ISSN 2311-8806

Modern European Researches

Issue 1 (T.1)
2026

Kirov, Russian Federation

MODERN EUROPEAN RESEARCHES (2025) ISSUE 1 (T.1), 156 P.

Modern European Researches Journal is the peer review journal, which reflects the most outgoing scientific investigations in such fields of knowledge, as pedagogy, education and training, comprehensive study of human, psychology, social problems of medicine and ecology; philosophy, sociology, political science, jurisprudence, economics; language and literature study, study of art, study of culture.

EDITORIAL BOARD

***Olga Bermant-Polyakova**, PhD, Israel*

***Tatyana Fedotova**, PhD, Professor, Ukraine*

***Alla Gabidullina**, PhD, Professor, Ukraine*

***Pavel Gorev**, PhD, Associate Professor, Russia*

***Mariya Greb**, PhD, Associate Professor, Ukraine*

***Natalya Korableva**, PhD, Associate Professor, Ukraine*

***Nikolay Kotryahov**, PhD, Professor, Russia*

***Kanat Lakbaev**, PhD, Associate Professor, Kazakhstan*

***Galina Nekrasova**, PhD, Professor, Russia*

***Aleksander Nosov**, PhD, Professor, Russia*

***Gennadiy Senkevich**, PhD, Associate Professor, Ukraine*

***Samvel Sukiasyan**, PhD, Professor, Armenia*

***Eugene Vechtomov**, PhD, Professor, Russia*

***Elena Visotskaya**, PhD, Professor, Ukraine*

EDITORIAL ADDRESS

610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A,
KIROV, RUSSIAN FEDERATION
PUBLISHER@DOAJ.NET

ISSN2311-8806
Authors are responsible for accuracy of the information, contained in the articles.
Editorial opinion can differ from opinion of authors.
If reprinted, the reference to the journal is required.
© All Rights Reserved
Printed in Russian Federation, 2026

CONTENTS

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПОДХОДОВ
К ОЦЕНИВАНИЮ ПЕРМАНЕНТОВ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ
Андреева Татьяна Владимировна, Семенов Юрий Станиславович,
5-13

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ
Белоусов Алексей Иванович
14-19

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРУГЕ
Береснева Евгения Викторовна
20-25

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ СЕМИНАРА
ПО ТЕМЕ «СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»
Бирюков Олег Николаевич, Хасанов Наиль Алфатович,
26-32

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»
Велищанский Михаил Александрович, Власов Павел Александрович,
33-41

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»
Вергазова Ольга Бухтияровна, Хасанов Наиль Алфатович,
42-47

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ
И АЛГОРИТМА ЕЕ РЕШЕНИЯ
Виноградова Марина Станиславовна, Андреева Татьяна Владимировна,
48-56

СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ РАВЕНСТВА МАСШТАБА
ДВУХ ВЫБОРОК МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО
Горяинов Владимир Борисович, Горяинова Елена Рудольфовна,
57-74

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ И ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
Грибов Александр Федорович, Краснов Игорь Константинович
Жидков Евгений Николаевич,
75-80

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ
ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ "ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ"
Забелина Светлана Борисовна, Пинчук Ирина Александровна,
81-91

ПРОЕКТНОЕ ОБУЧЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНОМ ОБРАЗОВАНИИ
Зубков Владимир Александрович, Ивахненко Наталья Николаевна,
Бадекин Максим Юрьевич,
92-97

О МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ “ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ”
Иванков Павел Леонидович, Обухов Виктор Павлович
98-106

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ
«ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ»
Нараленкова Ирина Игоревна, Шивринская Елена Вячеславовна
107-113

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ
«ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ» В КУРСЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ
Одинцова Вера Александровна,
114-128

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ЧИСЛОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ»
ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON
Птицын Владимир Анатольевич, Птицына Инга Вячеславовна,
129-134

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА
И РОЛЬ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОСВОЕНИИ ТЕМЫ
Скосарева Екатерина Петровна, Федоров Матвей Максимович,
135-140

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ
НА ТЕМУ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»
Хасанов Наиль Алфатович, Вергазова Ольга Бухтияровна,
141-148

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
Хорькова Нина Григорьевна, Власов Павел Александрович,
149-155

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПОДХОДОВ К ОЦЕНИВАНИЮ ПЕРМАНЕНТОВ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ

Аннотация

Дисциплина «Вероятностные методы в комбинаторике» читается в качестве спецкурса магистерской программы специальности «Прикладная математика и информатика» и ряда других специальностей. Одной из тем спецкурса является применение перманентов матриц к решению задач теории графов. Для получения содержательных результатов используются нижние и верхние оценки перманентов определенных матриц, поскольку вычисление точного значения перманента в общем случае затруднительно. В статье излагается методика получения таких оценок на основе теоретико-вероятностного подхода.

Ключевые слова

перманент матрицы, случайная величина, среднее значение, верхняя и нижняя оценки

АВТОРЫ

Андреева Татьяна Владимировна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана», г. Москва
t-v-andreeva@mail.ru

Семенов Юрий Станиславович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина», г. Москва
yuri_semenoff@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-5

Введение

Работа посвящена методическим аспектам получения оценок перманентов $(0,1)$-матриц с использованием вероятностного подхода. Эта тема является частью спецкурса «Вероятностные методы в комбинаторике», который читается в рамках одной из магистерских программ. В основу курса положен материал, изложенный в книге Н. Алона и Дж. Спенсера «Вероятностный метод» [1]. Как пишет редактор перевода [2] А. А. Сапоженко: «*В книге делается акцент на методологии. При относительно небольшом объеме она обладает высокой плотностью идей, приходящихся на страницу текста. Авторы часто жертвуют законченностью результатов в пользу ясности и краткости изложения*». Это делает книгу ценным справочным материалом для специалистов. Однако, с нашей точки зрения, при чтении курса следует уделять большее внимание разбору рассматриваемых понятий, постановкам задач, примерам и подробным выкладкам. При этом предполагаемся, что студент знаком с основными понятиями теории вероятностей, которые можно найти, например, в книге В. Е. Гмурмана [3].

В статье приведено определение перманента матрицы, рассмотрены примеры его вычисления для различных матриц. Основное внимание уделяется перманенту $(0,1)-$ матриц, перечислены некоторые приложения перманента к решению известных комбинаторных задач. Верхняя оценка перманента получена в теореме Брегмана. Мы приводим доказательство этой теоремы, дополненное необходимыми выкладками. Кроме того, получена формула для среднего значения перманента случайной $(0,1)-$ матрицы и его нижняя оценка.

Методология и результаты исследования

1. Понятие перманента. Пусть $A = (a_{ij}) -$ матрица размера $m \times n$, где $m \le n$. Перманент матрицы – это сумма произведений её элементов, взятых по одному из каждой строки и не более чем по одному из каждого столбца:

$$\operatorname{per} A = \sum_{(j_1,\dots,j_m)} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \dots a_{m,j_m},$$

где суммирование ведётся по всем размещениям из n по m (в качестве генеральной совокупности выступает множество индексов столбцов $\{1,2,\dots,n\}$).

Очевидно, что перманент квадратной матрицы равен сумме произведений её элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Определитель матрицы получается из перманента сменой знака слагаемых, отвечающих нечётным перестановкам $(j_1,\dots,j_m)$ (см, например, учебник А. И. Кострикина [4].)

Перечислим некоторые очевидные свойства перманента:

• если в матрице есть нулевая строка (а в квадратной матрице – нулевая строка или нулевой столбец), то перманент этой матрицы равен нулю;

• при перестановке строк и при перестановке столбцов матрицы её перманент не меняется;

• в случае квадратной матрицы перманент не меняется при её транспонировании;

• перманент можно вычислить разложением по строке. Разложение по i-й строке имеет вид

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{per} A_{ij},$$

где $A_{ij} -$ матрица, получающаяся из матрицы A вычёркиванием i-й строки и j-го столбца. В случае квадратной матрицы можно разлагать и по столбцу.

