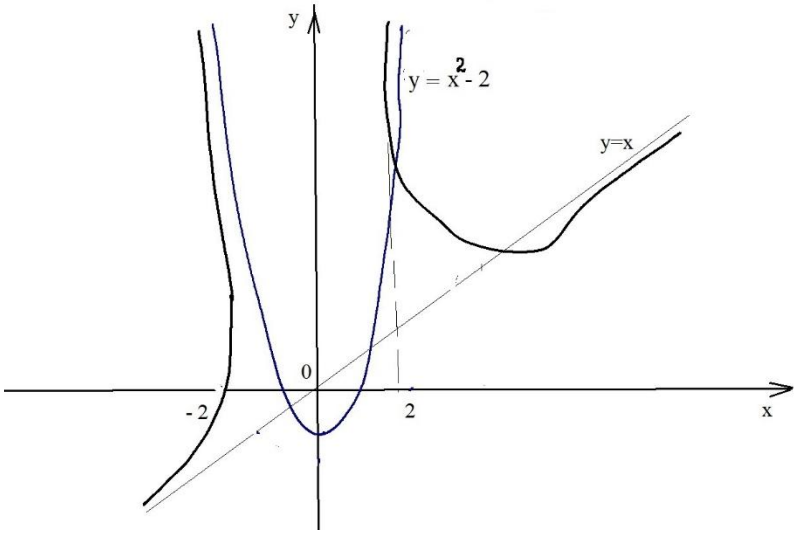


Рис. 2. График функции $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, \\ y = t + \frac{1}{t^2} \end{cases}$ *и его асимптоты*

Пример 3. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$.

Решение.

Так как $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, то область определения $0 \leq x \leq 5$, область допустимых значений функции $0 \leq y \leq 3$. Так как $\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, то график функции

представляет собой отрезок прямой $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$, заключенный между точками $M_0(0;3)$ и $M_1(5;0)$. (Рис. 3).

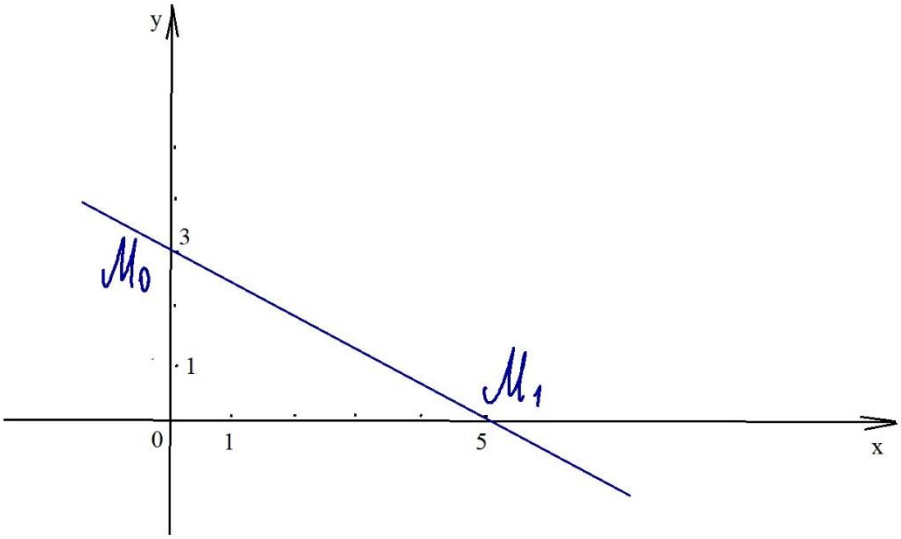


Рис. 3. График функции $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$.

Пример 4. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение.

Функция определена при $-\infty < x < +\infty$, ограничена, так как $0 \le y \le 4$ и периодическая с периодом 2π по параметру t.

Составим таблицу (Таблица 3).

Таблица 3

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$	$\pi-2$	$\frac{3\pi}{2}-\sqrt{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}+\sqrt{2}$	$3\pi+2$	$\frac{7\pi}{2}+\sqrt{2}$	4π
y	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	4	$2+\sqrt{2}$	2	$2-\sqrt{2}$	0

Построим график (Рис. 4).

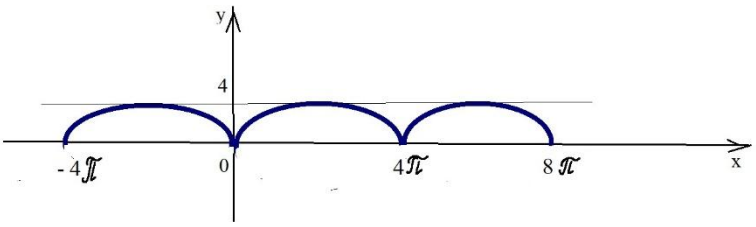


Рис. 4. График функции $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

Пример 5. $\begin{cases} x = \sqrt[t+1]{t}, \\ y = \sqrt[t]{t+1} \end{cases}$, где $t > 0$.

Решение.

Перейдем к степени $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{1+t}}, \\ y = (t+1)^{\frac{1}{t}} \end{cases}$, $\begin{cases} x^{t+1} = t, \\ y^t = t+1 \end{cases}$. Отсюда $y^t = x^{t+1} + 1$.

При $t = 0$ $y^0 = x^1 + 1$, тогда из предыдущего равенства получим $x = 0$.

Составим таблицу (таблица 4).

Таблица 4

t	$t = \frac{1}{n} \to 0$	1	$t = n \to \infty$
x	$x \to 0+$	1	$x \to 1+0$
y	$y \to e-0$	2	$y \to 1+0$

Построим график (Рис. 5).

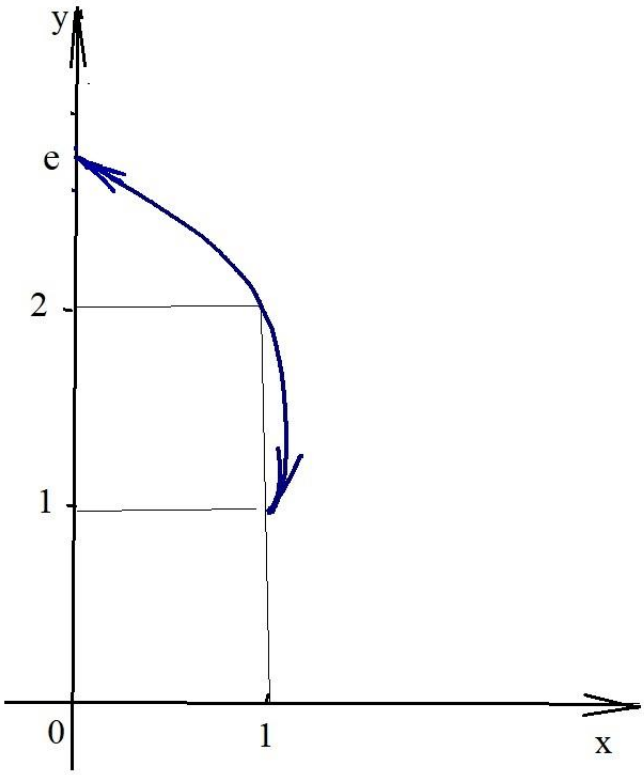


Рис. 5. График функции $\begin{cases} x = \sqrt[t+1]{t}, \\ y = \sqrt[t]{t+1} \end{cases}$, *где* $t > 0$

Пример 6.

Построить кривую, заданную неявно $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартов лист).

Решение.

При таком задании построение будет сложным. Перейдем к параметрическому заданию.

Пусть $\frac{y}{x} = t$, тогда

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{t^3+1}, \\ y = \frac{3t^2}{t^3+1} \end{cases}.$$

Составим таблицу (таблица 5).

Таблица 5

t	$\frac{1}{n} \to 0+$	$n \to \infty$	$-\frac{1}{n} \to 0-$	$-n \to -\infty$	$\frac{-n}{n+1} \to -1+0$	$-\frac{n+1}{n} \to -1+0$
x	$\frac{3n^2}{n^3+1} \to 0+$	$\frac{3n}{n^2+1} \to 0+$	$\frac{-3n^2}{n^3-1} \to 0-$	$\frac{3n}{n^3-1} \to 0+$	$\frac{-3n(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} \to -\infty$	$\frac{3n^2(n+1)}{(n+1)^3-n^3} \to +\infty$
y	$\frac{3n}{n^3+1} \to 0+$	$\frac{3n^2}{n^3+1} \to 0+$	$\frac{3n}{n^3-1} \to 0+$	$\frac{-3n^2}{n^3-1} \to 0-$	$\frac{3n^2(n+1)}{(n+1)^3-n^3} \to +\infty$	$\frac{-3n(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} \to -\infty$

Отметим, что кривая симметрична относительно прямой $y = x$.

Если $t = \frac{y}{x} \to -1$, то $|x| \to \infty$ и $|y| \to \infty$.

Рассмотрим равенство $x + y = \frac{3xy}{x^2 - Jy + y^2} = \frac{3\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

Отсюда следует, что $x + y \to -1$ при $t = \frac{y}{x} \to -1$.

Построим кривую. (Рис. 6).

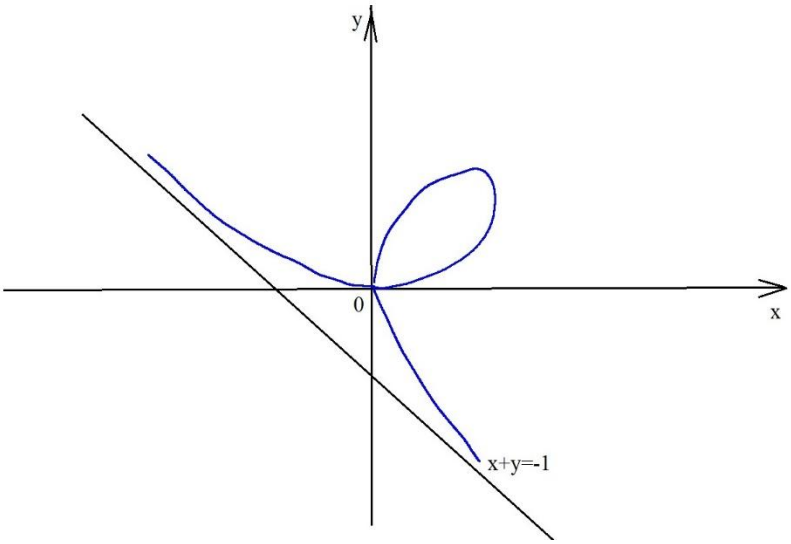


Рис. 6. Кривая $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Для закрепления навыка решения задач студентам предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения.

1) $\begin{cases} x = 10\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$; $t \in [0; 2\pi]$.

2) $\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ $t \in (-\infty; +\infty)$.

3) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t + \cos t, \\ y = 2\sin t \cot + \sin t \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$.

4) $\begin{cases} x = a\cos t + x_{0,} \\ y = a\sin t + y_{0,} \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$.

5) $\begin{cases} x = 4\cos t + 3\sin t, \\ y = 3\cos t - 4\sin t. \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$. [6, 7]

Эффективность такого подхода при изучении данной темы проверялась следующим образом. В двух группах первого курса Приборостроительного факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана семинары проводились традиционным образом. В двух других

– студенты решали рассмотренную выше систему задач. При выполнении контрольного мероприятия с задачами указанного типа справились 53% студентов групп с традиционным подходом и 78 % студентов в группах с новым подходом.

Заключение

Для студентов технических специальностей очень важен навык быстрого анализа и построения графиков функций и кривых. Например, при решении задач на вычисление объемов, площадей, длин дуг кривых студенту необходимо уметь изобразить область на плоскости (в пространстве), для которой производится вычисление той или иной величины. Умение представить график или кривую, опираясь на отдельные свойства функции (кривой) обеспечивает качественное освоение математических и других учебных дисциплин в процессе подготовки будущего инженера.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Морозова В.Д. Введение в анализ. М. Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана. - 2000. - 408 с.
2. Ляшко И.И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Введение в анализ, производная, интеграл. Изд. объединение «Вища школа». - К. 1974. - 680 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-ух томах. -Том 1. - СПб. Лань. - 2015. - 448 с.
4. Блинова И. В., Попов И. Ю. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах. - СПб. 2017. - 57 с.
5. Васильев Н. В., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. - М. «Наука». - 1978. - 160 с.
6. Блинова И. В., Попов И. Ю. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах. – СПб. 2017. - 57 с.
7. Васильев Н.В., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. - М. «Наука». - 1978. - 160 с.

***Olga B. Vergazova*,**
PhD, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
vergazova@bmstu.ru

Methodology for solving problems on the topic "Plotting graphs and curves defined parametrically"

Annotation. The relevance of the problem under study is due to the need for students to develop and improve their skills in plotting graphs and curves for various types of tasks. Such skills are necessary for the successful development of various disciplines. The article discusses a system of tasks arranged in increasing complexity, with which you can form and develop the skill of constructing curves and graphs in the case of parametric tasks. The results of the practical application of the exercise system in seminar classes for first-year students are also presented. The content of the article will be interesting for teachers, students, and high school students.

Keywords: method of solving problems in mathematical analysis, parametric assignment of a function, graph of a function, curve.

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОВЕРКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Аннотация

В курсе математической статистики важное место занимает задача оценивания неизвестных параметров закона распределения, общий вид (тип, класс) которого известен. Один из подходов к решению этой задачи заключается в проверке гипотез о значениях этих параметров. Соответствующие навыки имеют большое значение для практической работы будущего специалиста, что делает актуальным оттачивание методики изложения этого раздела. Целью работы является исследование методических аспектов изложения темы «Проверка параметрических гипотез» для студентов (бакалавров) инженерных специальностей.

Ключевые слова

статистическая гипотеза, параметрическая гипотеза, критерий проверки гипотез, ошибки первого и второго рода

АВТОРЫ

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-45-50

Введение

Как известно, например, из учебника Горяинова В.Б. с соавторами [1], одной из основных задач математической статистики является получение научно обоснованных выводов о свойствах массовых процессов или явлений по результатам экспериментов или наблюдений. Более узко одну из основных задач математической статистики можно сформулировать следующим образом: имеется случайная величина, закон распределения которой неизвестен; требуется по результатам наблюдений сделать выводы о ее законе распределения.

Одним из вариантов этой задачи является задача идентификации неизвестных параметров закона распределения, общий вид (тип, класс) которого известен. В ставших уже классическими учебниках Ивченко Г.И., Медведева Ю.И. [2] и Гмурмана В.Е. [3] указывается, что для решения этой задачи могут быть

использованы различные подходы. Одним из таких подходов является построение точечных оценок, общую информацию о которых можно найти, например, на электронном ресурсе [4], а методические аспекты преподавания соответствующего раздела изложены в работах Власова П.А. с соавторами [5 – 7]. Другой подход заключается в построении интервальных оценок неизвестных параметров; общую информацию о нем можно найти на электронных ресурсах [8,9], а методические аспекты его изложения — в работе Власова П.А. с соавторами [10].

Еще один подход к решению задачи идентификации неизвестных параметров заключается в проверке параметрических гипотез. Наряду с построением оценок неизвестных параметров указанный подход также можно назвать классическим, о чем свидетельствует его широкое освещение в учебной литературе (см., например, учебники Ивченко Г.И., Медведева Ю.И. [11], Гмурмана В.Е. [12], Горяинова В.Б. с соавторами [13]), а также научных и справочных изданиях, ссылки на которые можно найти на электронном ресурсе [14].

Настоящая работа посвящена методическим аспектам изложения темы «Проверка параметрических гипотез» в курсе математической статистики для студентов (бакалавров) технических специальностей.

Методология и результаты исследования

Перед рассмотрением задачи проверки гипотез необходимо ввести ряд необходимых определений.

Пусть X - случайная величина, закон распределения которой неизвестен. *Статистической гипотезой* будем называть любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Статистическую гипотезу будем называть *простой*, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X (то есть однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента); в противном случае будем называть статистическую гипотезу *сложной*.

Статистическую гипотезу будем называть *параметрической*, если она является утверждением относительно значений параметров закона распределения, общий вид которого известен, и *непараметрической* в противном случае.

Задача проверки статистических гипотез обычно ставится следующим образом: формулируются основная гипотеза H_0 и конкурирующая гипотеза H_1 , причем $H_0 H_1 = \emptyset$, но $H_0 + H_1$ не обязательно исчерпывает все возможные случаи. Требуется на основании экспериментальных данных, представленных выборкой $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, сделать вывод об истинности одной из этих двух гипотез.

Специфика рассматриваемой задачи и ее отличие от задачи построения точечных или интервальных оценок неизвестных параметров состоит в том, что для формулировки основной и конкурирующей гипотез требуется априорная информация о значениях неизвестных параметров. В некоторых случаях такую информацию можно получить из физических соображений, если оцениваемые параметры допускают соответствующую интерпретацию; в некоторых случаях помогает предварительный анализ экспериментальных данных.

Правило, посредством которого принимается решение в пользу основной или конкурирующей гипотезы, называют *критерием проверки гипотез*. Обычно критерий задают с использованием так называемого критического множества $W \subseteq \chi_n$, где χ_n - выборочное пространство (см., например, учебник Горяинова В.Б. с соавторами [15]). При этом собственно решающее правило имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{x} \in W & \Rightarrow \quad \textit{отклонить } H_0, \textit{ принять } H_1, \\ \vec{x} \in \chi_n \backslash W & \Rightarrow \quad \textit{принять } H_0, \textit{ отклонить } H_1. \end{cases}$$

Важно понимать, что при использовании любого критерия возможны ошибки двух видов.

1) *Ошибка первого рода*: принять конкурирующую гипотезу H_1 при истинности основной гипотезы H_0. Вероятность совершения этой ошибки

$$\alpha = P\left(\vec{X} \in W \middle| H_0\right) \tag{1}$$

называется *уровнем значимости* критерия.

2) *Ошибка второго рода*: принять основную гипотезу H_0 при истинности конкурирующей гипотезы H_1. Вероятность совершения этой ошибки

$$\beta = P\left(\vec{X} \notin W \middle| H_0\right), \tag{2}$$

при этом величина $1 - \beta$ называется *мощностью* критерия.

Разумеется, при построении критерия хотелось бы соблюсти требования

$$\begin{cases} \alpha \to min, \\ \beta \to min, \end{cases}$$

что однако принципиально невозможно ввиду ограниченности содержащейся в выборке $\vec{x}$ информации. По этой причине при построении критерия проверки статистических гипотез обычно фиксируют уровень значимости α и минимизируют вероятность совершения ошибки второго рода, то есть исходят из условия

$$\begin{cases} \beta \to min \\ \alpha = const \end{cases}$$

или, что эквивалентно, из условия

$$\begin{cases} 1 - \beta \to max \\ \alpha = const. \end{cases} \tag{3}$$

Пример 1. Рассмотрим задачу проверки двух простых параметрических гипотез

$$H_0 = \{\theta = \theta_0\}, \quad H_1 = \{\theta = \theta_1\},$$

$\theta_0 \neq \theta_1$, о значении неизвестного параметра θ закона распределения случайной величины X.

Пусть $F(x, \theta)$ — функция распределения случайной величины X. Из общей постановки задачи проверки параметрических гипотез следует, что F является известной функцией, что позволяет записать функцию правдоподобия $\mathcal{L}\left(\vec{X}, \vec{\theta}\right)$ случайной выборки $\vec{X}$ из генеральной совокупности X (см., например, учебник Горяинова В.Б. [16]). В статье Власова П.А. с соавторами [17] указывалось, что чем удачнее подобрано значение неизвестного параметра, тем большие значения принимает функция правдоподобия $\mathcal{L}\left(\vec{x}, \vec{\theta}\right)$. Это позволяет использовать функцию

$$\varphi\left(\vec{X}\right) = \frac{\mathcal{L}\left(\vec{X}, \theta_1\right)}{\mathcal{L}\left(\vec{X}, \theta_0\right)},$$

называемую отношением правдоподобия, в качестве характеристики, свидетельствующей в пользу одной из проверяемых гипотез. Очевидно, что «большие» значения статистики φ ассоциируются с истинностью конкурирующей гипотезы H_1, а «малые» — с истинностью основной гипотезы H_0. Это означает, что критерий проверки двух простых параметрических гипотез можно записать в виде

$$\begin{cases} \varphi(\vec{x}) \geq C_\varphi \quad \Rightarrow \quad \textit{отклонить } H_0, \textit{ принять } H_1, \\ \varphi(\vec{x}) < C_\varphi \quad \Rightarrow \quad \textit{принять } H_0, \textit{ отклонить } H_1, \end{cases}$$

где константа C_φ является некоторым пороговым значением. В соответствии с общими принципами (3) построения критериев проверки гипотез и соотношениями (1), (2) величина C_φ должна выбираться из условий

а) $P\left\{\varphi\left(\vec{X}\right) \geq C_\varphi | H_0\right\} = \alpha$,

б) вероятность β совершить ошибку второго рода не может быть уменьшена при заданном уровне значимости α.

Построенный критерий называется критерием Неймана-Пирсона.

Пример 2. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m неизвестно, а σ^2 известно. Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\}, \quad H_1 = \{m = m_1\},$$

где $m_0 < m_1$, о значении математического ожидания нормальной случайной величины в случае известной дисперсии.

Решение рассматриваемой задачи проведем с использованием построенного в предыдущем примере критерия Неймана-Пирсона. В статье Власова П.А. с соавторами [18] получено выражение для функции правдоподобия случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из нормальной генеральной совокупности:

$$\mathcal{L}(\vec{X}, m, \sigma^2) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\, exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right),$$

которое приводит к следующему представлению функции правдоподобия:

$$\varphi(\vec{X}) = \frac{\mathcal{L}(\vec{X}, m_1)}{\mathcal{L}(\vec{X}, m_0)} = exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(X_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2]\right] =$$

$$= exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[m_1^2 - m_0^2 - 2(m_1 - m_0)X_i]\right] = exp\left[\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2}\right].$$

Пороговое значение C_φ найдем условия, содержащегося в пункте а) предыдущего примера, рассмотрев цепочку эквивалентных утверждений:

$$\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad ln\,\varphi(\vec{X}) \geq ln\, C_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2} \geq ln\, C_\varphi.$$

С учетом неравенства $m_0 < m_1$ из условия настоящего примера получаем

$$\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}X_i \geq C,$$

где использовано обозначение

$$C = \frac{\sigma^2}{m_1 - m_0}\left[ln\, C_\varphi + \frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2}\right].$$

Поскольку генеральная совокупность X имеет распределение $N(m, \sigma^2)$ и, следовательно, независимые элементы X_i, $i = \overline{1, n}$, случайной выборки имеют то же самое распределение, заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(nm, n\sigma^2).$$

При истинности основной гипотезы H_0 справедливо равенство $m = m_0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(nm_0, n\sigma^2)$$

и условие а) для выбора порогового значения в критерии Неймана-Пирсона принимает вид

$$\alpha = P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi | H_0\} = P\{\sum_{i=1}^{n}X_i \geq C | m = m_0\} =$$
$$= 1 - P\{\sum_{i=1}^{n}X_i < C | m = m_0\} = 1 - \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (4)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{t^2/2}dt$$

— функция Лапласа (см., например, учебник А.В. Печинкина с соавторами по теории вероятностей [19]). Уравнение

$$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

вытекающее из цепочки равенств (4), имеет решение

$$C = nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n},$$

где $u_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального распределения (см., например, учебник В.Б. Горяинова с соавторами [20]).

Таким образом, в рассматриваемой в настоящем примере задаче проверки двух простых гипотез о значении математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии критерий Неймана-Пирсона принимает вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \textit{отклонить } H_0, \textit{ принять } H_1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i < nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \textit{принять } H_0, \textit{ отклонить } H_1, \end{cases}$$

а критическое множество W определяется условием

$$W = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n} \right\}.$$

При этом очевидно выполняется условие для построения статистического критерия, содержащееся в пункте б) предыдущего примера: вероятность совершения ошибки второго рода

$$\beta = P\{\vec{X} \notin W | H_1\} = P\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i < C | m = m_1 \right\} = \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{\sqrt{n}(m_1 - m_0)}{\sigma} \right)$$

не может быть уменьшена при заданном уровне значимости α.

Заключение

В работе рассмотрены методические аспекты изложения темы «Проверка параметрических гипотез» в курсе математической статистики для инженерных специальностей.

В ходе исследования рассмотрена методика изложения базовых понятий и основных принципов построения статистических критериев проверки гипотез, а также методика изложения решения некоторых задач проверки простых параметрических гипотез.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
2. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1984.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - 12-е изд. - М.: Издательство Юрайт, 2023.
4. Интернет- ресурс. - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_theory
5. Власов П. А., Андреева Т. В., Семенов Ю. С. Изложение метода моментов построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - Т. 1, №1. - P. 91-97. - URL: www.elibrary.ru/item.asp?id=53115570
6. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Изложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - №3. - P. 67-75. - URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54653953
7. Власов П. А., Ахметова Ф.Х., Головина А.М. Методика решения примеров по теме «построение точечных оценок» в курсе математической статистики / // Modern European Researches. — 2024. — Т. 1, № 2. – С. 25-33. - URL: https://elibrary.ru/contents.asp?id=74528301
8. Интернет- ресурс. - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_estimation
9. Интернет- ресурс. - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval
10. Власов П. А., Белоусов А. И., Хорькова Н. Г. Изложение темы «Интервальные оценки» в курсе математической статистики // Modern European Researches. - Salzburg, 2024. - №1 (Т1). - P. 68-77. - URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=65473076
11. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика
12. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика

13. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика
14. Интернет- ресурс. - URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Statistical_hypothesis_test
15. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика
16. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика
17. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Изложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика» // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - №3. P. 67-75. - URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54653953
18. Власов П.А., Велищанский М.А., Кавинов А.В. Изложение метода максимального правдоподобия построения точечных оценок в курсе «Математическая статистика»
19. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
20. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика

***Pavel A. Vlasov*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
pvlx@mail.ru
***Nina G. Khorkova*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
ninakhorkova@bmstu.ru
***Mikhail A. Velishchanskiy*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
velmiha@yandex.ru

Methodology for presenting the topic "Testing Parametric Hypotheses" in the course of Mathematical statistics

Abstract. The problem of estimating unknown parameters of a distribution law, the general form (type or class) of which is known, takes an important place in the Mathematical statistics course. One approach to solving this problem is to verify hypotheses about the values of these parameters. The corresponding skills are of great importance for the practical work of a future specialist, which makes it relevant to hone the methodology of presenting this section. The purpose of this article is to explore the methodological aspects of presenting the topic "Testing Parametric Hypotheses" for undergraduate engineering students.

Keywords: Statistical hypothesis, parametric hypothesis, criterion for selecting among hypotheses, type I error, type II error.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ СРАВНЕНИЯ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ

Аннотация

В работе проводится сравнительный анализ эффективности ряда критериев, предназначенных для проверки гипотезы об однородности двух выборок против альтернативы сдвига. Актуальность исследования обусловлена широким применением задач проверки однородности в A/B-тестировании, где требуется сравнение средних значений показателей контрольной и опытной групп. С помощью метода Монте-Карло оцениваются функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, медианного, Ван дер Вардена и Колмогорова — Смирнова для нормального распределения и распределений с тяжелыми хвостами. На основании сравнительного анализа эмпирических функций мощности критериев даны практические рекомендации по применению рассмотренных критериев проверки однородности.

Ключевые слова

метод Монте — Карло, функция мощности критерия, эмпирическая функция мощности, критерий Стьюдента, критерий Вилкоксона, медианный критерий, критерий ван дер Вардена, критерий Колмогорова — Смирнова

АВТОРЫ

Горяинов Владимир Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
vb-goryainov@bmstu.ru

Горяинова Елена Рудольфовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
goryainova@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-51-60

Введение

Критерии проверки однородности двух выборок находят широкое применение в различных областях, где требуется сравнить две группы и выяснить отличаются ли они по уровню (положению), или различия можно объяснить случайностью? Сферы практического применения этих критериев чрезвычайно разнообразны. В медицине и фармакологии — это сравнение эффективности лекарств, когда сравнивается группа пациентов, принимающих новый препарат, с контрольной группой. Так, в [1] описан пример выявления эффективности новой методики лечения алкоголизма. В экономике и бизнесе широко распространено A/B тестирование (сравнение эффективности двух вариантов маркетинговых стратегий, дизайнов сайтов, ценовых политик) и кредитный скоринг (сравнение характеристик «хороших» и «плохих» заемщиков). В биологии это, например, сравнение характеристик двух видов растений или животных,

сравнение результатов тестов в контрольной и экспериментальной группах, в химии - сравнение эффективности двух катализаторов, сравнение уровня загрязнения в разных районах, в промышленности — сравнение продукции двух производственных линий при контроле качества, оценка прочности разных видов сырья при сравнении материалов, сравнение эффективности двух технологических процессов при оптимизация процессов, сравнение времени безотказной работы разных моделей при исследовании надежности оборудования. В IT и Data Science это сравнение алгоритмов (например, оценка эффективности двух алгоритмов машинного обучения), тестирование производительности (сравнение времени отклика двух систем), анализ пользовательского поведения (сравнение метрик в разных группах пользователей). Примеры применения критериев проверки однородности двух выборок в этих и других областях можно найти в J. D. Gibbons, S. Chakraborti [2], H. Motulsky [3] и D.S. Moore, G.P. McCabe, B.A. Craig [4].

Существует (см., например [5]) много состоятельных критериев для проверки гипотезы об однородности. Напомним, что критерий называют состоятельным, если при росте объёма данных вероятность принятия альтернативы в случае, когда альтернатива верна, стремится к единице. При выборе критерия лучше опираться не на интуицию или привычку, а на объективный способ сравнения критериев. Другими словами, нужен объективный способ измерить, какой из критериев «лучше», т.е. нужна числовая характеристика, позволяющая их ранжировать.

Если цель исследования состоит в обнаружении эффекта (отклонения нулевой гипотезы), когда он действительно существует, то основная метрика при сравнении статистических критериев для проверки гипотез — это функция мощности критерия, значение которой в каждой точке определяется как вероятность принятия альтернативной гипотезы. Мощность критерия — это главный показатель качества критерия.

Данная статья посвящена сравнительному анализу мощности статистических критериев Стьюдента, Вилкоксона, медианного, Ван дер Вардена и Колмогорова-Смирнова для проверки гипотезы однородности двух выборок в модели сдвига. Исследование проводится для широкого класса распределений: нормального, логистического, Лапласа, Стьюдента с 5 степенями свободы, Коши и загрязнённого нормального распределения (распределения Тьюки).

Для сравнения критериев используется эмпирическая функция мощности, построенная методом Монте-Карло по 1000 повторений при объёмах выборок $m = n = 50$ и уровне значимости $\alpha = 0.05$. Мощность оценивается как частота отклонения нулевой гипотезы в пользу альтернативы при различных значениях сдвига второй выборки относительно первой.

Методология и результаты исследования

Описание критериев

Рассмотрим задачу проверки однородности двух выборок, которые могут отличаться параметром положения. Пусть выборка $X_1, \dots, X_m$ порождена случайной величиной с функцией распределения $F(x)$, а выборка $Y_1, \dots, Y_n$ порождена случайной величиной, имеющей функцию распределения $F(x-\theta)$. Везде далее предположим, что наблюдения $X_1, \dots, X_m,\ Y_1, \dots, Y_n$ являются независимыми случайными величинами. Будем проверять нулевую гипотезу $H_0: \theta = 0$, означающую однородность двух выборок, против альтернативной гипотезы $H_1: \theta > 0$. Опишем следующие состоятельные критерии для проверки гипотезы H_0 против H_1.

Двухвыборочный t-критерий Стьюдента. Для применения данного критерия требуется ввести ещё одно достаточно ограничительное условие — распределение $F(x)$ предполагается гауссовским. Статистика критерия Стьюдента имеет вид

$$t = \frac{\bar{Y}-\bar{X}}{S\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}},$$

где $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ — выборочное среднее первой выборки, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$ — выборочное среднее второй выборки, $S^2 = \frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}$ — объединённая оценка дисперсии, $s_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2$ — выборочная дисперсия первой выборки, $s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$ — выборочная дисперсия второй выборки.

При сделанных предположениях статистика t в случае справедливости гипотезы H_0 имеет распределение Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы. Таким образом, критическая область критерия Стьюдента при уровне значимости α имеет вид $\left(t_{1-\alpha,m+n-2};\infty\right)$, где $t_{1-\alpha,m+n-2}$ — $(1-\alpha)$-квантиль распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы. По центральной предельной теореме при справедливости H_0 и при $m,n \to \infty$ статистика t сходится по распределению к стандартной нормальной величине $N(0,1)$. Важнейшее свойство критерия Стьюдента (доказательство см., например, в [6]) состоит в том, что этот критерий является наиболее мощным критерием в ситуации, когда $F(x)$ является гауссовским распределением.

Ранговый критерий Вилкоксона. Статистика Вилкоксона (см., например, [7]) определяется как сумма рангов элементов первой выборки в объединенной упорядоченной выборке

$$W = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

где R_i — ранг элемента Y_i в объединенной выборке $\{X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$.

Напомним, что ранг элемента в выборке — это его порядковый номер в упорядоченной по возрастанию последовательности всех элементов выборки. Формально ранг элемента Y_i в объединенной выборке можно записать как

$$R_i = \sum_{k=1}^{m} I(X_k \le Y_i) + \sum_{j=1}^{n} I\left(Y_j \le Y_i\right),$$

где $I(\cdot)$ — индикаторная функция, определяемая как

$$I(A) = \begin{cases} 1, \text{если } A \text{ истинно} \\ 0, \text{если } A \text{ ложно} \end{cases}$$

Критерии, статистики которых являются функциями рангов, называют ранговыми критериями.

При нулевой гипотезе $H_0: \theta = 0$ и малых объёмах выборок ($m \le 30, n \le 30$) табулировано точное распределение статистики W. Важно отметить, что это распределение не зависит от распределения выборки $F(x)$. При больших объемах выборок ($m,n \to \infty$)

$$W^* = \frac{W-\mu_W}{\sigma_W} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

где

$$\mu_W = \frac{m(m+n+1)}{2}, \quad \sigma_W^2 = \frac{mn(m+n+1)}{12}.$$

Таким образом, при проверке гипотезы H_0 против альтернативы $H_1: \theta > 0$ критическая область критерия Вилкоксона со статистикой W^* при уровне значимости α имеет вид: $(z_{1-\alpha};\infty)$, где $z_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального распределения. Показано, что критерий Вилкоксона является локально наиболее мощным критерием среди ранговых критериев в случае, когда распределение $F(x)$ является логистическим.

Медианный критерий. Статистика медианного критерия определяется (см., например, [8]) как

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[sign\left(R_i - \frac{m+n+1}{2}\right) + 1\right],$$

где R_i — ранг элемента Y_i в объединенной выборке, а $sign(x)$ — функция знака

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

При нулевой гипотезе $H_0: \theta = 0$ и $m, n \to \infty$

$$S^* = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

где

$$\mu_S = \frac{m}{2}, \quad \sigma_S^2 = \begin{cases} \frac{mn}{4(m+n-1)}, & \text{если} m + n = 2k; \\ \frac{mn}{4(m+n)}, & \text{если} m + n = 2k - 1. \end{cases}$$

Отметим,что и для медианного критерия распределение статистики не зависит от распределения выборки $F(x)$, а критическая область для статистики S^* при проверке гипотезы H_0 против альтернативы $H_1: \theta > 0$ имеет вид $(z_{1-\alpha}; \infty)$, где $z_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1 - \alpha$ стандартного нормального распределения.

Критерий ван дер Вардена. Статистика критерия имеет вид (см., например, [9])

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{m+n+1}\right),$$

где R_i — ранг элемента Y_i в объединенной выборке $\{X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, а $\Phi(\cdot)$ - функция Лапласа. При нулевой гипотезе $H_0: \theta = 0$ и малых объёмах выборок ($m \leq 30, n \leq 30$) табулировано точное распределение статистики V. Важно отметить, что это распределение не зависит от распределения выборки $F(x)$. При больших объемах выборок ($m, n \to \infty$)

$$V^* = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

где

$$\mu_V = 0, \quad \sigma_V^2 = \frac{mn}{(m+n)(m+n+1)}\sum_{i=1}^{n+m}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i}{m+n+1}\right)\right)^2.$$

Как и для двух предыдущих критериев, критическая область для статистики V^* при проверке гипотезы H_0 против альтернативы $H_1: \theta > 0$ имеет вид $(z_{1-\alpha}; \infty)$, где $z_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1 - \alpha$ стандартного нормального распределения.

Критерий Колмогорова — Смирнова. Обозначим через $Z_1, \dots, Z_{m+n}$ — объединенную выборку двух независимых выборок $X_1, \dots, X_m$ и $Y_1, \dots, Y_n$; $F_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(X_i \leq x)$ — эмпирическую функцию распределения первой выборки, $G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Y_i \leq x)$ — эмпирическую функцию распределения второй выборки, где $I(\cdot)$ — индикаторная функция. Статистика Колмогорова — Смирнова определяется как максимальное расстояние между эмпирическими функциями распределения

$$D_{m,n} = \sup_x |F_m(x) - G_n(x)|$$

и на практике вычисляется по формуле

$$D_{m,n} = \max_{1 \leq i \leq m+n} |F_m(Z_i) - G_n(Z_i)|.$$

Критерий Колмогорова — Смирнова позволяет проверять гипотезу об однородности двух выборок $H_0: F_X(x) = F_Y(x)$ для любого $x \in R$ против альтернатив общего вида $H_A: F_X(x) \neq F_Y(x)$ хотя бы для одной точки x. Поскольку в данной работе мы проводим

сравнение критериев при односторонних альтернативных гипотезах, то и для критерия Колмогорова — Смирнова рассмотрим статистику, соответствующую односторонней альтернативе $H_A^+: F_X(x) > F_Y(x)$ хотя бы для одной точки x. Эта статистика имеет вид

$$D_{m,n}^+ = \max_{1 \le i \le n} \left(\frac{i}{n} - F_m\left(Y_{(i)}\right) \right),$$

где $Y_{(i)}$ — i-я порядковая статистика выборки $Y_1, \dots, Y_n$, а $F_m(\cdot)$ — эмпирическая функция распределения выборки $X_1, \dots, X_m$. Точное распределение статистик $D_{m,n}$ и $D_{m,n}^+$ для значений $m, n < 20$ табулировано в [10, с.346-347], при больших объемах выборок

$$\lim_{m,n \to \infty} \mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \le x \right) = K(x),$$

где $K(x)$ — функция распределения Колмогорова

$$K(x) = 1 - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2x^2}.$$

Критерий Колмогорова — Смирнова отклоняет гипотезу H_0 в пользу альтернативы $H_A^+: F_X(x) > F_Y(x)$ на уровне значимости α, если значение статистики $D^+ = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^+$ попадает в критическую область $(k_{1-\alpha}; \infty)$, где $k_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1 - \alpha$ распределения Колмогорова $K(x)$.

Количественное сравнение критериев

Количественное сравнение критериев — это ключ к осознанному выбору наилучшего метода для конкретной задачи. Одной из основных метрик для сравнения является функция мощности критерия.Определим понятие функции мощности критерия.

Пусть критерий со статистикой $T(Z)$ проверяет нулевую гипотезу $H_0: \theta = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1: \theta > 0$ на уровне значимости α. Тогда функция

$$\beta(\theta) = P(T(Z) \in V_\alpha | H_1 - \text{верна}),$$

где V_α — критическая область критерия со статистикой $T(Z)$, соответствующая уровню значимости α, называется функцией мощности критерия для альтернативы $H_1: \theta > 0$.

Таким образом, функция мощности критерия в каждой точке $\theta > 0$ показывает вероятность отклонения нулевой гипотезы H_0, когда верна альтернатива $H_1: \theta > 0$. Другим словами — это вероятность обнаружить сдвиг θ, когда он действительно существует. Поэтому критерий с более высокой кривой мощности является более предпочтительным для заданной альтернативы $H_1: \theta > 0$, так как он с большей вероятностью обнаруживает сдвиг. Понятно, что поведение функции мощности существенно зависит от распределения выборки $F(x)$.

Для некоторых из представленных критериев аналитическое описание функции мощности для альтернативы $H_1: \theta > 0$ является достаточно затруднительным при негауссовском распределении $F(x)$. Поэтому для наглядного проведения сравнительного анализа критериев мы воспользуемся методом стохастического моделирования и построим оценку для функции мощности, которую назовём эмпирической функцией мощности критерия.

Построение эмпирической функции мощности с помощью метода Монте-Карло состоит в следующем:

1. Зададим конкретные распределения F (например, нормальное, логистическое, двойное экспоненциальное, Стьюдента с 5-ю степенями свободы и загрязнённое нормальное) и величину сдвига θ второй выборки, которая будет принимать значения $\{0; 0{,}001k, k = 1, \dots, 500\}$.

2. Сгенерируем $N = 1000$ пар выборок X и Y объёма 50. В каждой паре выборка X будет иметь распределение $F(x)$, а выборка Y — распределение $F(x - \theta)$.

3. Для каждой пары выборок вычисляются значения всех рассматриваемых тестовых статистик (Стьюдента t, Вилкоксона W, медианного S, Ван дер Вардена V и Колмогорова-Смирнова D^+) и проверяется гипотеза $H_0: \theta = 0$.

4. Для каждой точки $\theta \in \{0; 0{,}001k, k = 1, \dots, 500\}$ мощность оценивается как частота экспериментов, в которых H_0 была отвергнута.

Поскольку, согласно теореме Бернулли, при большом числе испытаний частота события является несмещённой и состоятельной оценкой вероятности этого события, то построенная эмпирическая функция мощности будет являться несмещённой и состоятельной оценкой функции мощности критерия.

Результаты моделирования

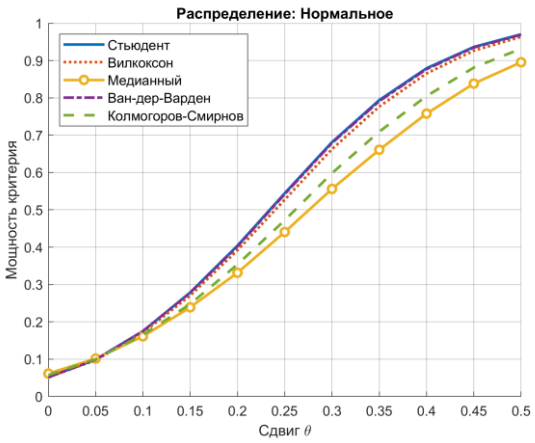


Рис. 1

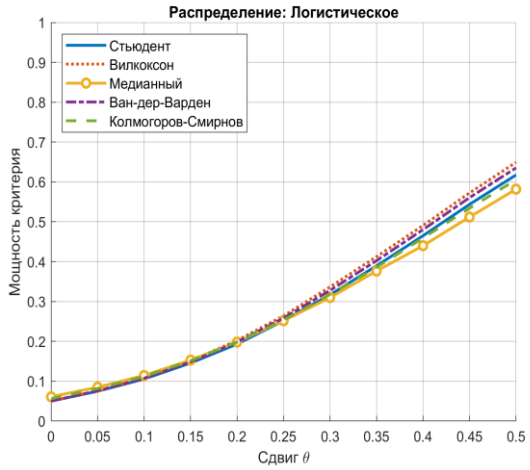


Рис. 2

На рис. 1 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является гауссовским, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N =1000. Графики эмпирических мощностей показывают, что при гауссовском распределении выборок самым мощным критерием является критерий Стьюдента. Таким образом, результаты стохастического моделирования подтверждают аналитический результат о том, что критерий Стьюдента является равномерно наиболее мощным критерием для проверки гипотезы $H_0: \theta = 0$ против $H_1: \theta > 0$ в гауссовском случае. Однако можно заметить, что ранговые критерии Ван дер Вардена и Вилкоксона проигрывают критерию Стьюдента весьма незначительно.

На рис. 2 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является логистическим, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N =1000. В случае логистического распределения выборок более мощным оказался критерий Вилкоксона.

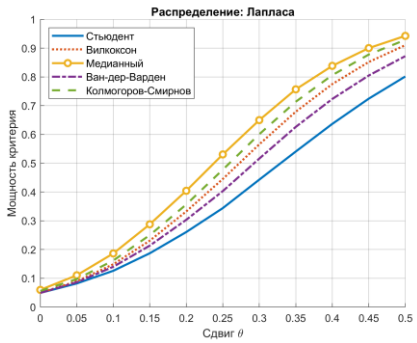


Рис. 3

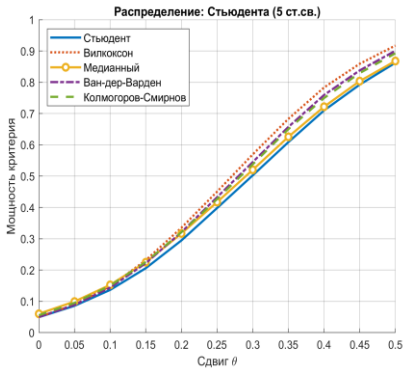


Рис. 4

На рис. 3 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является двойным экспоненциальным распределением (распределением Лапласа), выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N=1000. В этой ситуации лучшим оказался медианный критерий, и этот факт также согласуется с теоретическим положением о том, что медианный критерий является наиболее мощным проверки гипотезы $H_0: \theta = 0$ против $H_1: \theta > 0$ в случае двойного экспоненциального распределения выборок.

На рис. 4 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является распределением Стьюдента с 5 степенями свободы, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N=1000. Здесь снова лучшим оказался критерий Вилкоксона. Распределение Стьюдента с пятью степенями свободы и распределение Лапласа отностся к распределениям с тяжёлыми хвостами. Графики эмпирических мощностей показывают, что критерий Стьюдента уступает в мощности всем ранговым критериям и универсальному критерию Колмогорова — Смирнова.

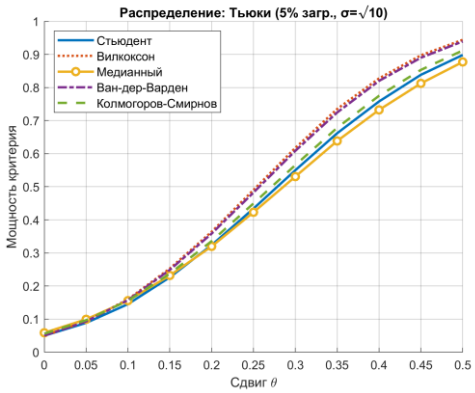


Рис. 5

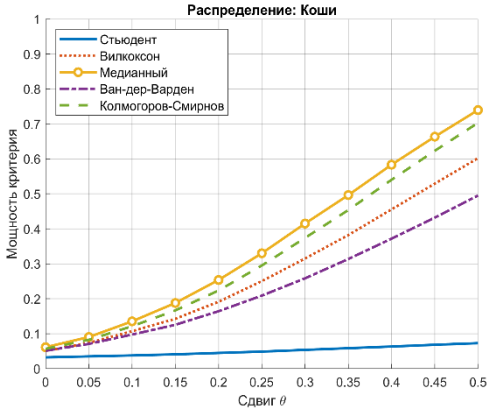


Рис. 6

На рис. 5 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является распределением Коши, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N=1000. Важно напомнить, что распределение Коши не имеет математического ожидания. И по этой причине критерий Стьюдента не является даже состоятельным для альтернативы $H_1: \theta > 0$, поскольку наличие конечного математического ожидания и конечной

дисперсии являются необходимыми условиями для применения критерия. Все ранговые критерии справляются с задачей принятия альтернативы в точках $\theta > 0$, лучшим оказывается медианный критерий.