В отличие от задачи вычисления определителя, задача вычисления перманента является NP-трудной. Так будет даже в случае двоичной матрицы.

Пример 1.

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot(4+1) + 3\cdot(-1+1) + 5\cdot(-1+4) = 25.$$

Пример 2. Пусть $E_n -$ матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны единице, $I_n -$ единичная матрица того же размера. Тогда

$$\operatorname{per} I_n = 1, \qquad \operatorname{per} E_n = n!, \qquad \operatorname{per}(E_n - I_n) = D_n,$$

где $D_n -$ число беспорядков (т.е. перестановок чисел $1,2,\dots,n$ без неподвижных точек).

Известно (см., например М. Холл [5]), что

$$D_n = n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^r \binom{n}{r}(n-r)! + \dots + (-1)^n =$$

$$= n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{r!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \sim \frac{n!}{e},$$

причем

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

В книге А. Кофмана [6] приведены формулы для значений перманентов некоторых матриц, полученные с использованием обобщенной формулы включений и исключений:

$$\operatorname{per} E_n = n! = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^n, \tag{1}$$

$$D_n = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^r (n-r-1)^{n-r}.$$

2. Приложения перманента. Рассмотрим множество подстановок на множестве $\{1, \dots, n\}$ с ограничениями на расположение элементов. Определим матрицу $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ следующим образом: если i может стоять на j-м месте, то $a_{ij} = 1$, в противном случае $a_{ij} = 0$. Тогда $\operatorname{per} A$ равен количеству таких перестановок.

Рассмотрим двудольный граф $G = (X, Z; E)$, для которого $|X| \le |Z|$. Определим матрицу $A_G = (a_{ij})$ размера $|X| \times |Z|$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, z_j) \in E, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{per} A$ равен количеству совершенных паросочетаний графе G.

3. Теорема Брегмана. В этом разделе получена верхняя оценка перманента $(0,1)$ – матрицы. Она может быть использована для получения верхней оценки числа гамильтоновых путей в турнире.

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $n \times n$, $a_{ij} \in \{0,1\}$, а $r_i = \sum_{1 \le j \le n} a_{ij}$ – количество единиц в i-й строке.

Обозначим через $\mathbb{S}_n$ множество всех подстановок на множестве $\{1,2,\dots,n\}$, а через $S(A)$ – множество таких подстановок $\sigma \in \mathbb{S}_n$, что $a_{i,\sigma(i)} = 1$ при всех i, $1 \le i \le n$, тогда $\operatorname{per} A = |S(A)|$. Будем использовать обозначение $\sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$.

Введем некоторые обозначения и определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Предположим, что $\operatorname{per} A \neq 0$, т.е. $S(A) \neq \emptyset$. Выберем произвольную пару подстановок $\sigma \in S(A)$ и $\tau \in \mathbb{S}_n$. Положим $A^{(1)} = A$. Пусть $R_{\tau(1)}$ – количество единиц в строке $\tau(1)$ матрицы $A^{(1)}$.

Удалим строку $\tau(1)$ и столбец $\sigma \circ \tau(1)$ из $A^{(1)}$, получим $A^{(2)}$. При этом номера строк и номера столбцов сохраняются.

В общем случае, пусть матрица $A^{(i)}$ получена из A удалением строк с номерами $\tau(1), \dots, \tau(i-1)$ и столбцов с номерами $\sigma \circ \tau(1), \dots, \sigma \circ \tau(i-1)$.

Таким образом, $R_{\tau(i)}$ – это случайная величина, равная числу единиц в строке с номером $\tau(i)$ из $A^{(i)}$ (она не равно 0, поскольку столбец с номером $\sigma \circ \tau(i)$ содержит 1).

Положим

$$L = L(A, \sigma, \tau) = \prod_{1 \le i \le n} R_{\tau(i)}.$$

Пример 2. Рассмотрим матрицу $E_3 - I_3$ с дописанными номерами строк и столбцов:

$$A^{(1)} = E_3 - I_3 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}.$$

Несложно проверить, что $S(E_3 - I_3) = \{(2,3,1), (3,1,2)\}$.

а) Выберем $\tau = (1,2,3)$, $\sigma_1 = (2,3,1)$, тогда $\sigma_1 \circ \tau = \sigma_1 = (2,3,1)$, $R_{\tau(1)} = R_1 = 2$, $\sigma_1 \circ \tau(1) = \sigma_1(1) = 2$. Вычеркнем 1-ю строку и 2-й столбец:

$$A^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}.$$

$R_{\tau(2)} = R_2 = 2$, $\sigma_1 \circ \tau(2) = \sigma_1(2) = 3$. Вычеркнем 2-ю строку и 3-й столбец:

$$A^{(3)} = \begin{matrix} 1 \\ (1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \end{matrix}.$$

Наконец, $R_{\tau(3)} = R_3 = 1$. Теперь

$$L(E_3 - I_3, \sigma_1, \tau) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

б) Выберем $\tau = (1,2,3)$, $\sigma_2 = (3,1,2)$, тогда $\sigma_2 \circ \tau = (3,1,2)$, $R_{\tau(1)} = R_1 = 2$, $\sigma_2 \circ \tau(1) = \sigma_2(1) = 3$. Вычеркнем 1-ю строку и 3-й столбец:

$$A^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}.$$

$R_{\tau(2)} = R_2 = 1$, $\sigma_2 \circ \tau(2) = \sigma_2(2) = 1$. Вычеркнем 2-ю строку и 1-й столбец:

$$A^{(3)} = \begin{matrix} 1 \\ (1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 \end{matrix}.$$

Наконец, $R_{\tau(3)} = R_3 = 1$. Теперь

$$L(E_3 - I_3, \sigma_2, \tau) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Пример 3. Несложно показать, что $D_4 = \mathrm{per}(E_4 - I_4) = 9$.

Если $\tau = (1,2,3,4)$, $\sigma_1 = (4,1,2,3)$, то $L(E_4 - I_4, \sigma_1, \tau) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6 < 9$.

Если $\tau = (1,2,3,4)$, $\sigma_2 = (4,3,2,1)$, то $L(E_4 - I_4, \sigma_2, \tau) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12 > 9$.

Пусть случайная величина Y принимает неотрицательные значения $a_1, \dots, a_n$ с вероятностями $p_1, \dots p_n$. Определим обобщение среднего геометрического $G[Y]$:

$$G[\mathrm{Y}] = \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} = e^{M[\ln Y]}$$

(если $p_i = \frac{1}{n}$ при всех $i = 1, \dots, n$, то $G[\mathrm{Y}] = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$).

Пример 2 (продолжение). В силу транзитивности группы подстановок $\mathbb{S}_n$ и симметричности матрицы, $E_3 - I_3$, случайная величина $L = L(E_3 - I_3, \sigma, \tau)$ равновероятно принимает значения 4 и 2 при независимом выборе подстановок σ и τ и при условии, что σ выбирается равновероятно из множества $S(E_3 - I_3)$, а τ – из множества $\mathbb{S}_n$. Следовательно,

$$G[L] = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2} \approx 2.82.$$

Следующий результат был сформулирован Минком и доказан Брегманом в 1973 году. Мы приводим доказательство, предложенное Шрайвером в 1978 году.

Теорема 1 (Брегман). *Пусть $A = (a_{ij})$ - $(0,1)$ – матрица размера $n \times n$, r_i – количество единиц в i-й строке. Если $r_i \geq 1$ при $1 \leq i \leq n$, то имеет место неравенство*

$$\operatorname{per} A \le \prod_{1\le i\le n} (r_i!)^{1/r_i}. \qquad (1)$$

Замечание. При транспонировании квадратной матрицы перманент не меняется, но оценка (1) может измениться, так как подсчитывается число единиц в столбцах.

Пример 3. Для $E_n - I_n$ при всех $i = 1, \dots, n$ имеет место $r_i = n - 1$, следовательно,

$$\operatorname{per}(E_n - I_n) \le \prod_{1\le i\le n} ((n-1)!)^{1/(n-1)} = ((n-1)!)^{n/(n-1)}.$$

В таблице сравниваются точное и приближенные значения D_n:

n	$D_n = \operatorname{per}(E_n - I_n)$	$n!/e$	оценка вычислена по формуле (1)
2	1	$\frac{2}{e} < 1$	$(1!)^{2/1} = 1$
3	2	$\frac{3!}{e} \approx 2.2 > 2$	$(2!)^{3/2} \approx 2.82 > 2$
4	9	$\frac{4!}{e} \approx 8.82 < 9$	$(3!)^{4/3} \approx 10.902 > 9$

Доказательство теоремы Брегмана. Заметим, что если $\operatorname{per} A = 0$, то утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что $\operatorname{per} A \ne 0$, т.е. $S(A) \ne \emptyset$. План действий таков: сначала вычислим $G[L]$, затем докажем, что $\operatorname{per} A \le G[L]$.

а) Вычислим $G[L]$ для фиксированной подстановки σ^* (усредняем по всем подстановкам $\tau \in \mathbb{S}_n$):

$$G[L|\sigma = \sigma^*] = G\left[\prod_{i=1}^{n} R_i | \sigma = \sigma^*\right] = e^{M\left[\ln \prod_{i=1}^{n} R_i | \sigma = \sigma^*\right]} = e^{M\left[\sum_{i=1}^{n} \ln R_i | \sigma = \sigma^*\right]} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{M[\ln R_i | \sigma = \sigma^*]} = \prod_{i=1}^{n} G[R_i | \sigma = \sigma^*].$$

Напомним, что R_i – число столбцов, оставшихся к тому моменту, когда из матрицы A должна быть удалена i-я строка (согласно порядку удаления строк, определяемому подстановкой τ). К этому моменту из матрицы уже удалены некоторые столбцы в порядке, определяемом подстановкой $\sigma^* \circ \tau$. В силу транзитивности («однородности») группы подстановок $\mathbb{S}_n$, величина R_i равномерно распределена на множестве $\{1, \dots, r_i\}$, поэтому

$$G[R_i] = \prod_{k=1}^{r_i} k^{1/r_i} = (r_i!)^{1/r_i},$$

откуда

$$G[L] = G[L|\sigma = \sigma^*] = \prod_{i=1}^{n} (r_i!)^{1/r_i}.$$

б) Пусть $j_1, \dots, j_{r_1}$ – номера столбцов матрицы A, в которых на пересечении с первой строкой стоят единицы ($a_{1j_k} = 1$, $k = 1, \dots, r_1$). При $k = 1, \dots, r_1$ положим $\operatorname{per} A_{1,j_k} = t_k = |\{\sigma \in S(A) \mid \sigma(1) = j_k\}|$.

Покажем, что неравенство $\operatorname{per} A \le G[L]$ имеет место при $\tau = \varepsilon$. В силу «однородности» группы подстановок $\mathbb{S}_n$, $G[L|\tau = \varepsilon] = G[L]$.

Проведем индукцию по размеру матрицы m. При $m = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть утверждение справедливо при $m \le n-1$. Рассмотрим матрицу A порядка n.

С одной стороны, воспользуемся разложением перманента по первой строке:

$$\operatorname{per} A = \sum_{l=1}^{n} a_{1l} \cdot \operatorname{per} A_{1,l} = \sum_{k=1}^{r_1} \operatorname{per} A_{1,j_k} = t_1 + \cdots + t_{r_1}. \qquad (2)$$

Положим

$$\tau' = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}, \varepsilon' = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \sigma' = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, поскольку $R_1 = r_1$, для любых σ, τ выполнено

$$L(A, \sigma, \tau) = R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n = r_1 \cdot (R_2 \cdot \ldots \cdot R_n) = r_1 \cdot L\big(A^{(2)}, \sigma', \tau'\big).$$

При $\tau = \varepsilon$ имеет место $A^{(2)} = A_{1,\sigma(1)}$. Положим

$$L\big(A_{1,\sigma(1)}, \sigma', \varepsilon'\big) = L'_\sigma,$$

тогда (усредняем по всем подстановкам $\sigma \in S(A)$):

$$G[L|\tau = \varepsilon] = \prod_{\sigma \in S(A)} \big(L(A, \sigma, \varepsilon)\big)^{1/|S(A)|} = \left(\prod_{k=1}^{r_1} \prod_{\substack{\sigma \in S(A): \\ \sigma(1) = j_k}} r_1 \cdot L\big(A_{1,j_k}, \sigma', \varepsilon'\big) \right)^{1/\operatorname{per} A} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{r_1} r_1^{t_k} \prod_{\substack{\sigma \in S(A): \\ \sigma(1) = j_k}} L'_\sigma \right)^{1/\operatorname{per} A}.$$

По предположению индукции

$$\prod_{\substack{\sigma \in S(A): \\ \sigma(1) = j_k}} (L'_\sigma)^{1/t_k} \ge G[L'_\sigma | \tau' = \varepsilon'] \ge \operatorname{per} A_{1,j_k} = t_k,$$

следовательно,

$$G[L|\tau = \varepsilon] \ge \left(\prod_{k=1}^{r_1} (r_1 \cdot t_k)^{t_k} \right)^{1/\operatorname{per} A} = r_1 \left(\prod_{k=1}^{r_1} t_k^{t_k} \right)^{1/\operatorname{per} A},$$

в силу (2).

Положим

$$t = \frac{t_1 + \cdots + t_{r_1}}{r_1}.$$

С одной стороны, $t = \operatorname{per} A / r_1$.

С другой стороны, из выпуклости вниз функции $f(x) = x \ln x$ следует, что

$$\frac{f(t_1) + \cdots + f(t_{r_1})}{r_1} = \frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^{r_1} t_k \ln t_k \ge t \ln t = f\left(\frac{t_1 + \cdots + t_{r_1}}{r_1}\right),$$

тогда

$$\prod_{k=1}^{r_1} t_k^{t_k} = e^{r_1 \cdot \frac{1}{r_1} \sum_{k=1}^{r_1} t_k \ln t_k} \ge e^{r_1 \cdot t \ln t} = t^{r_1 \cdot t} = t^{\operatorname{per} A}.$$

Теперь

$$G[L] = G[L|\tau = \varepsilon] \ge r_1 \cdot t = \operatorname{per} A.$$

Теорема доказана.

4. Среднее значение перманента случайной $(0,1)-$ **матрицы.** Сначала рассмотрим матрицу порядка $1\times n$: $a=(a_1,\dots,a_n)$. Для некоторого $r, 1\le r\le n$, случайным образом выберем множество индексов $J\subseteq\{1,\dots,n\}$ такое, что $|J|=r$. Выбор J при заданном r осуществляется равновероятно. Положим $a_j=1$, если $j\in J$, иначе $a_j=0$. Будем говорить, что задана случайная $(0,1)$-строка из r единиц и $n-r$ нулей.

Рассмотрим теперь произвольное неслучайное множество индексов I, $|I|=k$, и случайную величину $X_I=\sum_{i\in I}a_i$. Её значения варьируются от 0 до $\min(r,k)$ и зависят от выбора J.

Лемма. *Случайная величина* $X_I=\sum_{i\in I}a_i$ *имеет гипергеометрическое распределение с параметрами* n,k,r. *Её среднее значение равно*

$$M[X_I]=\frac{kr}{n}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$P(X_I=x)=\frac{C_k^x C_{n-k}^{r-x}}{C_n^r},$$

где $x=|I\cap J|-$ число единиц, оказавшихся в сумме $X_I=\sum_{i\in I}a_i$. Утверждение о среднем значении случайной величины с гипергеометрическим распределением хорошо известно.