Теперь рассмотрим семейство загрязнённых нормальных распределений, называемых распределениями Тьюки, которые описывают ситуацию появления в гауссовской выборке некоторой доли γ выбросов. Плотность распределения Тьюки имеет вид

$$f(x,\gamma,\sigma) = (1-\gamma)\tilde{f}(x) + \gamma\frac{1}{\sigma}\tilde{f}\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

где $\widetilde{f}(x)$ — плотность стандартного гауссовского распределения, $0 \le \gamma \le 1$ — доля загрязнения, σ^2 — дисперсия загрязняющего распределения.

На рис. 6 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является распределением Тьюки с долей загрязнения 0.05 и дисперсией загрязняющего распределения 10, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N=1000.

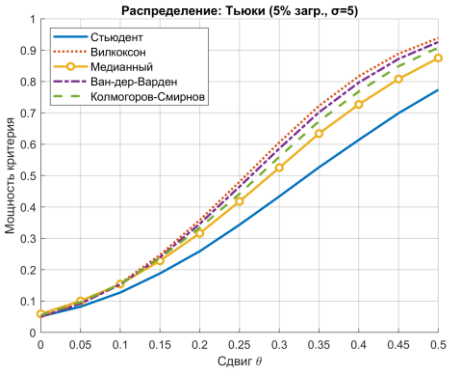


Рис. 7

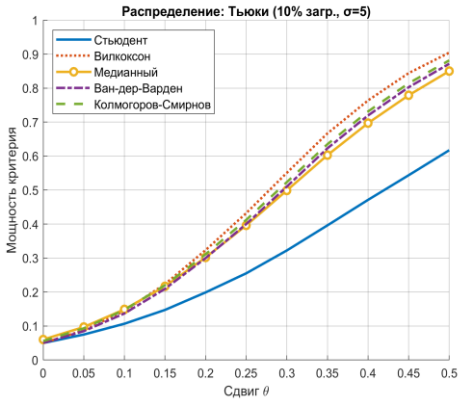


Рис. 8

На рис. 7 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является распределением Тьюки с долей загрязнения 0.05 и дисперсией загрязняющего распределения 25, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N=1000.

На рис. 8 разными цветами показаны эмпирические функции мощности критериев Стьюдента, Вилкоксона, Ван дер Вардена, медианного и Колмогорова — Смирнова для случая, когда распределение $F(x)$ является распределением Тьюки с долей загрязнения 0.1 и дисперсией загрязняющего распределения 25, выборки имеют равные объёмы $m = n = 50$, количество повторов N=1000.

На рисунках 6, 7 и 8 показаны эмпирические мощности рассматриваемых критериев с различными долями загрязнений и различными дисперсиями загрязняющего распределения. При всех рассмотренных значениях параметров γ и σ наибольшую мощность имеет ранговый критерий Вилкоксона. Критерий Стьюдента при малых значениях $\gamma = 0.05$ и малых дисперсиях $\sigma^2 = 10$ продолжает быть конкурентноспособным по отношению к рановым критериям, но при увеличении γ до 0.1 или при увеличении дисперсии до 25 критерий Стьюдента начинает существенно проигрывать ранговым критериям в мощности. Эти выводы хорошо согласуются с исследованиями в [11], где показано, что критерии, использующие предположение о гауссовости распределения наблюдений, не являются устойчивыми к аномальным наблюдениям.

Практические рекомендации

Для нормального распределения критерий Стьюдента показывает наивысшую мощность, поскольку он является равномерно наиболее мощным для нормальных данных.

Для распределения Коши критерий Стьюдента не является состоятельным, т.е. неспособен отклонить основную гипотезу в ситуации, когда она неверна. Для критериев Вилкоксона, медианного, Ван-дер-Вардена и Колмогорова-Смирнова требование конечности среднего не является необходимым, поэтому они демонстрируют свойство состоятельности на распределении Коши; наиболее мощным в этой ситуации оказался медианный критерий. Для распределений с тяжелыми хвостами все ранговые критерии показывают более высокую мощность по сравнению с критерием Стьюдента. В случае распределения Стьюдента с малым числом степеней свободы и загрязнённого нормального распределения с различными параметрами засорения лучшим оказывается критерий Вилкоксона, для двойного экспоненциального распределения наиболее мощным является медианный критерий. Критерий Колмогорова-Смирнова является состоятельным для всех рассмотренных распределений, однако ни на одном из них не является лучшим. Этот факт обусловлен тем, что этот универсальный критерий является состоятельным для любых альтернатив о неоднородности двух выборок, но для выборок, отличающихся сдвигом, имеет мощность более низкую по сравнению с критериями, оптимальными для проверки альтернатив сдвига. Важно отметить, что ранговые критерии Вилкоксона и Ван дер Вардена совсем незначительно проигрывают критерию Стьюдента в мощности в случае гауссовского распределения.

Заключение

Проведённое исследование подтвердило, что выбор оптимального критерия проверки однородности существенно зависит от распределения данных. А именно, для проверки гипотезы однородности против альтернативы сдвига существует несколько состоятельных критериев. Выбор между ними зависит от предположений о виде распределения F наблюдаемой выборки.

Если есть уверенность в нормальности, то предпочтителен t-критерий, поскольку он наиболее мощный в этом классе. Если выборки имеют распределение с тяжёлыми хвостами или есть сомнения в том, что выборки имеют гауссовское распределение, то оптимальным выбором является ранговый критерий Вилкоксона.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Hollander M., Wolfe D. A., Chicken E. (2014)Nonparametric Statistical Methods (3rd ed.). Wiley.- 819 p.
2. Gibbons J. D., Chakraborti S. (2010) Nonparametric Statistical Inference (5th ed.). CRC Press.- 652 p.
3. Motulsky H. (2018) Intuitive Biostatistics (4th ed.). Oxford UP.- 605 p.
4. Moore D.S., McCabe G.P., Craig B.A. (2019) Introduction to the Practice of Statistics, 9th edition. New York: W.H. Freeman.- 816 p.
5. Кобзарь А.И. (2006) Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. - М.: ФМЛ.- 816 с.
6. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. (2010) Введение в математическую статистику. - М.: Издательство ЛКИ.- 600 с.
7. Горяинова Е.Р., Панков А.Р., Платонов Е.Н. (2012) Прикладные методы анализа статистических данных. - М.: Издательский дом Высшей школы экономики. - 310 с.
8. Гаек Я., Шидак З. (1971) Теория ранговых критериев. - М.: Издательство «Наука». – 376 с.
9. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика ИЛ, 1960.- 435 с.
10. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. (1983) Таблицы математической статистики. - М.: Издательство Наука.- 416 с.
11. Huber P.J., Ronchetti E.M. (2009) Robust statistics. Wiley.-360 p.

***Vladimir B. Goryainov*,**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
vb-goryainov@bmstu.ru
***Elena R. Goryainova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
goryainova@bmstu.ru

Application of the Monte-Carlo method for comparing power functions of homogeneity tests

Abstract. This paper presents a comparative analysis of the efficiency of several statistical tests designed to assess the hypothesis of homogeneity between two samples against a location-shift alternative. The relevance of this study stems from the widespread use of homogeneity testing in A/B testing, where comparison of the mean performance metrics between control and experimental groups is required. Using the Monte Carlo method, power functions of the Student's t-test, Wilcoxon rank-sum test, median test, van der Waerden test, and Kolmogorov–Smirnov test are evaluated under both normal and heavy-tailed distributions. Based on a comparative analysis of the empirical power functions, practical recommendations are provided for the application of these homogeneity tests.

Keywords: Monte Carlo method, test power function, empirical power function, Student's t-test, Wilcoxon test, median test, van der Waerden test, Kolmogorov–Smirnov test.

МНОГОЧЛЕНЫ В ЗАДАЧАХ ОГЭ И ЕГЭ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Аннотация

В статье обсуждаются основные понятия, возникающие при решении большого числа задач, предлагаемых на ОГЭ и ЕГЭ - многочленов. Актуальность такого обсуждения обусловлена тем, что умение работы с многочленами высоких степеней практически не рассматривается в рамках школьного курса математики. Цель работы – показать основные приемы решения задач, где присутствуют многочлены различных порядков. Работа предназначена для самостоятельного изучения школьникам, дополнительно изучающим в школе математику.

Ключевые слова

многочлен, делимость, корни, рациональная дробь, Виет

АВТОРЫ

Грибов Александр Федорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Краснов Игорь Константинович,
кандидат технических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Жидков Евгений Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана», г. Москва
enzhidkov@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-61-69

Введение

Тема многочлены является одной из важнейших при подготовке к Основному Государственному Экзамену (ОГЭ) и Единому Государственному Экзамену (ЕГЭ). Умение работы с многочленами требуется как для решения простых задач из первой части ЕГЭ, так и практически во всех задачах второй части, в том числе и при решении задач с параметрами и задач на теорию чисел. Кроме того, многие разделы математики, которые изучаются в ВУЗах, такие как математический анализ, линейная алгебра, теория кодирования и другие опираются на аппарат многочленов и эти знания важны для тех, кто собирается продолжить свое обучение. В классических учебниках по алгебре А.Г. Куроша [1], Д.К. Фаддеева и И.С.Сонимского [2] подробно рассмотрена общая теория многочленов. При этом первый учебник рассчитан на студентов-математиков. Второй предназначен для самостоятельного изучения и может быть полезен школьникам. Задачи, предлагаемые на ЕГЭ [3] имеют свои особенности. Так для задач с параметрами иногда удобно рассматривать многочлен как функцию параметра, а переменную считать параметром. Кроме аналитического

решения рассматривают графические, изображая уравнения в различных декартовых системах координат. Графический способ часто упрощает решение, изображая уравнения в различных декартовых системах координат. Графический способ часто упрощает решение, позволяя наглядно представить уравнения в виде кривых на плоскости. Обычно это так называемые кривые второго порядка – окружности, параболы, гиперболы, а также прямые. Изменяя параметр, можно видеть, как пересекаются кривые и описать их пересечение – результаты решения задачи. Часто используют систему координат «переменная – параметр», считая их равноправными. В вариантах ЕГЭ встречаются задачи вида $f\big(g(x)\big) = f\big(\varphi(x)\big)$, где функция $f(t)$ – монотонная. Тогда это уравнение равносильно уравнению $g(x) = \varphi(x)$. Аналогично решаются и неравенства этого типа. Как на олимпиадах, так и на ЕГЭ периодически бывают задачи, в которых используют симметрию относительно переменной. Если система (уравнение) симметрична относительно переменной *x*, то вместе с решением (x, y) будет и решение $(-x, y)$. Тогда, если в задаче говорится о нечетном количестве решений, то есть обязательно решение $x = 0$. Некоторые из приемов решения рассматриваются в этой работе.

Методология и результаты исследвоания

Основы теории многочленов

Определения. Многочленом от переменной *x* называется выражение вида

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

где $a_0, \dots, a_n$ – действительные числа, а n – натуральное число. Числа $a_0, \dots, a_n$ называют коэффициентами многочлена $f(x)$, а a_n – его старшим коэффициентом. Если $n = 0$ и $a_0 = 0$, то $f(x) = 0$ и называют нулевым многочленом. Уславливаются не писать слагаемые ненулевого многочлена с коэффициентами, равными нулю, и его коэффициенты $a_i = 1$ при $i > 0$. Например, многочлен $0 + 1x + 0x^2 + 2x^3$ записывается в виде $x + 2x^3$.

Если $f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, то число *n* называют степенью многочлена $f(x)$ и обозначают как $S(f)$.

Два многочлена от переменной *x* называются равными, если при соответствующих степенях *x* их коэффициенты равны.

Определены операции *сложения, умножения и вычитания многочленов*. Так произведением многочленов $f(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m$ называют многочлен $f(x)g(x) = d_0 + d_1x^1 + \cdots + d_{n+m}x^{n+m}$, коэффициенты которого определяются как $d_i = \sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}$, т.е. коэффициент d_i равен сумме результатов перемножения таких коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, сумма индексов которых равна i. Эти операции обладают следующими свойствами:

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ – коммутативность сложения;

$\big(\mathrm{f(x) + g(x)}\big) + \varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} + \big(\mathrm{g(x)} + \varphi(\mathrm{x})\big)$ – ассоциативность сложения;

$f(x)g(x) = g(x)f(x)$ – коммутативность умножения;

$\big(f(x)g(x)\big)\varphi(x) = f(x)\big(g(x)\varphi(x)\big)$ – ассоциативность умножения;

$\big(\mathrm{f(x) + g(x)}\big)\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)}\varphi(\mathrm{x}) + \mathrm{g(x)}\varphi(\mathrm{x})$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

Разность $f(x) - g(x)$ можно определить как сумму многочленов $f(x)$ и $-g(x)$.

Отметим, что операция вычитания многочленов является обратной к операции сложения.

Делимость многочленов. Нетрудно убедиться, что для операции умножения многочленов не существует обратной операции – деления. Поэтому для многочленов

выполняется деление с остатком, частным случаем которого является деление нацело, или просто деление.

Определение. Если для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют многочлены $h(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющие условиям $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$ и $S(r) < S(g)$, то многочлены $h(x)$ и $r(x)$ называют соответственно частным и остатком от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

В этом случае будем говорить, что $f(x)$ делится на $g(x)$ с остатком $r(x)$ и частным $h(x)$. Если остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулевому многочлену (то есть нулю), то будем говорить, что $f(x)$ делится (или нацело делится, или делится без остатка) на $g(x)$. Запись $g|f$ будет означать, что g делит f. Отметим, что если $f \neq 0, g \neq 0$ и $g|f$, то $S(g) < S(f)$.

Сформулируем **теорему** о выполнении и однозначности деления с остатком. Каковы бы не были многочлен $f(x)$ и ненулевой многочлен $g(x)$, существуют единственные многочлены $h(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющие условиям $S(r) < S(g)$ и $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$.

Заметим, что если степень многочлена $f(x)$ меньше степени многочлена $g(x)$, то многочлен $h(x) \equiv 0$, то есть совпадает с нулевым многочленом.

Рассмотрим пример на делимость многочленов с остатком.

Пример. Разделим

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
2x^4 - 2x^2 & 2x^2 - 3x + 6 \\ \cline{1-1}
-3x^3 + 6x^2 + 1 & \\
-3x^3 + 3x & \\ \cline{1-1}
6x^2 - 3x + 1 & \\
6x^2 - 6 & \\ \cline{1-1}
-3x + 7 &
\end{array}
$$

Таким образом, получаем

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 = (2x^2 - 3x + 6)(x^2 - 1) + (-3x + 7).$$

Свойства делимости многочленов:

если $g|f$ и $h|g$, то верно соотношение $h|f$;

если $h|f$ и $h|g$, то верны соотношения $h|(f + g)$ и $h|(f - g)$);

если $h|f$, то для любого многочлена g верно соотношение $h|fg$.

Корни многочленов.

Определение. Число c называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(c) = 0$.

Теорема (Безу). Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $(x - c)$ равен $f(c)$.

Например, остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ на $x - 1$ равен $r(x) = f(1) = 9$.

Из теоремы Безу вытекает такое следствие: число c будет корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $(x - c)|f(x)$.

Кратностью корня c многочлена $f(x)$ называют кратность линейного множителя $(x - c)$ в каноническом разложении $f(x)$. Иначе говоря, число c называется корнем многочлена $f(x)$ кратности k, где $k \geq 1$, если $f(x) = (x - c)^k g(x)$ и c не является корнем многочлена $g(x)$.

Теорема о числе корней многочлена.

Число корней многочлена $f(x)$ не превосходит степени f, если даже каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Таким образом, сумма кратностей корней не больше степени f и число различных корней не больше степени f.

Теорема Виета (устанавливает связь между коэффициентами многочлена и его корнями).

Если числа $x_1,, \dots, x_n,\ n \geq 1$, являются корнями многочлена $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, то верны следующие равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_1x_2 \dots x_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{a_n}. \end{cases};$$

Отметим, что эти равенства получаются из разложения $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ в результате раскрытия скобок и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях *x*.

Для многочлена с действительными коэффициентами справедливо следующее каноническое разложение:

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \dots (x - c_S)^{k_S}(x^2 + p_2x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}.$$

Здесь линейные множители соответствуют действительным корням, а квадратичные - парам комплексных корней ($p_i^2 - 4q < 0$).

Пример. Многочлен

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - x + 2).$$

Рациональные дроби. Разложение их на простейшие.

Частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ называется рациональной дробью. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя. Всякую дробь можно записать в виде суммы правильной дроби и некоторого многочлена.

Простейшими дробями будем называть дробь вида $\frac{a}{(x-c)^k}$, где a и c – действительные числа, и дробь $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$, где a, b, p, q – действительные числа, удовлетворяющие условию $p^2 - 4q < 0$.

Всякая правильная дробь единственным образом разлагается в сумму простейших дробей

Теорема. Пусть $\frac{f(x)}{g(x)}$ правильная дробь с вещественными коэффициентами, а многочлен $g(x)$ допускает разложение в виде

$$g(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_S)^{k_S}(x^2 + p_2x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t}.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{a_n}\left[\frac{a_{11}}{(x - x_1)} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \right.$$

$$+ \frac{a_{s1}}{(x - x_s)} + \frac{a_{s2}}{(x - x_s)^2} + \dots + \frac{a_{sk_s}}{(x - x_1)^{k_s}} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)} +$$

$$+\frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{b_{1l_1}x+c_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\cdots+$$

$$+\frac{b_{t1}x+c_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)}+\cdots+\frac{b_{tl_t}x+c_{tl_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}\Bigg],$$

где a_{ji}, b_{ji}, c_{ji} — вещественные числа.

Универсальным способом построения такого разложения является метод неопределенных коэффициентов. Применяя этот способ, мы правую часть фигурирующего в теореме разложения приводим к общему знаменателю, считая при этом коэффициенты числителя простейших дробей неопределенными, и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x* полученного таким образом числителя и многочлена $f(x)$, что позволяет найти значения неопределенных коэффициентов.

Пример. Дробь

$$\frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители левой и правой частей:

$$x^3+4x^2+4x+2=a(x+1)(x^2+x+1)+b(x^2+x+1)+(cx+d)(x+1)^2.$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} x^3: & a+c=1 \\ x^2: & 2a+b+2c+d=4 \\ x^1: & 2a+b+c+2d=4 \\ x^0: & a+b+d=2 \end{array}$$

Решив эту систему, найдем, что $a=0, b=c=d=1$. В результате получаем

$$\frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Некоторые задачи ОГЭ, ЕГЭ и олимпиад, связанные с многочленами

Сформулируем некоторые утверждения, используемые при решении многих задач.

Теорема. Для того чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была корнем уравнения

$$a_0+a_1x^1+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$$

с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы p было делителем свободного члена a_0, а q было делителем старшего коэффициента a_n.

Отсюда можно получить два следствия.

Следствие 1. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Следствие 2. Если уравнение имеет целые коэффициенты и старший из них равен единице, то рациональными корнями такого уравнения могут быть только целые числа.

Пример. Рассмотрим уравнение, которое получается после преобразования неравенства, предложенного на ЕГЭ 2020 года.

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x = x(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0.$$

Нетрудно заметить, что кроме корня $x = 0$ есть еще и корень $x = 1$. Следовательно, как сказано выше, многочлен $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ нацело делится на двучлен $x - 1$. Деление можно провести «уголком». Получим $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

и, находя по теореме Виета корни квадратного трехчлена, получаем

$x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x = x(x - 1)^2(x - 2)$. Таким образом, корнями уравнения являются $x = 0, x = 1$ и $x = 2$. При этом $x = 1$ является корнем кратности 2.

Частное от деления многочлена на двучлен х-а можно найти так же с помощью так называемой схемой Горнера. Произвольный многочлен в соответствии с теоремой о делении с остатком можно представить в виде

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = (x - a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + r.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов $b_k: k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = b_{n-1}a + a_{n-1}, \dots, b_k = b_{k+1}a + a_{k+1}, \dots, b_0 = b_1 a + a_1, R = b_0 a + a_0.$$

Вычисления обычно располагаются в виде таблицы:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1}a + a_{n-1}$	$b_{n-3} = b_{n-2}a + a_{n-2}$	$\cdots$	$b_0 = b_1 a + a_1$	$r = b_0 a + a_0$

Деление многочлена из примера с использованием алгоритма схемы Горнера:

	$a_3 = 1$	$a_2 = -4$	$a_1 = 5$	$a_0 = -2$
a=1	b_2 =1	$b_1 = 1 * 1 + (-4) = -3$	$b_0 = (-3) * 1 + 5 = 2$	$r = 2 * 1 + (-2) = 0$

В задачах ОГЭ 9 класса используются только простейшие свойства многочленов, одним из которых является разложение квадратного трехчлена на множители. *Например*, надо исследовать функцию

$$y = \frac{(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 2x - 3}$$

и определить, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку. Для решение этой задачи, разложим квадратные трехчлены на множители, найдя их корни с использованием теоремы Виета:

$$y = \frac{(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)}$$

Или

$$\begin{cases} y = (x + 2)(x - 1) \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$y(-1) = -2$; $y(3) = 10$. Следовательно прямая $y = m$ при $m = -2$ и $m = 10$ пересекает нашу параболу только в одной точке

Рассмотрим задачу, которая предлогалась на олимпиаде «Шаг в будущее» и решение которой опирается на теорему Виета для многочлена третьей степени

Пример. Пусть a, b, c различные корни многчлена $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$. Найти $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$. Выражение $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$ в соответствии с теоремой Виета равно коэффициенту a_1 в уравнении $y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$, если многочлен имеет три корня y_1, y_2, y_3. Поэтому надо найти многочлен третьей степени, корни которого есть $a^2, b^2,$ и c^2. Пусть многчлен $f(x)$ имеет n различных действительных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогда $f(x) = (x - x_1)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Если многочлен $g(y)$ имеет n различных действительных корней $x_1^2, x_2^2, \dots x_n^2$, то $g(y) = (y - x_1^2)(y - x_2^2) \dots (y - x_n^2)$. Тогда

$$g(y) = (-1)^n f(x) \cdot f(-x) = (-1)^n (x - x_1)(-x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)(-x - x_n) =$$
$$= (-1)^n (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \cdot \dots \cdot (x^2 - x_n^2) =$$
$$= (-1)^n (y - x_1^2)(y - x_2^2) \cdot \dots \cdot (y - x_n^2), \qquad \text{где } y = x^2.$$

В нашем случае

$$g(y) = -f(x) \cdot f(-x) = -(x^3 + x^2 - 2x - 1)(-x^3 + x^2 + 2x - 1) =$$
$$= x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1 = y^3 - 5y^2 + 6y - 1, \text{где } y = x^2.$$

Таким образом, $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 6$.

При решении уравнений (неравенств) с параметрами иногда удобно рассматривать их как функцию, аргументом которой является параметр. М.И. Нараленков [4] сформулировал основные случаи, когда удобно применение метода решения относительно параметра.

Рассмотрим *Пример*. Найти все значенич параметра a, при которых уравнение $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$ имеет решения. Указать количество корней при каждом значении параметра.

Решение. Рассмотрим уравненик как квадратный трехчлен относительно параметра.

$$a^2 - 2(3 - x)a + 5 - x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 10x = 0, \qquad \frac{D}{4} = (x + 1)^2(x - 2)^2,$$
$$a = 3 - x \pm (x + 1)(x - 2) \text{ следовательно } a = x^2 - 2x + 1 \text{ и } a = -x^2 + 5.$$

Уравнение $a = x^2 - 2x + 1$ имеет при $a = 0$ одно решени и при $a > 0$ два решения.

Уравнение $a = -x^2 + 5$ имеет при $a = 5$ одно решение и при $a < 5$ два решения.

Рассматривая эти два уравнения совместно, получаем, что при $a = 1$ и $a = 4$ один из корней у них совпадает. Объединяя решения обоих уравнений, получаем, что при $a < 0$ и $a > 5$ уравнение имеет два решения; при $a = 0, a = 1, a = 4$ и $a = 5$ – три решения; при $a \in (0,1) \cup (1,4) \cup (4,5)$ –четыре решения.

Рассмотрим *неравенство с парвметром*. Найти такие значения x у неравенства

$$(a + 2)x^3 - (1 + 2a)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$$

при которых неравенство не будет выполняться ни при одном $a \in [-2,1]$.

Решение. Перепишем неравенство, рассматривая параметр как переменную

$f(a) = a^2 + (x^3 - 2x^2 + 4)a + 2x^3 - x^2 - 6x - 5 > 0$. Условие задачи будет выполняться, если отрезок $[-2,1]$ находится между корнями. Воспользовшись изложенными в книге В.В. Ткачука [5] условиями расположениия корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра, получаем

$$\begin{cases} f(-2) = 3(x + 1)(x - 3) \le 0 \\ f(1) = 3x(x + 1)(x - 2) \le 0 \end{cases} \Longrightarrow x \epsilon \{-1\} \cup [0,2]$$

Здесь мы использовали первое утверждение о расположении корней квадратного трехчлена в зависимости от его коэффициентов:

квадратный трехчлен $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два корня и один из них больше некоторого числа N, а другой меньше $\Leftrightarrow af(N) < 0$,

квадратный трехчлен $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два корня и они оба больше некоторого числа $N \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{2a} > N \\ af(N) > 0 \end{cases}$,

квадратный трехчлен $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два корня и они оба меньше некоторого числа $N \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{2a} < N \\ af(N) > 0 \end{cases}$.

Еще один *Пример,* использующий уивкрждения о расположении корней квадратного трехчлена, взятый из задач ЕГЭ 2013 года.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(4\cos x - 3 - a)\cos x — 2.5\cos 2x + 1.5 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде $t^2 + (3 + a)t - 4 = 0$, где $t = \cos x$. Следовательно, исходное уравнение имеет хотя бы один корень, если квадратное уравнение имеет хотя бы один корень на интервале $[-1, 1]$. Рассмотрим противоположную задачу: найти те значения параметра, при котором оба корня находятся вне интервала. Возможны три случая: оба корня больше единицы, оба корня меньше минус единицы и интервал между корнями. Так как дискриминант здесь больше нуля при любом значении параметра, то эти три случая записываются в виде

$$\begin{cases} f(1) > 0 \\ -\dfrac{3+a}{2} > 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} f(-1) > 0 \\ -\dfrac{3+a}{2} < -1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}.$$

Первые две системы дают пустые множества, а третья $a \in (-6{,}0)$. Таким образом, ответом будет $a \in (-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$.

Замечание. Противоположную задачу мы здесь рассмотрели только для примера такого решения. В данном примере рассмотрение прямой задачи также приводит к аналогичным трем системам.

*Пример.*Найти все целые значения параметра a, при каждом изкоторых уравнение

$2x^7 - 4x^6 + 11x^5 - 18x^4 + 25x^3 - 2(a + 16)x^2 + 25x - 5a - 23 = 0$ имеет хотя бы один целый корень.

Решение. Относительно параметра уравнение является линейным и его можно перписать в виде

$$a = \frac{2x^7 - 4x^6 + 11x^5 - 18x^4 + 25x^3 - 32x^2 + 25x - 23}{2x^2 + 5}.$$

Разделив числитель на знаменатель, получаем

$$a = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 + \frac{7}{2x^2 + 5}.$$

Поскольку по условию числа a и x целые, число $\frac{7}{2x^2+5}$ тоже должно быть целое. Это возможно только если $2x^2 + 5 = 1$ или $2x^2 + 5 = 7$. Первое уравнение не имеет решений, увторого корни $x = -1, x - 1$. Этим значениям соответствуют два значения $a = -20$ и $a = -2$.

*Пример.*При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 14x + 8 = 0$ составляют геометрическую прогрессию ?

Решение. Пусть x_0, x_0q, x_0q^2 — корни уранения. Тогда

$$x^3 + ax^2 + 14x + 8 = (x - x_0)(x - x_0q)(x - x_0q^2).$$

Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях x левой и правой частях равенства, получаем

$$\begin{cases} x_0 + x_0 q + x_0 q^2 = -a \\ x_0^2 q + x_0^2 q^2 + x_0^2 q^3 = 14 \\ x_0^3 q^3 = -8 \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем, что $ax_0 q = -14$. Из третьего уравнения вытекает равенство $(ax_0 q)^3 = -8a^3$ и, таким образом, $a = 7$.

В задачах ЕГЭ встречаются и так называемые однородные многочлены от нескольких переменных. Это многочлены, все ненулевые члены которого имеют одинаковую степень. Чаще всего это многочлены от двух переменных степени два: $f(x, y) == ax^2 + bxy + cy^2$.

Пример. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения $3a^{2x} - 16^x + 2(4a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-2, -1]$.

Решение. Левую часть уравнения можно рассматривать как однородный многочлен от двух переменных $f(u, v) = 3u^2 - v^2 + 2uv$, где $u = a^x, v = 4^x$. Так как $v > 0$, разделив уравнение на v^2, получим равносильное уравнение $3t^2 + 2t - 1 = 0$, где $t = \frac{u}{v} = (a/4)^x > 0$. Отсюда $(a/4)^x = 1/3$. Или $a = 4 \cdot 3^{-\frac{1}{x}}$. Так как функция от x монотонно возрастающая, то $x \in [-2, -1] \Longrightarrow a \in \left[4\sqrt{3}, 12\right]$.

Заключение

В работе изложены основные понятия, с которыми школьник встречается при изучении теории многочленов. Рассмотрено большое число примеров, включая задачи повышенной сложности, в которых существенно используются свойства многочленов. Может быть полезна школьникам, изучающим дополнительные разделы математики, а также студентам младших курсов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб: Лань, 2025. - 432 с.
2. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Алгебра. М: Наука, 1964 г. – 528 с.
3. ЕГЭ 2025. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий / под ред. И. В. Ященко. - М.: Издательство «Экзамен», 2025. - 160 с.
4. Нараленков М.И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра. М: Экзамен, 2003. – 446 с.
5. Ткачук В.В. Математика – абитуриентам. М.: МЦНМО, 2024 – 960 с.

Gribov A.F.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Bauman Moscow State Technical University, Moscow
alexandr-gribov@list.ru
Krasnov I.K.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Bauman Moscow State Technical University, Moscow
igorkrsnv@yandex.ru
ZhidkovE.N.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Bauman Moscow State Technical University, Moscow
enzhidkov@yandex.ru

Polynomials in BSE and USE problems for schoolchildren

Abstract. This article discusses the fundamental concepts that arise when solving a large number of problems involving polynomials, presented on the Basic State Exam (BSE) and Unified State Exam (USE). This discussion is relevant because working with high-degree polynomials is rarely covered in school mathematics. The purpose of this article is to demonstrate the basic techniques for solving problems involving polynomials of various orders. This article is intended for independent study by students taking additional mathematics classes at school.

Keywords: polynomial, divisibility, roots, rational fraction, Viet.

ИСТОРИКО-МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Аннотация

В статье представлены отдельные особенности методики преподавания темы измерения площадей плоских фигур для студентов младших курсов физико-математических специальностей. Целью данной работы являлось продемонстрировать методику реализации исторического подхода для исследования проблемы измерения величин. На примере площади плоской фигуры рассмотрен план освоения генетической модели измерения площадей, обозначены основные методические и научные аспекты.

Ключевые слова

величина, мера измерения, функция площади на классе многоугольных фигур, площадь плоской фигуры, разбиение многоугольной фигуры

АВТОРЫ

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

Пинчук Ирина Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»;
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
irenepin@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-70-82

Введение

Обучающийся школьник или уже студент, приобретая знания по геометрии в рамках различных предметных дисциплин, привыкает к суждению о том, что геометрические фигуры отличаются друг от друга наличием или отсутствием определенного свойства. Однако, в ходе обучения следует замечать, что относительно некоторых свойств различные фигуры могут этими свойствами обладать в меньшем или большем количестве. Тогда можно и указать разную степень проявления этого свойства у различных фигур, введя единицу этого свойства. Под такими, например, свойствами геометрических фигур мы понимаем, что отрезок имеет длину, плоская фигура имеет площадь, а тело имеет объем. При рассмотрении такого рода свойств фигур, вполне естественно, определяются два проблемных аспекта. Первая проблема связана с нашим осмыслением того, когда следует считать, что геометрическая фигура обладает или не обладает интересующим нас свойством. А вторая проблема связана с нашим пониманием того, как можно определить степень выраженности этого свойства, его количество у изучаемой нами фигуры. То есть появляется задача о нахождении правила или закона, по которому можно фигуре

сопоставить неотрицательное число, указывающее на количество единиц имеющегося у нее свойства. Что принято называть, например, мерой длины, мерой площади или мерой объема. Хотя мы привыкли говорить кратко соответственно длина, площадь или объем. С методической точки зрения важным в этот момент заметить, что понятия «длина», «площадь» и «объем» приобретают второй смысл, они становятся числовыми характеристиками результатов сравнения геометрических фигур по конкретным свойствам. Теперь геометрическая фигура обладает свойством величины, поскольку ей сопоставили тем или иным способом неотрицательное число, присвоили числовую характеристику, что подчиняется требованиям аддитивности и инвариантности. Процесс сопоставления чисел величинам называют измерением величин, и оно однозначно определяется выбором той величины, которой сопоставляется число 1.

В определении понятий «длина», «площадь» и «объем» отмечаются сходства, что объясняется аксиоматическими свойствами величин. Остановим внимание на формировании понятия площади плоской фигуры, поскольку оно играет важную роль в формировании базисных знаний обучающихся первых курсов университетов. В содержании учебных дисциплин по математике отмечается, что площадь ограниченной плоской фигуры есть функция $f(F)$ [2] с областью своего существования на множестве фигур, которая своими значениями имеет числа из множества положительных действительных чисел и подчиняется свойствам:

–Если $F_1 = F_2$, то выполняется инвариантность $f(F_1) = f(F_2)$.

–Если $F = F_1 \cup F_2$, F_1 и F_2 не имеют общих внутренних точек, то выполняется аддитивность $f(F) = f(F_1) + f(F_2)$.

–Найдется такая фигура F, что выполняется нормированность $f(F) = 1$.

Заметим, что общего вида такой функции, не зависящей от класса геометрических фигур, не может быть построено. Поэтому вынуждены строить отдельные функции, определять их на множествах конкретных совокупностей фигур. Множество плоских геометрических фигур тем интересно, что допускает подходящее для определения площади разбиение на подмножества геометрических фигур, и мы его рассмотрим в дальнейшем изложении.

Методология и результаты исследования

На плоскости рассмотрим ограниченные фигуры, которые содержатся в некотором круге, и для них введем понятие «площади». Сначала разберем понятие «разбиения» фигуры на части, которые будут ее составлять.

Опр.1. Если каждая точка геометрической фигуры F есть точка либо фигуры F_1, либо фигуры F_2 и наоборот, любая точка F_1 или F_2 есть точка фигуры F, при этом фигуры F_1 и F_2 не имеют общих внутренних точек (за исключением возможно только точек границ этих фигур), тогда фигуру F назовём разбитой на фигуры F_1 **и** F_2.

Примеры разбиения фигуры F на части (фигуры F_1 **и** F_2) продемонстрируем рисунком 1.

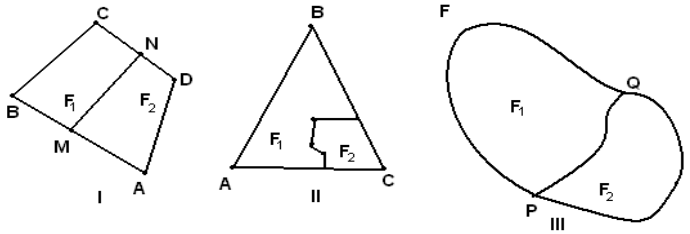


Рис.1. Разбиения фигуры F на фигуры F_1 и F_2

Теперь сформулируем и само определение понятия «площадь» ограниченной фигуры на плоскости, сначала подчеркнув, что площадь, как свойство фигуры, есть величина, а затем отметим и числовой ее смысл.

Опр. 2. Площадью фигуры назовем величину, имеющую отличительные свойства:

–Площади равных фигур равны.

–Фигура, составленная из нескольких фигур, имеет площадь равную сумме площадей фигур, ее составляющих.

Опр.3. Площадью фигуры F назовем положительное действительное число $S(F)$, сопоставленное фигуре F, что выполняются требования

– $F_1 = F_2$, $S(F_1) = S(F_2)$.

– $S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2)$.

– $S(F^*) = 1, a = 1$, где F^* квадрат, a его сторона [3].

Введя два последних определения, мы пока еще не знаем ответа на вопрос: а имеет ли смысл понятие «площадь», то есть существует ли на самом деле такая величина, как свойство геометрических фигур? Также не разрешена задача о способе указания функции, определенной на множестве геометрических фигур на плоскости, с областью значений R^+, удовлетворяющей условиям из третьего определения в нашем изложении.

Важно еще раз отметить, что площадь плоской фигуры определена как функция только на множестве тех фигур, что представляют собой области, помещенные в некоторый круг, то есть на множестве квадрируемых фигур [4]. Составляя определение понятия «квадрируемая фигура», применяют знание о простом многоугольнике. Следовательно, необходимым становится найти соответствующую функцию площади, заданную на множестве простых многоугольников. Поиск решения этой задачи приводит к выраженной этапности в определении функции $S(F)$ и сначала на множестве треугольников, а ее решение в свою очередь зависит от определения $S(F)$ на множестве прямоугольников.

Опишем в методическом смысле, согласно определенной упорядоченности, случаи определения на плоскости площади выпуклого n-угольника.

Задача о площади прямоугольника.

Важно для обучающихся рассмотреть последовательно ряд случаев, связанных с длинами смежных сторон прямоугольника.

Первый случай свяжем с рассмотрением квадрата P. Длина стороны его пусть а.

Пусть E – квадрат, длина стороны квадрата E равна единице. Пусть сторона данного квадрата P имеет длину $\frac{1}{n}$.

Будем иметь

$$S(E)=S(P)\cdot n^2,\ S(P)=\frac{S(E)}{n^2}=\frac{1}{n^2}=a^2.$$

Второй случай свяжем с рассмотрением прямоугольника P. Пусть его смежные стороны имеют длины a и b. Интерес будут представлять длины сторон прямоугольника, выражаемые сначала числами рациональными, а затем одна из сторон будет иметь длину, выражающуюся иррациональным числом.

1) Пусть $a\in Q$ и $b\in Q$. Запишем числа обыкновенными дробями, то есть $a=\frac{l}{n}$ и $b=\frac{m}{n}$. Теперь разделим стороны прямоугольника точками соответственно на l и m частей. Через обозначенные точки на сторонах прямоугольника проведем параллельные его сторонам прямые. Прямоугольник будет заполнен квадратами, их число будет равным $l\cdot m$, а площадь каждого из них будет равна $\frac{1}{n^2}$. Получаем площадь прямоугольника P равной сумме площадей квадратов, его заполняют $S(P)=l\cdot m\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{l}{n}\cdot\frac{m}{n}=a\cdot b$.

2) Пусть хотя бы одно из чисел a или b есть иррациональное число. Для a или b найдутся их приближения «по недостатку» возрастающими последовательностями рациональных чисел $\{a_{1n}\}$, $\{b_{1n}\}$, и их же приближения «по избытку» убывающими последовательностями рациональных чисел $\{a_{2n}\}$, $\{b_{2n}\}$, где a_{1n} и b_{1n} рассматриваются в качестве длин смежных сторон прямоугольников, которые входят в данный прямоугольник P, а a_{2n} и b_{2n} рассматриваются в качестве длин смежных сторон прямоугольников, которые в себе содержат данный прямоугольник P (рис. 2).

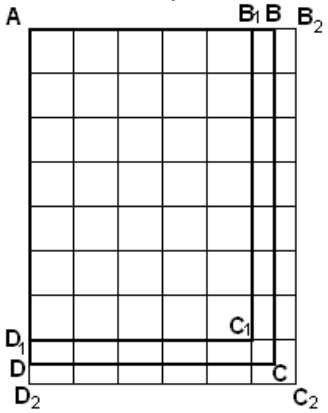


Рис. 2

$AB_1C_1D_1$ - пример прямоугольника, что входит в данный P, длины сторон a_{1n}, b_{1n}.

$AB_2C_2D_2$ - пример прямоугольника, что содержит данный P, длины сторон a_{2n}, b_{2n}.

$$S_{AB_1C_1D_1}=a_{1n}\cdot b_{1n}=S_{1n},$$

$$S_{AB_2C_2D_2}=a_{2n}\cdot b_{2n}=S_{2n}.$$

$$a_{1n}\cdot b_{1n}\le a\cdot b\le a_{2n}\cdot b_{2n}\ (1)\ \text{и}\ S_{1n}\le S\le S_{1n}\ (2).$$

Имеем $S_{1n}=a_{1n}\cdot b_{1n}$, а $S_{2n}=a_{2n}\cdot b_{2n}$, тогда (1) запишем в виде

$$S_{1n} \le a \cdot b \le S_{1n} (3).$$

Сличая (3) с (2) получаем

$$|S_{2n} - S_{1n}| \le |S - a \cdot b| \le |S_{2n} - S_{1n}|,$$

$$|S - a \cdot b| = |S_{2n} - S_{1n}| \ (4).$$

Пусть наперед задано сколь угодно малое число ε >0. Обязательно найдется натуральное число N(ε), зависящее от числа ε такое, что как только натуральное число *n* > *N*(ε) будет выполняться

$$S_{2n} - S_{1n} < \varepsilon (5).$$

Подставим (5) в равенство (4), имеем

$$|S - a \cdot b| < \varepsilon$$

при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$.

Но это условие выполнится только для числа 0.

Таким образом, приходим к заключению

$$S - a \cdot b = 0,$$

$$S = a \cdot b.$$

Задача о площади параллелограмма.

Рассмотрим параллелограмм *ABCD* (случай прямоугольника исключаем). На сторону параллелограмма AD или ее продолжение из противолежащих его вершин опускаем высоты с основаниями A_1 и D_1 (рис.3).

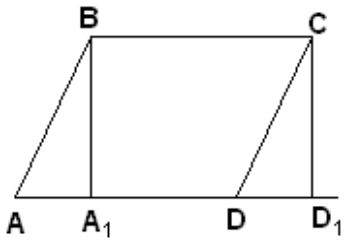


Рис. 3

A_1BCD – четырехугольник, составляющий как данный параллелограмма *ABCD,* так и получившийся прямоугольник A_1BCD_1, при это получаем, что $\Delta ABA_1 = \Delta DCD_1$.

В силу определения понятия площади фигуры имеем $S_{ABA_1} = S_{DCD_1}$, и получим

$$S_{ABCD} = S_{ABA_1} + S_{A_1BCD,}$$

$$S_{A_1BCD_1} = S_{DCD_1} + S_{A_1BCD.}$$

Так как правые части равенств равны, то равны и левые их части, получим

$$S_{ABCD} = S_{A_1BCD_1} (6)$$

A_1B служит как стороной прямоугольника A_1BCD_1, так и высотой данного параллелограмма *ABCD*. Запишем A_1B *как* h_a. Сторона *BC* параллелограмма *ABCD* является и стороной прямоугольника A_1BCD_1, запишем ее как *a*.

Тогда $S_{A_1BCD_1} = a \cdot h_a$. На основании равенства (6) и $S_{ABCD} = a \cdot h_a$.

Покажем, что произведение $a \cdot h_a$. не изменяется при всех возможных сочетаниях сторон параллелограмма и соответствующих им высот. Допустим взята сторона *AB* и соответствующая ей высота, их длины запишем как b и h_b, то надо показать, что $b \cdot h_b = a \cdot h_a$. Опускаем перпендикуляры на *BC* (рис. 4) с основаниями B_1 и C_1 и на *AB* с основаниями A_1 и B_2.

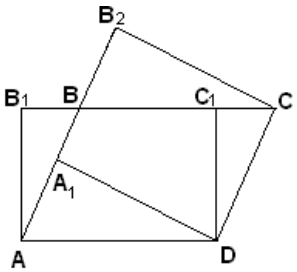


Рис. 4

$S_{AB_1C_1D} = S_{A_1BC_1D} + S_{AB_1B} + S_{AA_1D}$ и $S_{CB_2A_1D} = S_{A_1BC_1D} + S_{DC_1C} + S_{BB_2C}$ (7).

$S_{AB_1B} = S_{DC_1C}$, поскольку $\Delta AB_1B = \Delta DC_1$, аналогично $S_{AA_1D} = S_{BB_2C}$.

Тогда правые части равенств (7) равны, значит, равны и их левые части.

Получаем $S_{AB_1C_1D} = S_{CB_2A_1D}$.

Делаем вывод $b \cdot h_b = a \cdot h_a$.

Общий вывод состоит в том, что площадь параллелограмма вычисляется как произведение длин его стороны и соответствующей ей высоты.

Задача о площади треугольника.

Необходимо треугольник *ABC* достроить до параллелограмма *ABCD* (рис. 5).

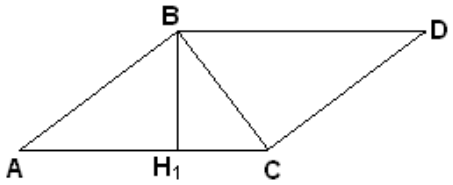


Рис. 5

$S_{ABCD} = AC \cdot BH_1$, если AC записать как *b*, а BH_1 – h_b, то $S_{ABCD} = b \cdot h_b$. Поскольку при этом $\Delta ABC = \Delta BCD$, то $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD} = 2 \cdot S_{ABC}$. Из равенства треугольников следует, что $2 \cdot S_{ABC} = b \cdot h_b$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$.

Покажем, что $b \cdot h_b = a \cdot h_a = c \cdot h_c$, где *a* и *c* – длины сторон *BC* и *AB* соответственно, а h_a и h_c – высоты, соответствующие сторонам a и c. Рисунок 6 раскрывает ход рассуждений.

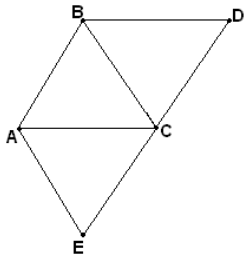


Рис. 6

ABCD состоит из частей ΔABC и ΔBCD, а *ABCE* - из ΔABC и ΔACE.

Отсюда и получаем $b \cdot h_b = a \cdot h_a = c \cdot h_c$.

Задача о площади простого многоугольника.

Поиск площади выпуклого простого многоугольника начинают с его разбиения на составляющие треугольники. Его можно разбить или соединяя одну из его вершин с другими его вершинами за исключением соседних, либо внутреннюю его любую точку соединить с его же вершинами [5].

Невыпуклый простой многоугольник не всегда допускает деления первым способом. Такой пример отражен на рисунке 7.

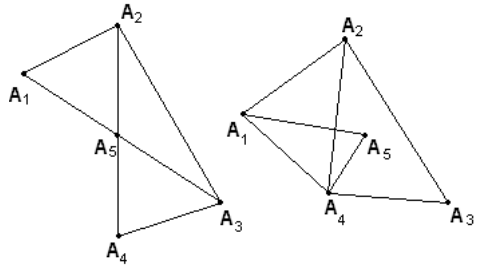


Рис. 7. Разделение на треугольники невыпуклых многоугольников

Тогда площадь простого многоугольника суммируется из площадей треугольников, которыми он был разбит на части [6].

Возникают проблемы и их содержание в следующем. Будет ли и как величина площади многоугольника зависеть от способа ее измерения? Будет ли влиять способ разбиения многоугольника на результат измерения площади? Решение проблем кроется в выводах теоремы о площади многоугольных фигур.

Теорема. На множестве многоугольных фигур определяется только одна функция, удовлетворяющая требованиям определения площади плоской фигуры.

Интерес представляет знакомство с доказательством этой теоремы.

Разберем ход доказательства утверждения теоремы о существовании функции.

Рассуждения выстраивается с опорой на три следующих утверждения, доказательства некоторых из них мы изложим ниже.