Пусть теперь $A-(0,1)$-матрица порядка $n\times n$, строки которой содержат $r_1,\dots,r_n$ случайным образом выбранных единиц соответственно. Выбор единиц в одной строке производится независимо от выбора единиц в других строках. Тогда $\operatorname{per}A$ будет случайной величиной.

Теорема 2. *Пусть* $A=(a_{ij})-$ *случайная* $(0,1)-$ *матрица размера* $n\times n$, r_i- *количество единиц в* i *-й строке. Для среднего значения её перманента справедливо равенство*

$$M[\operatorname{per}A]=\frac{n!\,r_1\cdot\ldots\cdot r_n}{n^n}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Райзера (один из вариантов формулы включений-исключений) для перманента произвольной матрицы A, которая приведена, например, в статье А. Ю. Эвнина [7]:

$$\operatorname{per}A=\sum_{b=0}^{n}(-1)^b\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}:\\ |I|=n-b}}\prod_{s=1}^{n}\sum_{t\in I}a_{st}\ .$$

Обозначим s-ю строку матрицы A через $a_{(s)}$ и для множества индексов $I\subseteq\{1,\dots,n\}$ определим случайную величину $X_{s,I}=\sum_{t\in I}a_{st}$. Вычислим математическое ожидание перманента, пользуясь леммой и независимостью выбора единиц по отдельным строкам:

$$M[\operatorname{per}A]=\sum_{b=0}^{n}(-1)^b\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}:\\ |I|=n-b}}\prod_{s=1}^{n}M[X_{s,I}]=\sum_{b=0}^{n}(-1)^b\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}:\\ |I|=n-b}}\prod_{s=1}^{n}\frac{(n-b)r_s}{n}=V_n\cdot r_1\cdot\ldots\cdot r_n,$$

где выражение

$$V_n=\sum_{b=0}^{n}(-1)^b C_n^b\left(1-\frac{b}{n}\right)^n$$

зависит только от n. Из (1) следует, что $V_n n^n = n!$. Заметим, что можно не использовать формулу (1), а положить $r_1 = \cdots = r_n = n$, т.е. взять матрицу $A = E_n$, состоящую из одних единиц. Тогда

$$M[\operatorname{per} A] = \operatorname{per} E_n = n! = V_n \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_n = V_n n^n,$$

откуда окончательно вытекает утверждение теоремы.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 2. Пусть $A - (0,1)$-матрица порядка $n \times n$, строки которой содержат $r_1, \ldots, r_n$ единиц соответственно, а $\operatorname{per}_{max}(r_1, \ldots, r_n) -$ максимально возможное значение перманента такой матрицы. Тогда

$$\operatorname{per}_{max}(r_1, \ldots, r_n) \geq \frac{n!\, r_1 \cdot \ldots \cdot r_n}{n^n}.$$

Эту нижнюю оценку максимального перманента можно немного упростить по формуле Стирлинга:

$$\operatorname{per}_{max}(r_1, \ldots, r_n) \geq \frac{\sqrt{2\pi n}\, r_1 \cdot \ldots \cdot r_n}{e^n}.$$

В частности, при $r_1 = \cdots = r_n = 3$ из найденных выше оценок получим:

$$\left(\frac{3}{e}\right)^n \leq \operatorname{per}_{max}(3, \ldots, 3) \leq \left(\sqrt[3]{6}\right)^n.$$

Заключение

В статье изложена методика применения вероятностного подхода к решению ряда задач дискретной математики. В теоремах 1 и 2 даны оценки перманентов матриц, состоящих из нулей и единиц, полученные на основе этого подхода. Приведены примеры, позволяющие улучшить понимание тонкостей и нюансов разбираемых понятий.

Материал статьи может быть рекомендован для изучения студентам, магистрам и аспирантам, специализирующимся как в дискретной математике, так и в теории вероятностей, а также в смежных областях.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Alon N. The Probabilistic Method – 3rd ed. – New York : Wiley-Interscience, 2008. – 352 p.
2. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод / пер. 2-го англ. изд. под ред. А. А. Сапоженко. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 320 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов – 9-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2003. – 479 с.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры (издание 7-е, стереотипное). М.: Изд. МЦНМО, 2025. – 272 с.
5. Холл, М. Комбинаторика / под ред. А. О. Гельфонда, В. Е. Тараканова; пер. с англ. С. А. Широковой. – М. : Мир, 1970.
6. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику / перевод с франц. В. П. Мякишева и В. Е. Тараканова; под ред. Б. А. Севастьянова. – М. : Наука, 1975.

Эвнин А. Ю. Перманент матрицы и его вычисление / Матем. обр., 2008, № 2(46), 45–49.

Tatiana V. Andreeva,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
t-v-andreeva@mail.ru
Yuri S. Semenov,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate professor, National University of Oil and Gas "Gubkin University", Moscow
yuri_semenoff@mail.ru

A methodic for presenting probabilistic approaches to the evaluation of some matrix permanents

Abstract. The discipline “Probabilistic methods in combinatorics” is given as a special course of the master’s program for the specialty “Applied mathematics and informatics” and other specialties. A subject of the course is the application of the matrix permanent to the solution of some graph theory problems. In order to get some non-trivial results lower and upper bounds of the permanents of special matrices are used since the calculation of the exact value of permanent is cumbersome in general. In the article we present a methodic of obtaining such kind of bounds on the base of a probabilistic approach.

Keywords: matrix permanent, random variable, mean value, upper and lower bounds

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ

Аннотация

Теория регулярных языков и конечных автоматов – важнейший раздел теории формальных языков. Поэтому важно рассматривать разные методики преподавания этих разделов, особенно для студентов программистских специальностей. Цель статьи – доказательство трех теорем: первая описывает структуру решения линейного уравнения с регулярными коэффициентами; вторая касается свойств итерации, а третья утверждает замкнутость класса регулярных языков относительно суперпозиции.

Ключевые слова

теория формальных языков, регулярные языки, конечные автоматы, методика преподавания

АВТОР

Белоусов Алексей Иванович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана», г. Москва
al_belous@bk.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-14

Введение

Теория регулярных языков и конечных автоматов – основа и линейная часть теории формальных языков. В последнее время, несмотря на обширную литературу в этой области, некоторые вопросы, особенно методического характера, остаются в тени. Цель данной статьи – доказательство трех теорем о свойствах регулярных языков. Первая теорема характеризует структуру общего решения линейного уравнения с регулярными коэффициентами. Обычно эта теорема не дается в основном тексте учебных пособий, а помещается как задача для самостоятельного решения (см., например, монографию А. Ахо и Дж. Ульмана [1] или книгу А. Саломаа [2]). Тем более важно, с методической точки зрения, доказательство этой теоремы, не совсем тривиальное, подробно изложить.

Вторая теорема рассматривает свойства итерации, в частности, возможность сведение многократной итерации к простой, а также свойство итерации суммы, которое можно рассматривать, как аналог классического бинома Ньютона. Эти свойства доказываются двумя способами: непосредственно алгебраически и на основании теоремы о замкнутости класса регулярных языков относительно операции суперпозиции. Опять-таки эта теорема, насколько известно автору, подробно нигде не доказывается (видимо, как совсем простая, хотя это и не совсем так). В упомянутой книге Ахо и Ульмана [3] и в учебнике А.И. Белоусова и С.Б. Ткачева [4] подробно доказывается замкнутость относительно суперпозиции класса контекстно-свободных (КС) языков. При доказательстве теоремы о замкнутости относительно суперпозиции класса регулярных языков мы существенно опираемся на теорию полуколец, которой посвящено огромное число работ. Здесь укажем на статьи А.И. Белоусова [5] и [6], где представлены некие краткие обзоры источников по теме.

Теории регулярных языков также посвящено множество работ. Здесь сошлемся на статьи А.И. Белоусова и Р.С. Исмагилова [7], А.И. Белоусова, Р.С. Исмагилова и Л.Е. Филипповой [8].

Отметим также среди недавних публикаций работу M. T. Morazán [9], посвященную методическим проблемам преподавания теории регулярных языков и конечных автоматов студентам, обучающимся по специальностям программирования и информатики.

Предлагаемая статья носит преимущественно методический характер и может быть полезна преподавателям, ведущим курсы дискретной математики и теории формальных языков, а также студентам соответствующих специальностей.

Методология и результаты исследования

Рассматриваемая в статье методика основана на известных из перечисленных источников концепциях изложения курсов дискретной математики и теории формальных языков с учетом особенностей аудитории, в которой читается курс. Далее рассматриваются основные рубрики, по которым раскладывается теоретический материал, включая полученные результаты.

Решение линейного уравнения с регулярными коэффициентами

Теорема 1. Общее решение линейного уравнения с регулярными коэффициентами

$$x = \alpha x + \beta \tag{1}$$

при $\lambda \in \alpha$ имеет вид

$$x = \alpha^*(\beta + L), \tag{2}$$

где L – произвольный язык, а при $\lambda \notin \alpha$ имеет единственное решение

$$x = \alpha^* \beta. \tag{3}$$

Доказательство. Формула (3), как известно, дает наименьшее (по включению) решение уравнения (1). Тогда произвольное решение этого уравнения можно записать в виде

$$x = \alpha^* \beta + L, \tag{4}$$

где без ограничения общности можно считать $\alpha^* \beta \cap L = \varnothing$, в частности $\beta \cap L = \varnothing$.

Тогда, подставляя (4) в (1), получим:

$$x = \alpha^* \beta + L = \alpha(\alpha^* \beta + L) + \beta = \alpha^+ \beta + \alpha L + \beta = \alpha^* \beta + \alpha L.$$

Подставляя полученное выражение для *x* снова в (1), получим:

$$x = \alpha^* \beta + \alpha L = \alpha(\alpha^* \beta + \alpha L) + \beta = \alpha^+ \beta + \alpha^2 L.$$

Легко по индукции показать, что

$$(\forall n \geq 0)(x = \alpha^* \beta + \alpha^n L),$$

т.е.

$$x = \alpha^* \beta + \alpha^* L = \alpha^*(\beta + L).$$

Итак, формула (4), в предположении, что она дает решение уравнения (1), может быть переписана в виде (2). Но то, что (2) есть решение (1) при $\lambda \in \alpha$, т.е. при $\alpha^+ = \alpha^*$, показывает простая проверка:

$$\alpha\alpha^*(\beta + L) + \beta = \alpha^* \beta + \alpha^+ L = \alpha^* \beta + \alpha^* L = \alpha^*(\beta + L).$$

Но это значит, что при $x = \alpha^*(\beta + L)$ уравнение (1) обращается в равенство.

Теперь докажем, что при $\lambda \notin \alpha$ решение (3) есть *единственное* решение уравнения (1).

Опять будем искать решение уравнения (1) в виде (4) (при том же ограничении на язык L). Поскольку от (4) всегда в таком случае можно перейти к (2), получим, что должно выполняться равенство:

$$\alpha^*\beta + \alpha^+ L = \alpha^*\beta + \alpha^* L \ . \qquad (5)$$

Левая часть этого равенства получается при подстановке выражения (2) в правую часть уравнения (1), а правая есть решение этого уравнения (выражение (2) с раскрытой скобкой). Но теперь позитивная итерация α^+ не совпадает с общей итерацией α^*.

Далее заметим, что если для каких-то непустых множеств A, B, C имеет место равенство $A \cup B = A \cup C$ при $B \neq C$, то $B \Delta C \subseteq A$.

В самом деле:

$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cup C)} = \varnothing$

откуда

$B \cap \overline{(A \cup C)} = \varnothing$, то есть $B \subseteq A \cup C$.

Точно так же из условия

$(A \cup C) \setminus (A \cup B) = (A \cup C) \cap \overline{(A \cup B)} = \varnothing$

получаем $C \subseteq A \cup B$

Тогда, если $a \in B \setminus C$, то $a \in A$, а если $a \in C \setminus B$, то снова $a \in A$. Но это и значит, что $B \Delta C \subseteq A$.

Докажем теперь, что при $\lambda \notin \alpha$, т.е. при $\alpha^+ \neq \alpha^*$, $\alpha^+ L \neq \alpha^* L$ (при непустом L!) Также предполагается, что этот язык содержит хотя бы одно непустое слово, так как иначе доказывать нечего).

Допустим противное; тогда любое непустое слово $p \in L$ должно принадлежать языку $\alpha^+ L$ (очевидно, что $L \subseteq \alpha^* L$) и начинаться непустым префиксом из α. Выберем слово p как кратчайшее из слов языка L. Тогда $p = uy$, где $u \in \alpha, y \in L, \alpha \neq \lambda$. Но тогда $|y| < |p|$, что невозможно.

Следовательно, из равенства (5) получаем

$$(\alpha^+ L \setminus \alpha^* L) \cup (\alpha^* L \setminus \alpha^+ L) \subseteq \alpha^*\beta \ .$$

Так как $\alpha^+ L \setminus \alpha^* L = \varnothing$, то первый член объединения пуст, и мы получаем включение

$$\alpha^* L \setminus \alpha^+ L \subseteq \alpha^*\beta \ .$$

Справедливость этого включения означает, что каждое слово языка $\alpha^* L$, не начинающееся непустым префиксом из α, есть слово языка $\alpha^*\beta$. Но, так как ни одно непустое слово языка L, как только что было доказано, не начинается непустым префиксом из α, то $L \subseteq \alpha^*\beta$. Но мы брали язык L как не пересекающийся с $\alpha^*\beta$. Итак, указанное включение невозможно, что и доказывает окончательно невозможность равенства (5) при $\lambda \notin \alpha$. То есть выражение (2) не является

решением уравнения (1) при $\lambda \notin \alpha$ и непустом языке L, и единственным решением этого уравнения будет $x = \alpha^* \beta$.

Теорема доказана.

Свойства итерации

Теорема 2. Для произвольных регулярных выражений α и β:

1) $(\alpha^*)^* = \alpha^*$; 2) $(\alpha^+)^* = (\alpha^*)^+ = \alpha^*$; 3) $(\alpha + \beta)^* = (\alpha^* \beta^*)^*$.

Доказательство. Записанные выше тождества докажем двумя способами: чисто алгебраически и опираясь на теорему о регулярности суперпозиции регулярных языков, которая будет доказана ниже.

Алгебраическое доказательство.

1) Имеем: $(\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha^m \alpha^n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$, что означает справедливость тождества $(\alpha^*)^2 = \alpha^*$, и, следовательно, для любого $n \geq 1$ $(\alpha^*)^n = \alpha^*$. Итак, $(\alpha^*)^* = \alpha^*$.

2) Имеем: $(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha^m \alpha^n = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^k$. Следовательно, $(\alpha^+)^2 = \alpha\alpha^+$, т.е. $\alpha^+ + (\alpha^+)^2 = \alpha^+ + \alpha\alpha^+ = \alpha^+$, так как $\alpha^+ \supset \alpha\alpha^+$. Далее для любого $n \geq 1$ $(\alpha^+)^n = \alpha^{n-1}\alpha^+$, откуда $(\alpha^+)^+ = \alpha^* \alpha^+ = (\lambda + \alpha^+)\alpha^+ = \alpha^+ + (\alpha^+)^2 = \alpha^+$ и $(\alpha^+)^* = \lambda + (\alpha^+)^+ = \lambda + \alpha^+ = \alpha^*$.

Далее, так как итерация любого языка, содержащего пустое слово, равна его позитивной итерации, то $(\alpha^*)^+ = (\alpha^*)^* = \alpha^*$ - в силу ранее доказанного.