Утверждение 1. Пусть в ΔABC длины сторон и соответствующих им высот равны a, b, c, h_a, h_b, h_c, тогда выполняется соотношение $b \cdot h_b = a \cdot h_a = c \cdot h_c$.

В продолжение рассуждений примем соглашения.

1. Точка M лежит вне ΔABC, тогда от M до сторон треугольника AB, AC и BC будем считать, что расстояния равны m, n и p соответственно.

2. Любой упорядоченной тройке точек (P, Q, M) будет соответствовать число, которое вычисляется как половина произведения длины отрезка PQ и расстояния от точки M до прямой PQ. Если записать первое как q, а второе записать как h_q, то число будет вычисляться по формуле $\frac{q \cdot h_q}{2}$. Для сгруппированных точек по три M и вершин треугольника ΔABC (A, B, M), (A, C, M) и (B, C, M) соответствующие числа будут равны $\frac{c \cdot m}{2}$, $\frac{b \cdot n}{2}$, $\frac{a \cdot p}{2}$, а для вершин треугольника (A, B, C), (A, C, B) и (B, C, A) соответствующие числа будут равны $\frac{c \cdot h_c}{2}$, $\frac{b \cdot h_b}{2}$ и $\frac{a \cdot h_a}{2}$.

3. Пусть задан ΔABC, то при фиксированной точке K каждой следующей паре прямая/точка (AB, M), (AC, M) и (BC, M) сопоставим целые числа, по модулю равные соответственно либо числу (A, B, M), либо числу (A, C, M), либо числу (B, C, M), а знак этим целым числам приписываем в зависимости от расположения точек пар (C, M), (B, M) и (A, M) соответственно относительно прямых AB, AC и BC. Если точка M находится внутри ΔABC, то (AB, M), (AC, M) и (BC, M) – это положительные целые

числа, если M – вне ΔABC, тогда одно из трех чисел $(AB, M), (AC, M)$ и (BC, M) отрицательное целое. Возможные расположения точки и прямых иллюстрирует рисунок 8

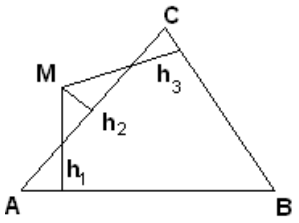


Рис. 8

$$(AB, M) \to +\frac{c \cdot h_1}{2}, (AC, M) \to -\frac{b \cdot h_2}{2}, (BC, M) \to +\frac{a \cdot h_3}{2}.$$

Числа $(AB, C), (AC, B)$ и (BC, A) целые положительные, и по утверждения 1 равны между собой $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$. Тогда (A, B, C) и (AB, C) равны, что то же следует и для (A, C, B) и $(AC, B), (B, C, A)$ и (BC, A).

Утверждение 2. Пусть точка *O* лежит вне ΔABC, и пусть точка *O* не лежит ни одной из прямых AB, AC и BC, тогда справедливо $(AB, O) + (AC, O) + (DC, O) = (A, B, C)$ (8).

Установим истинность этого утверждения.

Пусть $\Pi_a, \Pi_в$ и Π_c – полуплоскости с граничными прямыми BC, CA и AB соответственно содержат точки A, B и C, как отражено на рисунке 9. Прямыми плоскость делится на семь частей. К полуплоскостям присоединим им дополнительные полуплоскости $\overline{\Pi_a}$, $\overline{\Pi_в}$ и $\overline{\Pi_c}$. Части плоскости представляются следующими пересечениями полуплоскостей:

1) $\Pi_A \cap \Pi_B \cap \Pi_C$,

2) $\Pi_A \cap \Pi_B \cap \overline{\Pi_C}$,

3) $\Pi_A \cap \overline{\Pi_B} \cap \Pi_C$,

4) $\overline{\Pi_A} \cap \Pi_B \cap \Pi_C$,

5) $\Pi_A \cap \overline{\Pi_B} \cap \overline{\Pi_C}$,

6) $\overline{\Pi_A} \cap \Pi_B \cap \overline{\Pi_C}$,

7) $\overline{\Pi_A} \cap \overline{\Pi_B} \cap \Pi_C$.

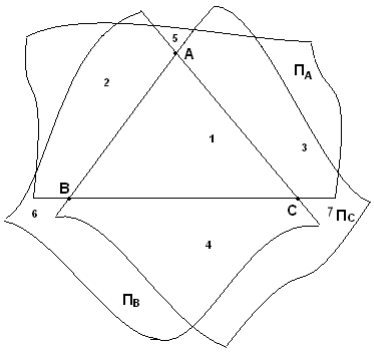


Рис. 9

На рисунке 10 области отмечены также числами. По условию теоремы точка *O* принадлежит одной из перечисленных шести областей. При этом эти шесть случаев делятся на два типа. Первый тип расположения – это точка *O* лежит в одной из областей с номерами 5, 6, 7, второй тип расположения – это точка *O* лежит в одной из областей с номерами 2, 3, 4. Следует рассмотреть оба этих случая.

1) Точка O, как изображает рисунок 10, принадлежит области 2, полученной пересечением $O \in \Pi_A \cap \Pi_B \cap \overline{\Pi_C}$.

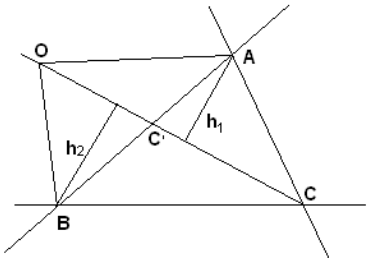


Рис. 10

Так как $O \in \cap\overline{\Pi_C}$, то OC пересекает AB в точке C' , а так как $O \in \Pi_A \cap \Pi_B$ и $C \in \Pi_A \cap \Pi_B$, то $OC \in \Pi_A \cap \Pi_B$. Тогда C' принадлежит внутренней области угла *C* ΔABC и лежит также на прямой *AB*. Значит, C' принадлежит стороне *AB* ΔABC. Тогда имеем $AB = AC' + C'B$ и $OC = OC' + C'C$.

Из равенств получаем следствия

$$\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{AC' \cdot h_c}{2} + \frac{BC' \cdot h_c}{2}, \quad \frac{OC \cdot h_1}{2} = \frac{OC' \cdot h_1}{2} + \frac{CC' \cdot h_1}{2}$$

и

$$\frac{c \cdot m}{2} = \frac{AC' \cdot m}{2} + \frac{BC' \cdot m}{2}, \quad \frac{OC \cdot h_2}{2} = \frac{OC' \cdot h_2}{2} + \frac{CC' \cdot h_2}{2} \quad (9).$$

Здесь h_1 – расстояние от *A* до прямой *OC*, h_2 – расстояние от *B* до *OC*.

Кроме того, из $O \in \Pi_A$, $O \in \Pi_B$ и $O \in \Pi_C$ следует, что $(B,C,O) = (BC,O)$, $(C,A,O) = (CA,O)$ и $(A,B,O) = -(AB,O)$ (10).

Равенства (8) можно записать в виде:

$$(A,B,C) = (A,C',C) + (C',B,C) \quad \text{и} \quad (A,B,O) = (A,C',O) + (C',B,O)$$
$$(O,C,A) = (O,C',A) + (C',C,A) \qquad (O,C,B) = (O,C',B) + (C',C,B). \quad (11)$$

Используя равенства (10), равенства (11) примут вид:

$$(A,B,C)=(A,C',O)+(C',B,C) \quad \text{и} \quad (AB,O)=-(A,C',O)-(C',B,O) \quad (12)$$
$$(CA,O)=(A,C',C)+(A,C',O) \qquad (BC,O)=(C',B,C)+(C',B,O)$$

Почленно сложим 2-ое, 3-е и 4-ое из равенств (12), получим:

$$(CA,O)+(AB,O)+(BC,O)=(A,C',C)+(A,C',O)-(A,C',O)-(C',B,O)+(C',B,C)+(C',B,O)=$$
$$=(A,C',C)+(C',B,C).$$

Беря во внимание 1-е равенство из равенств (12), получаем:

$$(A,B,C)=(AB,O)+(AC,O)+(BC,O).$$

2) Точка O, как изображает рисунок 11, принадлежит области, полученной пересечением $O\in\overline{\Pi_A}\cap\overline{\Pi_B}\cap\Pi_C$.

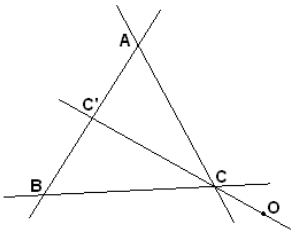


Рис. 11

Получаем:

$$(B,C,O)=-(BC,O),(C,A,O)=-(CA,O) \text{ и } (A,B,O)=(AB,O) \quad (13)$$

Далее следует:

$$(A,B,C)=(A,C',O)+(C',B,C) \quad \text{и} \quad (A,B,O)=(A,C',O)+(C',B,O) \quad (14)$$
$$(O,C',A)=(O,C,A)+(C,C',A) \qquad (O,C',B)=(O,C,B)+(C,C',B)$$

Пользуясь равенствами (10), получим

$$(A,B,C)=(A,C',C)+(C',B,C) \quad \text{и} \quad (AB,O)=-(A,C',O)-(C',B,O)$$
$$(CA,O)=(A,C',C)-(A,C',O) \qquad (BC,O)=(C',B,C)-(C',B,O) \quad (15)$$

Из равенств (14),(15) будет следовать $(A,B,C)=(AB,O)+(AC,O)+(BC,O)$.

В остальных четырех вариантах положения точки O относительно ΔABC выводы будут повторяться.

Утверждение 3. Пусть S_1, S_2, …, S_m и T_1, T_2, …, T_n – различные представления многоугольной фигуры P в виде треугольников S_i и T_j, то $s(S_1)$ + +$s(S_2)$ + … + $s(S_m)$ = $s(T_1)$ + $s(T_2)$ + … + $s(T_n)$.

Для доказательства применим метод математической индукции по числу треугольников в первом разбиении. При m = 1 имеем P = S_1 и T_1, T_2, …, T_n – разбиение треугольника S_1.

Обозначим через L_{i1}, L_{i2}, L_{i3} – стороны треугольника T_i, а l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} – величины их длин.

Вне многоугольной фигуры P выберем произвольную точку O. Расстояние от O до тех прямых, которые содержат указанные стороны L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}, удобно обозначить p_{ij} (j = 1, 2, 3). Зададим множитель $\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$ величина которого связана с расположением O и треугольника T_i относительно прямой, на которой лежит сторона

L_{ij} (в разных полуплоскостях или в одной). Для каждого треугольника T_i и точки O записываем формулу (8) из утверждения 2. Суммируя, получаем:

$$s(T_1) + s(T_2) + \cdots + s(T_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij} \cdot p_{ij}}{2} \quad (16)$$

Введем обозначения для вершин треугольника S_1 (S_1 это ΔABC). Сумму, стоящую в правой части равенства (11) записываем в виде четырех, а именно 1-ая – сумма слагаемых $\varepsilon_{ij} \frac{l_{ij} \cdot p_{ij}}{2}$, у которых отрезок L_{ij} на BC, 2-ая – сумма аналогичных слагаемых но для CA, 3-ая – для стороны AB, 4-ая группа слагаемых $\varepsilon_{ij} \frac{l_{ij} \cdot p_{ij}}{2}$, для которых L_{ij} – общая сторона двух треугольников построенного разбиения T_1, T_2, …, T_n. Введем такие обозначения для первых трех сумм $\sum_B^C$, $\sum_C^A$ и $\sum_A^B$. Для четвертой суммы получим: $\sum_B^C = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot p \cdot \sum_B^C l_{ij}$ Но так как $\sum_B^C l_{ij}$ = BC, то $\sum_B^C$ = (BC, O). Аналогично имеем, что $\sum_C^A$ = (CA, O), $\sum_A^B$ = (AB, O).

Все члены четвертой суммы распадаются на суммы пар противоположных по величине членов. Значит, вся она нулевая.

Таким образом, $s(S_1) = (BC, O) + (CA, O) + (AB, O) = s(T_1) + s(T_2) + \ldots + s(T_n)$.

Теперь возьмем общий случаю, пусть для него P разбита дважды на треугольники: S_1, S_2, …, S_m и T_1, T_2, …, T_n.

Будем называть разбиение правильным, если пересекаться его любые два треугольника могут лишь по общей стороне, либо по общей вершине, либо они вообще не пересекаются. Назовем второе разбиение измельчением первого, если всякий треугольник первого разбиения представлен как разбиение из треугольников второго. Оставим без доказательства утверждения, что всякое разбиение многоугольной фигуры обладает правильным измельчением и что всякие два разбиения многоугольной фигуры обладают общим измельчением.

Пусть U_1, U_2, …, U_q – общее правильное измельчение разбиений $\{S_i\}$ и $\{T_i\}$ многоугольной фигуры P. Каждый треугольник S_i первого разбиения P правильно разбит на треугольники U_{ij} (i = 1, 2,…, m) измельчения. Согласно только что доказанному $s(S_1) = s(U_{11}) + s(U_{12}) + \ldots + s(U_{1k_1})$. Аналогично T_1 и т.д. Поэтому получим $s(S_1) + \ldots + s(S_m) = s(U_1) + \ldots + s(U_q)$ $s(T_1) + \ldots + s(T_n) = s(U_1) + \ldots + s(U_q)$ Отсюда видно, что $s(S_1) + \ldots + s(S_m) = s(T_1) + \ldots + s(T_n)$.

Покажем, что функция s(P) существует. Пусть $\{T_i\}$ – разбиение P на треугольники. Примем за $S(P)$ сумму площадей T_i, то есть $s(T_1) + s(T_2) + \ldots + s(T_n)$. По лемме 3 это число не зависит от выбора разбиения P. Значит $s(X)$ – функция, определенная на множестве фигур P_i. Из того, что $s(T_i)$ обладает свойствами 1, 2 и 3 из определения площади плоской фигуры F, то $s(X)$ также этими свойствами обладает. Это подтверждает, что $s(P_i)$ – искомая площадь.

Остается дать ответ на вопрос о единственности такой функции. Пусть S и S' – две функции с подобными свойствами из определения площади. P – многоугольная фигура и $S(P)$ и $S'(P)$ – значения этих функция для P. Разобьем P на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. В силу свойства 2 определения площади запишем $S(P) = \sum_{i=1}^{n} s(\Delta_i)$ и

$S'(P)=\sum_{i=1}^{n} s'(\Delta_i)$. Правые части этих равенств - равные числа, значит $S(P)=S(P')$. Это и означает, что $S=S'$.

Итак, цель рассуждений достигнута, мы конструктивно доказали существование и единственность функции площади.

Площадь геометрических фигур – важная величина, поэтому ее вычислению посвящено значительное число задач. Во многих из них предлагается сравнить площади некоторых фигур, это идея тесно примыкает к теме нашей работы.

Для сравнения площадей треугольников можно опираться на факты, которые непосредственно вытекают из общей теории. Например,

- площади треугольников, высоты которых совпадают, относятся как длины их оснований;
- сравнение площадей треугольников, имеющих общий угол, может быть сведено к отношению произведения сторон, образующих этот угол;
- отношение площадей подобных треугольников сводится к отношению квадрата коэффициента подобия.

Приведем пример одной из возможных задач.

Дан треугольник ABC. Точка D лежит на стороне AB, $AD:DB=1:2$, точка K лежит на стороне, BC $BK:KC=3:2$. Отрезки AK и CD пересекаются в точке O. Найти отношение площади четырехугольника $DBKO$ к площади треугольника ABC

Приведем краткое решение этой задачи. Сделаем чертеж (рис. 12):

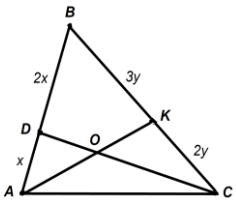


Рис. 12

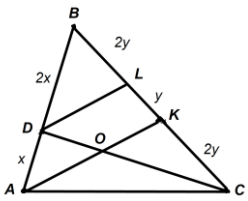


Рис. 13

Введем некоторые обозначения. Пусть $S_{ABC}=S$, $S_{DBKO}=S_1$, $S_{ADO}=S_2$. Из отношения сторон $BK:BC=3:5$ можно заключить, что $S_{ABC}=S_1+S_2=\frac{3}{5}S$. Площадь S_2 треугольника ADO будем искать из сравнения с площадью треугольника ADC, так как верно соотношение $AD:AB=1:3$, а следовательно, $S_{ADC}=\frac{1}{3}S$.

Проведем прямую $DL \parallel AK$ (рис. 13). Из пересечения $\angle ABC$ параллельными прямыми DL и AK получаем, что $\frac{BL}{LK}=\frac{BD}{AD}$, откуда $LK=y$. Аналогично из пересечения $\angle DCB$ параллельными прямыми OK и DL получаем, что $\frac{DO}{DC}=\frac{LK}{LC}$.

Далее применим теорему Менелая к треугольнику BCD и секущей CD, что позволит записать отношение $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CO}{OD}\cdot\frac{DA}{AB}=1$, а именно $\frac{3}{2}\cdot\frac{CO}{OD}\cdot\frac{1}{3}=1$. Это эквивалентно равенству $CO=2OD$, тогда $OD=\frac{1}{3}DC$.

Теперь находим $S_{ADO}:S_{ADC}=DO:DC$, $S_2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}S\right)=\frac{1}{9}S$.

Наконец, находим площадь $S_1=\frac{3}{5}S-S_2=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{9}\right)S=\frac{22}{45}S$. Откуда искомое отношение площадей $22:45$.

Заключение

В данной работе были рассмотрены некоторые аспекты проблемы измерения величин. В частности, пройден конструктивный путь определения площади

ограниченной плоской фигуры. Этот материал, полагаем мы, будет полезным дополнением в качестве самостоятельной работы студентов младших курсов в области знаний по математическому анализу. Отметим, что в процессе обучения теория площадей фигур пространства V2 может выстраиваться без последовательного рассмотрения площадей прямоугольника, треугольника и многоугольника, то есть сразу для квадрируемых фигур. В этом случае следует рассмотреть фигуру в плоскости, на которой нанесена бесконечная сетка квадратов со стороной $10^{-n} \cdot e$, где e – единичный отрезок [8]. Однако, примененный нами путь рассуждения о площади соответствует историческому ходу формирования этого понятия, который отражается в педагогической практике.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Локшин А.А. Что такое величина? А.А. Локшин, В.Ф. Сибаева. – М.: Вузовская книга, 2006. – 80 с.
2. Фридман Л.М. Величины и числа. – М.: Флинта, 2000.
3. Толстопятов В.П. Геометрические величины: методическая разработка / Урал. Го. Пед. Ун-т: Сост. В.П. Толстопятов. – Екатеринбург, 2005. – 22 с.
4. Boyer C. B., Merzbach U. C. A History of Mathematics — John Wiley & Sons, 2010. - 640 p.
5. Колмогоров А. Н. Величина // Математическая энциклопедия. - М.: Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1.
6. БОЛТЯНСКИЙ В. Г. РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ. - М.: Гостехиздат, 1956. - 64 с.
7. АДАМАР Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / пер. с фр. М. А. Шаталова и О. П. Шаталовой; под ред. И. Б. Погребысского. - [2-е изд.]. - М.: МЦНМО, 2001. - 128 с.
8. Аргунов Б. И. Элементарная геометрия: учебное пособие для педагогических институтов / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. Москва: Просвещение, 1966. - 366 с.

***Svetlana B. Zabelina*,**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
zabelina_sb@mail.ru
***Irina A. Pinchuk*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
irenepin@yandex.ru

Historical and Methodological Aspects of Studying the Problem of Measuring Quantities

Abstract. This article presents specific aspects of teaching the topic of measuring the areas of plane figures to junior students majoring in physics and mathematics. The purpose of this work was to demonstrate a methodology for implementing a historical approach to studying the problem of measuring quantities. Using the area of a plane figure as an example, a plan for mastering a genetic model of area measurement is presented, and the main methodological and scientific aspects are outlined.

Keywords: magnitude, measure, area function on a class of polygonal figures, area of a plane figure, partition of a polygonal figure

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ "КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ"

Аннотация

В работе рассматриваются различные подходы к изложению материала, относящегося к теме «Криволинейный интеграл первого рода». Данная работа может оказаться полезной преподавателю, составляющему конспект лекций по этой теме. В работе даны рекомендации по подготовке вводной части такого конспекта. В частности указано, что именно следует напомнить слушателям о параметрически заданных кривых, прежде чем рассматривать криволинейные интегралы. Предложены различные способы изложения теории криволинейных интегралов, и преподаватель, готовящий конспект лекций, может выбрать для себя наиболее подходящий вариант. В работе отмечена специфика изложения материала в техническом вузе, и даны рекомендации преодолению трудностей, возникающих при таком изложении.

Ключевые слова

криволинейный интеграл, длина кривой, явное задание кривой, неявное задание кривой, параметрическое задание кривой, кусочно гладкая кривая, спрямляемая кривая

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
wiktorobuhov@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-83-91

Введение

В данной работе рассматриваются некоторые методические приёмы, которые могут оказаться полезными преподавателям, читающим лекции по данной тематике студентам технических вузов. Слишком подробное изложение с доказательствами всех утверждений с полным изгнанием интуитивных представлений из определений в таких лекциях невозможно. Некоторые теоремы придётся принять на веру, а часть определений неизбежно будет апеллировать к интуиции и здравому смыслу.

Методология и результаты исследования

1. Некоторые сведения, относящиеся к понятию длины кривой.

Начинать изложение теории криволинейных интегралов разумно с напоминания известных фактов о кривых. Мы будем подробно рассматривать лишь плоские кривые, поскольку свойства пространственных кривых и интегралов по таким кривым вполне аналогичны соответствующим свойствам плоских кривых. Такой подход является

обычным делом даже в учебниках. Например, у Фихтенгольца Г.М. в [1, с. 399] читаем: “Случай пространственной кривой. На этом случае мы останавливаемся лишь вкратце, ввиду полной аналогии его со случаем плоской кривой”.

Обычно рассматривают три способа задания кривой на плоскости: явное задание в виде графика непрерывной функции $y = f(x),\ x \in [\,\alpha, \beta\,]$, неявное задание равенством

$F(x, y) = 0$ и параметрическое задание уравнениями $x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$. Последний способ задания кривой является основным, и он в наибольшей степени соответствует определению кривой. Более того, первые два способа задания кривой сводятся к её параметрическому заданию. Это верно для явного задания, так как мы можем ввести параметр t и написать $x = t, y = f(t), t \in [\alpha, \beta]$. В книге Лорана Шварца [2, сноска с. 322] такой способ параметризации явно заданной кривой назван “ хитрым” приёмом первокурсника. Во втором случае (то есть в случае неявно заданной кривой) мы можем применить теорему о неявной функции, записать уравнение кривой в виде $y = y(x)$, после чего останется лишь воспользоваться “ хитрым” приёмом первокурсника. Обычно кривой называется множество точек (плоскости), заданное как образ отрезка при непрерывном отображении. Если γ — плоская кривая, то мы пишем:

$$\gamma = \{(x\,, y) : x = x\,(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta\}. \qquad (1)$$

Если кривая является пространственной, то в правой части (1) добавляется ещё одно равенство:

$$\gamma = \{(x\,, y, z) : x = x\,(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \alpha \le t \le \beta\}.$$

При определении криволинейного интеграла используется понятие длины кривой.

При введении этого понятия будем считать, что кривая задана параметрически. Именно в этом случае проще всего упорядочить точки кривой, т. е. задать на кривой направление обхода. Хотя выбор такого направления не влияет на величину длины кривой, точки кривой всё же надо упорядочить. Пусть кривая γ задана соотношениями (1). Будем считать, что если $M(t_1)$ и $M(t_2)$ — точки кривой γ, соответствующие значениям t_1 и t_2 параметра t, и при этом $t_1 < t_2$, то точка $M(t_1)$ предшествует точке $M(t_2)$. Таким образом, точки кривой упорядочены. Можно упорядочить их и по-другому, считая, что при $t_1 < t_2$ точка $M(t_2)$ предшествует точке $M(t_1)$. Пусть

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta\ , \qquad (2)$$

и пусть точки $M(t_k) = (x_k, y_k), k = 0, 1, \cdots, n,$ служат вершинами ломаной, вписанной в кривую γ. Длина этой ломанной есть

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}\,.$$

Длина кривой (по определению) считается равной точной верхней грани длин ломаных, вписанных в кривую γ указанным выше способом. Кривая, для которой множество длин вписанных ломаных ограничено сверху, называется спрямляемой. В курсе математики для технических вузов использование понятия точной верхней грани допускается только в определениях; присутствие этого понятия в рассуждениях нежелательно (разумеется, это не относится к вузам с повышенными требованиями к математической подготовке). По этой причине возникают трудности с установлением свойств длины кривой, в частности с доказательством формулы для вычисления этой длины. В этом смысле, возможно, предпочтительнее в определении длины кривой использовать предел последовательности длин, вписанных в кривую ломаных при условии, что максимальная из длин звеньев ломаных стремится к нулю, см., например, статью Иванкова П. Л., Обухова В.П. [3]. Однако избежать всех проблем,

связанных с трудностью самого понятия длины кривой, не удастся и в этом случае. При изложении теории криволинейных интегралов не следует слишком много времени уделять этим проблемам, а просто напомнить формулу для длины $l(\gamma)$ кривой γ:

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt,$$

а также и трёхмерный аналог этой формулы:

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt.$$

Обе формулы справедливы для гладких кривых, т.е. таких непрерывно дифференцируемых кривых, у которых нет особых точек (особыми называются точки, в которых обращается в ноль подкоренное выражение в двух последних формулах). Для кусочно гладкой кривой данные формулы также можно применять, надо только предварительно разбить такую кривую на гладкие дуги. Обычно говорят, что кусочно гладкая кривая – это кривая, которая состоит из нескольких гладких дуг. Это определение желательно уточнить следующим образом. Параметрически заданная кривая (1) называется кусочно гладкой, если существует разбиение (2) отрезка $[\alpha, \beta]$ такое, что все дуги

$$\gamma_k = \{(x, y): x = x(t), y = y(t), t_{k-1} \le t \le t_k\}, k = 1,2, \cdots, n.$$

являются гладкими.

2. Криволинейный интеграл первого рода.

Прежде чем вводить понятие криволинейного интеграла первого рода в общем виде рассмотрим сначала одну механическую задачу. Пусть дана (плоская, незамкнутая) кривая γ, вдоль которой распределены массы, и пусть в каждой точке M кривой γ известна линейная плотность $\rho(M)$ распределения этих масс. Требуется определить массу m всей кривой. Такую задачу можно рассматривать как математическую модель реального эксперимента по определению массы куска проволоки, изготовленной из неоднородного материала. Зададим на кривой γ направление обхода (одно из двух возможных). При этом для рассматриваемой кривой естественным образом появятся начальная точка A и конечная точка B. Вставим между A и B точки

$$A = C_0, C_1, \cdots, C_n = B,$$

упорядочив их в соответствии с выбранным на кривой γ направлением. Эти точки разобьют кривую на дуги $\widehat{C_{k-1}C_k}, k = 1, \cdots, n$; на каждой такой дуге выберем точку M_k и будем считать, что масса дуги $\widehat{C_{k-1}C_k}$ приближённо равна $\rho(M_k) \cdot l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right)$, где $l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right)$ – длина дуги $\widehat{C_{k-1}C_k}$. Это предположение оправдано, если длина $l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right)$ достаточно мала при каждом $k, 1 \le k \le n$, и можно считать (также приближённо), что в пределах дуги $\widehat{C_{k-1}C_k}$ плотность не меняется. Для искомой массы m всей кривой получим приближённое равенство

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\, l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right). \tag{3}$$

Естественно ожидать, что чем меньше

$$\max_{1 \le k \le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right),$$

тем точнее будет равенство (3); в пределе при

$$\max_{1 \le k \le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) \to 0$$

получим точное равенство

$$m = \lim \sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\, l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) . \qquad (4)$$

Пределы такого вида встречаются и при решении других прикладных задач.

На подробное рассмотрение таких задач в лекционном курсе обычно времени нет, поэтому рекомендуется ограничиться лишь их перечислением: пределы указанного вида встречаются также при вычислении статических моментов плоской кривой относительно координатных осей, при вычислении центра масс такой кривой, а также в некоторых ситуациях при вычислении сил гравитационного взаимодействия.

Теперь можно приступить к определению криволинейного интеграла первого рода в общем виде. Заметим только, что приведённый пример о массе куска проволоки можно и не рассматривать слишком подробно (или даже совсем его пропустить), если по какой-либо причине лектор оказался в цейтноте. Вполне допустимо сразу начинать изложение данной темы с определения криволинейного интеграла первого рода.

Пусть имеется плоская кривая γ, заданная параметрически уравнениями

$$\gamma = \{(x, y) : x = x(t), y(t), \alpha \le t \le \beta\},$$

в точках которой определена функция $f(x, y)$. На деле это, конечно, функция $f\big(x(t), y(t)\big), \alpha \le t \le \beta$, но традиционно зависимость от t не указывают. Далее, рассмотрим разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, выберем точки $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ и обозначим через $P_k = P_k\big(x(\tau_k), y(\tau_k)\big)$ точку, отвечающую значению $t = \tau_k$ параметра $t, k = 1, \cdots, n$. Затем по образцу суммы (3) из рассмотренного выше примера составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(P_i)\, l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) , \qquad (5)$$

где, как и в (3), $l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right)$ есть длина дуги $l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right)$ кривой γ. Ясно, что сумму σ мы можем составлять лишь для спрямляемых кривых; именно этим классом кривых ограничиваются при рассмотрении криволинейных интегралов.

Предел сумм вида (4) при

$$\max_{1 \le k \le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) \to 0,$$

при условии, что такой предел существует, называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по (или вдоль) кривой γ. Такой интеграл обозначается

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds .$$

Применятся также обозначение

$$\int_{\gamma} f(x, y) dl.$$

Понятие предела сумм σ при

$$\max_{1 \le k \le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) \to 0$$

можно уточнить следующим образом.

Говорят, что предел сумм σ при

$$\max_{1 \le k \le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) \to 0$$

равен I, если для любого $\mathcal{E} > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$\max_{1 \le k \le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) < \delta,$$

то при любом выборе точек P_i на дугах $\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right)$ для соответствующей суммы σ выполняется неравенство $|I-\sigma| < \delta$.

Включение этого определения в лекционный курс для студентов технического вуза не является обязательным, т. к. оно используется лишь в доказательствах, которые обычно не рассматриваются. При этом, однако, молчаливо предполагается, что обычные свойства предела (единственность предела, правила выполнения арифметических операций над пределами и т. п.) выполняются также и для этого нового вида предела.

Для дальнейшего изучения криволинейных интегралов целесообразно сузить класс кривых, по которым производится интегрирование. Разумно действовать так. Сообщить без доказательства, что для функции, непрерывной в точках спрямляемой кривой, интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)ds$$

существует. После этого надо напомнить, что всякая кусочно гладкая кривая спрямляема, и в дальнейшем во всех вопросах, в которых используются криволинейные интегралы, считать, что все рассматриваемые кривые являются кусочно гладкими. Затем следует вывести формулу для интеграла по гладкой кривой и уже после этого перечислить основные свойства криволинейного интеграла. И так, пусть кривая γ, для которой составлена сумма σ из левой части (5) является гладкой кривой.

Тогда,как известно

$$l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt\,,$$

и равенство (5) преобразуется следующим образом

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right) \cdot \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt\,.$$

Если применить теорему о среднем к последнему интегралу, то мы получим такое равенство

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(\xi_k)\right)^2 + \left(y'(\xi_k)\right)^2}\Delta t_k\,, \tag{6}$$

где $\xi_i \in [t_{k-1}, t_k]$ и $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Отсюда непосредственно мы не можем сделать вывод о том, что при

$$\max_{1\le k\le n} \Delta t_k \to 0$$

сумма σ стремится к интегралу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt, \tag{7}$$

так как правая часть (6) не является интегральной суммой для этого интеграла (τ_i и t_i – это, вообще говоря, различные точки отрезка $[t_{i-1}, t_i]$). Здесь также имеет смысл обратить внимание студентов на то, что для гладкой кривой условия

$$\max_{1\le k\le n} l\left(\widehat{C_{k-1}C_k}\right) \to 0,$$
$$\max_{1\le k\le n} \Delta t_k \to 0$$

эквивалентны. Доказывать эту эквивалентность не обязательно; может быть лучше не доказывать (с целью экономии времени). Для непрерывной функции $f(x,y)$ затруднение, возникшее из-за того, что точки τ_k и ξ_k различны, обычно преодолевается с помощью понятия равномерной непрерывности. Известно, что если функция F непрерывна на отрезке I, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что если $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$. Если применить эту теорему к непрерывной на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции $f\big(x(t),y(t)\big)$, то мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$\max_{1\le k\le n} \Delta t_k < \delta$$

то

$$\left|f\big(x(\tau_k),y(\tau_k)\big) - f\big(x(\xi_k),y(\xi_k)\big)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда легко следует, что сумма (6) и сумма

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n} f\big(x(\xi_k),y(\xi_k)\big)\cdot\sqrt{\left(x'(\xi_k)\right)^2 + \left(y'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta t_k$$

имеют один и тот же предел при

$$\max_{1\le k\le n} \Delta t_k \to 0,$$

а поскольку сумма σ' есть интегральная сумма для интеграла (7), то мы получаем, что и сумма σ имет своим пределом при указанном предельном переходе именно интеграл (7). Тем самым формула

$$\int_{\gamma} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt \qquad (8)$$

сведения криволинейного к определённому интегралу по отрезку установлена.

Дополнительная проблема состоит, однако, в том, что понятие равномерной непрерывности обычно не включается в программу начального курса анализа для технических вузов. Можно, правда, обойти эту трудность, предположив дополнительно, что функция $f\big(x(t),y(t)\big)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда мы сможем использовать неравенство

$$\left|f\big(x(\tau_k),y(\tau_k)\big) - f\big(x(\xi_k),y(\xi_k)\big)\right| < M\cdot\Delta t_k,$$

где M есть максимальное значение модуля производной функции $f\big(x(t),y(t)\big)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. Использование последнего неравенства приведёт, очевидно, к тому же результату, что и использование понятия равномерной непрерывности (более подробно метод использования непрерывной дифференцируемости вместо равномерной непрерывности рассмотрен в статье Иванкова П. Л., Обухова В. П. [4]). Мы видим, что полностью доказать формулу (8), не выходя за пределы программы курса анализа для технических вузов, не получается.

Есть и другой подход к получению формулы (8). Подход этот основан на использовании понятия эквивалентности различных параметризаций кривой. Если

$$\gamma_1 = \{(x,y): x = x_1(t), y = y_1(t), \alpha_1 \le t \le \beta_1\} \qquad (9)$$

и

$$\gamma_2 = \{(x,y): x = x_2(t), y = y_2(t), \alpha_2 \le t \le \beta_2\}, \qquad (10)$$

и существует непрерывно диффренцируемая возрастающая функция $\rho(t)$ с отличной от нуля производной, взаимно однозначно отображающая отрезок $[\alpha_1\ ,\ \beta_1]$ на отрезок

$[\ \alpha_2\ \ ,\ \ \beta_2\ ]$, и такая, что $\left(x_1\ (t),\ y_1\ (t)\right) = \left(x_2\ \left(\rho(t)\right), y_2\ (\rho(t)\ )\right)$ при любом $t \in [\alpha_1\ , \beta_1]$, то говорят, что параметризации (9) и (10) кривых γ_1 и γ_2 эквивалентны, а сами эти кривые отождествляются. Часто говорят даже, что (9) и (10) являются параметризациями одной и той же кривой. Эквивалентными считаются также и те параметризации, для которых существует убывающая функция $\rho(t)$, если сохраняются все прочие свойства этой

функции см., например, учебник Гаврилова В.Р., Ивановой Е.Е., Морозовой В.Д. [5]. Приведённое определение эквивалентных параметризаций кривой вряд ли уместно в лекционном курсе для технического вуза, но оно и не требуется в данном случае.

Если дана кривая

$$\gamma = \{(x\ , y): x = x(t), y = y(t\ ), \alpha \le t \le\ \beta\},$$

то мы просто скажем, что в качестве параметра возьмём переменную длину дуги $s(t)$,

т.е. перейдём к представлению

$$\gamma = \{(x\ , y): x = \tilde{x}(s), y = \tilde{y}(s\ ), 0 \le s \le\ S\},$$

где

$$x(t) = \tilde{x}\left(s\ (t)\right),\ y(t) =\ \tilde{y}\left(s\ (t)\right), s'(t) =\ \sqrt{\left(x'\ (t)\right)^2 +\ \left(y'\ (t)\right)^2}\ ,$$

и S есть длина всей кривой γ. С новым параметрическим представлением всё оказывается просто. Аналог суммы (5) запишется в виде

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right) \cdot\ \Delta s_k,$$

где $\tau_k\ \in [s_{k-1}\ , s_k]$, $\Delta\ s_k =\ s_k -\ s_{k-1}$.

Здесь сразу видно, что σ стремится к интегралу

$$\int_0^S f\left(x(s), y(s)\right)\ ds\ ,$$

и мы получаем аналог формулы (8) в виде

$$\int_\gamma f(x, y) ds = \int_0^S f\left(x(s), y(s)\right)\ ds\ .$$

После замены переменной интегрирования s=s(t), в правой части получается уже знакомый нам интеграл

$$\int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'\ (t)\right)^2 +\ \left(y'\ (t)\right)^2}\ dt$$

из правой части равенства (8). Не следует думать, что мы доказали формулу (8). Все перечисленные выше трудности остаются в силе, и чтобы считать формулу (8) доказанной потребуется дополнительные рассуждения (например, можно доказать лемму о том, что криволинейный интеграл не зависит от параметризации кривой).

Существует и другой способ введения понятия криволинейного интеграла первого рода, см., например учебники Бугрова Я.С., Никольского С.М. [6] и Тер-Крикорова А.М., Шабунина М.И. [7]. При этом способе полагают по определению

$$\int_{\gamma} f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt,$$

где кривая γ задана параметрически уравнениями (см. в предыдущей части). Такой подход имеет свои преимущества, т.к. позволяет легко вывести свойства криволинейного

интеграла из свойств определённого интеграла по отрезку. Однако появляется необходимость доказательства независимости интеграла из правой части последнего равенства от параметризации кривой. Если в лекционном курсе не предусмотрено введение понятия эквивалентности различных представлений одной и той же кривой, то надо хотя бы указать, как преобразуется интеграл из формулы (8), если взять длину дуги в качестве параметра. Без этого возникнут трудности при использовании криволинейного интеграла при вычислении различных физических величин.

Мы рассмотрели методику преподавания темы “Криволинейный интеграл первого рода” в плоском случае. Для пространственной гладкой кривой основные формулы с соответствующими изменениями остаются в силе. Например, имеет место равенство

$$\int_{\gamma} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt\,,$$

причём, как и выше, последняя формула распространяется и на случай кусочно гладких кривых.

Свойства криволинейных интегралов не рекомендуется рассматривать слишком подробно. Достаточно их перечислить, поскольку эти свойства (линейность, аддитивность и другие) аналогичны обычным свойствам всех типов интегралов. Следует лишь особо отметить независимость криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой.

Заключение

Мы рассмотрели подробно основные моменты, на которые следует обратить внимание при составлении конспекта лекций по данной теме.

Во-первых, надо напомнить слушателям основные сведения из теории кривых: способы представления кривой и вопросы, связанные с понятием длины кривой. Рекомендуется также с самого начала ограничиться лишь кусочно гладкими кривыми при всех дальнейших рассмотрениях. Затем следует рассмотреть какую-либо физическую задачу, приводящую к необходимости введения понятия криволинейного интеграла первого рода. Здесь, по-видимому, наиболее подходящей является задача об определении массы куска кривой; другие возможные задачи могут отвлекать внимание слушателей на трудности, связанные с пониманием физической стороны дела. Далее лектору следует выбрать один из возможных подходов к определению рассматриваемого типа интегралов, оценить их достоинства и недостатки, указанные выше. Свойства криволинейного интеграла рекомендуется рассмотреть по возможности кратко, но обязательно надо отметить независимость криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой. Время, сэкономленное на краткости перечисления свойств интеграла первого рода, можно затем использовать для более подробного рассмотрения криволинейного интеграла второго рода, поскольку он является более важным в практическом отношении.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 2. М.: «Наука», 1964, 440с.
2. Лоран Шварц. Анализ, т.1. - М.: «Мир», 1972, 824с.
3. Иванков П.Л., Обухов В.П. О некоторых вопросах методического характера, связанных с понятием длины кривой // Modern European Researches, Salzburg, 2022, т. 1, № 3. - p. 99-103.
4. Иванков П.Л., Обухов В.П. О методике преподавания основ анализа без использования понятия равномерной непрерывности // Modern European Researches, Salzburg, 2021, т. 2, № 2. - p. 90-95.
5. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Математика в техническом университете, т. 7. М.: «Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана». 2001, 492с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М.: «Наука», 1989, 464с.
7. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа, М.: «Наука», 1988, 916с.

***Pavel L. Ivankov*,**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
ivankovpl@mail.ru
***Victor P. Obuhov*,**
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
wiktorobuhov@yandex.ru

In this paper we consider diverse approaches to rendering the material on the theme «The line integral of the first type».

Abstract: The paper may be useful for the lecturer who is preparing the conspectus of the lecture on this theme. In the paper we give recommendations for the preparation of the introductory part for such a lecture. Specifically, it is pointed out what exactly it is necessary to remind the audience about parametrically represented curves before considering line integrals. We propose different methods of representation of the theory of line integrals and the lecturer who prepares the conspectus can choose the most suitable variant. In this paper the attention is drawn to the specific character of rendering the material at the technical college and recommendations are given as to how to overcome difficulties arising at such rendering.

Key words: line integral, length of a curve, explicit representation of a curve, implicit representation of a curve, parametric representation of a curve, piecewise smooth curve, rectifiable curve.

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

Аннотация

В условиях цифровой трансформации высшего образования возрастает актуальность инновационных методов преподавания физико-математических дисциплин. Целью работы является систематизация и оценка эффективности цифровых технологий — виртуальных лабораторий, адаптивных обучающих систем и ИИ-инструментов — в российском и международном контексте. Анализ показал, что их применение повышает мотивацию, углубляет понимание абстрактных концепций и увеличивает долю студентов с высоким уровнем компетентности, однако требует педагогической трансформации и преодоления инфраструктурных и методических барьеров.

Ключевые слова

инновационные технологии, физико-математические дисциплины, высшее образование, виртуальные лаборатории, адаптивные обучающие системы, цифровые платформы, STEM-подход, искусственный интеллект, персонализация обучения

АВТОРЫ

Ивахненко Наталья Николаевна,
доцент ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
доцент ФГРОУ ВО РГАУ «Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева», г. Москва
yulduz19.77@mail.ru

Бадекин Максим Юрьевич,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк
korund2002@list.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-92-103

Введение

В условиях стремительного развития цифровых технологий традиционные подходы к преподаванию физико-математических дисциплин (ФМД) в высших учебных заведениях претерпевают глубокую трансформацию. Цифровые платформы и адаптивные системы обучения становятся не просто вспомогательным инструментом, а центральным элементом образовательной среды, направленным на решение ключевых задач современного вуза: повышение мотивации студентов, улучшение понимания сложных концепций и развитие практических навыков. Данная работа представляет собой всесторонний анализ инновационных технологий, применяемых в высшем образовании для изучения ФМД, основываясь на результатах исследований и практике внедрения в российских и зарубежных вузах. В работе рассматриваются различные типы цифровых платформ, их функциональное

назначение, методология применения и доказанная эффективность, а также анализируются стратегии их интеграции в образовательный процесс.

Методология и результаты исследования

Цифровые платформы как инструменты для повышения мотивации и практической подготовки

Цифровые платформы представляют собой многообразный инструментарий, способный кардинально изменить взаимодействие студента с учебным материалом, особенно в таких абстрактных областях, как физика и математика. Их роль выходит далеко за рамки простого электронного хранилища материалов; они становятся активными участниками образовательного процесса, способствуя повышению мотивации, развитию практических навыков и формированию целостного представления о предмете. Ключевым фактором, влияющим на выбор конкретной платформы, является ее соответствие поставленным целям: улучшение понимания теоретических положений или отработку экспериментальных навыков.

Одним из наиболее значимых направлений является использование виртуальных лабораторий (ВЛР), которые решают проблему ограниченной доступности реального оборудования и позволяют проводить эксперименты в безопасной и контролируемой среде. В России создано множество специализированных ресурсов. Например, Московский физико-технический институт разработал платформу "Физика виртуальных лабораторий", содержащую более 50 работ по механике, термодинамике, электричеству, оптике и атомной физике. Платформа "Лаборатория физики" создана на базе Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова с аналогичным набором тем. НИЯУ МИФИ предложил онлайн-ресурс "Virtual Physics Laboratory" для изучения механики, термодинамики, электричества и магнетизма. Эти платформы предоставляют не только готовые эксперименты, но и инструменты, задания и тесты для закрепления знаний.

Особое место среди ресурсов занимает портал efizika.ru, который предлагает более 200 виртуальных лабораторных работ, охватывающих практически все разделы школьной и вузовской физики: от механики до квантовой физики. Примеры конкретных работ включают определение ускорения свободного падения, исследование взаимодействия тока с постоянным магнитом, определение КПД трансформатора и другие. Ключевой особенностью efizika.ru является то, что работы реализованы в режиме реального времени с использованием интерактивных электронных моделей, что позволяет студентам выполнять эксперименты пошагово и наблюдать за физическими законами в действии. Это напрямую способствует развитию практических навыков, так как студенты могут моделировать процессы в различных средах (например, в вакууме или при повышенной гравитации), что невозможно в стандартной лаборатории. Исследование, проведенное в Кыргызско-турецком университете Манас, показало высокую эффективность ВЛР: студенты продемонстрировали большую скорость и точность выполнения работ, а 60% из них положительно оценили использование программы Multisim для моделирования электрических схем [1]. Более того, 65% опрошенных студентов сочли удобным тестирование через Google Forms, используемое в рамках этой системы.

Помимо специализированных физических платформ, существует ряд универсальных инструментов, которые также находят применение в преподавании ФМД. Среди них — мультимедийные презентации в PowerPoint, видеоролики в Windows Movie Maker и видеоуроки, которые используются на всех этапах урока для активизации познавательной деятельности. Важно отметить, что такие инструменты, согласно данным исследований Уильяма Глассера, значительно повышают

запоминаемость материала: если человек запоминает 25% услышанного и 33% увиденного, то 70% — обсуждая информацию с другими, и 95% — когда он преподает ее самому. Этот принцип подтверждает важность использования интерактивных форматов, предлагаемых современными платформами.

Анализ существующих платформ показывает их разнообразие и специализацию. Ниже представлена сравнительная таблица 1 некоторых из них, основанная на данных исследований. Эта таблица демонстрирует, что выбор платформы зависит от конкретных педагогических задач. Для комплексного освоения дисциплины, требующего прочной теоретической базы, предпочтение следует отдавать платформам с наличием теоретических материалов, таким как "Виртуальные лабораторные работы по физике" (167 работ с теорией для 49 из них) или "Физика — преподавателям и студентам" (34 работы с теорией). Для чисто практического моделирования и проведения симуляций могут быть достаточны и бесплатные ресурсы, такие как PhET или efizika.ru. Таким образом, цифровые платформы, особенно виртуальные лаборатории, являются мощным инструментом для достижения поставленных целей, обеспечивая безопасность, наглядность, возможность моделирования недоступных процессов и индивидуальность обучения [2].