3) Рассмотрим выражение $(\alpha + \beta)^n = \underbrace{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)...(\alpha + \beta)}_{n}$ при $n \geq 2$. Это произведение образуется так: берем в первых k_1 скобках множитель α, в следующих m_1 скобках множитель β, затем опять k_2 раз выбираем α, после чего m_2 раз - β и т. д. Так перебираем все возможные комбинации неотрицательных чисел $k_1,...,k_p,m_1,...,m_p, p \geq 1$ такие, что $(k_1 + ... + k_p) + (m_1 + ... + m_p) = n$. Следовательно, $(\alpha + \beta)^n = \sum_{(k_1+...+k_p)+(m_1+...m_p)=n} \alpha^{k_1}\beta^{m_1}..\alpha^{k_p}\beta^{m_p}$. Эта формула сохраняет силу и при $n = 1$: тогда возможны только две комбинации: $k_1 = 1, m_1 = 0$ и $k_2 = 0, m_2 = 1$. Таким образом, $(\alpha + \beta)^* = \lambda + \sum_{n \geq 1}(\sum_{(k_1+...+k_p)+(m_1+...m_p)=n} \alpha^{k_1}\beta^{m_1}..\alpha^{k_p}\beta^{m_p}) = (\alpha^* \beta^*)^*$.

Теорема доказана.

Чтобы изложить второй способ доказательства тождеств теоремы 2, введем, согласно учебнику А.И. Белоусова и С.Б. Ткачева [10] понятие суперпозиции языков.

Пусть $L \subseteq V^*$ - язык в алфавите $V = \{a_1,...,a_n\}$. Каждой букве $a_i \in V, i = 1,...,n$

сопоставим язык $L_i \subseteq V_i^*$. В произвольном непустом слове $x = a_{i_1}...a_{i_k} \in L$ каждую его букву $a_{i_j}\,(j = 1,...,k)$ заменим произвольным словом $y_{i_j} \in L_{i_j}$. Получим слово $w = y_{i_1}...y_{i_k}$. Множество всех слов, построенных таким образом, образует язык, называемый суперпозицией (или подстановкой) языков $L_1,,,.L_n$ в язык L. Обозначение: $S(L, L_1,,,.L_n)$.

По определению принимается, что если пустое слово принадлежит языку L, то оно принадлежит и суперпозиции $S(L, L_1,,,.L_n)$.

Очевидно, что если $L = L'$, то $S(L, L_1,,,.L_n) = S(L', L_1,,,.L_n)$.

В упомянутом выше учебнике А.И. Белоусова и С.Б. Ткачева [11] доказывается, что суперпозиция контекстно-свободных (кс-) языков в кс-язык является кс-языком, то есть класс кс-языков замкнут относительно суперпозиции.

Но аналогичное свойство имеет место и для регулярных языков.

Теорема 3. Суперпозиция $S(L, L_1,,,.L_n)$, где все языки регулярны, является регулярным языком.

Доказательство. Так как L - регулярный язык, он допускается некоторым конечным автоматом и является компонентой решения системы линейных уравнений в полукольце регулярных языков вида

$$\xi = A\xi + \beta, \tag{6}$$

где n - число состояний автомата, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ - матрица, каждый элемент которой есть либо буква алфавита языка L, либо сумма таких букв (точнее говоря, простейших регулярных выражений); вектор-столбец β устроен так: все его компоненты, кроме тех, которые соответствуют заключительным состояниям конечного автомата, допускающего язык L, равны нулю полукольца (пустому языку), а соответствующие тому или иному заключительному состоянию равны λ - единице полукольца (языку, состоящему из одного пустого слова).

Тогда, переходя к суперпозиции, мы каждую букву заменяем некоторым регулярным выражением, обозначающим какой-то «дочерний» язык $L_i, i = 1,...,n$. В результате такой замены вместо системы (6) получим новую систему, но все ее коэффициенты останутся регулярными выражениями и, следовательно, ее решение также будет регулярно. Более того, если исходный язык L содержит пустое слово, то в уравнении, соответствующем начальному состоянию автомата, будет свободный член λ, который останется после описанной выше замены (как и все слагаемые λ в других уравнениях).

Теорема 3 тем самым доказана.

С учетом этого результата теорема 2 доказывается совсем просто. Если в ее тождествах считать регулярные выражения заменить буквами ($\alpha = a, \beta = b$) алфавита, в котором эти выражения определены, они становятся очевидными. Так тождество $(a + b)^* = (a^* b^*)^*$ представляет структуру любого слова в алфавите $\{a, b\}$: сначала сколько-то букв a (может быть, ни одной), потом сколько-то букв b (может быть, ни одной), и это чередование повторяется сколько-угодно раз, а может быть и ни разу (пустое слово).

Тогда $(\alpha + \beta)^* = S((a + b)^*, \alpha, \beta) = S((a^* b^*)^*, \alpha, \beta) = (\alpha^* \beta^*)^*$.

Первое и второе тождества теоремы 2 анализируются аналогично.

Заключение

В статье доказаны три теоремы о свойствах регулярных языков: теорема о структуре общего решения линейного уравнения с регулярными коэффициентами (в частности, доказана единственность решения при условии, что коэффициент при неизвестной не содержит пустого слова), теорема о свойствах итерации, в частности, свойстве итерации суммы, а также теорема о замкнутости класса регулярных языков относительно суперпозиции, на основании чего рассматривается альтернативное доказательство второй теоремы.

Все доказательства являются оригинальными, в чем и состоит научно-методическая новизна работы.

Статья может быть полезна преподавателям, ведущим курсы дискретной математики и теории формальных языков, а также студентам, изучающим эти курсы.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Ахо А, Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции: пер. с англ.: В 2 т.Т.1. – М. Мир, 1978, - 612 с.
2. Саломаа А. Жемчужины теории формальных языков: пер. с англ.- М.: Мир, 1986.- 159 с.
3. Ахо А., Ульман Дж., Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции: пер. с англ.: В 2 т.Т.1… Указ. соч.
4. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. – 8-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2025. – 703 с.
5. Белоусов, А. И. О некоторых свойствах полуколец / А. И. Белоусов // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2018. – № 3. – С. 35-50. – DOI 10.24108/0318.0001379. – EDN YWNTOS.
6. Белоусов, А. И. О некоторых методических вопросах изложения теории полуколец / А. И. Белоусов // Modern European Researches. – 2023. – Т. 1, № 1. – С. 45-54. – EDN CRTLRY.
7. Белоусов, А. И. Об одном достаточном условии нерегулярности языков / А. И. Белоусов, Р. С. Исмагилов // Математика и математическое моделирование. – 2018. – № 4. – С. 1-11. – DOI 10.24108/mathm.0418.0000121. – EDN YORHPN.
8. Belousov, A. I. On Certain Classes of Irregular Languages / A. I. Belousov, R. S. Ismagilov, L. E. Filippova // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. – 2020. – No. 3(90). – P. 30-43. – DOI 10.18698/1812-3368-2020-3-30-43. – EDN RYWLLI.
9. Morazán, M. T. Regular Expressions in a CS Formal Languages Course / M. T. Morazán // Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science. – 2023. – Vol. 382. – P. 45-63. – DOI 10.4204/eptcs.382.3. – EDN YEILWY.
10. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика…
11. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика…

***Alexey I. Belousov*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow
al_belous@bk.ru

Some properties of regular languages

Abstract. The theory of regular languages and finite automata is a crucial area of formal language theory. Therefore, it is important to consider different teaching methods for these areas, especially for students majoring in programming. The goal of this article is to prove three theorems: the first one describes the structure of the solution of a linear equation with regular coefficients; the second traits properties of iteration and the third states the closure of the class of regular languages under superposition.