Таблица 1

Сравнительная характеристика виртуальных лабораторий и цифровых платформ по физике

Платформа	*Разработчик/ Организация*	*Количество работ/разделов*	*Особенности и примечания*
efizika.ru	Не указан	>200	Реализовано в режиме реального времени, интерактивные модели, охватывает все разделы физики.
"Физика виртуальных лабораторий"	МФТИ	>50	Охватывает механику, термодинамику, электричество, магнетизм, оптику, атомную физику.
"Лаборатория физики"	МГУ им. М.В. Ломоносова	Большое количество	Охватывает аналогичные темы, как и МФТИ.
"Живая Физика"	Институт новых технологий	~350 моделей	Платный продукт, используется для моделирования движения тел в полях, работы с изображениями.
PhET	University of Colorado Boulder	45+ лабораторных работ	Бесплатная, нет теоретической части, используется для моделирования явлений.
ProgramLab	PL-LCC	5 разделов	Платная, без теории.
"Профессиональная группа"	Professional Group	40+ работ	Платная, информация о теории неизвестна.

OLABS	National Institute of Open Schooling	54 работы	Бесплатная, есть теория.

Адаптивные системы обучения: Персонализация образовательного пути и повышение компетентности

Если цифровые платформы решают задачи наглядности и практической отработки, то адаптивные системы обучения (АСО) представляют собой следующий уровень интеллектуализации образовательного процесса. Они направлены на решение одной из самых острых проблем в высшей школе — обеспечение персонализированного подхода к студентам с различным уровнем подготовки и темпом усвоения материала. АСО позволяют перейти от стандартизированного обучения к индивидуальной траектории, где контент и задания адаптируются под потребности каждого студента в реальном времени.

Концепция адаптивного обучения нашла свое воплощение в ряде исследований и практических разработок. Одним из примеров является адаптивная система обучения, реализованная на платформе Moodle в Сибирском федеральном университете (СФУ) для курсов «Математическая логика и теория алгоритмов» и «Дискретной математики». Эта система включает в себя модели предметной области (дерево понятий), пользователя, адаптации и оценки результатов. Обучение структурировано в виде последовательностей термов (в СФУ — 21 и 32 терма соответственно). После входного тестирования система строит индивидуальный маршрут для студента, который может состоять из нескольких редакций учебного материала с разной степенью детализации и формами подачи (текст, графика, видео, интерактивные ресурсы). Результаты педагогического эксперимента показали, что студенты, обучающиеся по адаптивному курсу, продемонстрировали более высокие итоговые результаты по сравнению с контрольной группой, что свидетельствует о повышении математической компетентности и снижении психоэмоционального напряжения [3].

Еще одним ярким примером является адаптивная система, разработанная в Самарском государственном техническом университете для студентов колледжей. Данная система основана на принципе перекрытия компетенций, где алгоритм адаптации рассчитывает разницу между моделью компетенций, заложенной в государственных образовательных стандартах (ФГОС), и текущим уровнем знаний студента после входного тестирования. Обучение разделено на три этапа: теоретический (основанный на теории программированного обучения), практический (решение задач пяти уровней сложности) и контрольный (адаптивное промежуточное тестирование). Педагогический эксперимент с участием 120 студентов наглядно продемонстрировал преимущества данного подхода. В группе, использовавшей адаптивную систему, доля студентов с высоким уровнем компетенций выросла на 46% (на 11 человек), а со средним уровнем — на 41% (на 20 человек). В то же время в контрольной группе эти показатели увеличились лишь на 19% (на 3 человека) и 17% (на 6 человек) соответственно. Это говорит о том, что АСО не просто помогает студентам с низким уровнем, но и позволяет более способным ученикам быстрее продвигаться к высоким результатам.

Принципы, лежащие в основе этих систем, являются универсальными. Они включают в себя использование теории пространств знаний (как в ALEKS), которая постоянно оценивает профиль знаний студента и предлагает ему актуальные задания. Интеллектуальные обучающие системы (ITS) предоставляют мгновенную обратную связь, моделируя работу персонального наставника, что особенно важно для

самостоятельной работы студентов. Такие платформы, как Knewton, Smart Sparrow и DreamBox Learning, уже успешно применяются в университетах США и других стран для курсов по математике, биологии и химии, демонстрируя значительное улучшение успеваемости.

Практическая ценность АСО заключается в их способности не только повысить качество знаний, но и развить у студентов важнейшие компетенции: навыки самообразования и критического мышления. Когда студент видит свою индивидуальную диаграмму прогресса и получает задания, соответствующие его текущему уровню, это повышает его вовлеченность и мотивацию. Кроме того, преподаватели, использующие АСО, получают мощный инструмент для анализа динамики обучения всего класса и отдельных студентов, что позволяет своевременно оказывать им необходимую поддержку. Таким образом, адаптивные системы обучения являются не просто технологическим нововведением, а фундаментальным сдвигом в педагогической парадигме, ориентированным на максимальное раскрытие потенциала каждого студента.

Виртуальные лаборатории и моделирование: Преодоление трудностей в усвоении абстрактных концепций

Одной из главных проблем преподавания физики и математики является преодоление разрыва между абстрактными теоретическими концепциями и их практическим применением. Студенты часто испытывают трудности с визуализацией физических процессов и пониманием сложных математических объектов. Цифровые технологии, в частности виртуальные лаборатории (ВЛР) и компьютерное моделирование, стали мощным инструментом для моста через этот разрыв. Они позволяют сделать невидимое видимым, а сложное — понятным, тем самым улучшая понимание и развивая эвристическое мышление.

Основное преимущество ВЛР заключается в их способности обеспечивать наглядность и безопасность. В отличие от реальных лабораторий, где доступ к некоторым экспериментам ограничен временем, стоимостью оборудования или опасностью, виртуальные лаборатории позволяют студентам многократно повторять опыты, изменять параметры и наблюдать за результатами в любом удобном темпе. Например, виртуальная лаборатория "Открытая физика" компании "Физикон" содержит сотни моделей, которые можно использовать для демонстрации физических процессов и проведения интерактивных симуляций [4].

Программа "Живая физика" позволяет моделировать движение тел в гравитационном и электростатическом полях, что помогает студентам лучше понять законы механики и электродинамики. Исследование, проведенное в Ярославском государственном техническом университете, показало, что виртуальные лаборатории могут служить полной или частичной заменой очного практикума, способствуя развитию цифровых компетенций.

Современные ВЛР выходят далеко за рамки простого воспроизведения стандартных опытов. Они предлагают возможности для углубленного исследования. Например, платформа "Физтех-симулятор" от МФТИ предназначена для виртуальных экспериментов по тем же разделам физики, что и "Физика виртуальных лабораторий". Виртуальная лаборатория VRNLab предлагает моделирование физических процессов в экзотических условиях, таких как вакуум или повышенная гравитация [5], что позволяет студентам проверять гипотезы и наблюдать за физическими законами в уникальных условиях. Еще более передовой пример — онлайн-лаборатория по квантовой физике, созданная Венским университетом. Она позволяет проводить эксперименты с интерферометром Капицы — Дирака — Тальбота — Лау в режиме реального времени, количественно и качественно оценивая результаты. Это

демонстрирует, как цифровые технологии могут дать доступ к передовым научным исследованиям даже в учебном процессе.

Не менее важным является применение компьютерного моделирования в математике. Здесь технологии позволяют преодолеть формализм знаний, который часто возникает при изучении абстрактных математических объектов. Исследование Е.И. Смирнова и его коллег показало, что внедрение технологии наглядно-модельного обучения в подготовке будущих учителей математики приводит к значительному росту коэффициента усвоения понятийного аппарата. В работе было отмечено, что около 65% учителей математики испытывают затруднения в воспроизведении школьных знаний по темам, таким как производная и интеграл, что указывает на наличие формализма в их собственном образовании. Технологии наглядного моделирования позволяют преодолеть этот барьер, делая математические объекты чувственными и понятными.

На сегодняшний день существует широкий спектр специализированных программных средств для моделирования. Для геометрии и построения трехмерных моделей отлично подходит GeoGebra, позволяющая исследовать свойства фигур, измерять объемы и площади. Для построения интерактивных графиков функций идеально подходит Desmos. Wolfram Alpha способна решать сложные алгебраические и тригонометрические уравнения с визуализацией решений. Для профессионального математического моделирования используются такие мощные инструменты, как MatLab и Mathematica. Эти инструменты не только позволяют решать задачи, но и наглядно демонстрируют зависимости между переменными, что крайне важно для глубокого понимания математических концепций [6].

Таким образом, виртуальные лаборатории и моделирование являются не просто альтернативой реальным экспериментам, а полноценным дополнением к ним. Они обеспечивают безопасность, доступность и возможность глубокого исследования, делая сложные концепции физики и математики более наглядными и понятными, что напрямую способствует улучшению качества образования.

Интеграция цифровых инструментов в учебный процесс: от платформ к методологическим подходам

Внедрение инновационных технологий в высшее образование — это не просто закупка лицензий на программное обеспечение или регистрация на внешних платформах. Успешная интеграция требует системного подхода, который объединяет различные цифровые инструменты в единую методологическую конструкцию. Анализ практик лучших вузов показывает, что наиболее эффективным является переход от использования отдельных технологий к созданию комплексных образовательных сред, сочетающих смешанное обучение, проектную деятельность и активные методики. Этот переход требует от педагогов не только технических навыков, а скорее переосмысления своей роли и всей педагогической стратегии.

Одним из ключевых методологических подходов является смешанное обучение, которое сочетает очные занятия с онлайн-материалами. Этот подход позволяет оптимизировать учебное время, используя аудиторию для обсуждения, решения проблем и совместной работы, а дистанционные форматы — для изучения теоретического материала. Онлайн-курс «Физика. Механика», разработанный в ПетрГУ на платформе Moodle, является ярким примером такого подхода. Курс состоит из лекционных материалов, видеозаписей вебинаров, интерактивных заданий и виртуальных лабораторных работ. Это позволило не только организовать качественный дистанционный формат, но и применить в очном формате такие педагогические технологии, как микрообучение и перевернутый класс. Такой подход позволяет студентам изучать материал в удобном темпе, а преподавателю — сосредоточиться на развитии навыков и решении сложных задач на занятиях [7].

Вторым важным направлением является проектное обучение, которое часто реализуется в рамках STEM-подхода. Этот метод заключается в решении студентами реальных, комплексных задач, что повышает их мотивацию за счет осознания практической значимости изучаемого материала. В Туркменистане метод STEM внедряется с акцентом на проектную деятельность, инженерные проекты, использование робототехники и программирования. В рамках STEAM-подхода (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics) искусство добавляется как инструмент творческого самовыражения, что еще больше стимулирует инновации. Например, студенты могут работать над проектом по созданию экологически чистого умного мусорного бака или солнечного генератора, что требует от них междисциплинарных знаний и навыков командной работы [8].

Третий аспект — это активные методики, которые ставят студента в центр образовательного процесса. К ним относятся перевернутый класс, когда студенты самостоятельно изучают теорию перед занятием, а на семинаре обсуждают и применяют знания, коллаборативное обучение, когда студенты работают в командах над проектами или решением задач. В Псковском государственном университете практикуется технология "перевернутый класс" на практических занятиях по методике обучения математике, где студенты готовят выступления по заранее предоставленным материалам. На старших курсах в Университете Иннополис студенты выполняют лабораторные работы под руководством научных сотрудников в реальных научных институтах, что является формой интенсивной проектной практики.

Успешная интеграция этих подходов требует создания единой информационной среды. Современные университеты активно внедряют корпоративные платформы, такие как Moodle, для организации учебного процесса. Однако сами платформы не решают проблемы междисциплинарной интеграции. Здесь ключевую роль играют интеграционные сервисы. Например, в Томском политехническом университете была разработана технология интеграции виртуальной лаборатории, созданной в среде LabVIEW, в общую образовательную среду на базе LMS Moodle [9]. Это позволило встроить удаленный доступ к реальному оборудованию прямо в электронный курс, что является примером глубокой интеграции технологий.

Ниже представлена таблица 2, обобщающая различные методологические подходы и примеры их реализации.

Таблица 2

Обзор и сравнительный анализ виртуальных лабораторий по физике

Методологический подход	*Ключевые принципы*	*Примеры реализации в источниках*
Смешанное обучение	Комбинация очных и дистанционных форматов, микрообучение, перевернутый класс.	Курс "Физика. Механика" в ПетрГУ на Moodle с виртуальными лабораториями и геймификацией.
Проектное обучение (STEM/STEAM)	Решение реальных задач, междисциплинарность, работа в командах, использование 3D-печати.	Проекты по созданию умного мусорного бака в STEAM, внедрение STEM в Туркменистане.
Перевернутый класс	Самостоятельное изучение теории студентами перед занятием, использование аудиторного времени для практики.	Практические занятия по методике обучения математике в ПсковГУ.

Коллаборативное обучение	Совместная работа студентов над проектами, форумы, чаты для обсуждения.	Использование форумов и чатов в Moodle для курса по физике в ПетрГУ.
Интегрированные практики	Практика в реальных лабораториях научных институтов, участие в научных проектах.	Практика научного эксперимента в Университете Иннополис.

В заключение, можно сказать, что будущее высшего образования лежит в синергии цифровых инструментов и продуманных методологических подходов. Успешная интеграция требует не только технологического обеспечения, но и культурной и педагогической трансформации, в которой преподаватель выступает в роли наставника и дизайнера образовательного опыта, а студент — в роли активного участника этого процесса.

Эффективность и вызовы: Оценка влияния инноваций на успеваемость и препятствия для внедрения

Оценка эффективности внедрения инновационных технологий в высшем образовании является ключевым фактором для их дальнейшего распространения и совершенствования. Хотя многие источники заявляют о положительном влиянии цифровых платформ и адаптивных систем, необходимо рассматривать эти утверждения в контексте конкретных исследований и сравнивать их с традиционными методами преподавания.

Педагогические эксперименты, проведенные в ведущих вузах, предоставляют убедительные данные о повышении эффективности. Наиболее показательными являются результаты, полученные с использованием адаптивных систем. Как уже упоминалось, в Самарском государственном техническом университете доля студентов с высоким уровнем компетенций в экспериментальной группе (обучение по адаптивной системе) выросла на 46%, а со средним уровнем — на 41% [4]. В контрольной группе эти показатели увеличились лишь на 19% и 17% соответственно. Это свидетельствует не просто о небольшом приросте, а о качественном скачке в уровне подготовки группы студентов, обучающихся по адаптивной траектории. Аналогично, в Сибирском федеральном университете применение адаптивного курса на Moodle способствовало формированию математической компетентности и снижению психоэмоционального напряжения у студентов.

Эффективность цифровых платформ и методов, основанных на искусственном интеллекте (ИИ), также подтверждается сравнительными исследованиями. Согласно анализу, представленному Алманом Кушеккалиевым и его коллегами, методы преподавания с применением ИИ превосходят классические по всем ключевым критериям: персонализация, интерактивность, визуализация, анализ данных, мотивация, а также развитие когнитивных и практических навыков [10]. Использование ИИ позволяет реализовать персонализированное обучение, адаптируя контент под стиль и темп каждого студента, а также обеспечивать мгновенную обратную связь и создавать индивидуальные тесты.

Однако, несмотря на эти успехи, внедрение инноваций сталкивается с серьезными вызовами и барьерами. Одним из главных препятствий является консерватизм учителей и преподавателей. Многие педагоги, особенно более опытные, предпочитают знакомые и проверенные временем методы, несмотря на их возможную неэффективность. Исследование Лаборатории инноваций в образовании НИУ ВШЭ показало, что большинство учителей в России используют цифровые платформы для математики и русского языка, но при этом не меняют традиционных методов преподавания. Интересно, что возраст педагога не оказывает значимого влияния на успешность адаптации к новым технологиям.

Второй серьезный барьер — технологическое оснащение и цифровой разрыв. Консерватизм может быть связан с плохим техническим оснащением школ и вузов, недостатком компьютеров и нестабильным интернетом. Это особенно актуально для удаленных регионов. Высокая стоимость и техническая сложность внедрения передовых систем, таких как АСО или ИИ, также являются серьезными препятствиями.

Третий блок проблем связан с практическими трудностями интеграции. Хотя многие вузы используют вебинарные платформы (Microsoft Teams, Zoom, Google Meet) для проведения занятий, ни одна из них не имеет встроенного графического или формульного редактора и электронных симуляторов, что требует подключения дополнительных сервисов. Опрос 157 преподавателей из вузов Владивостока, Челябинска и Санкт-Петербурга показал, что 93% столкнулись с трудностями освоения новых технологий [11]. Успех внедрения зависит от технологической оснащенности вуза и кадрового потенциала кафедр.

Наконец, существуют социально-педагогические риски. При использовании генеративного ИИ, например, ChatGPT, могут возникнуть проблемы с академической честностью, а чрезмерная зависимость от технологий может привести к снижению социального взаимодействия и когнитивных навыков. Кроме того, исследование в НИУ ВШЭ показало, что для студентов с высоким уровнем успеваемости ИИ становится инструментом развития, тогда как для других он может привести к снижению познавательной активности.

Таким образом, хотя доказанная эффективность инновационных технологий неоспорима, их широкое внедрение требует комплексного решения проблем. Необходимо не только развивать технологии, но и работать над повышением цифровой грамотности и мотивации преподавателей, улучшать инфраструктуру и разрабатывать четкие методические рекомендации для безопасного и эффективного использования этих мощных инструментов.

Стратегические перспективы: Роль искусственного интеллекта и междисциплинарного подхода в будущем образования

Будущее высшего образования, особенно в области физико-математических дисциплин, будет определяться двумя ключевыми трендами: глубокой интеграцией искусственного интеллекта (ИИ) во все аспекты образовательного процесса и переходом к междисциплинарным, проблемно-ориентированным моделям обучения. Эти два направления не будут развиваться параллельно, а будут тесно переплетены, создавая новую парадигму подготовки специалистов, способных решать сложные, неструктурированные задачи XXI века.

Искусственный интеллект выступает в качестве главного двигателя трансформации. Его роль выходит далеко за рамки простого предоставления информации или автоматизации тестирования. ИИ становится "умным" педагогом, способным осуществлять глубокую персонализацию обучения. Как отмечается в одном из исследований, методы преподавания с применением ИИ превосходят классические по всем критериям, включая повышение уровня знаний, мотивации и развитие практических навыков. Одним из наиболее перспективных инструментов является генеративный ИИ, такой как ChatGPT. Он может выступать в роли персонального репетитора, объясняющего сложные концепции, помогающего в решении задач, формирующего учебные материалы и поддерживая исследовательскую деятельность студентов. Однако использование такого мощного инструмента требует осторожности. Исследование НИУ ВШЭ показало, что ИИ может стать инструментом развития для хорошо успевающих студентов, но одновременно снизить познавательную активность для других. Поэтому стратегическая цель должна заключаться не в замене преподавателя ИИ, а в создании симбиотических систем, где

ИИ берет на себя рутинные и индивидуализированные задачи, а преподаватель фокусируется на развитии критического мышления, креативности и навыков командной работы.

Междисциплинарный подход, в частности STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) и его расширение до STEAM (добавление Art), становится основой для подготовки специалистов нового типа. Этот подход направлен на решение реальных, комплексных проблем, требующих совместного применения знаний из разных областей. В Туркменистане метод STEM внедряется с акцентом на проектную деятельность, инженерные проекты и использование 3D-моделирования и робототехники. Важно отметить, что междисциплинарность не ограничивается только естественными науками и инженерией. Например, в педагогических вузах курс «Математические методы физики» разрабатывается в рамках математической физики — теории математических моделей физических явлений, тесно связанной с теоретической физикой. Это демонстрирует, что фундаментальные математические дисциплины должны быть органично вплетены в общий междисциплинарный контекст, чтобы показать их актуальность и практическую пользу.

Стратегическая цель этих подходов — формирование у студентов не набора разрозненных знаний, а целостного мировоззрения и системы компетенций. Студенты, обучающиеся в рамках STEAM, на 30% чаще предлагают инновационные решения при столкновении с новыми задачами. Они развивают навыки критического мышления, аналитического анализа и совместной работы. Например, работа над проектом по программированию роботов требует от студентов не только технических знаний, но и дизайнерского видения (Art), экономической целесообразности (Mathematics) и понимания человеческого фактора.

В заключение, можно с уверенностью говорить о формировании новой образовательной парадигмы. Будущее принадлежит тем вузам, которые смогут создать синергию между технологиями и методологиями. Это будет образовательная среда, где:

1. Обучение персонализировано: ИИ и адаптивные системы строят индивидуальные траектории для каждого студента.
2. Обучение междисциплинарно: STEM/STEAM-подходы объединяют естественные науки, технологии, инженерное дело, искусство и математику для решения реальных проблем.
3. Обучение деятельностно: Проектная и проблемно-ориентированная деятельность ставит студента в центр процесса.
4. Обучение интегрировано: Все цифровые инструменты — от виртуальных лабораторий до платформ управления обучением — работают в единой, бесшовной информационной среде, как это предписано стандартом инновационной образовательной среды, утвержденным Минобрнауки РФ.

Этот сдвиг от трансляции знаний к конструированию опыта является ключом к подготовке выпускников, готовых не просто работать с технологиями, а создавать новые знания и инновации в быстро меняющемся мире [12].

Заключение

Виртуальная лаборатория (ВЛ) сегодня занимает особое место среди инновационных образовательных ресурсов. Под этим термином понимают проведение лабораторных работ и учебных экспериментов с использованием специально смоделированной виртуальной среды. Такие лаборатории применяются как для знакомства учащихся с базовыми дисциплинами, так и для углублённого изучения отдельных курсов. Виртуальные лаборатории позволяют решать целый ряд важных задач: проводить эксперименты, невозможные или опасные в реальных условиях;

ставить опыты, требующие дорогостоящего оборудования или редких реактивов; помогают преподавателям готовиться к реальным занятиям, повышая эффективность обучения; дают ребятам возможность в удобное время изучать устройство лабораторного оборудования, особенности взаимодействия элементов в различных средах и методику постановки опытов. Особенно ценным такое решение становится в условиях дистанционного обучения, обеспечивая полноценное освоение курса и подготовку к экзаменам даже при невозможности посещать занятия очно.

Технически виртуальные лаборатории представляют собой компьютерные программы или их комплексы — симуляторы, моделирующие взаимодействие с лабораторным оборудованием и ключевые этапы эксперимента. Среди их преимуществ — безопасность, возможность оперативной обратной связи от преподавателя, сохранение результатов в базе данных для последующего анализа ошибок, а также наличие встроенной теоретической базы. Виртуальная среда позволяет искусственно замедлять или ускорять время, что расширяет возможности для изучения как медленных, так и сверхбыстрых процессов. Кроме того, гибкая настройка среды позволяет использовать одну и ту же лабораторию для множества различных экспериментов.

Виртуальные лаборатории всё чаще применяются не только в учебном, но и в научно-исследовательском процессе. Учёные используют их для моделирования процессов, трудно или невозможно воспроизводимых в реальности: например, для трёхмерной визуализации белковых молекул, изучения поведения элементарных частиц или моделирования генетических скрещиваний. Особенно широко такие решения используются в физике, химии, биологии и генетике. За рубежом популярны системы молекулярной 3D-визуализации, позволяющие получать изображения молекул в высоком разрешении и использовать их для постановки экспериментов, выявления закономерностей и подготовки научных публикаций. Таким образом, виртуальная лаборатория становится не только экономически выгодным и безопасным обучающим инструментом, но и важным средством решения актуальных исследовательских задач.

Особое развитие получили виртуальные лаборатории по химии — среды моделирования, соответствующие школьным и вузовским программам, рекомендованным Министерством просвещения РФ. Они позволяют выполнять опыты по изучению свойств элементов периодической таблицы, их взаимодействия, получения соединений, а также исследовать органическую и неорганическую химию. Студенты могут проверять гипотезы, наблюдать за реакциями, ускорять или замедлять процессы — всё это без риска и затрат на реактивы. Преподаватели могут дистанционно настраивать виртуальные рабочие места, а учащиеся — готовиться к занятиям и экзаменам из дома. Примеры таких решений разработаны компанией «ЭнергияЛаб», которая также предлагает индивидуальную разработку учебного оборудования и виртуальных сред по запросу образовательных учреждений.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Акматбекова, А. Виртуальные лабораторные работы по физике как форма оптимизации самостоятельной работы студентов / А. Акматбекова, Э. Мамбетакунов, Г. Мухаметжанова, П. Эсенгул кызы // Вестник Ошского государственного университета. Педагогика. Психология. – 2023. – № 1(2). – С. 6–17. DOI 10.52754/16948742_2023_1(2)_1.
2. Бадекин, М. Ю. Рациональные методы преподавания дисциплин математического цикла в цифровую эпоху / М. Ю. Бадекин, Н. Н. Ивахненко, Н. А. Коноплин // Международный научный журнал. – 2023. – № 1(88). – С. 44–51. DOI 10.34286/1995-4638-2023-88-1-44-51.
3. Бадекин, М. Ю. Смешанное обучение теории функций двух переменных / М. Ю. Бадекин, Н. Н. Ивахненко, Н. А. Коноплин // Международный научный журнал. – 2023. – № 2(89). – С. 79–87. DOI 10.34286/1995-4638-2023-89-2-79-87.

4. Гулин, В. М. Виртуальные физические лаборатории — актуальный инструмент обучения в современных условиях / В. М. Гулин, О. Ф. Огнева // Primo Aspectu. – 2022. – № 2(50). – С. 55–60. DOI 10.35211/2500-2635-2022-2-50-55-60.
5. Данилина, Е. К. Онлайн-сервисы при дистанционном обучении (на примере дисциплины «Физика») / Е. К. Данилина, Н. А. Клещёва // Современные наукоёмкие технологии. – 2022. – № 11. – С. 138–142. – DOI 10.17513/snt.39410. – URL: https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=39410 (дата обращения: 27.09.2025).
6. Косников, С. Н. Использование цифровых платформ и онлайн-курсов при изучении математических дисциплин в вузах / С. Н. Косников, З. И. Зарецкая // Журнал прикладных исследований. – 2025. – № 3. – С. 201–208. DOI 10.47576/2949-1878.2025.3.3.028.
7. Кушеккалиев, А. Н. Искусственный интеллект как составляющая современной методологии изложения физико-математических дисциплин / А. Н. Кушеккалиев, Э. К. Чеченова, Г. А. Уалиева // Современное педагогическое образование. – 2025. – № 2. – С. 68–72.
8. Отстающие и опережающие: как студенты используют генеративный искусственный интеллект в образовательных целях / Я. И. Кузьминов, Е. В. Кручинская, И. А. Груздев, А. А. Наумов // Высшее образование в России. – 2025. – Т. 34, № 6. – С. 9–35. DOI 10.31992/0869-3617-2025-34-6-9-35.
9. Румановский, И. Г. Технология интеграции виртуальной лаборатории в LMS Moodle / И. Г. Румановский, К. А. Драчев // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2022. – № 1(64). – С. 39–46.
10. STEM-обучение как инструмент мотивации студентов инженерных специальностей / С. Джумамырадов, С. Бердиев, А. Сопыева, Ы. Довлетгелдиев // Символ науки: международный научный журнал. – 2025. – Т. 1, № 4-1. – С. 114–115.
11. Щипицын, В. Д. Обзор цифровых платформ и инструментов для организации дистанционного обучения на уроках физики / В. Д. Щипицын // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия: Информационные компьютерные технологии в образовании. – 2023. – № 19. – С. 29–41. DOI 10.24412/2222-7520-2023-1-29-41.
12. Шудуева, З. А. Роль адаптивных образовательных технологий в персонализации обучения / З. А. Шудуева, З. М. Миназова, С. Б. Харченко // Проблемы современного педагогического образования. – 2024. – № 84-1. – С. 379–382.

***Natalya N. Ivakhnenko*,**
Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow;
Associate Professor, Timiryazev Moscow Agricultural Academy, Moscow
yulduz19.77@mail.ru
***Maksim Yu. Badekin*,**
Senior Lecturer, Department of Theoretical Physics and Nanotechnology, Donetsk State University, Donetsk
korund2002@list.ru

Innovative technologies in teaching physics and mathematics disciplines in higher education

Abstract: In the context of the digital transformation of higher education, the relevance of innovative teaching methods in physics and mathematics is growing. The aim of this study is to systematize and evaluate the effectiveness of digital technologies—virtual laboratories, adaptive learning systems, and AI tools—in the Russian and international context. Analysis showed that their use enhances motivation, deepens understanding of abstract concepts, and increases the proportion of students with a high level of competence. However, this requires pedagogical transformation and overcoming infrastructural and methodological barriers.

Keywords: Innovative technologies, physics and mathematics, higher education, virtual laboratories, adaptive learning systems, digital platforms, STEM approaches, artificial intelligence, personalized learning

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ: kNN и k-Means

Аннотация

Актуальность работы обусловлена необходимостью формирования у студентов не только теоретических знаний, но и практических навыков в области машинного обучения. Работа представляет собой описание методического пособия для обучения алгоритмам kNN и k-Means. В статье представлены готовые методические материалы: объяснения алгоритмов, примеры их применения и задачи для закрепления материала.

Ключевые слова

машинное обучение, методика преподавания, k-ближайшие соседи (kNN), k-средние (k-Means)

АВТОРЫ

Игнатова Варвара Андреевна,
студент
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана", г. Москва
varvara.bag2010@yandex.ru

Терентьева Марина Александровна,
студент
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана", г. Москва
terentmarina@gmail.com

Федянин Денис Николаевич,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана", г. Москва
dfedyanin@inbox.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-104-110

Введение

По мнению Т. Хасти и соавторов [1], машинное обучение стало неотъемлемой частью современной цифровой экономики, проникая в самые разные сферы — от медицины и финансов до ритейла и развлечений. Однако, как отмечает А. Жерон [2], сложность фундаментальных концепций машинного обучения часто становится барьером для студентов, начинающих свой путь в Data Science.

Как подчеркивает К. П. Мерфи [3], особую важность имеют базовые алгоритмы, такие как метод k-ближайших соседей (kNN) для задач классификации и регрессии, и алгоритм k-средних (k-Means) для кластерного анализа. Тем не менее, как показало исследование С. Б. Гупты и соавторов [4], на практике преподаватели сталкиваются с недостатком структурированных учебных материалов, которые сочетают в себе доступность объяснения, наглядность и практическую направленность.

Целью данной работы является разработка структурированного методического пособия для эффективного преподавания алгоритмов kNN и k-Means, направленного на преодоление этих трудностей и формирование у студентов прочного понимания принципов их работы.

Методология и результаты исследования

Обзор современных методик преподавания алгоритмов kNN и k-Means

Современные подходы к преподаванию алгоритмов машинного обучения kNN и k-Means демонстрируют эволюцию от чисто теоретического изложения к интегративным методам, сочетающим визуализацию, практическую реализацию и работу с реальными данными.

Как отмечается в курсе Стэнфордского университета на платформе Coursera [5], алгоритмы представлены в контексте более широких тем. kNN рассматривается как пример непараметрических методов в контролируемом обучении, а k-Means как базовый алгоритм кластеризации. Особенностью этого подхода является акцент на математических основаниях — метриках расстояния для kNN и условиях сходимости для k-Means, с последующей практической реализацией на языке Python.

Согласно материалам платформы Distill.pub [6], интерактивные образовательные платформы реализуют понимание сложных концепций через динамическую визуализацию. Для kNN это проявляется в возможности наблюдать, как изменение параметра k влияет на гладкость границ решений и чувствительность к выбросам. В случае k-Means, как демонстрирует Н. Харрис [7], интерактивные демонстрации показывают итерационный процесс перемещения центроидов и перераспределения точек между кластерами, что делает абстрактный алгоритм наглядным и понятным.

Практико-ориентированный подход, представленный в документации библиотеки scikit-learn Ф. Педрегосы и соавторами [8], фокусируется на полном цикле работы с алгоритмами — от предобработки данных и выбора метрик до оценки качества и интерпретации результатов. Методические материалы включают работу с классическими датасетами (Iris, Wine, Digits), где студенты учатся решать реальные задачи классификации и кластеризации, осваивая одновременно теоретические основы и практические навыки программирования

Общей тенденцией современных методик является переход от изолированного изучения алгоритмов к их рассмотрению в контексте полного цикла машинного обучения, с акцентом на интерпретируемость результатов и понимание ограничений каждого метода.

Предлагаемое для студентов описание kNN

Описание начинается с упоминание истории, в частности классической работы Т. М. Ковера и П. Е. Харта [9], где алгоритм k-ближайших соседей (kNN) представляется как фундаментальный метод машинного обучения, который демонстрирует базовые принципы классификации и регрессии. Далее упоминается, что его изучение, как показано в исследовании К. К. Одиакаозе [10], позволяет понять необходимость более сложных моделей, таких как нейронные сети, поскольку kNN эффективен на небольших выборках, но становится вычислительно неэффективным при работе с большими данными и высокоразмерными пространствами.

Процесс работы kNN описывается для студентов через выделение трёх основных этапов:

1. **Сохранение данных.** На этапе «обучения» алгоритм просто сохраняет всю предоставленную ему обучающую выборку — набор объектов с известными признаками (например, рост и вес) и метками (например, вид животного). Никаких вычислений на этом этапе не происходит.

2. **Вычисление расстояний.** Когда алгоритму подается новый, неразмеченный объект, он вычисляет расстояние от этого объекта до каждого объекта в обучающей выборке. Именно на этом этапе критически важен выбор метрики расстояния.

Евклидова метрика (евклидово расстояние, или же Euclidean distance) – метрика в евклидовом пространстве, расстояние между двумя точками евклидова пространства, вычисляемое по теореме Пифагора. Проще говоря, это наименьшее возможное расстояние между точками A и B.

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Также известное как «расстояние городских кварталов», оно отражает расстояние, которое нужно пройти по перпендикулярным улицам, а не по прямой. Это сумма абсолютных разностей по всем координатам.

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$$

Манхэттенское расстояние может быть более устойчивым к выбросам, чем евклидово, так как возведение в квадрат в последней формуле усиливает влияние больших разностей.

3. **Принятие решения.** Алгоритм выбирает k объектов из обучающей выборки, которые оказались ближе всего к новому объекту (это и есть «k-ближайших соседей»).

Предлагаемые для студентов лабораторные работы (примеры)

Пример лабораторной работы

Задание. Рассмотрим следующий пример. Имеется 7 точек с заданным классом (0 или 1) (см. табл. 1). Необходимо, используя Евклидову метрику определить к какому классу будет относиться точка A (2,2). При равном количестве соседей из разных классов предпочтение будет отдаваться классу 1.

Таблица 1

Данные для примера

Название точки	*Координата x*	*Координата y*	*Класс точки*
A	2	2	*?*
P_1	0	0	0
P_2	1	1	1
P_3	3	3	0
P_4	4	4	1
P_5	2	3	0
P_6	3	2	1
P_7	1	3	0

Ожидаемое от студента **решение** представлено ниже.

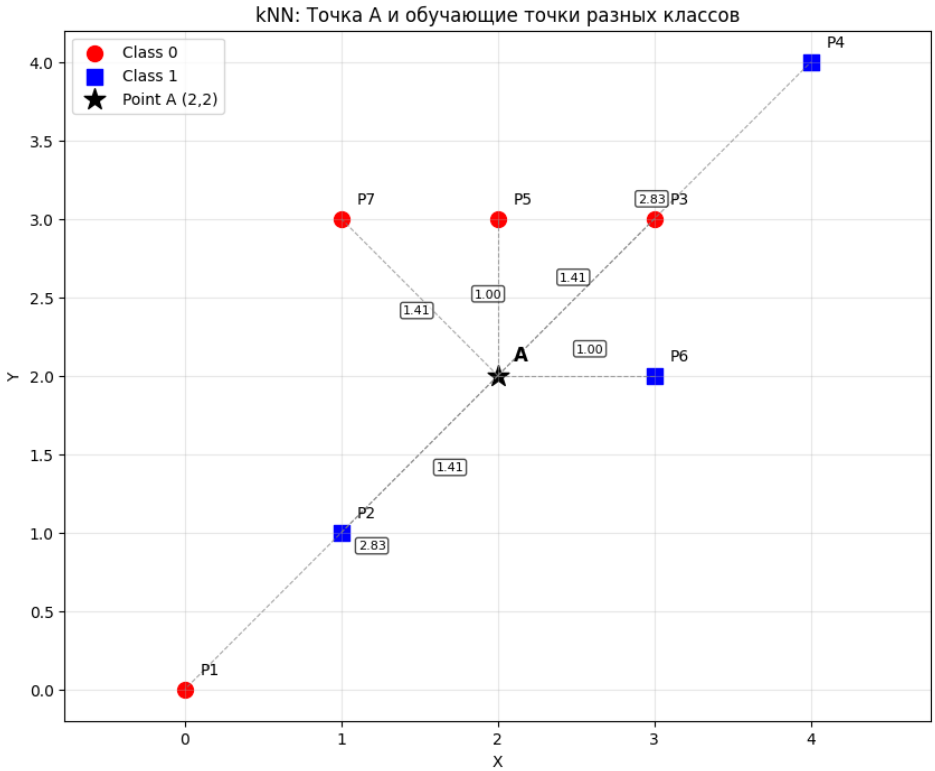


Рис. 1 (Графическая интерпретация примера 1)

Для начала рассчитаем расстояния от точки A до каждой из точек по метрики Евклида. Далее полученные точки необходимо отсортировать в порядке возрастания расстояния. Таким образом получим последовательность: P_5, P_6, P_2, P_3, P_7, P_1 и P_4 (рис. 1). Изобразим полученный класс точки в A в зависимости от количества соседей (рис. 2).

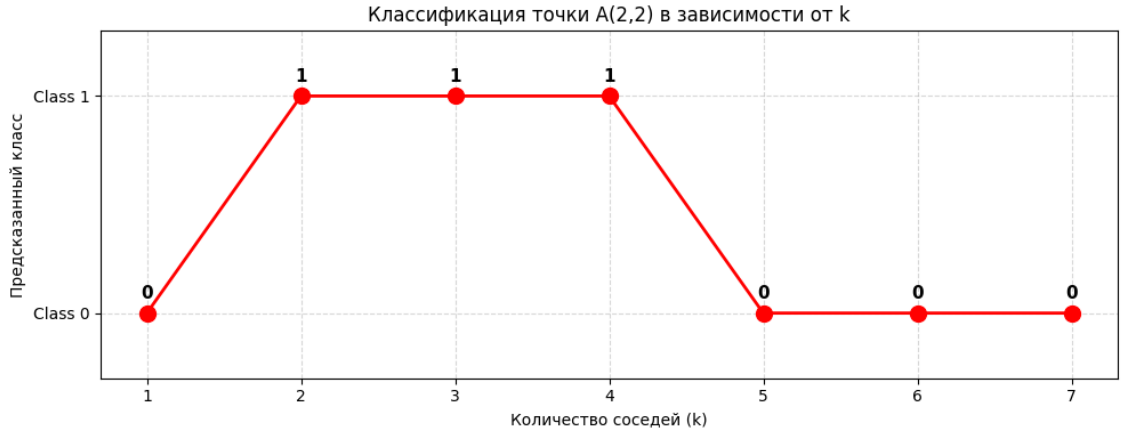


Рис. 2 (Классификация точки A (2,2) в зависимости от k).

k-MEANS — алгоритм k-средних

Так как часто возникает путаница между алгоритмами kNN и k-Means из-за схожести в названии, то предлагается рассмотреть особенности более подробно (см. табл. 2).

Ключевое отличие: обучение с учителем против обучения без учителя.

Принцип работы алгоритма k-Means, согласно фундаментальной работе Дж. МакКвина [11], начинается со случайного выбора k точек в качестве начальных центров кластеров (центроидов). Затем итеративно повторяются два шага: на этапе назначения кластеров каждая точка данных относится к ближайшему центроиду, формируя временные кластеры; после этого происходит пересчет центроидов — они

перемещаются в среднее положение точек своего кластера. Этот процесс продолжается до тех пор, пока назначения точек кластерам не стабилизируются и центроиды перестанут смещаться.

Таблица 2

Сравнение алгоритмов

Параметр	kNN	k-Means
Тип обучения	С учителем	Без учителя
Основная цель	Предсказание	Кластеризация
Скорость предсказания	Медленная	Быстрая
Нужны метки	Да	Нет
Чувствительность к шуму	Высокая	Средняя

Пример лабораторной работы

От студентов требуется исследовать один полный цикл алгоритма k-Means для k=2.

Задание. На шаге 1 по заданным центроидам (красные крестики) сформировать границы кластеров через диаграмму Вороного — каждая точка относится к ближайшему центроиду, образуя временные кластеры. Линии— границы Вороного. Это "зоны влияния" каждого центроида.

На шаге 2 пересчитать центроиды: они перемещаются в центры масс своих кластеров (показано стрелками). Границы Вороного перестраиваются, отражая новое разделение пространства.

Построить результаты на графике. Визуализация продемонстрирует ключевой принцип k-Means: итеративное уточнение кластеров через чередование назначения точек и пересчета центроидов до достижения стабильной группировки данных (см. рис. 3).

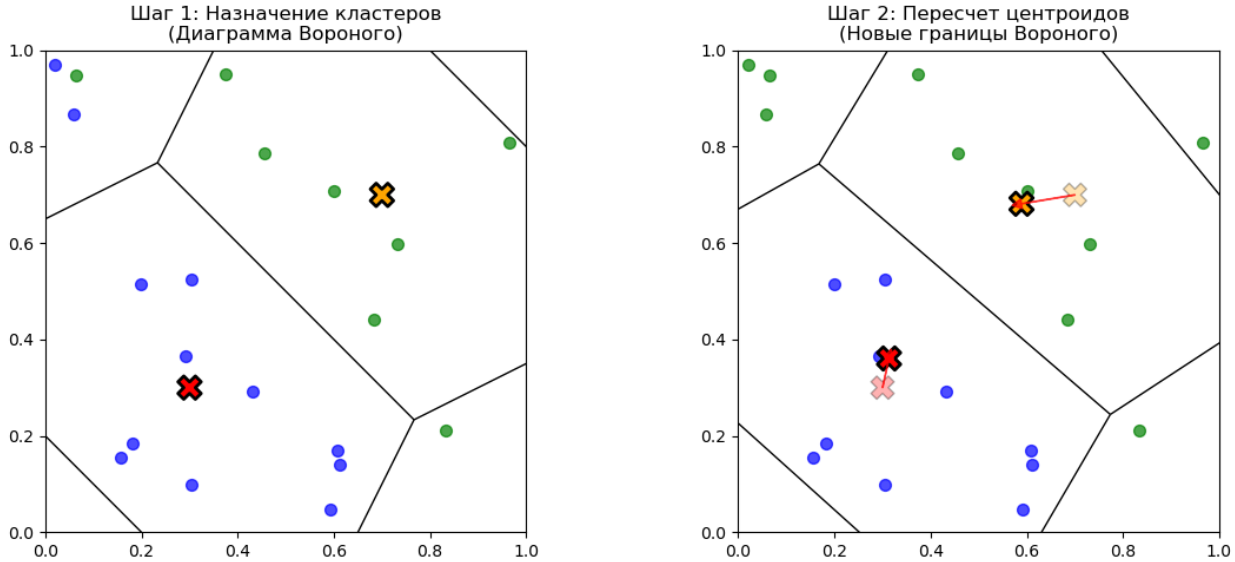


Рис. 3 (Пример работы k-Means)

Ниже представлены вопросы, которые предлагается дать студентами в качестве самопроверки

Вопрос 1

Есть данные о 1000 пациентов: возраст, давление, пульс и диагноз. Нужно предсказать диагноз для нового пациента. Какой алгоритм выбрать?

Вопрос 2

Есть данные о покупках 5000 клиентов без какой-либо разметки. Нужно понять, есть ли группы клиентов с похожим поведением. Какой алгоритм применить?

Вопрос 3

Что означает параметр k в каждом из алгоритмов?

Заключение

Разработанное методическое пособие (элементы которого представлены в работе) на наш взгляд предоставляет комплексный подход к преподаванию базовых алгоритмов машинного обучения — kNN и k-Means. При этом использованная классическая структура занятия с четким разделением временных интервалов и практических результатов как нам кажется поможет студентам эффективно усвоить материал.

Визуализация работы алгоритмов через интерактивные примеры позволяет преодолеть абстрактность математических концепций. Особый акцент сделан на разграничении задач классификации (kNN) и кластеризации (k-Means), что формирует у студентов системное понимание различных подходов в машинном обучении.

Практическая ориентированность пособия, подкрепленная наглядными примерами и пошаговыми решениями, способствует не только усвоению теоретических знаний, но и развитию навыков применения алгоритмов для решения реальных задач анализа данных.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Hastie, T. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. - 2nd ed. - New York: Springer, 2009. - 767 p.
2. Géron, A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems / A. Géron. - 2nd ed. - Sebastopol: O'Reilly Media, 2019. - 850 p.
3. Murphy, K. P. Machine Learning: A Probabilistic Perspective / K. P. Murphy. - Cambridge: MIT Press, 2012. - 1104 p.
4. Gupta S. B. A Systematic Comparative Analysis of Clustering Techniques / S. B. Gupta, R. Yadav, S. Gupta // Applied Computer Systems. – 2020. – Vol. 25, No. 2. – P. 112-125. DOI: 10.2478/acss-2020-0012
5. Machine Learning: course by Stanford University [Electronic resource]. – URL: https://www.coursera.org/learn/machine-learning (date of access: 01.12.2024).
6. How the k-Nearest Neighbors Algorithm Works with Visualizations [Electronic resource]. – 2016. – URL: https://distill.pub/2016/misread-tsne/ (date of access: 01.12.2024).
7. Understanding k-Means Clustering through Interactive Demos [Electronic resource] / N. Harris // Personal blog. – 2015. – URL: https://www.naftaliharris.com/blog/visualizing-k-means-clustering/ (date of access: 01.12.2024).
8. Scikit-learn: Machine Learning in Python [Electronic resource] / F. Pedregosa et al. // Official documentation. – 2011-2024. – URL: https://scikit-learn.org/stable/index.html (date of access: 01.12.2024).
9. Cover, T. M. The Nearest Neighbor Pattern Classification / T. M. Cover, P. E. Hart // IEEE Transactions on Information Theory. - 1967. - Vol. 13, no. 1. - P. 21-27.
10. Odiakaose C. C. A Comparative Analysis of Machine Learning Algorithms: A Case Study of a Higher Institution: master's thesis / C. C. Odiakaose; scientific advisor A. A. Ojuro. - 2021. - 89 p. DOI: 10.13140/RG.2.2.33330.58560
11. MacQueen, J. Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations / J. MacQueen // Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. - 1967. - Vol. 1. - P. 281-297.

***Varvara A. Ignatova*,**
Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
varvara.bag2010@yandex.ru
***Marina A. Terentyeva*,**
Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
terentmarina@gmail.com
***Denis N. Fedyanin*,**

Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dfedyanin@inbox.ru

Methodological guide for teaching machine learning algorithms: kNN and k-Means

Abstract. The relevance of the work is due to the need for students to develop not only theoretical knowledge, but also practical skills in the field of machine learning. The goal is to create a methodological guide for teaching kNN and k-Means algorithms. The article presents ready-made methodological materials: explanations of algorithms, examples of their application and tasks for consolidating the material.

Keywords: machine learning, teaching methods, k-nearest neighbors (kNN), k-Means.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Аннотация

Статья посвящена одному аспекту теории функций комплексного переменного, редко затрагиваемому в учебных курсах, а именно сохранению многих алгебраических соотношений при переходе от действительных чисел к комплексным. С помощью теоремы единственности доказаны многие такие соотношения, а также правила дифференцирования и некоторые формулы восстановления функции по действительной или мнимой части.

Ключевые слова

аналитическая функция; теорема единственности; аналитическое продолжение; элементарные аналитические функции

АВТОРЫ

Канатников Анатолий Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
skipper@bmstu.ru

Крищенко Александр Петрович,
доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
apkri@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-111-121

Введение

Теория функций комплексного переменного — важнейшая часть современной математической подготовки. Она играет существенную роль в различных научных направлениях в математике, механике, физике (см. И.И. Привалов [1], А.В. Ефимов, Б.П. Демидович [2], задачник Б.П. Демидовича для втузов [3]). Расширение множества действительных чисел до множества комплексных упрощает многие математические соотношения и закономерности. Например, формулы Кардано для решения кубических уравнений опираются на комплексные числа. Область, в которой функция представляется степенным рядом, в комплексных числах определяется гораздо проще, чем в действительных. При этом многие алгебраические соотношения, известные в рамках действительных чисел, без изменений переносятся в область комплексных чисел. Например, формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}b^n,$$

устанавливаемая для действительных чисел, верна и в случае, если числа комплексные. Это связано с сохранением основных свойств арифметических операций при переходе к комплексным числам: коммутативности и ассоциативности сложения и умножения, дистрибутивности умножения по отношению к сложению. Эти свойства лежат в основе техники преобразований числовых и алгебраических выражений, которая используется для установления различных числовых и

алгебраических тождеств. Можно сказать, что любое свойство действительных чисел, опирающееся на аксиомы арифметических операций, без изменений переносится на комплексные числа.

Сформулированное утверждение есть на самом деле часть более общего принципа, смысл которого сводится к следующему. Пусть для некоторого набора действительных переменных выполняется функциональное тождество $F(x_1,x_2,\ldots x_n)=0$, где $x_i \in (a_i,b_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда при определенных требованиях функция $F(x_1,x_2,\ldots x_n)$ действительных переменных x_1, x_2, …, x_n распространяется (или, как говорят, продолжается) на некоторую область комплексных переменных как функция $F(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, определенная при $z_i \in D_i \subset C$, где $D_i \supset (a_i,b_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, причем продолженная функция определяется однозначно и тождество $F(z_1,z_2,\ldots,z_n)=0$ сохраняется. Оговоренные требования состоят в том, что функция F разлагается в степенной ряд. Это означает, что вычисление значения функции сводится к тем же арифметическим операциям и предельному переходу.

Настоящая статья посвящена систематическому обоснованию этого принципа.

Методология и результаты исследования

Функция комплексного переменного $f(z)$, которая определена в некоторой окрестности точки z_0, называется дифференцируемой в этой точке, если верно представление

$$f(z_0+h)-f(z_0)=\Delta f(z_0)=Ah+\alpha(h)^h$$

в котором $\alpha(h)$ обозначает бесконечно малую при $h \to 0$. Число A представляет собой производную $f'(z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0. При этом величину $A=f'(z_0)$ можно вычислить по формуле

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{h}.$$

Определение дифференцируемости функции комплексного переменного слово в слово повторяет аналогичное определение для функции действительного переменного. Поэтому неудивительно, что сохраняются все основные свойства операции дифференцирования, т.е. вычисления производной суммы, разности, произведения, частного функций, сложной и обратной функции.

Функция, которая дифференцируема в каждой точке данной комплексной области D, называется аналитической в D (также голоморфной D). Предполагается, что известны основные факты о свойствах голоморфных функций (например теорема Коши, интегральная формула Коши и т.п.). Отметим, что если функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z-z_0|<R$, то в этом круге она разлагается в степенной ряд, который при этом будет ее рядом Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

где

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Теорема 1 (теорема единственности). Если $f(z)$ голоморфна в данной комплексной области D, причем $f(z)=0$ в каждой точке z некоторого

множества M, имеющего предельные точки в D, то $f(z)=0$ всюду в D.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ — предельная точка множества M. Это означает, что существует последовательность $\{z_n\} \subset M$, сходящаяся к z_0. Поскольку $f(z_n)=0$ при всех n, в силу непрерывности $f(z)$ в точке z_0 заключаем, что $f(z_0)=0$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ,$$

Так как $f(z_0)=0$, то $a_0=0$. Все коэффициенты записанного ряда могут равняться нулю. Тогда $f(z)=0$ в некоторой окрестности точки z_0. Если же есть ненулевые коэффициенты и n — номер первого такого коэффициента, то $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=(z-z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$. Но тогда $f(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки z_0, что невозможно, так как $f(z_n)=0$ и $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$. Поэтому на самом деле все коэффициенты ряда Тейлора равны 0 и $f(z) \equiv 0$ в окрестности точки z_0.

Мы показали, что множество точек, предельных для нулей функции $f(z)$ в D, является открытым. Но это множество и замкнуто. Значит, оно совпадает с D. Теорема доказана.

Следствие 1. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области D и $f(z)=g(z)$ в любой точке z какого-либо множества M, имеющего в D предельные точки, то $f(z)=g(z)$ всюду в D.

Следствие 2. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области G, которая включает в себя некоторый интервал $I=(a,b)$ действительной оси. Если $f(z)=g(z)$ на I, то $f(z)=g(z)$ всюду в G.

Для доказательства следствий достаточно применить теорему 1 к разности функций $f(z)-g(z)$.

Следствие 2 постулирует, что для функции действительного переменного $f(x)$, продолжающейся в комплексную область, такое продолжение определено однозначно. продолжений, не являющихся голоморфными, существует, конечно, бесконечно много.

Если функция действительного переменного $f(x)$, определенная на интервале (a,b), имеет аналитическое продолжение в комплексную область G, включающую в себя интервал (a,b), то она разлагается в ряд Тейлора в окрестности каждой точки $x \in (a,b)$. В самом деле, нужно разложить аналитическое продолжение $f(z)$ в точке $x \in (a,b)$ и рассмотреть полученный ряд как действительный. Интересный здесь пример — функция $f(x)=\exp(-1/x^2)$, доопределенная нулем при. Эта функция бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, а в точке $x=0$ имеет производные всех порядков, равные 0. Поэтому она не может быть в ряд Тейлора в окрестности нуля и, значит, не имеет аналитического продолжения в комплексную окрестность точки 0.

С другой стороны, если $f(x)$ разлагается в некоторой действительной окрестности (x_0-h, x_0+h) точки x_0 в степенной ряд, то, заменив действительный

аргумент ряде комплексным, получим аналитическое продолжение функции в круг $|z-z_0|<h$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x_0-h<x<x_0+h, \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<h.$$

Таким образом, возможность аналитического продолжения функции действительного переменного в окрестность действительной оси равносильна возможности разложения этой функции в ряд Тейлора. С учетом этих соображений делаем следующий вывод.

Следствие 3. Существуют голоморфные в комплексной плоскости C функции $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, которые на действительной оси совпадают с элементарными функциями e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ соответственно, причем эти функции определены единственным образом.

В самом деле, записав степенные ряды для этих функций как ряды с комплексным аргументом, получим ряды, сходящиеся в C, и тем самым аналитическое продолжение указанных функций в комплексную плоскость. Например,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Из следствия 2 вытекает, что других аналитических продолжений нет.

Единственность в случае нескольких переменных

Функцию $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ нескольких комплексных переменных, определенную в некоторой области G n-мерного комплексного пространства C^n, будем называть аналитической по компонентам (или просто аналитической), если для каждого i при фиксированных аргументах z_1, z_2, …, z_{i-1}, z_{i+1}, …, z_n функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ оказывается аналитической.

Теорема 2. Пусть функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ является аналитической по компонентам в области $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_n)\colon z_i \in G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ и каждая из областей G_i содержит интервал I_i действительной оси. Если $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ на $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, то $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ на G.

Доказательство. Выберем произвольным образом действительные $x_2 \in I_2$, …, $x_n \in I_n$ и зафиксируем. Функция $\varphi_1(z) = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ аналитична в G_1, причем $\varphi_1(x) = 0$ при $x \in I_1 \subset G_1$. Поэтому $\varphi_1(z) = 0$ в G_1, т.е. $f(z, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $z \in G_1$, $x_2 \in I_2$, …, $x_n \in I_n$. Теперь выберем произвольные $z_1 \in G_1$, $x_3 \in I_3$, $x_4 \in I_4$, …, $x_n \in I_n$ и рассмотрим функцию $\varphi_2(z) = f(z_1, z, x_3, \ldots, x_n)$. Эта функция равна нулю при $z \in I_2$. Поэтому, учитывая аналитичность по второй компоненте, заключаем, что $\varphi_2(z) = 0$ на G_2, т.е. $f(z_1, z_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$, $z_1 \in G_1$, $z_2 \in G_2$, $x_3 \in I_3$, …, $x_n \in I_n$. Продолжая этот процесс n раз, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 4. Пусть функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ аналитичны по компонентам в области $G = G_1 \times G_2 \times \ldots G_n$, причем каждая из областей G_i содержит интервал I_i действительной оси. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, то $F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ на G.

Дифференцирование и интегрирование

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в некоторой области D, содержащей интервал I действительной оси, и пусть на этом интервале $f'(x)=g(x)$. Тогда $f'(z)=g(z)$ всюду в D. В самом деле, $f'(z)$ — голоморфная в D функция и ее значения на интервале I совпадают с $f'(x)$ согласно определениям производной для функций действительного переменного и функций комплексного переменного. В результате аналитические функции $f'(z)$ и $g(z)$ совпадают на интервале действительной оси, а потому по теореме единственности они совпадают всюду в D.

Эти рассуждения приводят к следующему выводу: дифференцирование функций комплексного переменного осуществляется по тем же правилам, что и дифференцирование соответствующих функций действительного переменного. Например, $(\sin z)'=\cos z$, так как для действительного аргумента $(\sin x)'=\cos x$.

Простое обобщение правил дифференцирования на случай комплексного переменного позволяет легко обобщить и понятие неопределенного интеграла.

Если голоморфная функция $f(z)$ такова, что $f'(z)=0$ в всей области определения этой функции, то $f(z)=\text{const}$. Действительно, полагая $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial x}\equiv 0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$, как действительная и мнимая части $f'(z)$. Поэтому $u(x,y)$ является постоянной. Аналогично заключение относительно $v(x,y)$ и в конечном счете относительно функции $f(z)$.

Из доказанного выше вытекает, что любые две аналитические функции, у которых производные равны, различаются на константу, являющуюся, вообще говоря, комплексной. Совокупность всех функций, производная которых равна заданной функции $f(z)$, называется неопределенным интегралом функции $f(z)$. Он обозначается так же, как и в действительном случае: $\int f(z)dz$. Каждая функция, имеющая производную, равную $f(z)$, называется первообразной функции $f(z)$. Неопределенный интеграл для аналитических функций ищется по тем же правилам, что и для функций действительного переменного. Действительно, если $\int f(x)dx=F(x)+C$, а функции $f(x)$ и $F(x)$ являются сужениями на действительную ось некоторых аналитических функций $f(z)$ и $F(z)$, то $F'(z)=f(z)$, и следовательно, $\int f(z)dz=F(z)+C$, где C — комплексная постоянная.

Основные элементарные функции

Остановимся на основных элементарных функциях $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, существование которых установлено в следствии 3. Заметим, что к основным также относят и функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, которые выражаются через указанные нами функции простыми формулами.

Функция $\exp(z)$. Основное свойство показательной функции действительного аргумента — тождество

$$e^{x+y}=e^x e^y.$$

Это тождество переносится и в область комплексного аргумента. В самом деле,

рассмотрим две функции $F(z_1,z_2)=\exp(z_1+z_2)$ и $G(z_1,z_2)=\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$, которые аналитичны по компонентам всюду в $\mathbb{C}^2$. При действительных значениях аргументов эти функции совпадают: $F(x_1,x_2)=G(x_1,x_2)$. Согласно следствию 4 заключаем, что $F(z_1,z_2)=G(z_1,z_2)$, т.е. $\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$.

Доказанное свойство дает нам теперь право писать вместо $\exp(z)$ обычное e^z.

Отметим, что функцию e^z можно определить также по формуле

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y), \tag{1}$$

которая при $x=0$ известна как формула Эйлера. Действительно, проверяя условия Коши — Римана, можно непосредственно убедиться в том, что функция в (1) справа аналитична. С другой стороны, на действительной оси она совпадает с e^x. По теореме единственности получаем равенство (1).

Функции $\sin z$ и $\cos z$. Для этих функций сохраняются все формулы тригонометрии, в частности:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1, \quad \sin(-z)=-\sin z, \quad \cos(-z)=\cos z,$$

$$\sin(z\pm w)=\sin z\cos w\pm\cos z\sin w, \quad \cos(z\pm w)=\cos z\cos w\mp\sin z\sin w.$$

Действительно, эти формулы и вытекающие из них формулы удвоенного и утроенного угла, формулы для произведений, формулы приведения и т.п. представляют собой тождества вида

$$P(\cos(Q_1(z_1,\ldots,z_n)),\ldots,\sin(R_1(z_1,\ldots,z_n)),\ldots)=0,$$

где P, Q_1, Q_2, ..., R_1, R_2, ... — многочлены от нескольких комплексных переменных. Левая часть этого выражения есть функция, аналитическая по каждой из переменных, так как получается из аналитических функций одного переменного при помощи арифметических операций. Если при действительных значениях аргументов это действительно тождество, то оно переносится и на комплексные значения аргументов.

Из формулы Эйлера вытекают соотношения

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},$$

которые также распространяются на случай комплексного аргумента:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin y=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Если в этих формулах положить $z=i\varphi$, то

$$\cos i\varphi=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}=\operatorname{ch}\varphi, \qquad \sin i\varphi=\frac{e^{-\varphi}-e^{\varphi}}{2i}=i\operatorname{sh}\varphi$$

и эти соотношения также обобщаются на комплексную переменную:

$$\cos iz=\operatorname{ch}z \quad \text{и} \quad \sin iz=i\operatorname{sh}z,$$

откуда выводятся симметричные формулы:

$$\cos z=\cos(i^2z)=\operatorname{ch}iz, \qquad \sin z=-\sin(i^2z)=-i\operatorname{sh}iz.$$

Полученные формулы связи тригонометрических, гиперболических функций и показательной функции не имеют аналогов для действительного аргумента. Из них, в частности, вытекает:

$$\begin{aligned}
&\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y,\\
&\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y,\\
&\mathrm{ch}\,z=\mathrm{ch}(x+iy)=\mathrm{ch}\,x\cos y+i\,\mathrm{sh}\,x\sin y,\\
&\mathrm{sh}\,z=\mathrm{sh}(x+iy)=\mathrm{sh}\,x\cos y+i\,\mathrm{ch}\,x\sin y.
\end{aligned} \tag{2}$$

Из формул (2) в свою очередь можно вывести формулы решения уравнений $\cos z=a$, $\sin z=a$. В частности, $\cos z=0$ при $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\sin z=0$ при $z=k\pi$, где $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Некоторые свойства элементарных функций. Элементарной называется функция, которая:

1) является основной элементарной функцией z, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}\,z$, $\mathrm{ctg}\,z$, $\mathrm{sh}\,z$, $\mathrm{ch}\,z$, $\mathrm{th}\,z$, $\mathrm{cth}\,z$;

2) является обратной к основной элементарной функции ($\ln z$, $\arcsin z$, $\mathrm{arth}\,z$ и т.п.);

3) является суммой, разностью, произведением, частным или композицией двух элементарных функций.

Попросту говоря, элементарная функция — это функция, которая задана некоторой формулой. Из приведенного определения видно, что вопрос о продолжении элементарных функций в комплексную плоскость очевиден: надо в формулу вместо действительного аргумента подставить комплексный. В формуле может быть несколько аргументов. И в этом случае аналитическое продолжение не вызывает трудностей, так как после замены каждого аргумента на комплексный получится функция, аналитическая по компонентам.

Следует, однако, отметить, что при аналитическом продолжении элементарных функций, обратных к основным имеются особенности. Дело в том, что основные элементарные функции принимают данное значение, не обязательно однократно. Поэтому обратная функция определяется неоднозначно. Мы будем рассматривать такие обратные функции, которые на положительной части действительной оси совпадают с соответствующими функциями действительного переменного.

Преобразование аргументов. Пусть функция комплексного переменного задана формулой от переменных x и y, представляющих собой действительную и мнимую части комплексной переменной z, т.е. в виде $u(x,y)+iv(x,y)$. Требуется представить это в виде формулы от самого аргумента z. Такое представление возможно лишь, если исходная функция аналитична. Чтобы убедиться в том, что данная функция аналитична, достаточно, например, проверить, что для частных производных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ верны условия Коши — Римана. Отметим, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ предполагаются элементарными и, значит, имеют аналитическое продолжение. Поэтому мы можем заменить их аргументы на комплексные. Подставим вместо x выражение $\frac{z+\bar{z}}{2}$, а вместо y — выражение $\frac{z-\bar{z}}{2i}$:

$$f(z)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right). \tag{3}$$

После преобразования параметр $\bar{z}$ должен в выражении исчезнуть. Действительно, то, что выражение в (3) справа не зависит от $\bar{z}$, означает, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, т.е.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

что соответствует условиям Коши — Римана.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$. Здесь $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$. Обе функции как функции двух действительных переменных дифференцируемы всюду в $\mathbb{C}$, кроме $z=0$. Условия Коши — Римана также выполняются:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Выходит, что функция $f(z)$ аналитична. Как она выражается через z? Чтобы ответить на вопрос, воспользуемся сказанным выше:

$$f(z)=2\frac{z+\overline{z}}{(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2}-2\frac{z-\overline{z}}{(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2}=\frac{4\overline{z}}{4z\overline{z}}=\frac{1}{z}.$$

Примененный нами способ хорош, но может быть достаточно трудоемким. Есть возможность его упростить. Предположим, что функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитична в области D, включающей интервал $I=(a,b)$ действительной оси. Если $z=x+iy$ принадлежит I, то $y=0$, т.е. $z=x$ и в этих точках $f(x)=u(x,0)+iv(x,0)$. Получили функцию действительного аргумента на интервале I. Если $f(z)$ — элементарная функция, полученная функция продолжается на область комплексного аргумента заменой x на комплексную переменную z: $u(z,0)+iv(z,0)$. По теореме единственности эта функция совпадает с нашей: $f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$.

Вернемся к рассмотренному нами примеру $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$. Согласно сказанному, подставляем в формулу справа вместо x параметр z, а вместо y — значение 0:

$$f(z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)_{\substack{x=z\\ y=0}}=\frac{z}{z^2}-i\frac{0}{z^2}=\frac{1}{z}.$$

Получилось гораздо проще!

Восстановление аналитической функции

Голоморфная функция однозначно (с точностью до действительной или мнимой постоянной) определяется своей действительной или мнимой частью. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитична в области D и $v(x,y)=\text{const}$ в D, то и $f(z)=\text{const}$ в D.

Действительно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют частные производные, непрерывные в D. Если $v(x,y)=\text{const}$ в D, то $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ в D. Поэтому в силу

условий Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ в D. Но тогда из первого равенства следует, что для любого фиксированного y функция $u(x,y)$ постоянна, т.е. не зависит от x, а из второго равенства следует симметричное утверждение, что она не зависит от y. Следовательно, $u(x,y)$, а вместе с ней и $f(z)$, постоянны.

На основе теоремы 2 может быть построен метод восстановления голоморфной функции по действительной или мнимой части. Оба варианта задачи идентичны, так как мнимая часть функции $f(z)$ является действительной частью функции $-if(z)$.

Отметим, что если функция $f(z)$ является элементарной, то ее действительная и мнимая части являются элементарными функциями двух действительных переменных. Они, следовательно, имеют аналитическое продолжение по компонентам.

Теорема 4 (см. Краснов и др. [4]). Пусть элементарная функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитична в области G. Тогда для любых точек $z,z_0\in G$

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{f(z_0)}. \tag{4}$$

Доказательство. Положим $w_1=\frac{z+\overline{z}_0}{2}$, $w_2=\frac{z-\overline{z}_0}{2i}$. Тогда $z=w_1+iw_2$, $\overline{z_0}=w_1-iw_2$, откуда $z_0=\overline{w_1}+i\overline{w_2}$. Подставим в (4), получим эквивалентное соотношение

$$f(w_1+iw_2)=2u(w_1,w_2)-\overline{f(\overline{w_1}+i\overline{w_2})},$$

откуда

$$f(w_1+iw_2)+\overline{f(\overline{w_1}+i\overline{w_2})}=2u(w_1,w_2). \tag{5}$$

Если функция $f(z)$ аналитична в G, то функция $\overline{f(\overline{z})}$ аналитична в области G', симметричной G относительно действительной оси. Поэтому выражение в (5) слева является функцией, аналитической по каждой из переменных w_1 и w_2 в некоторой области в $\mathbb{C}^2$, содержащей точки (x,y), для которых $x+iy\in G$. Для таких точек, т.е. когда аргументы w_1 и w_2 чисто действительные, соотношение (5) превращается в тождество:

$$f(x+iy)+\overline{f(x+iy)}=2u(x,y).$$

Следовательно, соотношение (5) является тождеством и для комплексных аргументов w_1 и w_2.

В соответствии с теоремой 4 можно следующим образом восстановить голоморфную функцию по ее действительной части:

1) сначала проверяем, что данная функция $u(x,y)$ на самом деле является действительной частью некоторой аналитической функции, т.е. проверяем, является ли она решением уравнения Лапласа;

2) затем выбираем точку $z_0=x_0+iy_0$ и выбираем некоторое значение искомой функции $f(z_0)$ в этой точке (это значение должно иметь вид $f(z_0)=u(x_0,y_0)+iC$). Наиболее простой случай $z_0=0$ и $f(z_0)=0$;

3) вычисляем функцию $f(z)$ по формуле (4).

Пример 2. Рассмотрим функцию $u(x,y)=\operatorname{ch}2x\cos 2y$. Докажем, что она

представляет собой действительную часть некоторой голоморфной функции $f(z)$, и найдем функцию $f(z)$.

1. Проверяем уравнение Лапласа. Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{ch}2x\cos 2y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\mathrm{ch}2x\cos 2y,$$

функция является решением уравнения Лапласа и, следовательно, является действительной частью некоторой голоморфной функции.

2. Выбираем $z_0 = 0$. При этом $u(0,0) = 1$. Следовательно, $f(z_0) = 1 + iC$. Полагаем $f(0) = 1$.

3. Применяем формулу (4):

$$f(z) = 2\mathrm{ch}z\cos\frac{z}{i} - 1 = 2\mathrm{ch}z\cos(-iz) - 1 = 2\mathrm{ch}^2 z - 1 = \mathrm{ch}2z.$$

Итак, искомая функция — $f(z) = \mathrm{ch}2z$. Проверим, что действительная часть найденной функции есть заданная функция $u(x,y)$. Поскольку

$$f(x+iy) = \mathrm{ch}(2x+2yi) = \mathrm{ch}2x\cos 2y + i\,\mathrm{sh}2x\sin 2y,$$

то действительная часть полученной функции равна $\mathrm{ch}2x\cos 2y$ и совпадает с заданной функцией $u(x,y)$.

Заключение

Переход от действительных чисел к комплексным не просто сохраняет свойства арифметических операций, но порождает ряд удивительных закономерностей. Так, деление комплексных чисел может быть сведено к умножению (если не брать в расчет деление на действительное число), комплексные интегралы сводятся к вычислению значений функции и ее производных в нескольких точках, сохранение многих алгебраических и функциональных тождеств.

Данная статья посвящена трем аспектам перехода в комплексную плоскость:

- сохранению алгебраических и функциональных тождеств;
- сохранению техники дифференцирования элементарных функций;
- формулам восстановления аналитической функции по действительной или мнимой части.

Во всех этих случаях ключевой инструмент — теорема единственности для аналитических функций, которой можно руководствоваться не только для функций одного переменного, но и для функций нескольких переменных. Базируется теорема единственности на возможности разложения аналитической функции в степенной ряд.

Сохранение функциональных тождеств показано в основном на примере формул тригонометрии. Но при этом возникают формулы связи тригонометрических и гиперболических функций. Сохранение формул дифференцирования также показано на простейших элементарных функциях.

Задача восстановления аналитической функции по действительной или мнимой части является типичной в курсе теории функций комплексного переменного. Существуют разные методы ее решения. Один из них — использование формулы (4) — эффективен, но объяснение этой формулы редко где встречается. В статье дано такое объяснение с помощью аналитического продолжения, которое мы понимаем как продолжение функции действительного переменного в комплексную область.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Изд-во Юрайт, 2025. 402 с.
2. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под общей ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. 3-е изд., испр., стер. М.: Альянс, 2016. 364 с.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. - М.: АСТ, 2010. - 495 с.
4. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Изд. 8-е. М.: URSS, ЛЕНАНД, 2023. - 208 с

Anatoly N. Kanatnikov
Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow,
skipper@bmstu.ru
Alexander P. Krishchenko
Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Head of Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
apkri@bmstu.ru

Analytical continuation

Abstract. The article is devoted to an aspect of the theory of functions of a complex variable that is rarely addressed in academic courses: the preservation of many algebraic relations when moving from real to complex numbers. Using the uniqueness theorem, many such relations are proved, as well as differentiation rules and some formulas for reconstructing a function from its real or imaginary part.

Keywords: analytical function, uniqueness theorem, analytical continuation, elementary analytic functions.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ»

Аннотация

В курсе математического анализа для студентов математических и технических специальностей тема «Дифференцирование сложных и неявно заданных функций» является обязательной для изучения. Успешное освоение этой темы необходимо для изучения ряда других математических дисциплин, таких как теоретическая механика и физика. В статье рассмотрены методические аспекты изложения этой темы. Отдельное внимание уделено некоторым теоретическим фактам, которые используются при решении задач. Цель работы - показать, на каких примерах можно изучить эту тему и на что обратить особое внимание. Результатом исследования стал материал, который может служить основой для подготовки занятий.

Ключевые слова

производная, логарифмическая производная, неявная функция, параметрическое задание функции

АВТОРЫ

Ласковая Татьяна Алексеевна,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
talaskovy@mail.ru

Косова Анна Владимировна,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
anna.v.kosova@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-122-128

Введение

В курсе математического анализ тема «Дифференцирование функций одного переменного» является обязательной для изучения всеми студентами математических и технических специальностей. Исторически, необходимость решения задач, связанных с нахождением касательных, нахождению максимумов и минимумов, вычислением скоростей движущихся тел, привело к созданию дифференциального исчисления. Соответственно, возникло понятие производной и были доказаны основные теоремы. При изучении этой темы на лекциях вначале дается определение производной, доказываются основные теоремы и с их помощью выводятся производные основных элементарных функций. На семинарских занятиях студенты вначале отрабатывают технику дифференцирования на простых задачах, а затем переходят к более сложным, которые связаны с необходимостью найти производные для функций, заданных неявно или параметрически. Решение таких задач связано, например, с решением задач по геометрии, где нужно построить касательные к кривым второго порядка, таким, как эллипс или гипербола, а также к

кривым, заданным параметрически. В физике и теоретической механике производная используется при нахождении скоростей и ускорений тел, движущихся по различным траекториям, которые не всегда являются явно заданными.

Методология и результаты исследования

Для успешного овладения материалом студентам необходимо знать таблицу производных, правила дифференцирования, уметь применять теорему о производной сложной функции, а также знать свойства логарифмических функций. Изучение материала лучше начать с понятия логарифмической производной.

1. Логарифмическая производная

Вначале дадим определение и напомним свойства логарифмической функции. Затем приведем классическое определение логарифмической производной из учебника Е.Е. Ивановой [1].

Определение 1. Производную от натурального логарифма заданной функции называют логарифмической производной этой функции.

Пусть функция задана уравнением $y = f(x)$. Логарифмируем модуль функции для максимального приближения области определения исходной и новой функций. По правилу нахождения производной сложной функции $(\ln|y|)' = \frac{1}{y}y'$.

Тогда $y' = y \cdot (\ln|y|)'$.

Можно обратить внимание на один важный момент, о котором студенты часто задают вопрос: куда исчезает модуль в правой части равенства? Распишем это подробно, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln x)', & x > 0 \\ (\ln(-x), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

Логарифмическая производная применяется для облегчения нахождения производных сложных показательно-степенных функций или функций, содержащих большое количество сомножителей (в том числе и в знаменателе). Рассмотрим это на примерах.

Задача 1. Найти y', если $y = \frac{(x+2)^2 2^{tgx}}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

Решение. Прологарифмируем модуль функции: $\ln|y| = \ln\left|\frac{(x+2)^2 2^{tgx}}{(x+1)^3(x+3)^4}\right|$.

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\ln|y| = 2\ln|x+2| + tgx\ln 2 - 3\ln|x+1| - 4\ln|x+3|.$$

И только теперь будем дифференцировать левую и правую части равенства:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+2} + \frac{\ln 2}{\cos^2 x} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3}.$$

Чтобы найти y', умножим обе части на y, учитывая условие задачи:

$$y' = \frac{(x+2)^2 2^{tgx}}{(x+1)^3(x+3)^4}\left[\frac{2}{x+2} + \frac{\ln 2}{\cos^2 x} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3}\right].$$

Рассмотрим еще несколько примеров из классического задачника Б.П. Демидовича по математическому анализу [2].

Задача 2. Найти y', если $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

Решение. Область определения данной функции $x \geq 1$, а ее область значений $y \geq 0$.

В силу области значений, логарифмируем функцию при $x > 1$:

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}.$$

Применим свойства логарифма: $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) - \frac{3}{2}\ln(x+3)$.

Теперь можно продифференцировать обе части равенства и выразить y'.

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)},$$

$$y' = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right].$$

Рассмотрим теперь дифференцирование сложной показательно-степенной функции. Напомним, что такая функция имеет область определения - основание строго больше нуля, и область значений таких функций $y > 0$. В результате, для показательно-степенных функций при использовании логарифмической производной знак модуля ставить не требуется.

Задача 3. Найти y', если $y = x^{x^2}$.

Решение. Прологарифмируем данную функцию и применим свойства логарифма: $\ln y = x^2 \ln x$ Обратите внимание студентов: на этом этапе мы всегда получаем произведение! При дифференцировании необходимо воспользоваться формулой производной произведения: $(UV)' = U'V + UV'$.

Перейдем к дифференцированию: $\frac{1}{y}y' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{x^2}\left[2x\ln x + x\right]$.

Обратите внимание студентов: если раскрыть скобки, то производная показательно-степенной функции обязательно содержит два слагаемых. Одно из них – производная исходной функции в предположении, что она показательная, а второе - производная исходной функции в предположении, что она степенная.

Задача 4. Найти y', если $y = (arctgx)^{\cos x} + \sqrt[8]{x}$.

Решение. В нашей задаче снова присутствует сложная показательно-степенная функция. Студенты видят это и чаще всего сразу начинают логарифмировать всю функцию, забывая, что логарифм суммы не равен сумме логарифмов!

Самый рациональный вариант решения данного примера – вначале применить теорему о производной суммы двух функций: $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$, а затем найти по-отдельности производную каждого слагаемого.

Обозначим $u = (arctgx)^{\cos x}$; $v = \sqrt[8]{x}$.

В данной задаче производная второй функции – табличная: $v' = \frac{1}{8}x^{-7/8}$, а для нахождения производной первой функции применим логарифмическую производную.

$$\ln u = \cos x \cdot arctgx \Rightarrow \frac{1}{u}u' = -\sin x \cdot arctgx + \frac{\cos x}{1+x^2},$$

$$u' = (arctgx)^{\cos x}\left[-\sin x \cdot arctgx + \frac{\cos x}{1+x^2}\right].$$

Окончательно получим: $y' = (arctgx)^{\cos x}\left[-\sin x \cdot arctgx + \frac{\cos x}{1+x^2}\right] + \frac{1}{8}x^{-7/8}$.

Можно на занятии отметить, что логарифмическая производная используется в экономике, например, в учебнике А. М. Ахтямова [3] приведен интересный пример, показывающий, что ставка банковского процента совпадает с логарифмической производной от величины вклада и характеризует его доходность.

Перейдем к рассмотрению второго блока занятия.

2. Производная неявной функции

Пусть дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

На занятии полезно напомнить обучающимся тот факт, что если функция $y = y(x)$ такова, что подстановка ее в (1) вместо y обращает уравнение в тождество, то говорят, что (1) задает функцию $y = y(x)$ неявным аналитическим способом (см. учебник Е.Е. Ивановой [4]). Такую функцию называют неявной.

На практике далеко не всегда удается из уравнения (1) найти выражение $y = y(x)$ в явном виде, однако знание производной этой функции дает возможность исследовать поведение этой функции: найти интервалы возрастания и убывания функции, экстремумы, построить касательную.

Для нахождения производной неявной функции необходимо продифференцировать тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ по переменной x , как сложную функцию, а затем из полученного равенства выразить y'. Еще один важный момент: чаще всего в итоге мы получаем производную, как функцию двух аргументов $y'(x, y)$. Это также вызывает много вопросов на занятии, особенно при решении задач на геометрические приложения производной. В этом случае можно на примере функции, задающей хорошо известную студентам кривую второго порядка (например, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$) продемонстрировать применение метода нахождения y' в явном и неявном виде в некоторой точке. Рассмотрим примеры.

Задача 5. Найти y' , если $ye^y - e^{x+1} = 0$.

Решение. Продифференцируем равенство по x , считая y функцией от x .

На этом этапе, чтобы ничего не забыть, полезно переписать уравнение следующим образом: $y(x)e^{y(x)} - e^{x+1} = 0$

При этом обратите внимание обучающихся на то, что в левой части имеем произведение и производную $e^{y(x)}$ находим по правилу нахождения производной сложной функции. В результате получаем следующее равенство:

$$y'e^y + ye^y y' = e^{x+1} \Leftrightarrow y'e^y(1+y) = e^{x+1} \Rightarrow y' = \frac{e^{x+1}}{e^y(y+1)}.$$

В следующей задаче, рекомендованной к рассмотрению на занятиях (автор И.А. Марон [5]), найдем вторую производную функции, заданной неявно.

Задача 6. Найти y'', если $y = x + arctgy$.

Решение. Согласно определению, вторая производная функции – это производная от первой производной этой функции. Поэтому вначале найдем первую производную y'.

Дифференцируем равенство: $y(x) - x - arctg\, y(x) = 0$.

Получим: $y' - 1 - \frac{y'}{1+y^2} = 0$.

Слагаемые, содержащие y' оставим слева, остальные перенесем вправо:

$$y'(1 - \frac{1}{1+y^2}) = 1 \Rightarrow y'\frac{y^2}{1+y^2} = 1.$$

Выразим производную $y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1$.

Продифференцируем полученное выражение для еще раз, считая y функцией от x:

$$y'' = -\frac{2}{y^3}y'.$$

В таком виде, конечно, производную оставить нельзя: надо обязательно подставить $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$, чтобы получить $y'' = f(x, y)$.

Окончательно запишем ответ: $y'' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$.

3. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Пусть зависимость между y и x задается уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in T$.

На лекциях доказывается, что в этом случае:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (x'_t \neq 0), \qquad (2)$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3} \quad (x'_t \neq 0). \qquad (3)$$

Формула (3) весьма непросто выглядит. Потому, учить ее наизусть не стоит. Надо лишь помнить, что производная y'_x в свою очередь тоже является параметрической

функцией, для которой $x = x(t)$. Следовательно, для нахождения второй производной можно применить к y'_x формулу (2) еще раз. В итоге получаем формулу, которую и рекомендуем к запоминанию:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \qquad (4)$$

Задача 7. Найти y'_x, y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$.

Решение.

Найдем сначала $\begin{cases} x'_t = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y'_t = 2t \end{cases}$

Тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2t(1+t^2)}{2t} = 1+t^2$. Теперь необходимо продифференцировать y'_x еще раз по переменной x. Применим формулу (4) и получим:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2t}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \frac{2t\left(1+t^2\right)}{2t} = 1+t^2.$$

Зачастую студенты пишут, что $y''_{xx} = \dfrac{y'_x}{x'_t}$. Это грубая ошибка. Напомните обучающимся определение второй производной: мы обязательно должны находить первую производную от y'_x по переменной x.

В данной задаче видна интересная закономерность. $y'_x = y''_{xx} = y'''_{xxx} = 1+t^2 \ldots$

Почему так получилось? Исключим параметр t :

$x = \ln(1+y) \Rightarrow e^x = 1+y \Rightarrow y = e^x + 1$. А для этой функции, действительно, все производные равны $e^x = 1+t^2$.

Функции, заданные параметрически, часто используются в физике и механике, в этом случае $x = x(t)$ и $y = y(t)$ - это координаты движущейся точки на плоскости, а параметр t - это время.

Заключение

Авторы статьи считают, что приведенные примеры помогут студентам лучше изучить данный раздел математического анализа, глубже понимать теоретический материал и использовать его при решении практических задач. Поэтому, навыки работы с нахождением производных так важно отработать на более простых и наглядных примерах.

В дальнейшем, при решении задач на геометрические приложения производной, они не будут испытывать трудности, если кривые заданы параметрически или же с помощью неявной функции. В этих случаях они смогут быстро находить уравнения касательных, используя навыки вычисления производных таких функций.

Важно показать студентам, что на практике возможны различные случаи задания кривых и нужно уметь из множества различных способов находить самые простые и быстрые решения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Иванова Е. Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
2. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. – М.: Лань, 2025.
3. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов: учебное пособие / А. М. Ахтямов. - 2-е изд., испр. и доп. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
4. Иванова Е. Е. Дифференциальное исчисление…
5. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. – М.: Лань, 2024.

***Tatiana A. Laskovaya*,**
Senior Lecturer, Department of mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
talaskovy@mail.ru
***Anna V. Kosova*,**
Senior Lecturer, Department of mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
anna.v.kosova@mail.ru

Methodological Aspects of Presenting the Topic "Logarithmic Derivative, Derivative of an Implicit and Parametrically Defined Function"

Abstract. The topic "Differentiation of Complex and Implicit Functions" is a required part of the mathematical analysis course for students majoring in mathematics and engineering. Successful mastery of this topic is essential for studying a number of other mathematical disciplines, such as theoretical mechanics and physics. This article examines the methodological aspects of presenting this topic, focusing on certain theoretical facts used in solving problems. The purpose of this study is to demonstrate examples that can be used to explore this topic and what to focus on. The result of this study is material that can serve as a basis for preparing lessons.

Keywords: derivative, logarithmic derivative, implicit function, parametric definition of a function.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ»

Аннотация

Развитие технологий искусственного интеллекта и их широкое внедрение в различные сферы деятельности обусловливает высокий спрос на специалистов в области прикладного машинного обучения. В технических вузах открываются новые направления подготовки и вводятся дисциплины по анализу данных и машинному обучению, однако имеется дефицит методических материалов для проведения практических занятий с использованием компьютерной техники. Цель статьи – разработка методических рекомендаций по преподаванию темы регуляризация в линейной регрессии. В работе изложен материал для проведения лабораторного занятия, включающий математическое описание методов регуляризации, алгоритмы вычислений и визуализацию этапов решения задачи для обеспечения наглядности изучаемого материала.

Ключевые слова

линейная регрессия, регуляризация, машинное обучение, переобучение модели

АВТОР

Одинцова Вера Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»;
доцент ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», г. Москва
odintsova.v@bmstu.ru
VAOdincova@fa.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-129-136

Введение

В последнее время технологии, основанные на применении искусственного интеллекта, всё больше используются в повседневной жизни. Востребованы не только специалисты, занимающихся фундаментальным подходом к созданию искусственного интеллекта, но также нужны квалифицированные кадры в области прикладного машинного обучения. В связи с этим, во многих высших технических учебных заведениях открываются новые направления, а также кафедры и лаборатории, связанные с освоением, применением и развитием искусственного интеллекта. В учебные планы добавляются такие дисциплины, как «Анализ данных», «Машинное обучение» и «Глубокое обучение» и т.п. Создание материалов для ведения подобных курсов является актуальной задачей, особенно имеется дефицит методических пособий для проведения практических занятий с использованием компьютерной техники. Целью данной статьи является желание дать дополнительные методические рекомендации для преподавания подобных дисциплин. В ней представлен материал для проведения лабораторной работы на компьютере по теме регуляризация в линейных моделях регрессии.

В рамках лабораторной работы предлагается последовательно решить следующие задачи. Во-первых, построить практический пример парной полиномиальной регрессии седьмой степени на синтетических данных и

продемонстрировать проблему переобучения модели. Во-вторых, реализовать Ридж-регуляризацию (L2-регуляризация) с детальным описанием математического аппарата и алгоритма подбора оптимального значения коэффициента регуляризации. В-третьих, провести сравнительный анализ качества моделей с регуляризацией и без неё путём вычисления метрик качества (коэффициент детерминации, среднеквадратичная ошибка) на обучающей и тестовой выборках.

Помимо подробного описания математических формул и необходимых расчётов, здесь для большей наглядности, предлагается осуществлять визуализацию этапов решения. Построить графики исходных данных, линий регрессии до и после регуляризации, а также зависимости коэффициентов регрессии от коэффициента регуляризации.

Методология и результаты исследования

Сгенерируем данные и значения целевой переменной для задачи парной регрессии с 1 признаком и 20 наблюдениями, как нормальный шум параболы $y = x^2$ на промежутке от -1 до 5 (табл.1).

Таблица 1

Данные для задачи парной регрессии

x	-1	-0.7	-0.4	-0.1	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.2	2.5	2.8	3.1	3.4	3.7	4.1	4.4	4.7	5
y	1.5	0.4	0.8	1.5	-0.1	0.1	2.4	2.2	1.8	3.8	4.4	5.8	8.1	7.7	9.8	13.1	15.8	19.7	21.2	23.6

Визуализируем диаграмму рассеивания полученных данных на одном графике с истинной кривой (рис.1).

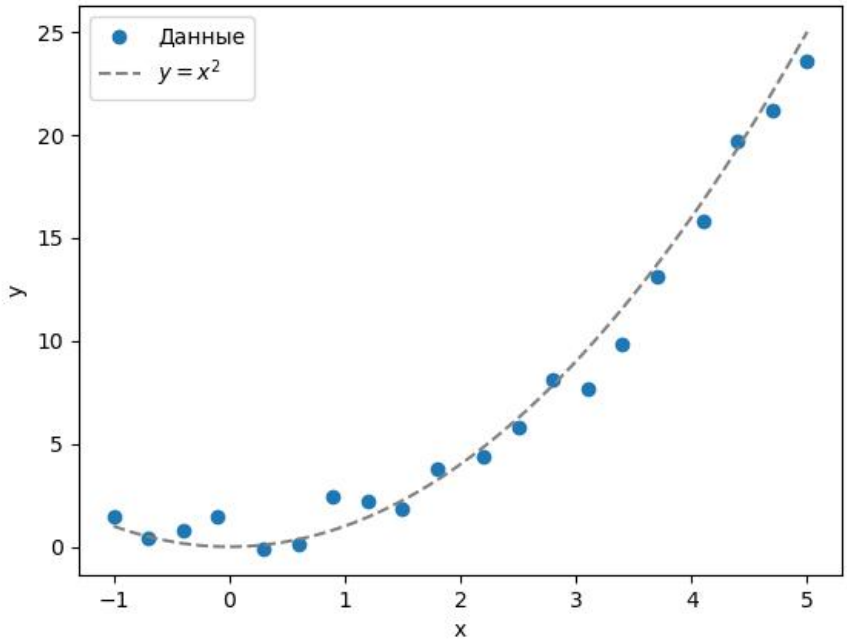


Рис.1 Визуализация данных

Разделим данные на обучающую и тестовую части в соотношении 3:1. Снова изобразим их диаграмме рассеивания, подкрасив обучающую и тестовую части разным цветом (рис.2).

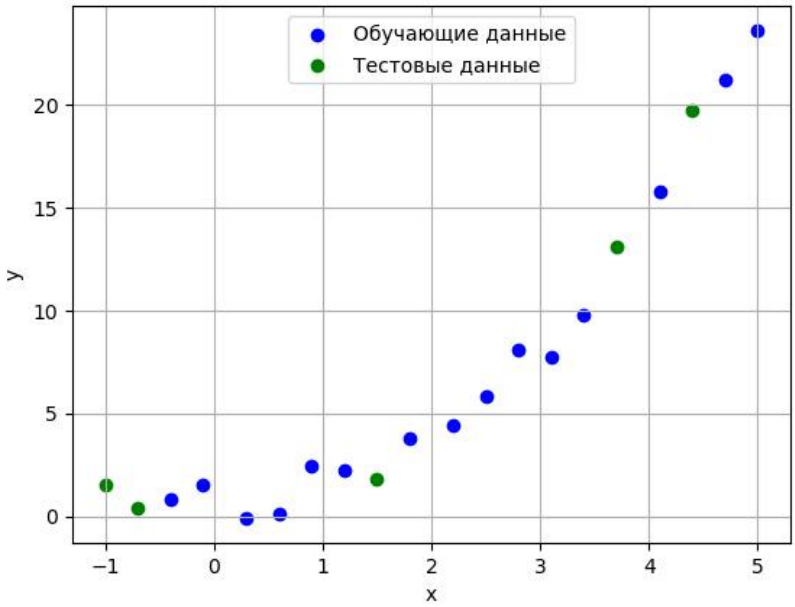


Рис.2. Визуализация обучающих и тестовых данных

Далее для этих данных построим полиномиальную модель регрессии 7-степени. Для этого нужно построить полиномиальные признаки и обучить модель линейной регрессии на этом расширенном наборе признаков. Отдельно для тренировочных и тестовых данных получим полиномиальные признаки 7- ой степени. Приведём здесь только полиномиальные тестовые данные (табл. 2).

Таблица 2

Полиномиальные признаки тестового набора

	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
0	-1.0	1.00	-1.000	1.0000	-1.00000	1.000000	-1.000000
1	4.4	19.36	85.184	374.8096	1649.16224	7256.313856	31927.780966
2	3.7	13.69	50.653	187.4161	693.43957	2565.	9493.187713
3	-0.7	0.49	-0.343	0.2401	-0.16807	0.117649	-0.082354
4	1.5	2.25	3.375	5.0625	7.59375	11.390625	17.085938

Теперь полученные полиномиальные признаки нужно масштабировать, например, по формуле стандартной нормализации, т.е. каждый столбец трансформируется по формуле:

$$x_i{}^{st} := \frac{x_i - x_{mean}}{x_{std}}.$$

Причём значения среднего и среднего квадратического отклонения по столбцу для обучающих и тестовых данных берутся только из обучающих данных, чтобы не было «утечки» данных. Опять же приведём здесь только тестовые стандартизированные данные (табл. 3).

Таблица 3

Стандартизированные полиномиальные признаки тестового набора

	x_{st}	x_{st}^2	x_{st}^3	x_{st}^4	x_{st}^5	x_{st}^6	x_{st}^7
0	-1.889693	-0.796495	-0.75477	-0.615765	-0.554278	-0.507482	-0.475545
1	1.360097	1.509832	1.470241	1.364127	1.233077	1.09575	0.960881
2	0.938828	0.797584	0.578755	0.371593	0.197896	0.059254	-0.048416
3	-1.709149	-0.86056	-0.737808	-0.61979	-0.555377	-0.507677	-0.475504
4	-0.38516	-0.639474	-0.641821	-0.594248	-0.54497	-0.505186	-0.474731

Данные готовы, чтобы их подавать в модель линейной регрессии. Напомним, кратко, постановку задачи линейной регрессии [1]. Предсказанные значения выражаются линейно через значения признаков, т.е. модель ищется в виде:

$$a(x) = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_mx_m.$$

Искомые параметры модели $\vec{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_m)$ определяются, как минимум функции потерь $MSE(w_0, w_1, w_2, \dots, w_m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_0 + w_1x_{i1} + w_2x_{i2} + \cdots + w_mx_{im} - y_i)^2$.

Решить задачу нахождения минимума можно численно, используя метод градиентного спуска, вычисляя на каждой итерации значения по формуле:

$$\vec{w}^{j+1} = \vec{w}^j - \gamma \cdot \overrightarrow{gradMSE}\left(w_0^j, w_1^j, \dots, w_m^j\right),\ \ j = 0, \dots, k_0 - 1.$$

Здесь параметр γ- скорость обучения, а k_0- количество итераций.