Keywords: formal language theory, regular languages, finite automata, teaching methods

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРУГЕ

Аннотация

Статья будет полезна для студентов технических вузов, изучающих такие дисциплины как «Математическая физика» и «Дифференциальные уравнения в частных производных», а также педагогам, ведущим практические занятия по вышеуказанным предметам. Самым распространенный методом решение различных задач на этих курсах является метод Фурье (метод разделения переменных). Этот метод традиционно очень тяжело осваивается студентами, большие сложности возникают при решении задач с различными граничными условиями. В работе рассмотрен детальный, структурированный алгоритм метода Фурье для задачи теплопроводности в круге, который позволит быстро и эффективно приходить к решению. В работе рассмотрен структурный алгоритм для решения задачи теплопроводности в круге, приведен пример.

Ключевые слова

метод Фурье, задача теплопроводности, дифференциальное уравнения в частных производных параболического типа в пространстве, функции Бесселя

АВТОР

Береснева Евгения Викторовна,
кандидат технических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт»;
доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана» г. Москва
jane_gal@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-20

Введение

Уравнения параболического типа с частными производными используются при математическом описании процессов теплопроводности, диффузии и переноса веществ в различных средах. В этой работе рассмотрим случай подобной задачи: распространения тепла в круге, что математически интерпретируется следующим видом уравнения: $U_t - a^2 \Delta U = O$. Граничные условия задаются уравнением: $U(r_0, t) = 0$, начальными состояние определяют $U(r, 0) = f(r)$.

Главным способом поиска решения сформулированной задачи является метод Фурье, который вызывает сложности у студентов при освоении, особенно самостоятельно. Продолжаем серию статей, посвященных методике преподавания этого метода [1, 2]. Существует много учебников, таких авторов, как А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [3], Л.К. Мартинсон, Ю.Н. Малов [4], различные учебные и учебно-методических пособия, таких авторов, как В.С. Владимиров, В.В. Жаринов [5] и Т.Н. Михащенко [6] рассматривающий метод Фурье для множества типов задач. В этой статье излагается методика преподавания метода Фурье, сформированная наалгоритме, который обеспечит студенту пошаговое решение поставленной задачи, что существенно минимизирует количество ошибок в вычислениях и облегчит освоение метода.

Методология и результаты исследования

С учетом поставленных условий, формулировка задачи выглядит следующим образом:

Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности в круге:

$U_t - a^2\Delta U = 0, \quad t \in [0,+\infty) \ , \quad r \in [0,r_0], y \in [0,b]$

при начальных условиях
$U(r,0) = f(r)$

и граничных условиях
$U(r_0,t) = 0$

Алгоритм.

1. Записываем оператор Лапласа в полярных координатах, получаем уравнение
   $U_t = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2})$.
   Так как граничное и начальное условие не зависят от φ и коэффициенты уравнения так же не зависят от φ, решение первой смешанной задачи тоже не зависит от φ, т.е.
   $U(r,\varphi,t) = U(r,t)$,
   $U_t = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r})$.
2. Находим вспомогательные решения $v(x,t)$ уравнения $U_t = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r})$ в виде $v(x,t) = R(r) \cdot T(t)$,
   причем $|R(0)| < \infty$ и $R(r_0) = 0$. Для этого подставляем $v(x,t) = R(r) \cdot T(t)$ в уравнение и разделяем переменные. Получаем
   $$\frac{\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})}{R(r)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = const.$$
3. Поэтому функции $R(r)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:
   а) $R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda \cdot R(r) = 0$,
   $|R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0$
   б) $T''(t) - \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) = 0$
4. Решаем задачу (а).
   Уравнение $R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda \cdot R(r) = 0$ имеет общее решение
   $R(r) = C \cdot J_0(\sqrt{\lambda}r) + D \cdot Y_0(\sqrt{\lambda}r)$, где J_0 и Y_0 – это функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \to \infty$ при $r \to 0$, полагаем $D = 0$.

Напомним, что функция Бесселя нулевого порядка определяется выражением: $J_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$, а функция Бесселя порядка m определяется выражением: $J_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+m}}{2^{2n+m} n!(n+m)!}$.

Используя граничное условие $R(r_0) = 0$, получаем

$\lambda_n = (\frac{\mu_n}{r_0})^2$, $R_n = C_n J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r)$, $n = 1,2,3...$, где

μ_n-нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0$ при $n = 1,2,3...$

Напомним, что функции $J_m(\mu_n x)$ - образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале (0,1), с весом x.

Так же напомним, что $J_0^{/}(x) = J_1(x)$.

5. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = (\frac{\mu_n}{r_0})^2$ имеем

$T^{/}{}_n(t) - (\frac{\mu_n}{r_0})^2 \cdot a^2 \cdot T_n(t) = 0$, общее решение этого уравнения:

$T_n = \bar{A}_n \exp(-(\frac{\mu_n}{r_0} a)^2 \cdot t)$.

6. Итак, вспомогательные решения $v_n = R_n \cdot T_n$ имеют вид

$$v_n(r,t) = C_n \cdot \bar{A}_n J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r) \cdot \exp(-(\frac{\mu_n}{r_0} a)^2 \cdot t) = A_n J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r) \cdot \exp(-(\frac{\mu_n}{r_0} a)^2 \cdot t)$$

Где $A_n = \bar{A}_n \cdot C_n$ - постоянная, которую надо найти.

7. Решение задачи ищем в виде

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r) \cdot \exp(-(\frac{\mu_n}{r_0} a)^2 \cdot t)).$$

Эта функция является решением уравнения $U_t = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r})$ и удовлетворяет граничным условиям при любых A_n, при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

8. Находим A_n, при которых $U(r,t)$ удовлетворяет начальным условиям. Полагая в найденном решении $t = 0$ получаем

$$U(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r) = f(r) \cdot .$$

Отсюда в силу формул Эйлера-Фурье следует, что

$$A_n = \frac{2\int_0^{r_0} J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r) f(r) r dr}{J_0{}^{/2}(\mu_n)} = \frac{2\int_0^{r_0} J_0(\frac{\mu_n}{r_0} r) f(r) r dr}{J_1{}^2(\mu_n)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд, получаем искомое решение. Записываем ответ.

Пример. *Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности в круге:*

$U_t - \Delta U = 0$, $t \in (0,\infty)$, $r \in [0,1)$,

при начальных условиях $U(r,0) = 1 - r^2$ *и граничных условиях* $U(1,t) = 0$

Решение.

1. Записываем оператор Лапласа в полярных координатах, получаем уравнение

   $$U_t = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}).$$

   Так как граничное и начальное условие не зависят от φ и коэффициенты уравнения так же не зависят от φ, решение первой смешанной задачи тоже не зависит от φ, т.е.

   $U(r,\varphi,t) = U(r,t)$,

   $$U_t = (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}).$$

2. Находим вспомогательные решения $v(x,t)$ уравнения $U_t = (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r})$ в виде

   $v(x,t) = R(r) \cdot T(t)$,

   причем $|R(0)| < \infty$ и $R(1) = 0$. Для этого подставляем $v(x,t) = R(r) \cdot T(t)$ в уравнение и разделяем переменные. Получаем

   $$\frac{\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r})}{R(r)} = \frac{T^{//}(t)}{T(t)} = -\lambda = const.$$

3. Поэтому функции $R(r)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

   а) $R^{//}(r) + \frac{1}{r}R^{/}(r) + \lambda \cdot R(r) = 0$,

   $|R(0)| < \infty$, $R(1) = 0$

   б) $T^{//}(t) - \lambda \cdot T(t) = 0$

4. Решаем задачу (а).

   Уравнение $R^{//}(r) + \frac{1}{r}R^{/}(r) + \lambda \cdot R(r) = 0$ имеет общее решение

   $R(r) = C \cdot J_0(\sqrt{\lambda}r) + D \cdot Y_0(\sqrt{\lambda}r)$, где J_0 и Y_0 — это функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \to \infty$ при $r \to 0$, полагаем $D = 0$.