Перейдём к матричному способу записи, который более удобен. Функция потерь в матричном виде будет иметь вид $MSE(\vec{w}) = \frac{1}{n}\left(\tilde{X}\vec{w} - \vec{y}\right)^T\left(\tilde{X}\vec{w} - \vec{y}\right)$,где $\tilde{X}$- матрица признаков с добавленным столбцом из единиц слева. Тогда итерации градиентного спуска будут выражаться так: $\vec{w}^{j+1} = \vec{w}^j - \gamma \cdot \frac{2}{n}\tilde{X}^T\left(\tilde{X}\vec{w}^j - \vec{y}\right)$.

Реализуем метод градиентного спуска применительно к рассматриваемым данным на языке Python [2] и определим оптимальные значения коэффициентов регрессии $\vec{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_7)$. Получим следующую линию полиномиальной регрессии:

$$a(x) = 7.14 + 1.12x + 2.85x^2 + 1.95x^3 + 1.34x^4 + 0.73x^5 + 0.05x^6 - 0.7x^7.$$

Изобразим её на одном графике с точками данных (рис. 3).

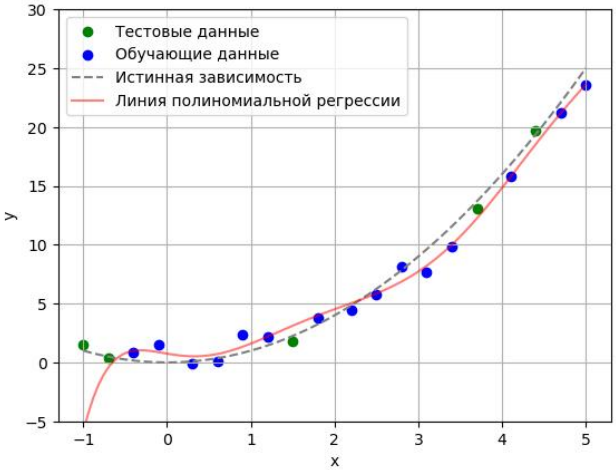


Рис.3. Визуализация линии полиномиальной регрессии

По графику видно, что построенная функция описала обучающие данные довольно неплохо, а вот тестовые немного хуже. Вычислим метрики качества на обучающих и тестовых данных для того, чтобы оценить точнее переобучена ли модель.

Основной метрикой качества в задаче регрессии является коэффициент детерминации — это доля дисперсии зависимой переменной, объясненная моделью. Вычисляется он по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \widehat{y_i})^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2},$$

где y_i- истинные значения целевой переменной, $\widehat{y_i}$- предсказанные значения целевой переменной, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$- среднее значение истинных значений целевой переменной. Значения коэффициента детерминации $R^2 \leq 1$. В случае $R^2 = 1$ истинные и предсказанные значения совпадают, следовательно, чем ближе значения коэффициента детерминации к единице, тем модель лучше. Однако, как известно, для оценки качества модели регрессии одного коэффициента детерминации недостаточно. Необходимо дополнительно вычислить метрику ошибки. Например, будем вычислять метрику средняя квадратическая ошибка MSE, она вычисляется по формуле:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum(y_i - \widehat{y_i})^2.$$

MSE принимает неотрицательные значения. В случае $MSE = 0$ истинные и предсказанные значения совпадают, а чем ближе значение метрики к 0, тем модель лучше.

Приведём в таблице (табл. 4) полученные результаты вычисления метрик для рассматриваемой задачи, расчёт которых несложно запрограммировать самостоятельно, либо воспользоваться готовыми функциями, которые имеются в библиотеках Python для машинного обучения [4-5].

Таблица 4

Метрики качества на обучающих и тестовых данных

Метрики	Train	Test
R^2	0.994	0.802
MSE	0.555	3.443

Построенная модель регрессии является переобученной, так как метрики качества на обучающих данных сильно лучше, чем на тестовых. Поборемся с переобучением путём L2 -регуляризации модели [3] или её ещё называют Ридж регуляризация.

В функцию потерь добавим слагаемое:

$$MSE(w_0, w_1, w_2, \dots, w_m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_0 + w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + \dots + w_m x_{\Im} - y_i)^2 + \alpha \sum_{j=0}^{m} w_j^2,$$

здесь параметрα- коэффициент регуляризации.

Тогда формула градиентного спуска будет иметь вид:

$$\vec{w}^{j+1} = \vec{w}^{j} - \gamma \cdot \frac{2}{n}\tilde{X}^T\left(\tilde{X}\vec{w}^{j} - \vec{y}\right) + 2\alpha\vec{w}.$$

Необходимо правильно подобрать коэффициент регуляризации. Для этого возьмём сначала 10 значений α из диапазона $[10^{-10}; 10^{5}]$ с равномерным шагом и для каждого из этих значений методом градиентного спуска для задачи линейной регрессии с регуляризацией определим соответствующие значения коэффициентов $w_1, w_2, \dots, w_7$.

Изобразим график, показывающий, как меняются $w_1, w_2, \dots, w_7$ в зависимости от изменения α(рис. 4).

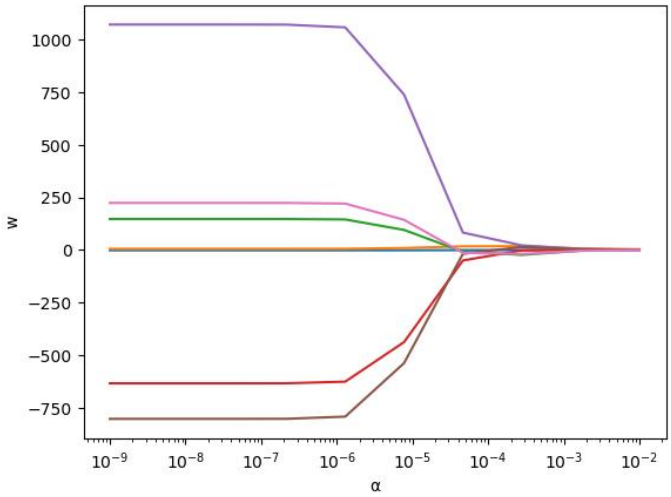


Рис.4 Изменение коэффициентов регрессии в зависимости от α

Из графика видно, что приемлемый диапазон для выбора α будет примерно $[10^{-8}; 10^{-2}]$, так как только в этом диапазоне коэффициенты изменяются, а при α меньше 10^{-8} коэффициенты будут теми же, что для линейной регрессии без регуляризации. При α больше 10^{-2} коэффициенты будут близки к нулю.

Теперь возьмём 10 значений α из диапазона $[10^{-8}; 10^{-2}]$ с равномерным шагом. Для каждого из них реализуем так называемый «поиск по сетке» [5], т.е. методом градиентного спуска для задачи линейной регрессии с регуляризацией для каждого значения α определим значения коэффициентов $w_0, w_1, w_2, \dots, w_7$ и вычислим соответствующую метрику качества коэффициент детерминации R^2. Далее среди всех коэффициентов детерминации найдём наибольший и посмотрим какое значение коэффициента регуляризации α ему соответствовало. Это значения и будет наилучшим значением параметра α. В нашем случае оно получилось $\alpha = 0.0003$.

Визуализируем получившуюся после регуляризации линию полиномиальной регрессии на одном графике с диаграммой рассеивания обучающих и тестовых данных (рис. 5).

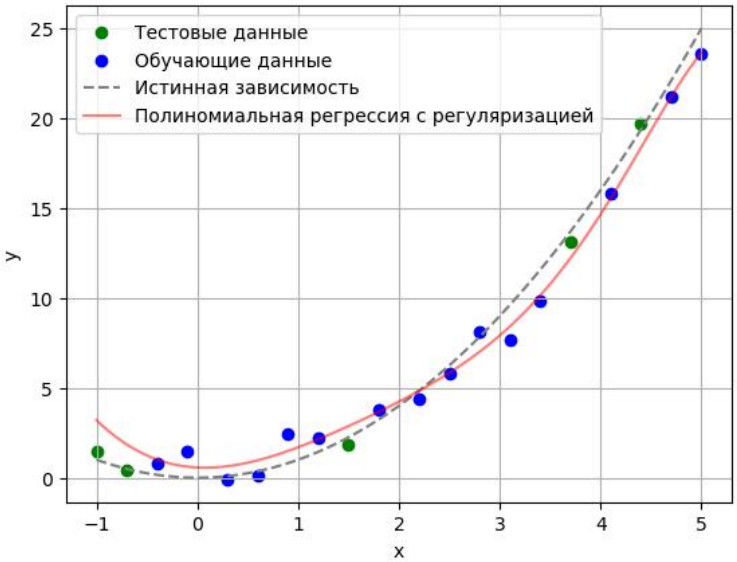


Рис.5. Линия регрессии с регуляризацией

Вычислим метрики качества на обучающих и тестовых данных для модели с регуляризацией, чтобы оценить удалось ли нам уменьшить степень переобученности модели. Для удобства сравнения, приведём все метрики в таблице (табл. 5).

Таблица 5

Метрики качества на обучающих и тестовых данных для регрессии с регуляризацией и без

Метрики	Полиномиальная регрессия 7-ой степени		Полиномиальная регрессия 7-ой степени с регуляризацией	
	Train	Test	Train	Test
R^2	0.994	0.802	0.994	0.97
MSE	0.555	3.443	0.58	1.32

Как видно из таблицы 5, при добавлении регуляризации, на обучающих данных метрики качества поменялись не сильно, а вот на тестовых они значительно улучшились. Таким образом регуляризация помогла существенно снизить степень переобученности модели.

Заключение

В данной работе была рассмотрена практическая задача, дающая представление о регуляризации в задаче линейной регрессии. Подбор нужного коэффициента регуляризации позволил побороться с переобучением модели.

Подобные задания можно предлагать студентам на практических семинарских занятиях в качестве лабораторных работ, выполняемых в компьютерном классе. Все вычисления предлагается осуществлять с использованием библиотек Python (NumPy, Scikit-learn, Matplotlib), что позволит студентам освоить не только теоретические аспекты регуляризации, но и получить практические навыки программирования в области машинного обучения.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кугаевских А. В., Муромцев Д. И., Кирсанова О. В. Классические методы машинного обучения. – СПб.: Университет ИТМО, 2022. – 53 с.
2. Одинцова В. А. Сборник лабораторных работ по дисциплине «Машинное обучение»: для студентов обучающихся по направлениям: «Прикладная информатика», «Программная инженерия» всех профилей (программы подготовки бакалавров). – М.: Финуниверситет, 2025. – URL: http://elib.fa.ru/fbook/books144393.pdf.
3. Регуляризация // Яндекс Учебник по машинному обучению. – URL: https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/linear-models#regulyarizaciya.
4. Мюллер А., Гвидо С. Введение в машинное обучение с помощью Python. – М., 2017.
5. Элбон К. Машинное обучение с использованием Python. Сборник рецептов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2019.

***Vera A. Odintsova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow
odintsova.v@bmstu.ru
VAOdincova@fa.ru

Methodological aspects of teaching the topic of regularization linear regression

Abstract. The development of artificial intelligence technologies and their widespread implementation across various fields of activity creates high demand for specialists in applied machine learning. Technical universities are opening new training programs and introducing disciplines in data analysis and machine learning; however, there is a shortage of methodological materials for conducting practical classes using

computer equipment. The purpose of the article is to develop methodological recommendations for teaching the topic of regularization in linear regression. The paper presents material for conducting a laboratory session, including mathematical descriptions of regularization methods, computational algorithms, and visualization of problem-solving stages to ensure clarity of the studied material.
Keywords: linear regression, regularization, machine learning, model overfitting.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ФУНКЦИЙ АКТИВАЦИИ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена возрастающими требованиями к подготовке специалистов в области машинного обучения, где глубокое понимание фундаментальных компонентов нейронных сетей, таких как функции активации, является критически важным. Цель работы — разработка структурированной методики преподавания, на примере классических Sigmoid и современных ReLU функций активации, обеспечивающей их осознанное использование. Результатом предлагаемого подхода является трехэтапная методика (фундаментальная подготовка, последовательное изложение, практическое закрепление), позволяющая студентам сформировать устойчивое понимание и развить интуицию для выбора функций активации при решении прикладных задач.

Ключевые слова

машинное обучение, методика преподавания, функции активации, ReLU, Sigmoid, MSE

АВТОРЫ

Попов Кирилл Сергеевич,
студент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
kirillious7@gmail.com

Федянин Денис Николаевич,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dfedyanin@inbox.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-137-142

Введение

Стремительное развитие глубокого обучения и его повсеместное внедрение в различные сферы деятельности предъявляют повышенные требования к подготовке специалистов в области машинного обучения. Одной из ключевых задач образовательного процесса становится формирование у студентов не только практических навыков использования современных фреймворков, но и глубокого, осознанного понимания фундаментальных компонентов, лежащих в основе искусственных нейронных сетей. Среди таких компонентов, как подчеркивает Снопкова И. А. и Тауснев Д. А. *[1]*, центральное место занимают функции активации, которые, будучи математическим ядром нелинейности, превращают линейные преобразования в мощный инструмент для аппроксимации сложных зависимостей. Актуальность углубленного изучения этих компонентов, в том числе функций активации, подтверждается продолжающимися исследованиями и публикациями, в том числе в последние годы. А также новыми открытиями в области человеческого мозга по мнению известного английского ученного Стюарта Рассела *[2]*.

Данная статья предлагает структурированную методологию преподавания функций активации, призванную ликвидировать этот пробел. Предлагаемый подход строится на трех столпах: прочном фундаменте из необходимых предварительных знаний, последовательном изложении материала от классических функций к современным и, что наиболее важно, на практическом закреплении знаний через сравнительные эксперименты. Такой путь позволяет студентам не просто заучить свойства активаций, но и развить интуицию для их осознанного выбора при решении реальных задач.

Для освоения функций активации очень полезно знание фундаментальных основ в смежных дисциплинах. Ниже представлен перечень дисциплин необходимых для успешного понимания функций активации:

1. Математические основы: студенты должны обладать основами дифференциального исчисления, в частности, понимать роль производной и градиента в алгоритме обратного распространения ошибки. Также немалую роль играет понимания линейной алгебры. Согласно М. П. Дайзенрота, А. Альдо Фейзала, Чень Сунь Он *[3].*, данные знания позволят понять каким образом функции активации применяются к взвешенной линейной комбинации.
2. Базовая теория нейронных сетей: студенты должны быть знакомы с архитектурой нейронных сетей, понятием весовых коэффициентов и процессом обучения модели по мнению Шмыгаревой В. А. *[4].*
3. Навыки программирования: практическое освоение темы требует умения реализовывать нейросетевые модели с использованием современных библиотек, что позволяет проводить экспериментальные исследования в условиях ограниченного времени и наглядно видеть эффект от применения различных функций.

Методология и результаты исследования

Предлагается построить процесс обучения по классической схеме: с исследований более простых функций с выделением их недостатков и ограничений.

Модуль 1. Классические функции и их ограничения

Изложение предлагается начать с исторически первых и наиболее простых функций и демонстрации их непригодности для современных моделей.

1. Линейная ($y = kx + b$) и пороговая функции (например, $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$): кратко рассматриваются как отправная точка, демонстрируя их неспособность решать нелинейные задачи, включая невозможность использования линейных функций для построения алгоритма обратного распространения ошибки, а также невозможность построения нелинейных моделей, что подробно описано в научной статье журнала ИТМО *[5].*
2. Сигмоидальные функции: подробно изучаются логистическая функция и гиперболический тангенс. Их гладкость делает их удобными для градиентного обучения и для задач бинарной направленности. Однако ключевой момент здесь — обсуждение их главного недостатка: проблемы затухающих градиента, которая детально проанализирована в фундаментальном труде Чару Аггарвала *[6].* Когда аргумент становиться слишком большим, значения функции становятся всегда близкой к единице, что существенно замедляет процесс обучения.

Модуль 2. Революция ReLU и её развитие

Второй модуль предлагается посвятить современному стандарту в большинстве архитектур.

1. ReLU (Rectified Linear Unit) (f(x) = $\max(0, x)$): представляется как простое и эффективное решение проблемы затухающих градиентов. Её главные преимущества — простота в вычисление и отсутствие ограничений для положительных значений. Важно также детально разобрать её недостаток — проблему “мертвых нейронов”. Нейроны ReLU выдают нулевой выход и имеют нулевую производную для всех отрицательных входных значений. Таким образом, если веса всегда приводят к отрицательным входным значениям нейрона, этот нейрон фактически не участвует в обучении сети. С математической точки зрения, изложенной в работе Федотова Станислава и Синицина Филиппа *[7]*, вклад градиента в обновления весовых значений, поступающих от этого нейрона, всегда равен нулю.

2. Модификации ReLU: для решения проблемы “мертвых нейронов” рассматриваются такие вариации, как Leaky ReLU «f(x) = max(αx, x), где α – малое положительное число», Parametric ReLU (PReLU) «f(x) = max(αx, x), где α – обучаемый параметр» и Exponential Linear Unit (ELU) «$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ \alpha(e^x - 1), & x \leq 0 \end{cases}$, где α – обучаемый параметр», анализ которых представлен в труде Я. Гудфеллоу, Й. Бенгио и А. Корвиля *[8]*. Эти функции имеют небольшие отрицательные значения, позволяющие оптимизировать градиент для дальнейшего обучения.

Модуль 3. Обзор современных и экспериментальных подходов

В третьем модуле предлагается дать студенту более глубокие знания о новых разработках в области функций активации. На наш взгляд здесь следует упомянуть, что поиск идеальной функции активации продолжается, и исследователи постоянно предлагают новые варианты для конкретных областей применения. Помимо классических и ReLU-подобных функций, существует ряд современных активаций, среди которых можно выделить:

• Swish: Самообучаемая функция

$$f(x) = x * sigmoid(\alpha x),$$

где α - обучаемый параметр, представленная в статье С. Кортиньеса *[9]*.

• Mish: Гладкая немонотонная функция

$$f(x) = x * th\big(ln(1 + e^x)\big).$$

• GELU (Gaussian Error Linear Unit): Стохастическая функция активации. Интегральная функция распределения стандартного нормального распределения

$$f(x) = x * \Phi(x),$$

где Φ(x) - кумулятивная функция распределения для нормального распределения»

• Reciprocal activation unit (RAU): Предложенная в 2023 году функция исследователями Праджайша Т. М. и Вени С., которая, по утверждению авторов, превосходит стандартные функции на задачах бинарной и многоклассовой классификации *[10]*

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + \left|\frac{1}{x}\right|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Методика закрепления полученных знаний

По нашему мнению, теоретические знания обязательно должны быть подкреплены практическими заданиями, формирующей у студентов

исследовательские навыки и улучшая их понимания предмета. Считаем, что важно подчеркнуть, что выбор функции активации является важным этапом проектирования нейронной сети, который зависит от специфики задачи. Как отмечают авторы ряда работ, основной упор в исследованиях часто делается на архитектуры и алгоритмы, тогда как важность функций активации может недооцениваться, хотя она играет существенную роль в сходимости и производительности.

Для формирования должной интуиции у студентов по этой теме предлагается выполнить следующую лабораторную работу.

Лабораторная работа

1. Описание лабораторной работы

Лабораторная работа фокусируется на сравнении функций активации ReLU и Sigmoid в двухслойной нейронной сети, где студенты оценивают их эффективность при аппроксимации двух нелинейных зависимостей на синтетических данных, анализируя потери и изменения весов.

Студент создаст модели в TensorFlow по руководству С. Рашки, Юсин (Хейден) Лю и В. Мирджалили *[11]*, обучит их на данных с $y = \sin(0.5 * (x_1 + x_2))$, а после проведения первого опыта на $y = x_1 * x_2$. x_i берутся из интервала от -2 до 2, чтобы сравнить функцию активации ReLU и Sigmoid в скорости обучения.

2. Цели и задачи

Главная цель — измерить сходимость при использование различных функций активаций: ReLU и Sigmoid.

Задача включают генерацию 500 образцов x с помощью равномерного распределения от -2 до 2 для двух переменных, расчёт y для разных экспериментов, обучение сетей с оптимизатором SGD при скорости обучения 0.05 и 500 эпохах, а также визуализацию потерь как среднего квадрата разниц между реальными и предсказанными значениями $MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y^*)$ $(y^* - \text{предсказанное значение})$. Анализ будет опираться на графики потерь.

3. Ожидаемые результаты

Почти всегда ReLU показывает наилучшие результаты по сходимости из-за более эффективного вычисления градиента, так как производная равно либо 1 при $x > 0$ или 0 при $x \leq 0$.

В то время как Sigmoid имеет особенность «затухания» при сильно положительных или отрицательных значениях. Как пример можем посмотреть на график сходимости функции $y = x_1 * x_2$.

Однако для сильно гладких функций, таких как $y = \sin(0.5 * (x_1 + x_2))$. Sigmoid может показывать такой же или относительно лучший результат из-за плавного вычисления градиентного спуска (без скачков) и отсутствию изломов. Что видно на данном графике.

Рис. 1 (Зависимость потерь от эпох обучения для $y = x_1 * x_2$)

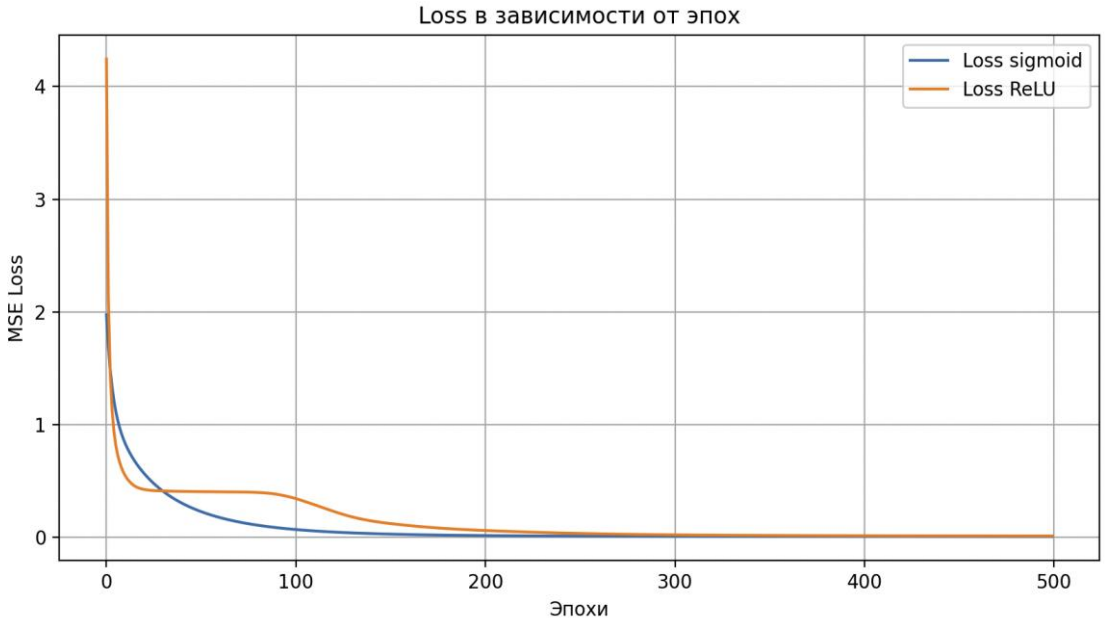


Рис. 2 (Зависимость потерь от эпох обучения для $y = sin(0.5 * (x_1 + x_2))$

Заключение

Предложенная методология, сочетающая теоретическую базу, знакомство с актуальными научными исследованиями и практическую работу, на наш взгляд позволяет сформировать у студентов глубокое и системное понимание роли функций активации. Это позволяет, как нам кажется, подготовить специалистов, способных не только применять стандартные решения, но и осознанно подходить к выбору компонентов нейронной сети для эффективного решения прикладных задач.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Снопкова И.А., Тауснев Д.А. Исследование влияния функции активации на эффективность работы нейронной сети при различных подходах к обучению. - URL:

https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-vliyaniya-funktsii-aktivatsii-na-effektivnost-raboty-neyronnoy-seti-pri-razlichnyh-podhodah-k-obucheniyu/viewer
2. Stuart Russel. Human Compatible. - 2019. - С. 14–18.
3. Марк Питер Дайзенрот, А. Альдо Фейзал, Чень Сунь Он. Математика в машинном обучение. - 2024. С. 31–33.
4. Шмыгарева В.А. Разработка и обучения нейронных сетей. Журнал «Молодой ученый». - URL: https://moluch.ru/archive/419/93213
5. Практики реализации нейронных сетей. - URL: https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Практики_реализации_нейронных_сетей
6. Charu C. Aggarwal. Neural Networks and Deep Learning. - 2018. - С. 11–14.
7. Федотов Станислав, Синицин Филипп. Учебник по машинному обучению. Яндекс. Первое знакомство с полносвязными нейронными сетями. - URL: https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/pervoe-znakomstvo-s-polnosvyaznymi-nejrosetyami
8. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. Deep Learning. - 2016. - С. 176.
9. Samuel Cortinhas. Mish: A self-Regularized Activation Function. - URL: https://www.kaggle.com/code/samuelcortinhas/mish-a-self-regularized-activation-function-tf
10. Prajesha T M, S Veni. RAU: Novel Activation Function for Deep Learning Neural Network. - URL: https://ijritcc.org/index.php/ijritcc/article/view/8477/6635
11. Себастьян Рашка, Юсин (Хейден) Лю, Вахид Мирджалили. Машинное обучение с PyTorch и Scikit-Learn. - 2024. - С. 384–393.

***Kirill S. Popov*,**
Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
kirillious7@gmail.com
***Denis N. Fedyanin*,**
Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dfedyanin@inbox.ru

Methodology for Teaching Activation Functions in Machine Learning: From Fundamentals to Modern Approaches

Abstract. Activation functions are a crucial component of artificial neural networks, enabling decision-making processes analogous to human neurons. The choice of an appropriate activation function directly impacts the efficiency of training, overall performance, and accuracy of the model [1]. This article proposes a methodology for teaching students about activation functions. The article is divided into three topics: necessary prerequisites, teaching methodology, and methodology for consolidating acquired knowledge.

Keywords: machine learning, teaching methodology, activation functions, ReLU, Sigmoid, MSE.

ПРЕПОДАВАНИЕ ОСНОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В РОССИИ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ XVIII ВЕКА

Аннотация

Актуальность обусловлена недостаточной изученностью становления преподавания высшей математики в России. Цель работы - характеристика свода литературы XVIII века, затрагивающей вопросы дифференциального исчисления, с акцентом на оригинальные отечественные учебники. Метод — изучение математических книг данного периода. Представлена как переводная, так и оригинальная учебная литература. На примере «Сокращения вышней математики» П.И. Гиларовского и «Новой алгебры» А.Д. Барсова выполнено сравнение способов изложения, адресованных разным категориям обучающихся, глубины и стиля текста, тематики примеров и расстановки акцентов.

Ключевые слова

математическое образование, дифференциальное исчисление, отечественная учебная литература, П.И. Гиларовский, А.Д. Барсов

АВТОРЫ

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана", г. Москва
inpt@mail.ru

Бахтиярова Ольга Николаевна,
кандидат технических наук, доцент
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана", г. Москва
olga-bakh06@mail.ru

Птицына Елена Владимировна,
ассистент кафедры математического моделирования
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»; младший научный сотрудник
ФГБУН «Институт общей генетики им. Н.И. Вавилова Российской академии наук»;
аспирант ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", г. Москва
elena-pt@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-143-152

Введение

Одной из проблем современного высшего образования является недостаточный учет специфики потребностей различных групп обучающихся при изучении ими разделов высшей математики. В данной статье показано решение подобной задачи на примере изучения и использования понятий дифференциала и производной в высшей школе в России второй половины XVIII века.

Методология и результаты исследования

Методом исследования является анализ учебников XVIII века. Проведен сравнительный анализ начал дифференциального исчисления по учебникам П.И. Гиларовского [1] и А.Д. Барсова [2].

Краткий обзор учебников по высшей математике во второй половине XVIII века

Большая часть учебных книг для высших сословий XVIII века была написана на иностранных языках, однако при обучении средних сословий это вызывало трудности. Для широкой подготовки собственных военных и гражданских кадров требовались учебники на родном языке. Эта задача решалась изданием как переводов иностранных учебников, так и собственных оригинальных учебников на русском языке [3, 4]. Особенностью многих переводов были прибавления переводчиков.

В отечественной учебной математической литературе XVIII века в основном (с современной точки зрения) подробно освещались различные разделы элементарной математики, а разделы высшей математики (математического анализа, дифференциальных уравнений, геометрии кривых и поверхностей и других) были представлены в очень небольшом количестве книг. В основном им были посвящены научные работы иностранных математиков, работавших в России, и некоторых российских математиков.

По дифференциальному исчислению в Российской физико-математической библиографии XVIII века В.В. Бобынина можно найти лишь четыре учебника. Первые два учебника являются переводами на русский язык с добавлениями переводчиков: «Сокращение первых оснований мафиматики» Христиана Вольфа, переведённое С.К. Котельниковым (1770-1771) [5] и «Навигационныя или мореходныя изследования» Этьена Безу, переведённые С.Е. Гурьевым (1791) [6]. Две других книги являются оригинальными российскими учебниками: «Сокращение вышней математики» П.И. Гиларовского (1796) [7] и «Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но пользу начинающих упражняться в математике» А.Д. Барсова (1797) [8].

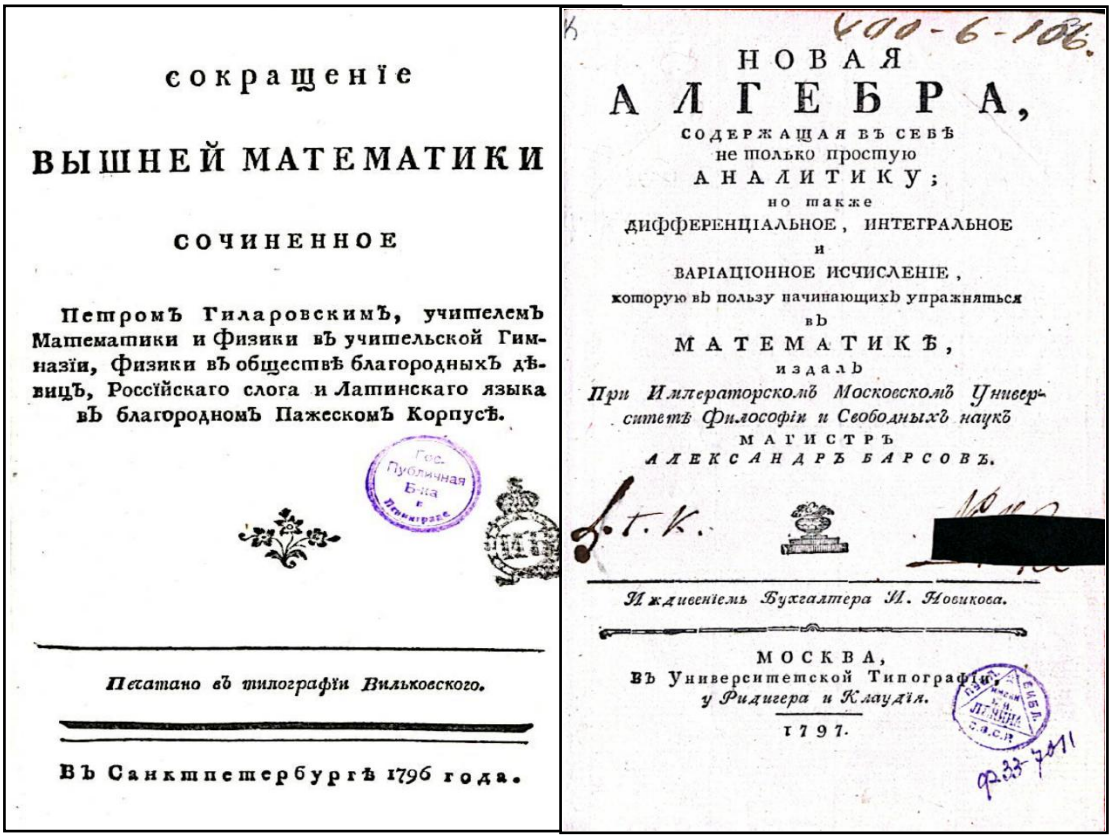
Из истории создания дифференциального исчисления известно, что обоснованное использование бесконечно малых величин, их отношений и пределов отношений складывалось постепенно, в дискуссиях между знаменитыми европейскими математиками, особенно в течение XVIII и начала XIX века. Мы не будем повторять содержание этих обсуждений. Нам бы хотелось показать отечественных математиков, которые не только следили за достижениями европейской науки, но и имели собственные оригинальные идеи, а также систематизировали и полно (а иногда и более обоснованно) излагали накопленные математические знания, в частности, по началам дифференциального исчисления. Их научные работы недостаточно исследованы. Большинство математических работ являлись научными статьями или монографиями, написанными на иностранных языках, хотя были и монографии, написанные на русском языке. В частности, это являлось одной из причин недостаточной известности российских математиков в Европе. Но мы сосредоточимся на книгах учебных, написанных по-русски, и предназначавшихся для тех соотечественников, кто только совершал первые шаги в выбранной математической области.

Издание книг требовало средств. Поэтому совмещение в одном издании перевода научной или учебной книги известного автора с собственным текстом переводчика являлось удачной находкой переводчиков. А переводчиками могли быть будущие или действительные российские академики, например, Семен Кириллович

Котельников или Семен Емельянович Гурьев. Труды С.Е. Гурьева по дифференциальному исчислению (а также по геометрии и по интегральному исчислению) являются подробнейшими, в них автор обосновывает до мельчайших деталей все рассуждения. Приведем сочинения С.Е. Гурьева начала XIX века, относящиеся к дифференциальному исчислению и являющиеся монографиями. Это перевод книги Жака Антуана Жозефа Кузена «Диференциальное и интегральное изчисление» (1801), содержащий авторские дополнения [9], а также три оригинальных книги: «Опыт о усовершении елементов геометрии» (1798) [10], «Основания дифференциальнаго изчисления, с приложением онаго к аналитике» (1811) [11], «Краткое изложение различных способов изъяснять дифференциальное изчисление» (представлено в 1813, издано в 1815) [12]. При этом в монографии 1798 г. речь идёт только о методе пределов.

Анализ учебников П.И. Гиларовского и А.Д. Барсова

Рассмотрим подробнее упомянутые выше учебники «Сокращение вышней математики» П.И. Гиларовского [13] и «Новая алгебра» А.Д. Барсова [14] (Рис. 1). Первая книга была издана в *частной* типографии Вильковского в Санкт-Петербурге (1796). Вторая книга была издана в Университетской типографии, арендуемой Ридигером и Клаудием, в Москве (1797). Как и перевод А.Д. Барсовым «Новейшей арифметики» Н. Шмита [15], «Новая алгебра» была издана «*Иждивением Бухгалтера И. Новикова*». При этом переводы учебника Вольфа С.К. Котельниковым и учебника Безу С.Е. Гурьевым были изданы при Морском шляхетном кадетском корпусе и при Типографии Горного училища в Санкт-Петербурге (1770, 1791) без указания на участие частных лиц [16, 17].


сокращенїе

ВЫШНЕЙ МАТЕМАТИКИ

СОЧИНЕННОЕ

Петромъ Гиларовскимъ, учителемъ Математики и Физики въ учительской Гимназїи, Физики въ обществѣ благородныхъ дѣвицъ, Россїйскаго слога и Латинскаго языка въ благородномъ Пажескомъ Корпусѣ.

Печатано въ типографїи Вильковского.

Въ Санктпетербургѣ 1796 года.

НОВАЯ
АЛГЕБРА,
СОДЕРЖАЩАЯ ВЪ СЕБѢ
не только простую
АНАЛИТИКУ;
но также
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ
и
ВАРІАЦІОННОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ,
которую въ пользу начинающихъ упражняться
въ
МАТЕМАТИКѢ,
издалъ
При Императорскомъ Московскомъ Университетѣ Философіи и Свободныхъ наукъ
МАГИСТРЪ
АЛЕКСАНДРЪ БАРСОВЪ.

Иждивеніемъ Бухгалтера И. Новикова.

МОСКВА,
Въ Университетской Типографіи
у Ридигера и Клаудія.
1797.

Рис. 1. Титульные листы учебников «Сокращение вышней математики» П.И. Гиларовского и «Новая алгебра» А.Д. Барсова

П.И. Гиларовский преподавал математику и физику в Учительской гимназии и Обществе благородных девиц. «Сокращение высшей математики» П.И. Гиларовского [18] имело целью объяснение разделов математики, которые использованы в его предыдущем учебнике «Руководство к физике» [19]. Тем не менее, в разделе «Высшая геометрия, или учение о кривых линиях», автор представляет больше сведений, чем нужно для понимания его учебника по физике. Отметим, что в учебнике Гиларовского используются обороты речи, обращённые непосредственно к читателям [20].

А.Д. Барсов являлся выходцем из купеческого сословия и преподавал математику в Московском университете. «Новая алгебра» А.Д. Барсова [21] является продолжением «Новейшей арифметики» [22]. В Предисловии он перечисляет отличия своего учебника от всех изданных ранее по данной тематике на русском языке. Таких отличий (авторское изложение) он перечисляет десять, из них к дифференциальному и интегральному исчислению можно отнести шесть. С другой стороны, он не включает в учебник некоторые темы как имеющие мало (по мнению автора) практических применений. Основной тип функций, которые рассматривает А.Д. Барсов — это многочлены, так как одной из целей автора является решение алгебраических уравнений. Среди подписчиков «Новой алгебры» мы видим нескольких купцов, что объясняется практической направленностью предыдущего учебника «Новейшая арифметика» на решение коммерческих задач и анонсом в нём следующего учебника. Например, одной из решаемых задач является разложение одного «количества» по степеням другого «количества», если известно связывающее их уравнение. Однако, во многих разделах автор излагает гораздо больше, чем требуется для решения коммерческих задач его времени, например, по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению.

Рассмотрим некоторые разделы учебников обоих авторов (Таблица 1).

Таблица 1

Сравнение изложения начал дифференциального исчисления в учебниках П.И. Гиларовского и А.Д. Барсова [23, 24]

П.И. Гиларовский	*А.Д. Барсов*
О бесконечно больших и бесконечно малых количествах	
«Каждое количество может увеличиваться и уменьшаться двояким образом: 1) получая вдруг всё приращение или умаление, 2) переходя все возможные степени» (С. 1). Очень общая формулировка.	Дано определение бесконечно больших и бесконечно малых: «Количество увеличивается до бесконечности, когда оно может учиниться больше всякаго определенного количества». «Количество уменьшается до бесконечности, когда оно может учиниться меньше всякаго определённого количества», то есть подразумевается, что уменьшающееся до бесконечности количество стремится к нулю (С. 82).
О сравнении количеств	
	«… уменьшающиеся до бесконечности или бесконечно малые количества бывают разных … порядков». Дано определение бесконечно великого количества порядка m и бесконечно малого количества порядка m. Бесконечно большие и бесконечно малые количества разных порядков сравниваются. Показано, что для бесконечно больших

	количеств одно является пределом другого, если предел их отношения равен единице. Для остальных количеств (видно из контекста) предел одного определяется как предел другого, если их разность является бесконечно малым количеством (С. 83-84).
Определение функции	
«Состояние, в котором находится какое-нибудь переменное количество, называется его *Функциею*» (С. 2).	«Положим, что переменное количество Z определяется переменным же количеством z, и постоянными или неизменяемыми величинами; или что Z есть *функция* количества z» (С. 85).
Определение производной и дифференциала функции	
Производная функции не определяется, понятие предела отсутствует. «Взять дифференциал от какой-нибудь функции количества переменнаго есть не что иное, как представить перемену, которая в ней произойти должна от того, что самое переменное количество принимает приращение или умаление» (С. 3). Таким образом, у П.И. Гиларовского, как и у А.Д. Барсова, бесконечно малое приращение функции и её дифференциал не различаются.	Производная функции определяется через предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента уменьшается до бесконечности (стремится к нулю), но используется другая терминология. Производная называется «*дифференциальным содержанием*». Приращение функции Z обозначается через E. Приращение количества z обозначается через e. «Если … количество e будет уменьшаться до бесконечности: то содержание E:e до бесконечности приближаться будет к другому какому-нибудь содержанию, так как к своему пределу; и сей предел называется *дифференциальным содержанием*». *Дифференциалами количеств* Z и z называются бесконечно малые количества E и e. Таким образом, у Барсова приращение функции и её дифференциал не различаются, несмотря на введение понятия дифференциального содержания (т. е. Производной) (С. 85).
Порядок вывода формул для дифференциалов различных функций	
1. Сначала выводится формула дифференциала суммы и разности: d(x+b)=dx, затем d(x+y) = dx+dy и d(x-y) = dx-dy. Способы вывода у Гиларовского и Барсова одинаковые. Кратко их можно представить так: например, d(x+y) = (x+dx+y+dy)-(x+y) = dx+dy (С. 3-4). 2. Выводится формула дифференциала произведения. Кратко: d(xy) = (x+dx)(y+dy)-xy = xy+xdy+ydx+dxdy-xy = xdy+ydx+dxdy = xdy+ydx. Слагаемое dxdy отбрасывается «как бесконечная малость в разсуждении других членов». Отсюда выводится два рассуждения: 2.1. d(ay) = ady. 2.2. d(zx) = xdz+zdx. Отсюда получим d(zxy) = zxdy+zydx+yxdz. 2.3. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. Верность это формулы показывается только в случаях n=2 и n=3: $d(x^2) = d(xx) = xdx+xdx = 2xdx$. $d(x^3) = d(xx^2) = xdx^2+x^2dx = x2xdx+ x^2dx = 3x^2dx$. 2.4. Для дифференциалов от степенной	1. Сразу выводится формула дифференциала степенной функции с натуральным показателем. При выводе используется формула, называемая сейчас биномом Ньютона, для выражения $(z+e)^n$. Слагаемые, содержащие e^k, k>1, отбрасываются. Показывается вывод производной степенной функции: «Содержание E:e приближается … к количеству nz^{n-1}, следовательно искомое дифференциальное содержание будет E:e = nz^{n-1}; притом E = nez^{n-1}». Следовательно, приравнивая приращение функции её дифференциалу, и обозначая E = dZ, e = dz, Барсов получает верную формулу дифференциала степенной функции dZ = nz^{n-1} dz (С. 85-86). 2. Выводится формула дифференциала суммы и разности (С. 86). 3. Выводится формула дифференциала произведения. Дифференциальное уравнение определяется как уравнение между дифференциалами переменных количеств. Для интересующих автора функций составляются

функции с рациональным показателем без доказательства используется формула для дифференциала степенной функции с натуральным показателем. 2.5. Для дифференциалов от степенной функции с отрицательным целым показателем также без доказательства используется формула для дифференциала степенной функции с натуральным показателем. 2.6. Дифференциал от частного x:z находится как от произведения xz^{-1}: $d(z^{-1}x) = z^{-1}dx+xdz^{-1} = z^{-1}dx-xz^{-2}dz = (zdx-xdz):z^2$ (С. 4-6). 3. Отдельно разбирается, как брать дифференциал от сложных функций. Разбирается много примеров и даётся правило: «Дабы взять дифференциал от сложной функции, должно с начала все ея части принять за простые количества и означить дифференциалы их буквою d, а по том вместо d поставлять по пунктам ... надлежащие дифференциалы» (С. 6-8). 4. В отличие от учебника А.Д. Барсова, рассматриваются дифференциалы тригонометрических функций. Например, для дифференциала sin(x): sin(x+dx) = sin(x)cos(dx)+cos(x)sin(dx), но cos(dx) «или косинус безконечно малой дуги безконечно мало разнится от радиуса и следовательно межет быть без чувствительной погрешности принят за радиус»; а sin(dx) «безконечно мало разнится от самой дуги dx так, что она вместо его поставлена быть может. По сему назвавши радиус единицею, как он в оной формуле и приемлется, получим sin(x+dx) = sin(x) + dxcos(x). Следовательно разность sin(x+dx) и sin(x) будет равна dxcos(x), или dsin(x) = dxcos(x)». Аналогично выводится дифференциал dcos(x) = -dxsin(x). Другие дифференциалы не выводятся, но сказано, что «отсюда удобно сыскать дифференциалы тангенса, котангенса, секанса и косеканса зная, что ...» (далее приводятся их определения). Их выражения не требуются автору (С. 8-9). 5. Дифференциал логарифма выводится в главе о кривых линиях (С. 9).	дифференциальные уравнения и из них находятся нужные формулы. Например, чтобы найти дифференциал произведения Z = xy, находится дифференциальное уравнение между dZ, x, y, dx, dy. Так как $4Z = (x+y)^2-(x-y)^2$, то, взяв дифференциал от левой и правой части и фактически пользуясь понятием дифференциала сложной функции, автор получает: $4dZ = d(x+y)^2-d(x-y)^2=2(x+y)(dx+dy)-2(x-y)(dx-dy)$. Следовательно, после упрощения будет dZ = xdy+ydx. Покажем, как при этом находится $d(x+y)^2$. Обозначим x+y = u, тогда $du^2 = 2udu = 2(x+y)d(x+y) = 2(x+y)(dx+dy)$. Аналогично, $d(x-y)^2 = 2(x-y)(dx-dy)$ (С. 87-88). 4. Выводится формула дифференциала частного. v = x:y Следовательно, x = vy. dx = vdy + ydv. Выразим dv = (dx-vdy):y = $(ydx-xdy):y^2$ (С. 89). 5. Выводится дифференциал «радикального количества» $w = u^{m:n}$, то есть формула дифференциала степенной функции с положительным рациональным показателем, затем с целым отрицательным. Результат обобщается для степенной функции с иррациональным показателем (допущена ошибка в понятии иррационального числа) (С. 89). 6. Находятся дифференциалы выражений $(1+y)^m$, разложенных в бесконечные строки (С. 90-92). 7. Определяется дифференциал n-го порядка. Автор активно пользуется геометрическими представлениями. Для степенной функции $w = x^m$, если c и e — приращения x и w, выводится разложение w+e по производным функции w (говоря современным языком, разложения Тейлора). Они обозначаются как отношения дифференциалов $d^nw:dx^n$. Аналогичные разложения получены для функции $z = ax^m+bx^r$. Производится обобщение для произвольных сумм степенных функций (С. 96-103).
Нахождение экстремумов функций	
Экстремальные значения функции описываются так: «многие количества переменные и многия их функции могут увеличиваться и уменьшаться до известнаго только предела» (С. 9). Для любых функций «когда переменное количество дойдет до самой высшей или до самой нижней степени так, что уже более увеличиваться или уменьшаться не может; тогда оно сделается постоянным; следственно только дифференциал равен будет нулю» (С.	Определяется максимум и минимум функции (говоря современным языком, экстремальные значения функции): «Когда функция количества x до некоторой степени увеличивается, а потом опять уменьшается, между тем как x безпрестанно увеличивается … ; то самое большое знаменование, которое оная функция иметь может, называется одним словом наибольшее (Maximum). Естьли же функция до некотораго знаменования уменьшается, потом увеличивается: то сие

10). «Но как положивши дифференциал равным нулю, определяется либо самая высшая, либо самая нижняя степень; то еще нужно узнавать, которая из них имеет место» (С. 10). Рассматриваются приращения аргумента +dx и -dx. «Ежели в обоих случаях функция сделается меньше, нежели от сысканой величины x, то степень есть самая высшая; ежели же будет функция больше, поставляя вместо x, x+dx, и x-dx; то сия степень есть самая меньшая» (С. 10). Случай, когда x не является точкой экстремума, а также общий признак экстремума функции не рассматриваются. При этом приведены простые примеры из геометрии и физики. При рассмотрении примера на столкновение упругих шаров дана ссылка на другой учебник П.И. Гиларовского по физике (С. 14). Использование дифференциального исчисления в высшей геометрии показано в следующих главах данного учебника по математике (например, С. 28-29, 46), а более подробно в физических примерах — в конце учебника по физике.	знаменование называется наименьшее (Minimum)» (С. 103). Рассматривается только степенная функция. Для положительного и отрицательного приращения аргумента записываются приращения функции, в которых чётные по порядку слагаемые имеют разные знаки. Выводится общий признак экстремума функции (y — функция от x): «если все предыдущие члены = 0, но $d^{2n}y:dx^{2n}$ не исчезает, то y тогда составляет самое большое или меньшое. Естьли же $d^{2n}y:dx^{2n}$ исчезает; но $d^{2n+1}y:dx^{2n+1}$ удерживает некоторую величину, то y ни большаго ни меньшаго не составляет».

А.Д. Барсов всегда указывает ссылки на авторов, результатами которых пользуется. Его книга называется «Новая алгебра», и он излагает разделы математики, которые в то время только складывались. Отсюда аккуратное сопровождение изложенных блоков подробными ссылками, в чём можно убедиться в Таблице 2. При этом его задачей является такое изложение материала, которое легко использовать в практических приложениях. П.И. Гиларовский приводит гораздо меньше ссылок. Отчасти это связано с тем, что широкий раздел по геометрии конических сечений уже являлся достаточно традиционным в некоторых видах изложения. При этом в его книге, в отличие от учебника А.Д. Барсова, есть самоцитирования и ссылки на «ученых людей» без указания имён.

Таблица 2

Использование ссылок
в учебниках П.И. Гиларовского и А.Д. Барсова [25, 26]

П.И. Гиларовский	*А.Д. Барсов*
Ссылки на себя	
«из Механики известно см. 462 стр. физики Гиларовскаго, что ежели скорость ударяющего тела» (С. 14). «его употребление в механике и физике приложено в конце физики Гиларовскаго» (С. 15). «о других кривых линиях, при чем показано будет и употребление описанных линей; а больше о сем найти можно в Физике Гиларовского» (С. 22).	
Ссылки на других авторов без указания имён	
«Многия из сих линий кривизною между собою различных учеными людьми подведены под правила и свойства их изъяснены так, что чрез сие употребление их не только сделалось	

понятнее, но и гораздо пространнее и великая часьт Физики, Механики и Астрономии и прочих многих наук на них как на единственном основании утвердилась» (С. 21). «заметить должно, что Математики находят иногда в том выгоду, чтобы абсциссу называть буквою x» (С. 33).	
Ссылки на других авторов с указанием имён	
«Оставляя многие способы сыскивать интегралы предписанные в пространных сочинениях о интегральном вычислении, каковы суть Г. Ейлера, Сори, Кестнера, Карштена и проч. Предложу только одно самое нужнейшее» (С. 19). «по Невтоновой формуле разрешить в безконечную строку» (С. 20). «И так дабы найти сего количества интеграл, должно по Невтонову биномию $(4y^2+p^2)^{1/2}$ превратить в безконечную строку» (С. 93). «то чрез точки … пройдет кривая линея называемая квадратрикс Диностратова» (С. 124).	«Теорема, заключающаяся во всеобщем изображении в 40, имеет изобретателями своими Паскаля и Невтона; предыдущим же доказательством обязаны мы Г. Кестнеру. Но прежде всех доказал оную другим образом Иаков Бернулли» (С. 25). «Сию истину открыли Картезий и Герриот, а строгое доказательство оной дали Аббат Гюа и Профессор Кестнер» (при определении знаков корней алгебраического уравнения) (С. 121). «Сей способ находить интегралы ломаных дифференциалов изобретен Иоанном Бернуллием, и усовершенствован Леонардом Эйлером» (С. 151). «Интегральное исчисление, также как и дифференциальное, изобретено Невтоном и Лейбницем; но Иоанн Бернулли, Леонард Эйлер и Лагранж возвели оба сии исчисления на ту степень совершенства, на которой оныя ныне находятся» (С. 169).

Заключение

Первые отечественные учебники, содержащие начала дифференциального исчисления, были написаны не академиками, а учителем и молодым учёным. Возможно, они лучше чувствовали потребность в изданиях, менее подробных и близких к практике, чем вышедшие в XVIII веке статьи и монографии по данной тематике.

«Новая алгебра» А.Д. Барсова отличается более строгим стилем, ориентацией на коммерческие приложения, вводит читателя конца XVIII в современные им разделы высшей математики. «Сокращение вышней математики» П.И. Гиларовского написано в менее формализованном стиле, при этом он излагает более устоявшийся материал при использовании современных ему методов, с акцентом на геометрические и физические примеры.

Однако, все издания служили развитию российского образования. Перспективами исследования является сравнение учебников А.Д. Барсова и П.И. Гиларовского с добавлениями С.К. Котельникова и С.Е. Гурьева к их переводам иностранных учебников.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гиларовский П.И. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе. - СПб.: Тип. Вильковскаго. Издание Комиссии об учреждении народных училищ. - 1796. - 138 с.
2. Барсов А.Д. Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при имп. Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов. — М.: Иждивением бухгалтера И. Новикова: Унив. тип., у Ридигера и Клаудия. - 1797. - 196 с.

3. Птицына И. В. и др. Учебная литература для образования инженеров второй половины XVIII века //Педагогика. Вопросы теории и практики. - 2021. - Т. 6. - №. 5. - С. 791-804.
4. Птицына И. В., Птицына Е. В., Бахтиярова О. Н. Учебники по геометрии для подготовки учителей и инженеров второй половины XVIII века // Modern European Researches. – 2022. – Т. 1. – №. 1. – С. 110-120.
5. Вольф Х. Сокращение первых оснований мафиматики, сочиненное в пользу учащагося юношества Христианом Волфом, профессором мафиматики и философии Гальския академии и членом Санктпетербургския и Парижския, Лондонскаго социетета и Берлинския академии. Переведено с латинскаго языка профессором С. Котельниковым. СПб.: При Морском шляхетном кадетском корпусе. – Т. 2. – 1771. – 461 с.
6. Безу Э. Навигационныя или мореходныя изследования, сочинены г. Безу. С французскаго подлинника на российской язык переведены и дополнены Семеном Гурьевым; Изданы по высочайшему ея Имп. Величества повелению. – СПб.: Тип. Горнаго училища. – Ч. 2. – 1791. – 243 с.
7. Гиларовский П.И. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе.
8. Барсов А.Д. Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при имп. Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов.
9. Кузен Ж.А.Ж. Диференциальное и интегральное изчисление, собранное на французском языке г. Кузенем, Парижскаго института членом, и приумноженное при преложении на российской С. Гурьевым, Академии наук академиком, Училища корабельной архитектуры профессором и Академии Российской членом. – В СПб.: При Императорской Академии наук. – 1801. – 458 с.
10. Гурьев С.Е. Опыт о усовершении елементов геометрии: составляющий первую книгу математических трудов академика Гурьева. – СПб.: При Императорской Академии наук. – 1798. – 264 с.
11. Гурьев С.Е. Основания дифференциальнаго изчисления, с приложением онаго к аналитике. Сочинение Семена Гурьева, Академии наук академика. – СПб.: При Императорской Академии наук. – 1811. – 502 с.
12. Гурьев С.Е. Краткое изложение различных способов изъяснять дифференциальное изчисление. Представлено Академии академик Гурьевым июня 16 дня 1813 года. – СПб.: Типография Академии Наук. – 1815. – 54 с.
13. Гиларовский П.И. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе.
14. Барсов А.Д. Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при имп. Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов.
15. Шмит Н. Новейшая арифметика: Заключающая в одном цепном правиле большую часть тех правил, которыя обыкновенно в арифметиках преподаются под особливыми именами, С показаниями самых кратчайших средств к решению разных задачь. Сочиненная Н. Шмитом, Которую в пользу всех учащихся, а особливо купеческаго юношества, с немецкаго перевел, удобнейшим порядком расположил, и нужными прибавлениями дополнил, при Имп. Московском университете, философии и свободных наук магистр Александр Барсов. – М.: Иждивением бухгалтера И. Новикова: В типографии Селивановскаго и товарища. – 1797. – 190 с.
16. Вольф Х. Сокращение первых оснований мафиматики, сочиненное в пользу учащагося юношества Христианом Волфом, профессором мафиматики и философии Гальския академии и членом Санктпетербургския и Парижския, Лондонскаго социетета и Берлинския академии. Переведено с латинскаго языка профессором С. Котельниковым.
17. Безу Э. Навигационныя или мореходныя изследования, сочинены г. Безу. С французскаго подлинника на российской язык переведены и дополнены Семеном Гурьевым; Изданы по высочайшему ея Имп. Величества повелению.
18. Гиларовский П.И. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе.
19. Гиларовский П.И. Руководство к физике. Сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе. – СПб: Тип. Вильковскаго. – 1793. – 505 с.

20. Птицына И.В. и др. Преподавание высшей математики по российским учебникам конца XVIII века на примере учебника П.И. Гиларовского «Сокращение вышней математики» //Modern European Researches. – 2023. Т– . 1. – №. 1. – С. 166-177.
21. Барсов А.Д. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе.
22. Шмит Н. Новейшая арифметика: Заключающая в одном цепном правиле большую часть тех правил, которыя обыкновенно в арифметиках преподаются под особливыми именами, С показаниями самых кратчайших средств к решению разных задачь. Сочиненная Н. Шмитом, Которую в пользу всех учащихся, а особливо купеческаго юношества, с немецкаго перевел, удобнейшим порядком расположил, и нужными прибавлениями дополнил, при Имп. Московском университете, философии и свободных наук магистр Александр Барсов.
23. Гиларовский П.И. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе.
24. Барсов А.Д. Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при имп. Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов.
25. Гиларовский П.И. Сокращение вышней математики, сочиненное Петром Гиларовским, учителем математики и физики в Учительской гимназии, физики в Обществе благородных девиц, российскаго слога и латинскаго языка в благородном Пажеском корпусе. СПб.: Тип. Вильковскаго. Издание Комиссии об учреждении народных училищ.
26. Барсов А.Д. Новая алгебра, содержащая в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление, которую в пользу начинающих упражняться в математике, издал при имп. Московском университете философии и свободных наук магистр Александр Барсов.

***Inga V. Ptitsyna*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru
***Olga N. Bakhtiyarova*,**
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
olga-bakh06@mail.ru
***Elena V. Ptitsyna*,**
Assistant, Department of mathematical modeling, Bauman Moscow State Technical University; Junior researcher, Vavilov Institute of General Genetics of Russian Academy of Sciences; Postgraduate student, Lomonosov Moscow State University, Moscow
elena-pt@yandex.ru

Teaching the basics of differential calculus in Russia in the second half of the 18th century

Abstract. The relevance is due to the insufficient knowledge of the formation of higher mathematics teaching in Russia. The purpose of the work is to characterize the body of literature of the XVIII - first quarter of the XIX century, dealing with the issues of differential calculus, with an emphasis on original Russian textbooks. The method is the study of mathematical books from this period. Both translated and original educational literature is presented. Using the example of "Reduction of Higher Mathematics" by P.I. Gilarovsky and "New Algebra" by A.D. Barsov compared the methods of presentation addressed to different categories of students, the depth and style of the text, the subjects of the examples and the placement of accents.

Keywords: mathematical education, differential calculus, Russian educational literature, P.I. Gilarovsky, A.D. Barsov.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Аннотация

В статье рассматривается одна из задач математического анализа исследование функции на непрерывность и анализ точек разрыва. Рассмотрение данного вопроса представляется целесообразным, так как исследование непрерывности функций является фундаментальной задачей в математическом анализе, имеющей широкое применение в различных областях науки и техники, включая численные методы, оптимизацию, машинное обучение и анализ данных. Целью статьи является разбор решения одного задания на исследование функции на непрерывность и точки разрыва. Приведено классическое решение задания и решение с использование искусственного интеллекта, описаны недостатки использования искусственного интеллекта. Статья может быть полезна преподавателям технических университетов и студентам.

Ключевые слова

искусственный интеллект, непрерывность, точки разрыва, односторонние пределы, скачок, устранимый разрыв

АВТОР

Скосарева Екатерина Петровна,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технических университет им. Н.Э. Баумана»;
АНО ВО «Московский университет «Синергия», г. Москва
ekaterina-skosareva@rambler.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-153-158

Введение

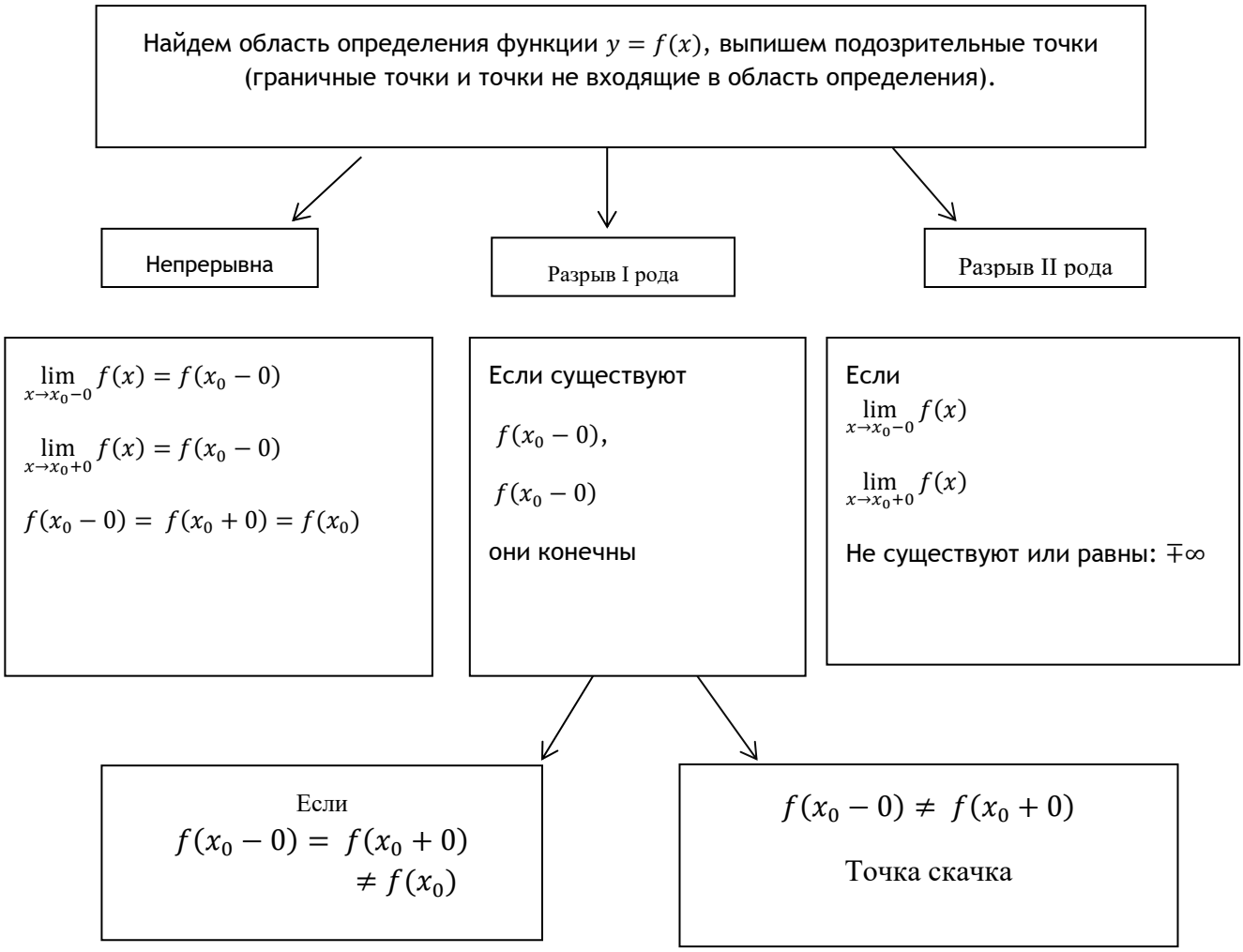
Одной из задач математического анализа является исследование и построение графика «кусочной» функции, нахождение области определения, точек разрыва функции (если они имеются). «Кусочные» функции состоят из нескольких функций, каждая описана формулой на заданном промежутке. Необходимо провести исследование каждого кусочка и понять, как функция ведет себя на разных участках области определения. Исследование функции проводим: в граничных точках, в точках, не входящих в область определения и точках, где происходит переход от одной формулы к другой. В этих точках функция может быть непрерывной, может иметь, устранимый разрыв (когда предел существует и не равен значению функции в точке или отсутствует). А также функция в этих точках может иметь скачок (когда односторонние пределы существую, но не равны). В учебнике Демидовича Б.П. представлен блок теоретического материала, необходимого для решения практических задач [1, с.288].

Исследование каждого «куска» функции, анализ подозрительных точек позволяет получить представление о том, как функция ведет себя на всей области определения. График визуализирует это поведение, делая его наглядным. Данная задача является прикладной и используется в таких дисциплинах как физика,

экономика, статистика, инженерия. В физике: описание движения, где скорость или ускорение меняются скачкообразно. В экономике: моделирование налоговых ставок, тарифов, скидок, которые меняются при достижении определенных порогов. В инженерии: описание систем, которые работают по разным правилам в зависимости от внешних условий. В статистике: кумулятивные функции распределения часто являются кусочно-непрерывными.

Таким образом, исследование и построение графиков кусочно-заданных функций является неотъемлемой частью изучения математического анализа, позволяя глубоко понять поведение функций и их применение.

На практических занятиях по математическому анализу МГТУ им. Баумана при исследовании функции на непрерывность используется блок-схема:



Рассмотрим следующую задачу, представленную в задачнике Ефимова А. В., Демидовича Б. П. [2, с.156]:

Найти точки разрыва функции

$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x < 0 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}, x \geq 0 \end{cases}$ и классифицировать их. Дать графическую иллюстрацию в окрестности каждой точки разрыва

Решение:

1) Найдем точки разрыва, где функция не определена или меняется правило, т.е. для нашей задачи: в точке перехода между функциями x=0, в точках, где знаменатель обращается в нуль.

$x^2 - 1 \neq 0, x \neq \pm 1$. Точки, в которых проведем исследование -1; 0; 1.

2) Проверим каждую из этих точек.

При x=-1. Найдем односторонние пределы слева и справа.

$$\lim_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x}} = f(-1) = \frac{1}{e}.$$

Значит, функция является непрерывной в точке x=-1.

При x=0. Найдем односторонние пределы слева и справа.

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1-0}{0-1} = -1.$$

Односторонние пределы не равны, а значит в точке x=0, разрыв первого рода (скачок).

Скачок=1.

При x=1.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1+} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x^2-1)(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1+} \frac{-1}{(x+1)(1+\sqrt{x})} = -\,0{,}25$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] - 0{,}25.$$

$$\operatorname{Lim}_{x\to 1+} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} \neq f(1)$$

Точка x=1- точка устранимого разрыва.

Устраним разрыв: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x < 0; \\ \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}, x \geq 0; \\ -0{,}25, x = 1. \end{cases}$

Графическая иллюстрация данной кусочной функции см. рис.1:

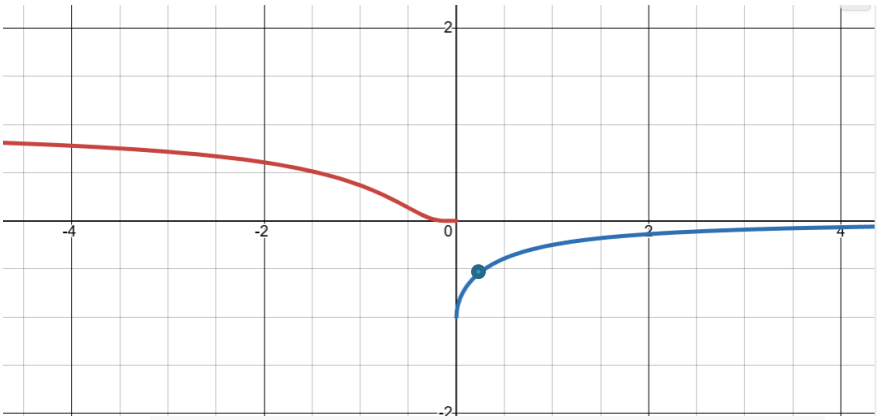


Рис. 1. Графическая иллюстрация к решению задачи

Искусственный интеллект стремительно проникает во все сферы науки и техники, и математика не является исключением. Мощные алгоритмы машинного обучения демонстрируют впечатляющие результаты в решении сложных задач, однако применительно к исследованию непрерывности функций искусственный интеллект сталкивается с рядом существенных ограничений.

Рассмотрим решение данной задачи искусственным интеллектом MathGPT- нейросеть, способная решать математические и физические задачи [3]. См. рис.2:

Точка $x = 0$:

- Найдём пределы слева и справа.

Предел слева ($x \to 0^-$):

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

Предел справа ($x \to 0^+$):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{1-0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Пределы слева и справа не равны, значит в точке $x = 0$ — разрыв первого рода (скачок).

Рис.2. Решение в MathGPT

В точке x=0 исследование проведено правильно, односторонние пределы найдены верны. Не найден сам скачок.

Рассмотрим исследование функции на непрерывность в точке x=1. Очень сложно вычисляется предел функции слева и справа, студенту не разобраться без теоретического материал, данный предел можно вычислить методом умножения и деления на выражение, сопряженное к данной функции. В точке x=1 получаем устранимый разрыв, его нужно устранить, искусственный интеллект не делает этого. См. рис.3.

Точка $x = 1$:

Функция определена для $x \geq 0$, проверим пределы и значение функции в $x = 1$.

Знаменатель в $x = 1$ равен нулю, значит функция не определена в $x = 1$.

Проверим пределы при $x \to 1^-$ и $x \to 1^+$:

- При $x \to 1^-$:

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$$

Подставим $x = 1 - h$, где $h \to 0^+$:

$$1-\sqrt{1-h} \approx 1-(1-\frac{h}{2}) = \frac{h}{2}$$
$$(1-h)^2 - 1 = (1-2h+h^2) - 1 = -2h + h^2 \approx -2h$$

Тогда

$$f(1-h) \approx \frac{\frac{h}{2}}{-2h} = \frac{1/2}{-2} = -\frac{1}{4}$$

- При $x \to 1^+$:

Подставим $x = 1 + h$, $h \to 0^+$:

$$1-\sqrt{1+h} \approx 1-(1+\frac{h}{2}) = -\frac{h}{2}$$
$$(1+h)^2 - 1 = (1+2h+h^2) - 1 = 2h + h^2 \approx 2h$$

Тогда

$$f(1+h) \approx \frac{-\frac{h}{2}}{2h} = -\frac{1}{4}$$

Пределы слева и справа равны $-\frac{1}{4}$, но функция в точке $x = 1$ не определена (деление на ноль).

Можно определить функцию в $x = 1$ как $-\frac{1}{4}$, тогда разрыв устранимый.

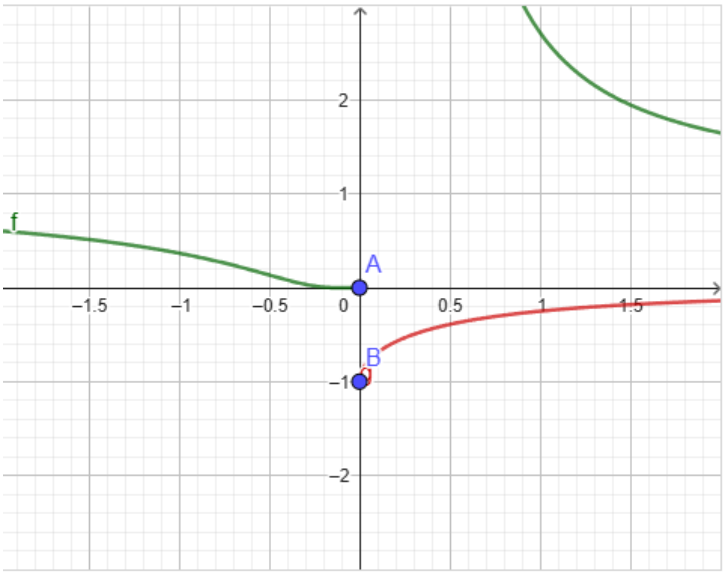


Рис.3. Решение в MathGPT

График кусочной функции построен неправильно, нет выборки функции для каждого промежутка, точка x=1– устранимый разрыв, функции в данной точке не существует, на графике, построенным искусственным интеллектом функция в этой точке непрерывна.

В работе Мошениной Е.Д., Захаровой Т.А. использование искусственного интеллекта на занятиях непосредственно развивает функциональную грамотность обучающихся, которая заключается в умении применять полученные знания в реальной жизни [4].

Искусственный интеллект, основываясь на большом объеме обучающихся данных при решении задач исследования функции на непрерывность и точки разрыва, не предоставляют формального математического доказательства, а для математиков важен не только ответ и логическая последовательность рассуждений. Искусственный интеллект не всегда способен построить строгий математический вывод [5].

Заключение

В настоящее время искусственный интеллект не может полностью заменить традиционные методы исследования непрерывности функций, требующие формальной строгости, логической дедукции и глубокого понимания математических определений. Основные ограничения связаны с отсутствием доказательной базы, сложностью обработки крайних случаев и неявных определений, а также проблемами обобщения. Искусственный интеллект может стать ценным инструментом для поддержки математических исследований, ускоряя рутинные задачи и выявляя потенциально интересные области для дальнейшего формального анализа.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. Пособие для вузов/ Б.П. Демидович. - М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ»,2005. - 558.[2] с.: ил. ISBN 5-17-010062-0.
2. Сборник задач по математике для втузов: учеб. пособие для втузов: в 4 ч. / общ. ред. Ефимов А. В., Демидович Б. П. - 3-е изд., испр., стер. - М.: Альянс, 2016.Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа / Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. [и др.]. - 2016. - 478 с.: ил. - ISBN 978-5-91872-051-6.

3. MathGPT [Электронный источник] // Нейросеть решения математических и физический задач. URL: https://math-gpt.org/ (дата обращения 18.11.2025).
4. Мошенина Е.Д., Захарова Т.А. Применение искусственного интеллекта для составления и решения задач, направленных на формирование математической грамотности // Наука в мегаполис. Выпуск: №7(63) КОД науки: исследования молодых ученых. Раздел: Инновационные образовательные технологии. - 2024. URL: https://mgpu-media.ru/issues/issue-63/innovatsionnye-obrazovatelnye-tekhnologii/
5. 15 лучших инструментов искусственного интеллекта для решения математических проблем [Электронный источник] // Сайт об искусственном интеллекте - URL: https://habr.com/ru/sandbox/218383/ (дата обращения 18.11.2025).

***Ekaterina P. Skosareva*,**
Senior Lecturer at the Bauman Moscow State Technical University; Senior Lecturer at the Moscow University of Synergy, Moscow
ekaterina-skosareva@rambler.ru

Using artificial intelligence to solve mathematical analysis problems

Abstract. The article discusses one of the problems of mathematical analysis: the study of a function for continuity and the analysis of discontinuity points. This issue is relevant because the study of function continuity is a fundamental problem in mathematical analysis that has wide applications in various fields of science and technology, including numerical methods, optimization, machine learning, and data analysis. The purpose of the article is to analyze the solution of a problem involving the study of a function for continuity and discontinuity points. The article provides a classical solution to the problem and a solution using artificial intelligence, and discusses the disadvantages of using artificial intelligence. The article may be useful for teachers of technical universities and students.

Keywords: artificial intelligence, continuity, points of discontinuity, one-sided limits, jump, removable discontinuity.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВ АНИЗОТРОПИЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ

Аннотация

В статье представлены отдельные особенности методики преподавания анизотройпиной теории управления для студентов старших курсов и аспирантов физико-математических специальностей. Целью данной работы являлось продемонстрировать методику реализации анизотропийного подхода для исследования дискретных систем и формирования эффективного взаимодействия научного руководителя с обучающимися студентами и аспирантами в рамках их научно-исследовательской деятельности. На примере двумерной системы рассмотрен план проведения научной работы, обозначены основные аспекты составления математической модели и проведения вычислительного эксперимента.

Ключевые слова

математическое моделирование, теория управления, анизотропийный анализ, двумерные системы, MATLAB

АВТОРЫ

Титов Александр Дмитриевич,
аспирант ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
titov.alex31@yandex.ru

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана»,
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-159-166

Введение

Взаимодействие между преподавателями и студентами технических и физико-математических специальностей невозможно без осуществления самостоятельной работы, которая может заключаться в анализе методических пособий, научных работ, и решении поставленных задач. В данной статье отражены некоторые особенности в рамках анизотропийной теории управления, обозначены основные понятия и подход к осуществлению анализа. Данное направление было разработано И.Г. Владимировым около тридцати лет назад как следствие активного развития теории автоматического управления [1, 2]. Проведен обзор основных понятий, представлены описание результатов, полученных при рассмотрении поставленных задач.

Методология и результаты исследования

Математическое моделирование является универсальным инструментом для исследования сложных технических систем. Оно предполагает изучение объекта посредством составления математических моделей, отражающих в виде математических формул те или иные закономерности, наблюдаемые в

действительности, и их дальнейшего изучения. Решение любой задачи управления начинается с составления математической модели объекта управления.

Крайне желательным является появление у студента (аспиранта) широкой степени понимания вопроса, т.е. каждой его отдельной составляющей должно быть посвящено достаточно количество времени, а работа, выполненная на каждом из этапов, сопровождаться пояснениями процесса решения.

Далее будут упомянуты базовые понятия анизотропийной теории управления. Речь пойдет о анизотропии случайного вектора, средней анизотропии и анизотропийной норме.

Анизотропией случайного вектора W со значениями из пространства R^l с функцией плотности распределения вероятностей f определяется как

$$A(W) = \min_{\lambda>0} D(f||p_\lambda),$$

где

$$D(f||p_\lambda) = E[\ln\frac{f}{p_\lambda}]$$

представляет собой относительную энтропию по отношению к эталонной функции плотности распределения вероятностей (E означает математическое ожидание)

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{||x||^2}{2\lambda}\right),$$

которая выбрана в виде гауссовской с нулевым средним и скалярной ковариацонной матрицей λI_l, где I_l — единичная матрица порядка l.

Рассмотрим расширенный вектор из элементов последовательности случайных векторов $\{w_k\}$:

$$W_{s:t} = (w_s^{\mathrm{T}}, w_{s+1}^{\mathrm{T}}, \dots, w_t^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, s \le t.$$

Для расширенного вектора $W_{s:t}$ вводится предел

$$\bar{A}(W) = \lim_{N\to\infty} \frac{A(W_{0:N-1})}{N},$$

который называется средней анизотропией последовательности $\{w_k\}$.

В анизотропийной теории вводится собственный показатель качества — анизотропийная норма. Если входной сигнал для системы F имеет ограниченную числом a среднюю анизотропию, то анизотропийная норма может быть определена в виде

$$|||F|||_a = \sup_{\bar{A}(W)\le a} Q(Z,W),$$

где $Q(Z,W)$ — среднеквадратичный коэффициент усиления (Z и W являются выходом и входом линейной системы соответственно), который имеет вид [3, 4]:

$$Q(Z,W) = \sqrt{\frac{E(|Z|^2)}{E(|W|^2)}}.$$

Приведем примеры задач по анизотропийному анализу двумерной дискретной системы, описывающей повторяющийся процесс.

Рассмотрим двумерную динамическую систему следующего вида:

$$\begin{cases} x_{k+1}(p+1) = Ax_k(p+1) + Bw_{k+1}(p) + B_0 y_k(p), \\ y_{k+1}(p) = Cx_k(p+1) + Dw_{k+1}(p) + D_0 y_k(p), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_k(p) \in R^n$ — вектор состояния, $y_k(p) \in R^m$ — вектор выходных значений, а $w_k(p) \in R^l$ — вектор входных возмущений.

Заданы следующие граничные условия: $x_{k+1}(0) = d_{k+1} \in R^n$ является начальным вектором состояния, $y_0(p) = f(p)$ — начальный выходных значений (известная функция от аргумента p); параметр длины прохода α $(0 \le p \le \alpha - 1)$, номер прохода $k \ge 0$. Внешнее возмущение $W = \{w_k\}$ представляет собой последовательность

случайных векторов, имеющей уровень средней анизотропии, не превосходящий фиксированное неотрицательное число a.

Требуется определить границу анизотропийной нормы в зависимости от параметра a (получить верхнюю оценку анизотропийной нормы), построить график зависимости нормы от параметра.

В случае нулевых граничных условий (т.е. при $d_{k+1} = 0$) данная система имеет следующую форму уравнений динамики (получена с помощью процесса векторизации)

$$\begin{cases} y_k = \left(\hat{C}\hat{A}_y + \widehat{D}_y\right) y_{k-1} + \left(\hat{C}\hat{B} + \widehat{D}\right) w_k \\ z_{k-1} = I\, y_{k-1} + O\, w_k \end{cases},$$

где y_k можно интерпретировать как состояние, а z_{k-1} — выход системы (I — единичная матрица, O — нулевая матрица) [5].

При этом матрицы $\widehat{D}_y$, $\widehat{D}$ являются блочно-диагональными: $\widehat{D}_y = diag\{D_0, D_0, \dots, D_0\}$, $\widehat{D} = diag\{D, D, \dots, D\}$. Матрица $\tilde{C}$ выглядит следующим образом:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathrm{C} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{C} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\hat{A}_y$, $\hat{B}$ — нижнетреугольные, имеют вид:

$$\hat{A}_y = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ AB_0 & B_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A^2B_0 & AB_0 & B_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{p-1}B_0 & A^{p-2}B_0 & A^{p-3}B_0 & \cdots & B_0 & 0 \\ A^pB_0 & A^{p-1}B_0 & A^{p-2}B_0 & \cdots & AB_0 & B_0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A^2B & AB & B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{p-1}B & A^{p-2}B & A^{p-3}B & \cdots & B & 0 \\ A^pB & A^{p-1}B & A^{p-2}B & \cdots & AB & B \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема устанавливает достаточное условие строгой ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением [5, 6].

Теорема 1. Рассмотрим систему (1), описывающую повторяющийся процесс. Пусть заданы граничные условия $x_{k+1}(0) = d_{k+1} = 0 \in R^n$ и условие относительно матрицы собственной динамики $\rho(A) < 1$. Анизотропийная норма такой системы строго ограничена заданным значением $\gamma > 0$, то есть $\left|\left|\,||F||\,\right|\right|_a < \gamma$, если следующая система неравенств

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \left(\hat{C}\hat{B} + \widehat{D}\right)^{\mathrm{T}}\Phi & 0 \\ \Phi\left(\hat{C}\hat{B} + \widehat{D}\right)^{\mathrm{T}} & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \left(\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y\right)^{\mathrm{T}}\Phi & I_m \\ 0 & -\eta I_m & \left(\hat{C}\hat{B} + \hat{D}\right)^{\mathrm{T}}\Phi & 0 \\ \Phi\left(\hat{C}\hat{A}_y + \hat{D}_y\right) & \Phi\left(\hat{C}\hat{B} + \hat{D}\right) & -\Phi & 0 \\ I_m & 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0;$$

$$\eta - (e^{2a}\det(\Psi))^{\frac{1}{m}} < \gamma^2;$$

$$\eta - \gamma^2 > 0$$

имеет решение относительно скалярных переменных η , γ^2 и симметричных положительно определенных положительно определенных матриц Φ , Ψ.

Было проведено моделирование в пакете прикладных программ MATLAB с применением интерфейса YALMIP, который имеет дополнительные функции, позволяет успешно применять методы полуопределенного программирования. Для моделирования была выбрана система вида (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 1.9118 & -0.9559 & -1.4706 & 0.7353 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}};\quad B_0 = [0.7794\ \ \ 0\ \ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}};$$

$$C = [1.9118 \quad -0.9559 \quad -1.4706 \quad 0.7353];$$

$$D = 0;\quad D_0 = 0.7794.$$

с граничными условиями

$$d_{k+1} = 0;\ f(p) = -1.$$

Результаты решения данной задачи представлены в таблице 1 и на рисунке 1. Было проведено моделирование при значении длины прохода $\alpha = 20$.

Таблица 1

Значения анизотропийной нормы при различных значениях параметра при $\alpha = 20$.

Значение параметра a	Значение нормы
0	29,914
5	357,85
10	425,283
15	500,982
20	528,315
25	544,25
30	555,115
35	559,74
40	563,03
45	565,062
50	566,251
55	566,988
60	567,381
65	567,744
70	567,75
75	567,781
80	567,851
85	567,863
90	567,867
95	567,891
100	567,892

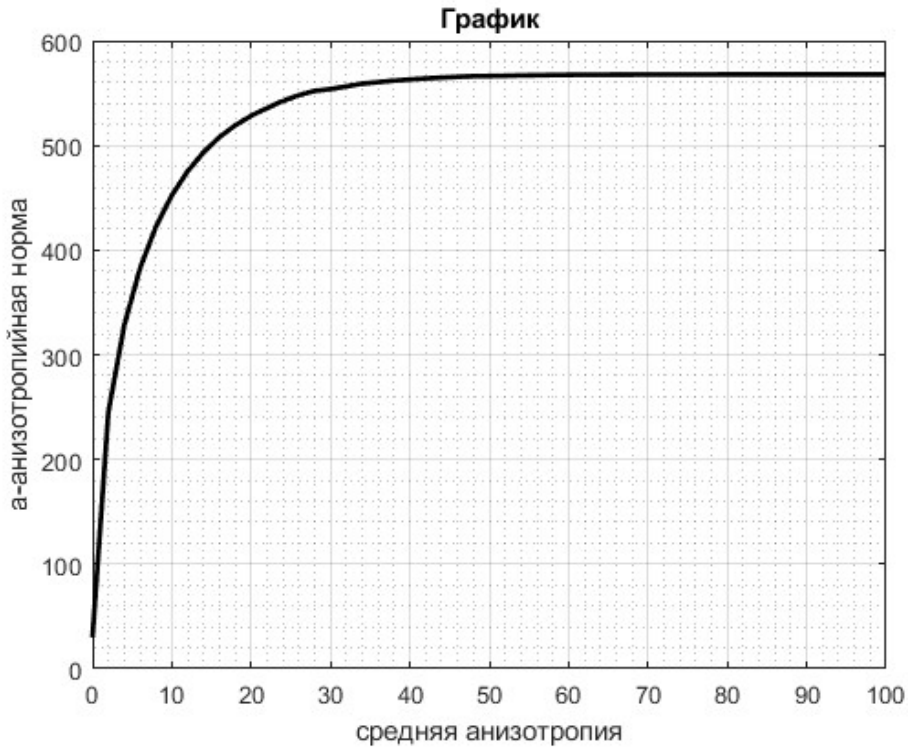


Рис. 1. График анизотропийной нормы в зависимости от значения средней анизотропии при длине прохода $\alpha = 20$

Среди других задач по анизотропийному анализу можно привести в пример способ вычисления средней анизотропии системы.

Рассмотрим дискретную двумерную систему вида:

$$\begin{cases} x_{k+1}(p+1) = A_{11}(p)x_k(p) + A_{12}(p)y_k(p) + B_1(p)v_k(p), \\ y_{k+1}(p) = A_{21}(p)x_k(p) + A_{22}y_k(p) + B_2v_k(p+1), \\ w_{k+1}(p) = C_1(p)x_k(p) + C_2(p)y_k(p) + D_0(p)v_k(p). \end{cases} \quad (2)$$

На проходе k заданы: $x_k(p) \in R^n$ — вектор состояния, $y_k(p) \in R^m$ — вектор выходных значений размерности, а $w_k(p) \in R^l$ — вектор входных возмущений, а $v_k(p) \in R^l$ — гауссовский белый шум. Параметр длины прохода p принимает следующие значения: $0 \le p \le \alpha - 1$.

Приведем аналог формулы для вычисления средней анизотропии из [7]:

$$\bar{A}(W) = A\big(w_\infty(0{:}M)\big) + I(w_\infty(0{:}M), \{w_k(0{:}M)\}_{k<\infty}).$$

Первое слагаемое равно:

$$A\big(w_\infty(0{:}M)\big) = \frac{m(M+1)}{2}(\ln \Phi_\infty(q) - \Psi_\infty(q));$$

где

$$\Phi_\infty(q) = \frac{1}{m(M+1)}\sum_{p=0}^{M} Tr\left(C_\infty(p)P_\infty(p)C_\infty^{\mathrm{T}}(p) + D_\infty(p)D_\infty^{\mathrm{T}}(p)\right);$$

$$\Psi_\infty(q) = \frac{1}{m(M+1)}\sum_{p=0}^{M} \ln\det D_\infty(p)D_\infty^{\mathrm{T}}(p);$$

$$P_\infty(p+1) = A_\infty(p)P_\infty(p)A_\infty^{\mathrm{T}}(p) + B_\infty(p)D_\infty(p)D_\infty^{\mathrm{T}}(p)B_\infty^{\mathrm{T}}(p).$$

Важно учитывать, что в последнем равенстве полагается $P_\infty(0) = 0$.

При этом

$$A_\infty(p) = A_{11}(p) + A_{12}(p)\big(I - A_{22}(p)\big)^{-1} A_{21}(p);$$
$$B_\infty(p) = B_1(p) + A_{12}(p)\big(I - A_{22}(p)\big)^{-1} B_2(p);$$
$$C_\infty(p) = C_1(p) + C_2(p)\big(I - A_{22}(p)\big)^{-1} A_{21}(p);$$
$$D_\infty(p) = D_0(p) + C_2(p)\big(I - A_{22}(p)\big)^{-1} B_2(p).$$

Второе слагаемое равно:

$$I(w_\infty(0{:}M), \{w_k(0{:}M)\}_{k<\infty}) = \\ = \frac{1}{2}\ln\det(E[w_\infty(0{:}M)w_\infty^{\mathrm{T}}(0{:}M)]E^{-1}[\widetilde{w}_\infty(0{:}M)\widetilde{w}_\infty^{\mathrm{T}}(0{:}M)]).$$

При этом стоит учитывать, что

$$E[w_\infty(0{:}M)w_\infty^{\mathrm{T}}(0{:}M)]E^{-1}[\widetilde{w}_\infty(0{:}M)\widetilde{w}_\infty^{\mathrm{T}}(0{:}M)] = \\ = (C(:)P(:)C^{\mathrm{T}}(:) + D(:)D^{\mathrm{T}}(:))((C(:)R(:)C^{\mathrm{T}}(:) + D(:)D^{\mathrm{T}}(:))^{-1},$$

где

$$P(:) = A(:)P(:)A^{\mathrm{T}}(:) + B(:)B^{\mathrm{T}}(:);$$
$$R(:) = A(:)R(:)A^{\mathrm{T}}(:) + B(:)B^{\mathrm{T}}(:) - \Lambda(:)\theta(:)\Lambda^{\mathrm{T}}(:);$$
$$\Lambda(:) = \big(A(:)R(:)C^{\mathrm{T}}(:) + B(:)D^{\mathrm{T}}(:)\big)\theta^{-1}(:);$$
$$\theta(:) = C(:)R(:)C^{\mathrm{T}}(:) + D(:)D^{\mathrm{T}}(:).$$

Для проведения вычислений по указанным соотношениям требуется проведения процесса векторизации и решение матричных уравнений Ляпунова и Риккати с помощью математических пакетов [8].

Для моделирования в среде MATLAB была выбрана система вида (2) со следующими значениями матричных коэффициентов:

$$A_{11}(p) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.02 \\ -0.6 & 0.03 \end{bmatrix};\ A_{12}(p) = \begin{bmatrix} 0.1423 & 0 \\ -0.0342 & 0 \end{bmatrix};\ B_1(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$
$$A_{21}(p) = \begin{bmatrix} 0.3895 & 0.03895 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ A_{22}(p) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ B_2(p) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix};$$
$$C_1(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ C_2(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ D_0(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта система считается устойчивой согласно критерию устойчивости двумерных систем из [9].

В таблице 2 приведены значения средней анизотропии в зависимости от длины прохода. Выбрано минимальное значение $\alpha = 2$, а максимальное значение равно $\alpha = 100$.

Таблица 2

Значения средней анизотропии и ее составляющих при различных значениях параметра длины прохода

Значение параметра α	Средняя анизотропия $\bar{A}(W)$
2	1,1003
5	2,5959
10	5,0893
15	7,5825
20	10,0758
25	12,569
30	15,0623
40	20,0488
50	25,0352
60	30,0217
70	35,0082
80	39,9946
90	44,9811
100	49,9676

График зависимости значения средней анизотропии от параметра длины прохода для заданной системы представлен на рисунке 2.

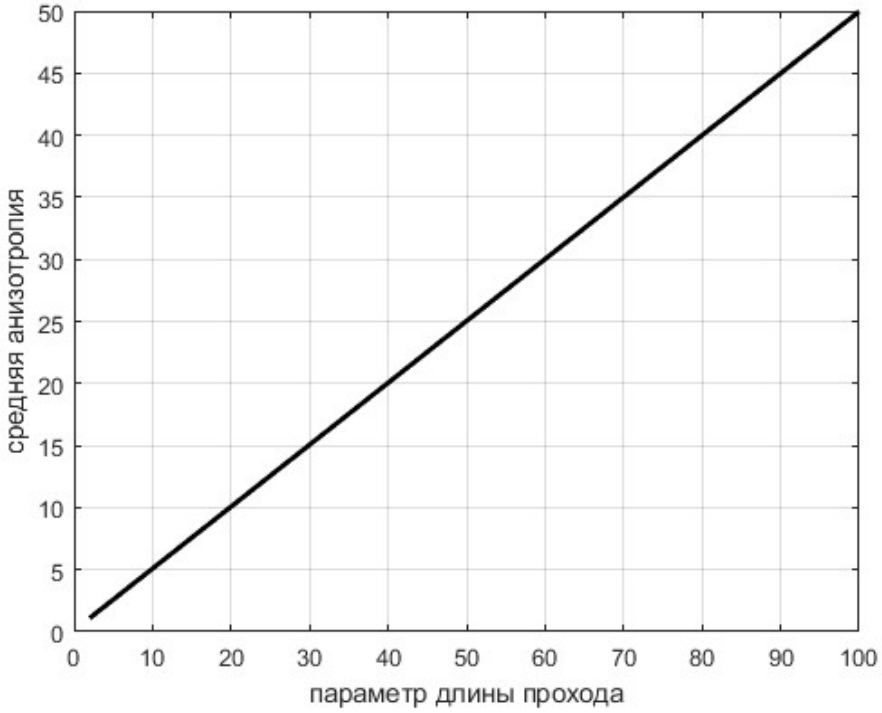


Рис. 2. График зависимости средней анизотропии от значения параметра длины прохода

Данная работа может быть использована как наглядное пособие для проведения лабораторных работ студентами старших курсов при освоении специальных разделов математической теории управления или аспирантами при осуществлении научно-исследовательской работы (как в рамках трудовой деятельности в НИИ, так и при самостоятельной работе).

Заключение

В данной работе были рассмотрены некоторые аспекты анизотропийной теории управления. Было проведено математическое моделирование решения двух задач: вычисление верхней границы анизотропийной нормы и расчет средней анизотропии для двумерных дискретных систем, описывающих повторяющийся процесс. По ходу работы были описаны отдельные этапы получения сопутствующих результатов, в том числе с точки зрения методологии преподавания. Также продемонстрированы итоги проведенных вычислительных экспериментов. Работа выполнялась с целью привития студентам и аспирантам физико-математических специальностей основных навыков, необходимых для проведения самостоятельного научного исследования.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-timeinvariant Systems // Proceedings of 13th IFAC World Congr. – San Francisco, 1996. – P. 179–184.
2. Юрченков А.В. Построение динамического регулятора для стационарных систем с мультипликативными шумами: анизотропийный подход // Проблемы управления. 2025. № 1. С. 30-39.
3. Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V. Указ. Соч.

4. Юрченков А.В. Построение динамического регулятора для стационарных систем с мультипликативными шумами: анизотропийный подход
5. Титов А.Д., Юрченков А.В. Анизотропийная норма линейной двумерной системы с нулевыми граничными условиями // Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). М.: ИПУ РАН, 2024. С. 100-104.
6. Чайковский М.М. Синтез анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования. Управление большими системами. 2013, выпуск 42, С. 100-152.
7. Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Начинкина Г.Н. Стохастическая теория анизотропийного робастного управления. Москва, изд-во ИПУ РАН, 2012, 127 с.
8. Титов А.Д. Вычисление средней анизотропии для двумерного формирующего фильтра // Труды 21-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС-2025, Тамбов). Тамбов: Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2025. Том 1. С. 87-95.
9. Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes // Lecture Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer, 2007. Vol. 349, 468 P.

***Alexander D. Titov*,**
Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
titov.alex31@yandex.ru
***Svetlana B. Zabelina*,**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
zabelina_sb@mail.ru

Methodological aspects of the presentation of the fundamentals of the anisotropy-based theory of control of two-dimensional systems

Abstract. The article presents some features of teaching anisotropy-based theory for undergraduates and postgraduates of physics and mathematics specialties. The purpose of this work was to demonstrate the methodology of the anisotropic approach for the study of discrete systems and the formation of effective interaction between the scientific supervisor and the student in the framework of research activities. Using the example of a two-dimensional system, the plan of scientific work is considered, the main aspects of drawing up a mathematical model and conducting a computational experiment are outlined.

Keywords: mathematical modeling, control theory, anisotropic analysis, two-dimensional systems, MATLAB.

МЕТОДОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ПРИНЦИПАМ РАБОТЫ ПОЛНОСВЯЗНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена трудностями восприятия студентами младших курсов фундаментальных принципов функционирования нейронных сетей, связанных с недостаточным уровнем математической и программисткой подготовки. Цель статьи заключается в предложении и обосновании методики применения среды электронных таблиц (Microsoft Excel) для создания наглядной и интерактивной модели, демонстрирующей ключевые концепции машинного обучения. Предложен практический подход, позволяющий визуализировать процесс обучения нейронной сети. Использование данного подхода способствует формированию интуитивного понимания предметной области и может быть рекомендовано для использования во вводных курсах.

Ключевые слова

нейронные сети, машинное обучение, визуализация, образование, электронные таблицы, педагогическая методика

АВТОРЫ

Федянин Денис Николаевич,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
dfedyanin@inbox.ru

Намлеев Кирилл Вадимович,
студент ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
namleevmiddle@gmail.com

Соколова Елизавета Петровна,
студент ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
12345sep101@gmail.com

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-167-173

Введение

Нейронные сети занимают центральное место в машинном обучении и активно применяются в различных областях. Вместе с тем, как отмечается в современных исследованиях А. Раччи и М. Сейяма [1], рост мощности и доступности ML-фреймворков зачастую не упрощает, а затрудняет понимание фундаментальных принципов их работы. Абстрактность математической модели, специфика программного обеспечения, скрывающая внутренние механизмы от пользователя, и восприятие нейронной сети как «черного ящика» существенно осложняют обучение студентов младших курсов, не обладающих достаточной математической и программистской подготовки. В связи с этим представляет интерес разработка

инструментов, позволяющих проиллюстрировать механизмы функционирования и обучения нейронной сети в наглядной форме.

В настоящей работе предлагается методика использования среды электронных таблиц (Microsoft Excel) в качестве доступного и эффективного инструмента для визуализации принципов работы нейронных сетей. Электронные таблицы, являясь широко распространённым и знакомым инструментом, позволяют преодолеть первоначальный барьер вхождения, связанный с программированием, и сконцентрироваться на сути процессов: преобразовании данных, роли весов и смещений, функциях активации, а также на механизме обучения посредством метода обратного распространения ошибки. Рассматриваемый подход согласуется с тенденцией на создание интерактивных и интерпретируемых образовательных ресурсов, отмеченным в работах Дж. Вана с соавторами [2] и Р.Р. Ламсала и С. Ламсала [3].

Предлагаемая в работе методика визуализации принципов работы нейронных сетей может быть применена в широком спектре образовательных подходов и ресурсов. Для формирования у студентов целостного представления о предметной области целесообразно рассмотреть различные способы изучения машинного обучения – от интуитивных до строго математических.

Разумно начинать изучение нейронных сетей с фундаментальных учебников, таких как работа С. Хайкина [4], который остается ценным источником систематизированных знаний. Однако с ростом популярности глубокого обучения возникла необходимость в адаптации сложных концепций для аудитории с разным уровнем подготовки.

Для глубокого теоретического понимания необходимы ресурсы, сочетающие математическую строгость с практической значимостью. Так, введение в основные и передовые архитектуры можно просмотреть в работах И. Гудфеллоу, Й. Бенджио и А. Курвилля [5] и К.М. Бишопа [6]. Курс К.В. Воронцова [7] представляет собой классический российский курс, известный своей строгостью и глубиной изложения. Материалы лекций доступны в онлайн-формате и широко используются в университетах. Курс от Яндекса (ШАД) [8] является примером образовательной программы с углублённым математическим уклоном.

Широкое распространение получили платформы онлайн-образования, такие как курс на платформе Stepik [9].

В то же время современная образовательная парадигма сместилась в сторону: интерактивности и визуализации. Активно используются специализированные среды, позволяющие студентам немедленно наблюдать результат изменения параметров; абстрактные математические модели представляются в виде графов и других наглядных форм.

Наиболее близкими к идеологии, предложенной в данной статье, являются интерактивные платформы и средства визуализации, предназначенные для интуитивного понимания: TensorFlow Playground [10] – эталонная интерактивная веб-страница для экспериментов с архитектурой нейронных сетей.

Э. Траск [11] в своём учебнике реализует принцип построения алгоритмов «с нуля» на Python без использования высокоуровневых библиотек.

Для отслеживания быстро развивающейся области нейронных сетей необходимы ресурсы, отражающие текущие тенденции, такие как arXiv.org и OpenReview.net.

Таким образом множество образовательных ресурсов демонстрирует разнообразные подходы к изучению нейронных сетей. Методика, предложенная в данной статье, выполняет роль связующего звена между отсутствием базовых знаний и способностью воспринимать сложные концепции. От простой и наглядной модели в Excel студент может последовательно перейти к интерактивным платформам, затем – к курсам, требующим навыков программирования и, наконец, к углубленному изучению теоретических основ.

Методология и результаты исследования

В качестве инструмента визуализации в данной работе предлагается использование среды электронных таблиц. Прежде чем перейти к описанию методики, кратко изложим ключевые концепции, лежащие в основе модели. Нейронная сеть представляет собой математическую модель, состоящую из взаимосвязанных узлов – нейронов, которые обрабатывают и передают информацию, выявляя сложные зависимости между входными данными и выходными результатами. Такая структура позволяет нейронной сети «обучаться», анализировать и обобщать информацию. В статье рассматриваются фундаментальные принципы функционирования на примере простейших нейронных сетей – сетей прямого распространения, в которых данные передаются строго в одном направлении: от входных нейронов к выходным.

Основными компонентами нейронной сети [12] являются искусственный нейрон – элемент, получающий и обрабатывающий информацию, и синапс – связь между двумя нейронами, характеризующаяся весовым коэффициентом. Нейроны организованы в группы, называемые слоями. Выделяют входной слой (получает информацию), выходной слой (возвращает результат) и промежуточные (скрытые) слои, которые могут отсутствовать или быть представлены в нескольких экземплярах.

Нейронные сети применяются для решения сложных задач, требующих анализа значительных объемов данных и выявления скрытых закономерностей. К основным типам таких задач относятся:

– Классификация – отнесение входного объекта к одному из заранее заданных классов на основе анализа его признаков. Например, фильтрация спама в электронной почте, где после обработки текста письма сеть определяет его принадлежность к категории «спам» или «не спам».

– Регрессионный анализ – в отличие от классификации, целью является прогнозирование непрерывной численной величины. Примером может служить оценка кредитных рисков: на основе данных о заемщике (возраст, уровень дохода и др.) нейронная сеть, обученная на исторических данных, прогнозирует вероятность просрочки платежа.

– Распознавание образов – автоматическое обнаружение и интерпретация объектов в данных. Это включает такие приложения, как идентификация лиц на изображениях, детекция объектов на фотографиях и преобразование звукового сигнала в текст.

Рассмотрим на примере преобразование информации при переходе с одного слоя на другой. Пусть, нейронная сеть состоит из двух слоёв: первый слой содержит три нейрона, второй – два, причём каждый нейрон из первого слоя связан с каждым нейроном из второго. Такая архитектура называется полносвязной. Пронумеруем нейроны в каждом слое, начиная с единицы, и обозначим за w_{ji} соответствующий вес при переходе от i-го нейрона в первом слое к j-му нейрону из второго слоя. Пусть входные данные представляют собой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. При передаче на следующий слой на получаем вектор $y = (w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3, w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3)$. Таким образом, над входными данными осуществляется линейное преобразование, которое можно записать с помощью операции матричного умножения: $y = Wx$, где, x - данные i-го слоя, y – данные, передаваемые на $i + 1$ слой, а W - матрица весов. В нашем случае

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{pmatrix}$$

Если бы некоторая связь отсутствовала, соответствующий элемент матрицы W был бы равен нулю. Существует также специальный вид нейронов – нейроны смещения. Такой нейрон может быть добавлен к любому слою, кроме выходного, и не связан с нейронами предыдущего слоя. Нейрон смещения осуществляет сдвиг данных. Его применение записывается следующим образом: $y = Wx + b$, где b – вектор смещений. Однако тот факт, что нейронная сеть осуществляет только линейные преобразования сильно ограничивает ее возможности. Для введения нелинейности в систему, используются функции активации f. Функция активации принимает на вход данные с предыдущего слоя и преобразовывает их в выходное значение, которое передается следующему слою. Существуют различные функции активации, например: логистическая функция или сигмоида ($\mathrm{f(x)} = 1/(1 + e^{-x})$), ReLU ($f(x) = \max(0, x)$) и другие. Таким образом, полное преобразование данных при переходе на следующий слой с учётом смещения и функции активации описывается формулой: $y = f(Wx + b)$.

Для обеспечения корректного решения задач нейронную сеть необходимо обучить, корректируя весовые коэффициенты связей (синапсов). Существуют различные методы такого обучения; базовым алгоритмом является метод обратного распространения ошибки. Пусть имеется вектор входных данных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и известен верный ответ $y = (y_1, \dots, y_m)$. В результате работы НС на выходе получаем вектор $z = (z_1, \dots, z_m)$ и $z \neq y$. Для количественной оценки отклонения полученного решения от требуемого вводится функция потерь (ошибки) ρ. Данная функция обладает следующими свойствами: она неотрицательна, и её значение уменьшается по мере «приближения» вектора z к вектору y. Изменяя значения весов w_{ij}, получаем различные значения z. Таким образом, мы приходим к задаче поиска минимума функции $\rho(z, y)$, зависящей от параметров w_{ij} и b_k. Для применения метода обратного распространения необходимо вычислить градиент этой функции. Для вычисления градиента используется цепное правило дифференцирования. Если прямой проход по сети подразумевает последовательное распространение данных от входа к выходу, то при обратном проходе вычисленные градиенты распространяются от выходного слоя к входному. На основе этих градиентов и происходит корректировка весов, что и составляет суть процесса обучения.

Все описанные математические операции – матричные умножения, добавление смещения, применение функций активации и вычисление градиентов – могут быть наглядно реализованы в среде электронных таблиц. Рассмотрим поэтапное построение такой модели в Microsoft Excel. Данная среда позволяет:

1. Визуализировать структуру нейронной сети – представлять слои сети и связи между нейронами в виде соответствующих матриц.
2. Реализовать базовые вычисления – вычисление выходных данных и применение функций активации.
3. Продемонстрировать принципы работы сети – отслеживать этапы прохождения данных через ее слои.

На первом этапе создаётся таблица, в которой выделяется столбец для записи входных данных. Веса представляются в виде матрицы: задаются их начальные значения и размещаются справа от столбца входных данных. В результате умножения получается новый вектор данных, который располагается в строке под матрицей. Под этим вектором размещаем еще две строки: вектор, соответствующий нейрону смещения, и результирующий вектор выходных данных слоя после применения функции активации. Матрицу следующего слоя располагают снизу, а новый вектор – справа в столбце и так далее. Рядом с выходными данными также находится ячейка,

в которую записывается значение функции ошибки. Таким образом, формируется структура, напоминающая «лесенку», которая наглядно представляет архитектуру нашей нейронной сети. На отдельном листе можно аналогичным образом дополнительно рассчитывать градиенты при обратном распространении ошибки

Для проверки эффективности предложенной методики была смоделирована нейронная сеть, предназначенная для аппроксимации многочлена *n*-й степени на отрезке $[-10, 10]$. Нейронная сеть имеет следующую структуру: входной и выходной слой – по одному нейрону, три промежуточных слоя – по восемь нейронов. На первых четырёх слоях присутствует нейрон смещения; функция потерь – модуль разности. Рассмотрены многочлены второй и пятой степени: $x^2 + 1$ и $5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$. Реализация данной модели в Excel, выполненная по описанному выше принципу «лесенки», для двух тестовых функций дала результаты, приведенные на рис. 1 и рис. 2 (промежуточные результаты и веса опущены для наглядности):

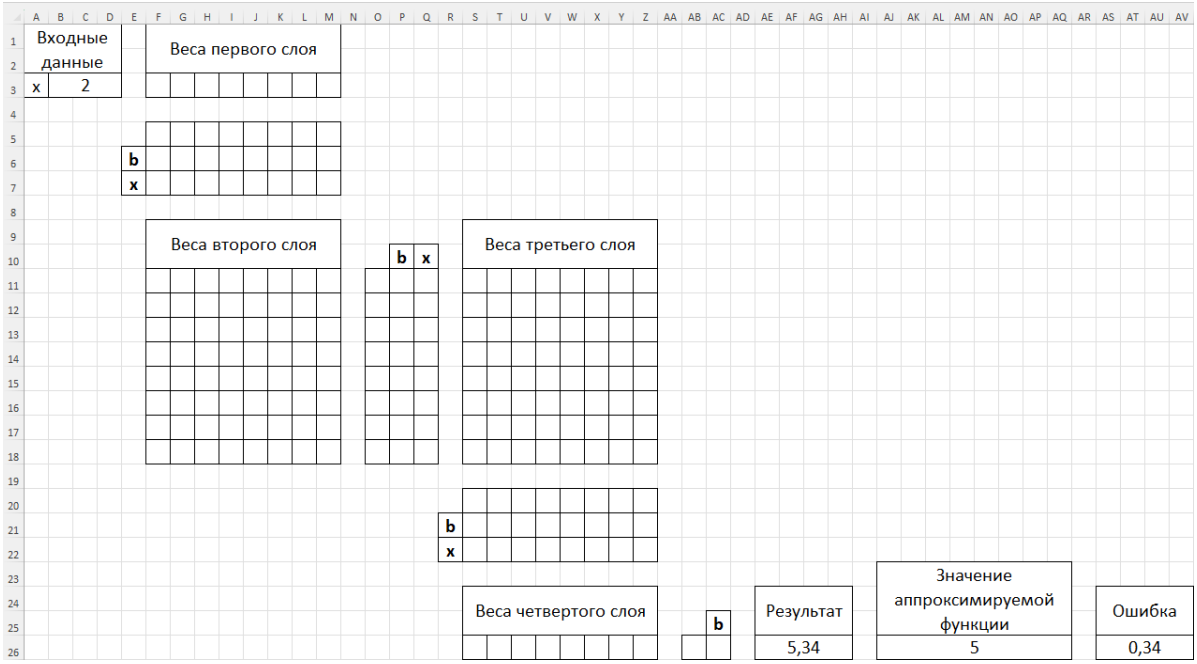


Рис. 1. Аппроксимация многочлена 2-й степени

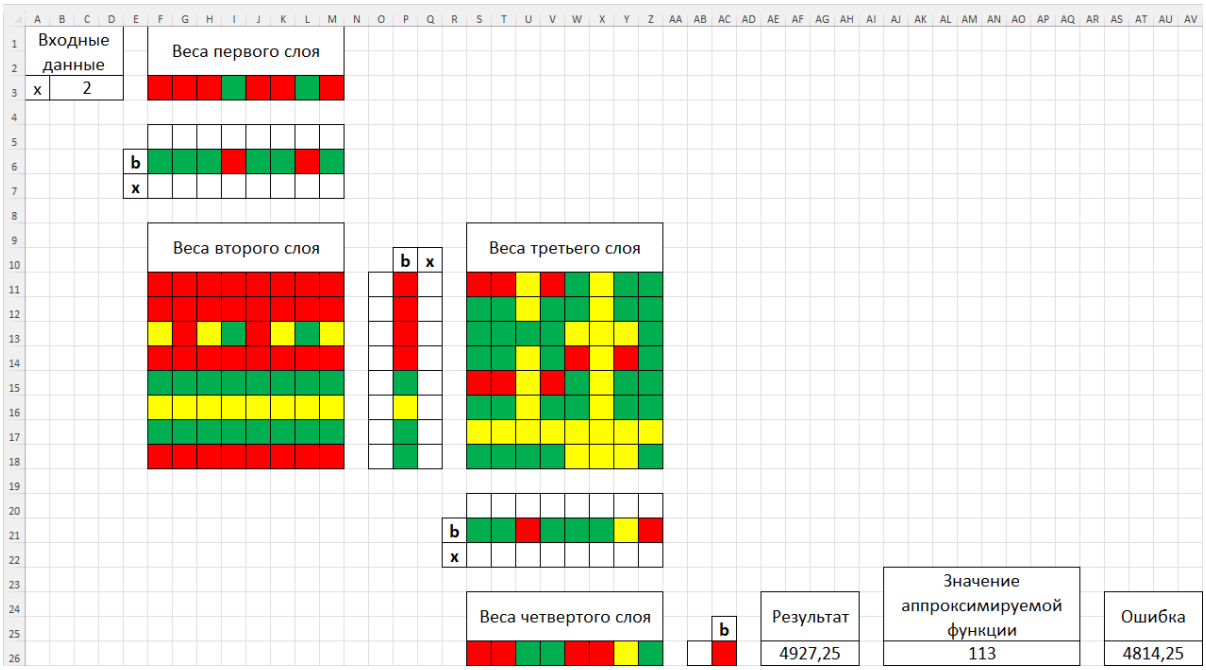


Рис. 2. Аппроксимация многочлена 5-й степени

Как видно из результатов, данная структура нейронной сети не позволяет адекватно аппроксимировать многочлен пятой степени. На рис. 2 цвет ячейки обозначает знак градиента при обратном распространении ошибки: зелёный соответствует отрицательным значениям, красный – положительным, а жёлтый – нулевым. Аналогичным образом можно изображать и сам алгоритм обратного распространения ошибки (Рис 3). В этом случае в ячейках таблицы будут содержаться поправки по каждому весу.

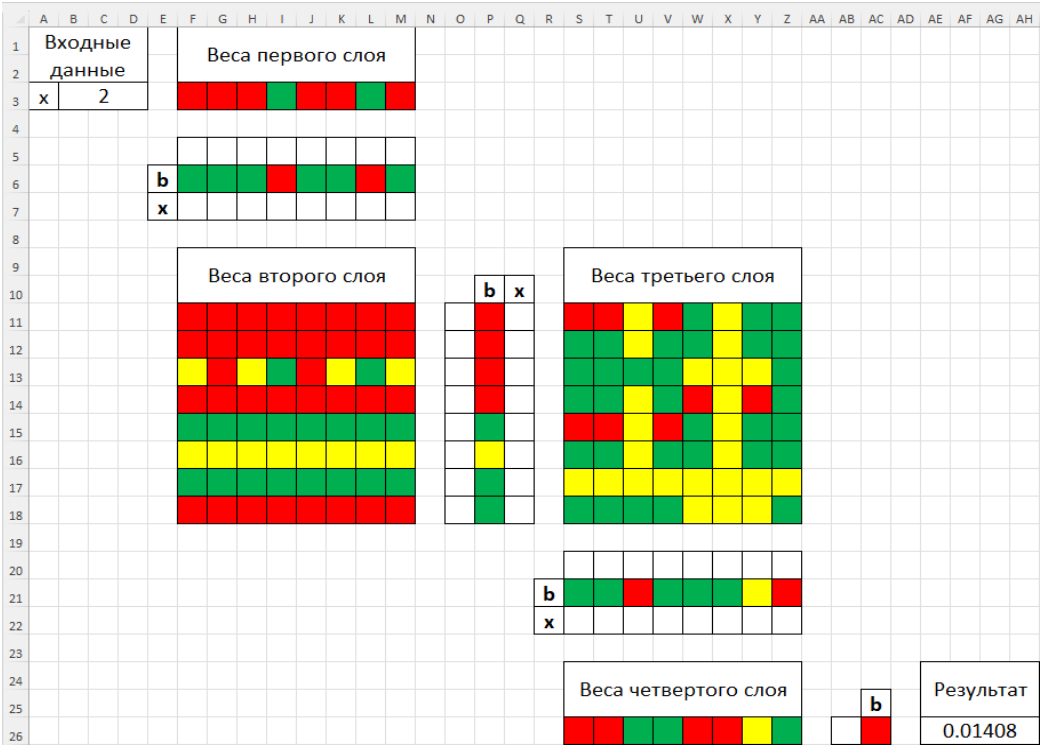


Рис. 3. Обратное распространение ошибки

Заключение

В работе продемонстрирована возможность применения среды электронных таблиц для преподавания основ теории нейронных сетей. Предложенная методика позволяет трансформировать абстрактные математические концепции в интерактивный и наглядный образовательный ресурс. Показано, что даже простейшая модель, реализованная в Microsoft Excel, обеспечивает глубокое понимание ключевых принципов функционирования искусственных нейронных сетей: роли весовых коэффициентов и смещений, назначения функций активации и сущности процесса обучения посредством минимизации функции ошибки.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Rachha, A., Seyam, M. Explainable AI In Education: Current Trends, Challenges, And Opportunities. // *IEEE SoutheastCon*. – 2023. – P. 232-239. – DOI: 10.1109/SoutheastCon51012.2023.10115140
2. Wang, J., Liu, S., Zhang, W. et al. Visual Analytics For Machine Learning: A Data Perspective Survey // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. – 2024. – Vol. 30, Issue 12. – DOI: 10.48550/arXiv.2307.07712
3. Lamsal, R. R., Lamsal, S. Demystifying Artificial Intelligence: A Comprehensive Guide to Foundational AI Techniques and Their Applications [Электронный ресурс]. – 2025. – 20 p. – DOI: 10.13140/RG.2.2.13210.35524
4. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс. – Москва : Вильямс, 2006. – 1104 с.
5. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. Deep Learning. – MIT Press, 2016.
6. Bishop, C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. – Springer, 2006.
7. Воронцов, К. В. Курс "Введение в машинное обучение". [Электронный ресурс] – URL: https://github.com/Dyakonov/IML (дата обращения: 25.11.2025).
8. Специализация «Машинное обучение и анализ данных» [Электронный ресурс] // Школа анализа данных Яндекса. – URL: https://education.yandex.ru/handbook/ml (дата обращения: 25.11.2025).
9. Платформа Stepik: Интерактивный курс «Нейронные сети» (2025г.). — URL: https://stepik.org/course/401/promo (дата обращения: 25.11.2025).
10. TensorFlow Playground [Электронный ресурс]. – URL: https://playground.tensorflow.org/ (дата обращения: 25.11.2025).
11. Trask A. W. Grokking Deep Learning. – Shelter Island, NY: Manning Publications, 2019. – 335 p.
12. Нейронные сети для начинающих [Электронный ресурс] // Хабр. – URL: https://habr.com/ru/articles/312450/ (дата обращения: 25.11.2025).

***Denis N. Fedyanin*,**
Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dfedyanin@inbox.ru
***Kirill V. Namleev*,**
Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
namleevmiddle@gmail.com
***Elizaveta P. Sokolova*,**
Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
12345sep101@gmail.com

Methodology for Teaching the Principles of Fully Connected Neural Networks Operation

Abstract. The relevance of the study is determined by the difficulties first-year students face in grasping the fundamental principles of neural networks, which stem from their insufficient level of mathematical and programming background. The aim of the paper is to propose and substantiate a methodology for using a spreadsheet environment (Microsoft Excel) to create a visual and interactive model that demonstrates key machine learning concepts. A practical approach is proposed to visualize the process of neural network training. The use of this approach fosters an intuitive understanding of the subject area and can be recommended for use in introductory courses.

Keywords: neural networks, machine learning, visualization, education, spreadsheets, teaching methodology.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ»

Аннотация

Актуальность рассматриваемой проблемы обусловлена важностью успешного освоения студентами правил дифференцирования функции одного переменного, поскольку техника дифференцирования используется во многих математических методах, применяемых для решения прикладных задач. Цель работы состоит в том, чтобы помочь студентам приобрести навыки владения правилом дифференцирования неявной функции, а также научиться применять его для решения задач на геометрические приложения производной. Приведены задачи с анализом решения, которые помогут студентам при самостоятельном изучении данной темы. Материалы статьи могут быть использованы преподавателями для подготовки к проведению семинарских занятий.

Ключевые слова

производная, неявная функция, касательная, угол между кривыми

АВТОРЫ

Чигирёва Ольга Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
mkfn12@yandex.ru

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Головина Анастасия Михайловна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nastya_gm@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2025-2-174-182

Введение

Данная работа основана на личном опыте авторов преподавания дисциплины «Математический анализ», читаемой на 1-м курсе технического университета. Одним из основополагающих разделов данной дисциплины является «Дифференциальное исчисление», изучение которого играет важную роль для подготовки будущих инженеров. Действительно, математические методы, в основе которых лежит дифференциальное исчисление, находят своё применение в различных областях науки и техники: теоретической механике, физике, астрономии, химии, биологии, медицине, экономике, строительстве. Методами математического моделирования решаются многие прикладные задачи: расчёт траекторий летательных аппаратов,

прочностной расчёт зданий, создание материалов с заданными свойствами, изучение динамики популяций растений и животных, составление прогноза погоды, исследование влияния различных факторов на экономические показатели (см., например, учебник В.С. Зарубина [1], а также работу Chigireva O.Yu. [2]).

Результат освоения данной дисциплины состоит в том, чтобы студенты не только овладели математическими методами, но и научились поиску рационального способа решения предложенных задач.

Методология и результаты исследования

В результате изучения темы «Техника дифференцирования» студенты должны *знать* определение понятия «производная», геометрический и механический смысл производной, таблицу производных элементарных функций, а также правила дифференцирования; *уметь* вычислять производные сложной, обратной, неявной и параметрически заданной функций; *владеть* математическими методами решения задач на приложения дифференциального исчисления.

Практика показывает, что наибольшие затруднения у студентов вызывают задачи на применение правил вычисления производной сложной, показательно-степенной и неявной функций. Важность изучения этих правил связана с тем, что они лежат в основе многих математических методов, применяемых для решения задач с прикладным содержанием. В данной работе авторы рассматривают одну из перечисленных тем «Дифференцирование неявной функции», изучаемую в курсе математического анализа. При построении системы задач учитывалось, что студентам известно понятие «производная», геометрический смысл производной; а также приобретены ранее навыки применения правил дифференцирования суммы (разности), произведения и частного двух функций (см. учебники В.А. Ильина и Э.Г. Позняка [3], Е.Е. Ивановой [4]). Прежде чем перейти к изучению нового материала, рекомендуется актуализация знаний на вычисление производной сложной функции (см., например, сборники задач по математическому анализу под редакцией Б.П. Демидовича [5] и Л.Д. Кудрявцева [6]).

При проведении семинарского занятия по теме «Дифференцирование неявной функции» работа может быть организована следующим образом. На этапе усвоения нового материала сначала преподаватель объясняет правило дифференцирования неявной функции, а затем студентам предлагается решить задачи на прямое применение данного правила; примерами заданий такого типа являются задачи №1 и №2. Для того чтобы вызвать у студентов интерес к изучению данной темы можно рекомендовать задачи на геометрические приложения производной. С этой целью преподаватель сначала излагает алгоритм решения задачи *о нахождении угла между заданными плоскими пересекающимися кривыми*. Затем, на основе приведённого алгоритма, студенты самостоятельно решают задачу №3 с последующей проверкой результатов на занятии. Дальнейшее применение приобретённых навыков реализуется при выполнении более сложных заданий, учитывающих междисциплинарные связи; например, для успешного решения задачи №4 необходимы не только знания по данной теме математического анализа, но и по аналитической геометрии, параллельно читаемой студентам (см. статью С.Н. Ефремовой в соавторстве [7]). Для развития творческих способностей обучающихся, в качестве домашнего задания, авторы рекомендуют использование пакета прикладных программ (см. работу Ф.Х. Ахметовой в соавторстве [8]).

В статье теоретический материал приведён на основе содержания учебников В.А. Ильина и Э.Г. Позняка [9], Е.Е. Ивановой [10]; условия задач взяты из перечня задач

для самостоятельного решения, входящих в сборник задач И.А. Виноградовой с соавторами [11].

Правило дифференцирования неявной функции

Пусть значения переменных x и y связаны уравнением $F(x,y)=0$.

Если функция $y=y(x)$, определённая на некотором промежутке, такова, что подстановка её в уравнение $F(x,y)=0$ для всех x из этого промежутка обращает его в тождество, т.е. $F\big(x,y(x)\big)=0$, то говорят, что функция $y=y(x)$ задана *неявно* уравнением $F(x,y)=0$.

Для того чтобы, найти производную функции, заданной неявно, нужно сначала продифференцировать равенство $F\big(x,y(x)\big)=0$ по x, применив правило дифференцирования сложной функции, а затем выразить из полученного соотношения производную $y'(x)$ через x и $y(x)$.

Замечание. Геометрический смысл: уравнение $F(x,y)=0$ задаёт кривую на плоскости Oxy.

Проиллюстрируем данное правило на примере.

Задача 1. Найти производную $y'(x)$ функции, заданной неявно: $x^2-xy+2y^2+x-y=14$ в точке $x=1$, если $y(1)=-2$.

Решение. Согласно условию задачи, уравнение $x^2-xy+2y^2+x-y-14=0$ задаёт неявно функцию $y(x)$. Вычисление производной $y'(x)$ проведём в два этапа:

1) продифференцируем равенство $x^2-xy+2y^2+x-y-14=0$ по переменной x, считая $y=y(x)$:
   1.1) при вычислении производной второго слагаемого xy следует применить правило дифференцирования произведения двух функций
   $$(xy)'=\big(x\cdot y(x)\big)'=1\cdot y(x)+x\cdot y'(x);$$
   1.2) при вычислении производной третьего слагаемого $2y^2$ – правило дифференцирования сложной функции
   $$(y^2)'=\big(y^2(x)\big)'=2\cdot y(x)\cdot y'(x);$$
   1.3) в результате приходим к уравнению
   $$2x-\big(y(x)+x\cdot y'(x)\big)+4\cdot y(x)\cdot y'(x)+1-y'(x)=0;$$
2) выразим из полученного соотношения производную $y'(x)$:
   $$y'(x)=\frac{y(x)-2x-1}{4y(x)-x-1};$$

при $x=1$ и $y(1)=-2$ находим $y'(1)=\frac{1}{2}$.

Обсуждение решения задачи

С целью предупреждения возможных ошибок при решении задач данного типа, важно обратить внимание учащихся на то, что при дифференцировании равенства $x^2-xy+2y^2+x-y-14=0$ по переменной x, следует рассматривать $y=y(x)$ как функцию, зависящую от переменной x. В связи с чем, на начальном этапе обучения рекомендуется при вычислении производных записывать $\big(x\cdot y(x)\big)'$ вместо $(xy)'$ и проговаривать учащимися вслух применяемые правила дифференцирования, что поможет быстрому усвоению нового материала.

Для закрепления студентами данного правила усложним задачу.

Задача 2. Найти производную $y'(x)$ функции, заданной неявно: $2^{\frac{x}{y}}+2^{\frac{2y}{x}}=6$ в точке $x=2$, если $y(2)=1$.

Решение. Продифференцируем равенство $2^{\frac{x}{y}}+2^{\frac{2y}{x}}-6=0$ по переменной x, считая $y=y(x)$. Вычислим производные для каждого слагаемого

1) для первого слагаемого

$$\left(2^{\frac{x}{y(x)}}\right)'=\left|\begin{matrix}\text{правило дифференцирования}\\ \text{сложной функции}\end{matrix}\right|=\ln 2\cdot 2^{\frac{x}{y(x)}}\cdot\left(\frac{x}{y(x)}\right)'=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{правило дифференцирования}\\ \text{частного двух функций}\end{matrix}\right|=\ln 2\cdot 2^{\frac{x}{y(x)}}\cdot\frac{y(x)-xy'(x)}{y^2(x)};$$

2) для второго слагаемого, аналогично

$$\left(2^{\frac{2y(x)}{x}}\right)'=\ln 2\cdot 2^{\frac{2y(x)}{x}}\cdot\left(\frac{2y(x)}{x}\right)'=2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{2y(x)}{x}}\cdot\frac{xy'(x)-y(x)}{x^2};$$

в результате получим соотношение

$$2^{\frac{x}{y(x)}}\cdot\left(\frac{1}{y(x)}-\frac{xy'(x)}{y^2(x)}\right)=2\cdot 2^{\frac{2y(x)}{x}}\cdot\left(\frac{y'(x)}{x}-\frac{y(x)}{x^2}\right),$$

из которого выражаем производную

$$y'(x)=\frac{2^{\frac{x}{y(x)}}\cdot\frac{1}{y(x)}+2^{\frac{2y(x)}{x}+1}\cdot\frac{y(x)}{x^2}}{2^{\frac{2y(x)}{x}+1}\cdot\frac{1}{x}+2^{\frac{x}{y(x)}}\cdot\frac{x}{y^2(x)}};$$

при $x=2$ и $y(2)=1$ находим $y'(2)=\frac{1}{2}$.

Обсуждение решения задачи

Следует отметить, что при решении данной задачи, при вычислении производной дроби было применено правило дифференцирования частного двух функций. Однако, в ряде случаев более рациональным может быть иной способ, когда при вычислении производной дроби применяется правило дифференцирования произведения двух функций. Для сравнения с уже полученным решением, найдём производную второго слагаемого другим способом:

$$\left(2^{\frac{2y(x)}{x}}\right)'=2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{2y(x)}{x}}\cdot\left(y(x)\frac{1}{x}\right)'=2\cdot\ln 2\cdot 2^{\frac{2y(x)}{x}}\cdot\left(y'(x)\frac{1}{x}+y(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Здесь, как мы видим, не нужно выполнять преобразования полученного выражения.

Такой приём может быть полезен при вычислении производной функции следующего вида

$$\left(\frac{f(x)g(x)}{h(x)}\right)'=\left(f(x)g(x)\frac{1}{h(x)}\right)'=f'(x)g(x)\frac{1}{h(x)}+f(x)g'(x)\frac{1}{h(x)}+f(x)g(x)\left(\frac{1}{h(x)}\right)',$$

где применено правило дифференцирования произведения трёх функций.

Нахождение угла между двумя плоскими пересекающимися кривыми

Для решения задачи *о нахождении угла между заданными плоскими пересекающимися кривыми* можно рекомендовать следующую последовательность действий:

1) выполнить рисунок, изобразив заданные кривые на координатной плоскости;
2) найти координаты точек пересечения построенных кривых;
3) вычислить угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к кривым в полученных точках, воспользовавшись геометрическим смыслом производной;
4) определить значение угла φ между касательными из соотношения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2};$$

5) записать ответ.

Задача 3. Найти угол между двумя окружностями одного радиуса, если центр одной из них лежит на другой.

Решение. На начальном этапе необходимо текстовую формулировку задачи перевести в математическую. Анализируем условие задачи: так как уравнения окружностей не заданы, то располагаем их на координатной плоскости Oxy таким образом, чтобы описывающие их уравнения имели наиболее простой вид. Введём величину R – радиус окружностей. Поместим центр первой окружности в начало координат, а центр второй – расположим на оси абсцисс. Тогда, учитывая, что их радиусы равны, можем записать уравнения окружностей: $x^2 + y^2 = R^2$ и $(x - R)^2 + y^2 = R^2$.

Далее решение задачи осуществляется в соответствии с предложенным выше алгоритмом. Разберём подробно все этапы.

1. Изобразим окружности на координатной плоскости Oxy (см. рис. 1).

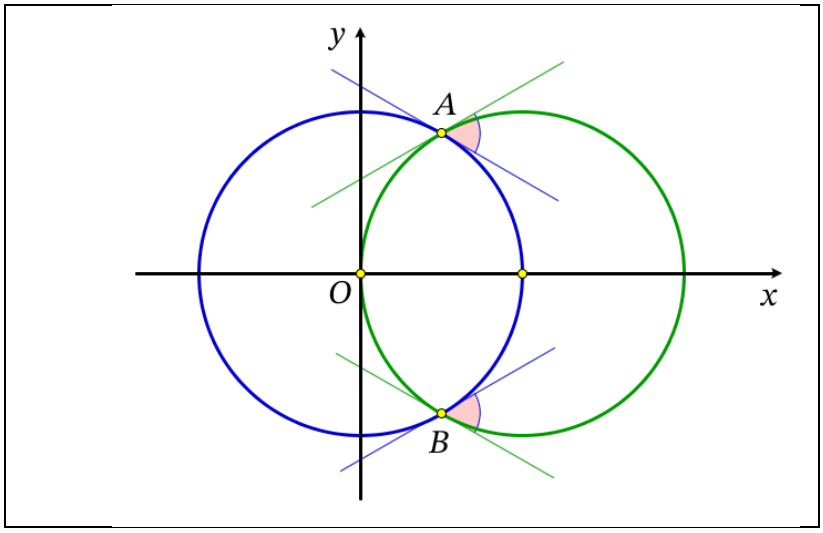


Рис. 1. Построение угла между касательными

2. Найдём координаты точек пересечения окружностей:
решая систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ (x - R)^2 + y^2 = R^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ x^2 + y^2 = 2Rx; \end{cases}$
получаем две точки $A\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ и $B\left(\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Вычислим угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к окружностям в точках пересечения A и B, воспользовавшись геометрическим смыслом производной. Для этого найдём производные неявных функций $x^2 + y^2 = R^2$ и $(x - R)^2 + y^2 = R^2$:
– дифференцируя равенство $x^2 + y^2 = R^2$ по переменной x, получаем соотношение $2x + 2y(x)y'(x) = 0$, откуда выражаем производную $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$;
затем вычисляем её значения в точках A и B: $y'|_A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y'|_B = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
таким образом, угловые коэффициенты касательных, проведённых к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точках A и B, равны $k_{1,A} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $k_{1,B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

–для второй функции, рассуждая аналогично, приходим к соотношению $2(x-R)+2y(x)y'(x)=0$, из которого получаем $y'(x)=\frac{R-x}{y(x)}$;
вычислив значения производной в точках A и B: $y'|_A=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y'|_B=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,
находим $k_{2,A}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $k_{2,B}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Определим значение тангенса угла φ между касательными в точках A и B:
$$\operatorname{tg}\varphi_A=\frac{k_{1,A}-k_{2,A}}{1+k_{1,A}k_{2,A}}=-\sqrt{3};\quad \operatorname{tg}\varphi_B=\frac{k_{1,B}-k_{2,B}}{1+k_{1,B}k_{2,B}}=\sqrt{3};$$
так как угол между касательными острый, то $\varphi_A=\varphi_B=\frac{\pi}{3}$.
5. Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Обсуждение решения задачи

Рассмотренная выше задача иллюстрирует метод нахождения угла между двумя плоскими пересекающимися кривыми, заданными неявно. Студентам, в качестве задания, предлагается на основе алгоритма, изложенного преподавателем, записать самостоятельно все этапы решения задачи. Такой вид работы способствует быстрому запоминанию последовательности выполняемых действий, а также формированию навыков применения правила вычисления производной неявной функции для решения задач с использованием геометрического смысла производной. После проверки результатов выполнения данного задания, можно рекомендовать ряд вопросов на понимание изученного материала. Например, обсудить в каких случаях невозможно применение полученной аналитической формулы для вычисления производной.

Примеры решения сложных задач
на применение геометрического смысла производной

Далее будут подробно рассмотрены основные этапы решения сложной задачи (см. работу И.Е. Кандауровой в соавторстве [12]), при изучении темы «Дифференцирование неявной функции».

Задача 4. Доказать, что любая касательная к гиперболе $y^2-x^2=1$ образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.

Анализ условия и требования к задаче:

1) пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит верхней ветви гиперболы $y>0$;
выполним рисунок к задаче (см. рис. 2), построив треугольник, образованный касательной к гиперболе, проведённой в точке M_0 и её асимптотами $y=\pm x$;

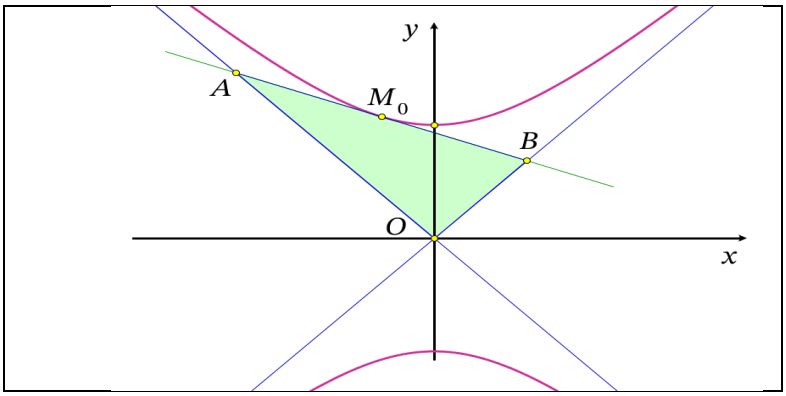


Рис. 2. Построение треугольника, образованного касательной к гиперболе и её асимптотами

2) уравнение кривой (гиперболы) задано уравнением $y^2 - x^2 = 1$; следовательно, можно записать уравнение касательной к гиперболе, проведённой в точке M_0;
3) требуется записать формулу для вычисления площади треугольника (в данном случае, прямоугольного) и доказать, что значение площади не зависит от выбора точки M_0 на кривой (гиперболе).

План решения задачи:

1) записать уравнение касательной l к гиперболе, проведённой в точке M_0;
2) найти координаты точек пересечения касательной l с асимптотами гиперболы $y = \pm x$;
3) записать формулу для вычисления площади прямоугольного треугольника, выразив длины катетов через координаты точек пересечения касательной l к гиперболе с её асимптотами $y = \pm x$; затем доказать, что значение площади не зависит от выбора точки M_0 на кривой (гиперболе), воспользовавшись очевидным равенством $y_0^2 - x_0^2 = 1$.

Далее предлагаем студентам записать решение самостоятельно, выполняя последовательно все шаги плана решения задачи. Приведём основные результаты в целях самоконтроля:

1. уравнение касательной l к гиперболе, проведённой в точке M_0:
$$l\colon\ y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0);$$
2. координаты точек A и B пересечения касательной l с асимптотами гиперболы $y = -x$ и $y = x$ соответственно:
$A\left(-\frac{1}{x_0+y_0}; \frac{1}{x_0+y_0}\right)$ и $B\left(\frac{1}{y_0-x_0}; \frac{1}{y_0-x_0}\right)$;
3. площадь треугольника (ΔAOB) :
$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2}\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\sqrt{x_B^2 + y_B^2} = |y_A| \cdot |y_B| = 1.$$

Обсуждение решения задачи

Для формирования логического мышления рекомендуется задать обучающимся вопросы: «Какие методы использованы при решении задачи?», «Можно ли обобщить полученные результаты (доказанное утверждение)?». Также можно предложить студентам в виде домашнего задания решить задачу в более общей постановке (см. задачник И.А. Виноградовой в соавторстве [13]): доказать, что любая касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.

Для закрепления изученного материала можно рекомендовать решение задач из сборников под редакцией Б.П. Демидовича [14] и Л.Д. Кудрявцева [15].

Заключение

Материалы статьи основаны на многолетнем опыте авторов преподавания дисциплины «Математический анализ», одним из разделов которого является «Дифференциальное исчисление». Поскольку владение техникой дифференцирования — важный аспект для успешного освоения студентами данного раздела, то внимание авторов уделено рассмотрению тех типов заданий, которые вызывают у студентов наибольшие затруднения. Представленный материал по данной теме логично структурирован: сначала рассмотрены задачи на прямое применение основных правил дифференцирования; затем приводится алгоритм и подробное решение задачи-метода с использованием геометрического смысла производной; на конкретном примере показаны основные этапы работы над сложной задачей. Авторы надеются, что решение задач с прикладным содержанием в рамках дисциплины «Математический анализ» поможет студентам в дальнейшем при изучении дисциплин «Дифференциальное исчисление функций многих переменных», «Дифференциальная геометрия», а на старших курсах — «Методы оптимизации».

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для втузов. 2-е изд., стер. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. —495 с. (Математика в техническом университете. Комплекс учебников из 21 выпуска; вып. 21).
2. Chigireva O.Yu. Mathematical modeling of the process of warming up of a cylindrical surface by a moving intense heat source // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2006. Т. 79. №6. С. 1078-1084.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть I: Учеб. для вузов. 7-е изд., стер. — М.: Физматлит, 2019. — 648 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1).
4. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов. 7-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. — 407 с. (Математика в техническом университете. Комплекс учебников из 21 выпуска; вып. 2).
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича.— М.: Астрель: АСТ, 2007. — 495 с.
6. Сборник задач по математическому анализу в 3 т.: Т.1: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. 2-е изд. / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2012. — 495 с.
7. Ефремова С.Н., Ласковая Т.А. Методические аспекты изложения темы «Приведение центральной кривой второго порядка к каноническому виду» // Modern European Researches. 2020. Т. 1, №2. С. 96-102.
8. Ахметова Ф.Х., Чигирёва О.Ю. Обучение студентов дифференцированию в среде MathCAD // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. №8. С. 86-91. URL: http://e-koncept.ru/2016/16168.htm
9. Ильин В.А. Указ. соч.
10. Иванова Е.Е. Указ. соч.
11. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: в 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. — 412 с.
12. Кандаурова И.Е., Чигирёва О.Ю. Обучение решению сложных задач на примере изучения темы «Прямая и плоскость в пространстве» // Modern European Researches. 2023. Т. 1, №3. С. 101-109.
13. Виноградова И.А., Указ. соч.
14. Демидович Б.П. Указ. соч.
15. Кудрявцев Л.Д. Указ. соч.

Olga Yu. Chigiryova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
mkfn12@yandex.ru

Faniya Kh. Akhmetova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru
Anastasiya M. Golovina
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
nastya_gm@mail.ru

Methodological features of teaching the topic "Differentiation of implicit function"

Abstract. The relevance of the problem under consideration is due to the importance of students successfully mastering the rules for differentiating the function of one variable, since the differentiation technique is used in many mathematical methods used to solve applied problems. The purpose of the work is to help students acquire skills in the rule of differentiation of an implicit function, as well as to learn how to apply it to solve problems on geometric applications of the derivative. The paper presents problems with solution analysis that will help students in their independent study of this topic. The materials of the article can be used by teachers to prepare for seminars.

Keywords: derivative, implicit function, tangent, the angle between the curves.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 2 (T.1), 2025
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS
610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”

Sent for printing 18-12-2025
Circulation 1000
Order 013120/127

© All Rights Reserved, 2025