   Используя начальное условие $R(r_0) = 0$, получаем

   $\lambda_n = -(\mu_n)^2$, $R_n = C_n J_0(\mu_n r)$, $n = 1,2,3...$, где

   μ_n-нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0$ при $n = 1,2,3...$

5. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = -(\mu_n)^2$ имеем

   $T^{/}{}_n(t) - (\mu_n) \cdot T_n(t) = 0$, общее решение этого уравнения:

$T_n = \bar{A}_n \exp(-\mu_n{}^2 t)$.

6. Итак, вспомогательные решения $v_n = R_n \cdot T_n$ имеют вид

$$v_n(r,t) = C_n \cdot \bar{A}_n \, J_0(\mu_n r) \cdot \exp(-(\mu_n)^2 \cdot t) = A_n J_0(\mu_n r) \cdot \exp(-(\mu_n)^2 \cdot t)$$

Где $A_n = \bar{A}_n \cdot C_n$ - постоянная, которую надо найти.

7. Решение задачи ищем в виде

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, J_0(\mu_n r) \cdot \exp(-(\mu_n)^2 \cdot t)).$$

Эта функция является решением уравнения $U_t = (\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r})$ и удовлетворяет граничным условиям при любых A_n , при которых ряд сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

8. Находим A_n , при которых $U(r,t)$ удовлетворяет начальным условиям. Полагая в найденном решении $t = 0$ получаем

$$U(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, J_0(\mu_n r) = 1 - r^2 \cdot .$$

Отсюда в силу формул Эйлера-Фурье следует, что

$$A_n = \frac{2\int_0^1 J_0(\mu_n r)(1-r^2) r dr}{J_0{}^{/2}(\mu_n)} = \frac{2\int_0^1 J_0(\mu_n r)(1-r^2) r dr}{J_1{}^2(\mu_n)}$$

Используя формулу $\frac{d}{dx}(x^m J_m(x)) = x^m J_{m-1}(x)$, интегрированием по частям получаем:

$$\int_0^1 J_0(\mu_n r)(1-r^2) r dr = \left| \begin{matrix} z = \mu_n r \\ dz = \mu_n dr \end{matrix} \right| = \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} (1 - \frac{z^2}{\mu_n{}^2}) J_0(z) z dz =$$

$$= \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} (1 - \frac{z^2}{\mu_n{}^2}) \frac{d}{dz}(J_1(z) z) dz = \frac{1}{\mu_n^2}(1 - \frac{z^2}{\mu_n{}^2}) z J_1(z) \Big|_0^{\mu_n} + \frac{2}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} z^2 J_1(z) dz =$$

$$= \frac{2}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} \frac{d}{dz}(z^2 J_2(z)) dz = \frac{2}{\mu_n^4} z^2 J_2(z) \Big|_0^{\mu_n} = \frac{2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2}.$$

Находим коэффициенты:

$$A_n = \frac{2\int_0^1 J_0(\mu_n r)(1-r^2) r dr}{J_1{}^2(\mu_n)} = \frac{4 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1{}^2(\mu_n)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд, получаем искомое решение.

Ответ. $U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1{}^2(\mu_n)} J_0(\mu_n r) \cdot \exp(-(\mu_n)^2 \cdot t)).$

Заключение

Метод Фурье самый главный аналитический метод для решения дифференциальных уравнений в частных производных не только параболического типа, но и гиперболического, и эллиптического типа с различными граничными условиями, которые описываю важные физические процессы. Громоздкость метода, сложность вычислений, требует структурированного алгоритма, позволяющего не допустить ошибок при решение поставленных задач.

Данная работа будет интересна почти всем студентам второго курса МГТУ Баумана на занятиях «Математической физики», а также преподавателям, которые ведут этот курс.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Береснева Е.В. Методика преподавания метода Фурье для решения однородного волнового уравнения на отрезке. Modern European Researches No 1 (T/2)/2024. – с 5-11.
2. Береснева Е.В. Методика преподавания метода Фурье для решения однородного волнового уравнения в прямоугольнике. Modern European Researches No 2 (T/1)/2025. - с 24-31.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А.: Уравнение математической физики. -М: наука. Изд. 7-е, 2004 г, 735 с.
4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.Н.: Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник для студентов вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко, - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996 г. - 364 с.
5. Владимиров В.С., Жаринов В.В.: Уравнения математической физики. - М:. Главная редакция физико-математической литературы, 2004 г. - 512 с.
6. Михащенко Т.Н.: Уравнение с частными производными: Учебное пособие. - Изд-во Курганского гос. ун-та. - 2022 г. - 76 с.

Evgenia V. Beresneva,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Aviation Institute;
Associate Professor of the Bauman Moscow State Technical University, Moscow
jane_gal@mail.ru

The method of teaching the Fourier method to solve the problem of heat conduction in a circle

Abstract. The article will be useful for students of technical universities studying such disciplines as "Mathematical Physics" and "Partial Differential Equations", as well as for teachers conducting practical classes in the above-mentioned subjects. The most common method of solving various problems in these courses is the Fourier method (the method of separation of variables). This method is traditionally very difficult for students to master, and great difficulties arise when solving problems with various boundary conditions. The paper discusses a detailed, structured algorithm for the Fourier method for the heat conduction problem in a circle, which will allow you to quickly and efficiently arrive at a solution. The paper discusses a structured algorithm for solving the heat conduction problem in a circle, and provides an example.

Keywords: Fourier method, heat conduction problem, parabolic partial differential equation in spatia

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ СЕМИНАРА ПО ТЕМЕ «СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Аннотация

Одно из первых семинарских занятий по курсу теории вероятностей посвящено формулам сложения и умножения вероятностей. И несмотря на относительную простоту рассматриваемых задач, есть ряд аспектов, на которые важно обратить внимание. Целью работы является обсуждение некоторых методических аспектов проведения семинара по теме «Сложение и умножение вероятностей». В работе подробно разбираются отдельные типы заданий. Почти для каждой рассмотренной задачи приводится несколько способов её решения.

Ключевые слова

теория вероятностей, гипергеометрическая схема, испытания Бернулли, формула сложение вероятностей, формула умножения вероятностей

АВТОРЫ

Бирюков Олег Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский Государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
onbiryukov@bmstu.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
nhasanov@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-26

Введение

В процессе проведения семинарского занятия преподавателю важно не столько донести до учащихся алгоритм решения задач, что они и так могут прочитать в учебниках, сколько акцентировать внимание на тех аспектах, про которые обычно в учебниках не пишут: с чего начать решение задачи, как выбрать ту или иную формулу для решения, почему задача решается именно по этой формуле, а не по другой.

В данной работе рассматриваются семинарское занятие по курсу теории вероятностей, посвященное формулам сложения и умножения вероятностей. Несмотря на относительную простоту рассматриваемых в этой теме задач, есть ряд аспектов, на которые важно обратить внимание.

Достаточно подробное изложение этой теории можно найти в учебнике А.В. Печинкина [1], а примеры задач, в том числе с решениями, – в учебниках Г.И. Агапова [2], В.А. Ватутина [3], А.В. Лебедева [4] и Д.Т. Письменного [5].

Целью работы является обсуждение некоторых методических аспектов проведения семинара по теме «Сложение и умножение вероятностей». В работе разбираются отдельные типы заданий. Почти для каждой рассмотренной задачи приводится несколько способов её решения.

Работа будет полезна преподавателям вузов для подготовки к семинарам по теории вероятностей, а также студентам, желающим лучше разобраться в решении задач по рассматриваемой теме.

Методология и результаты исследования

Почти во всех задачах далее рассматриваются два типа выборок – с возвращением и без возвращения. Выбор с возвращением означает, что каждый выбираемый элемент возвращается обратно в общий набор и может при следующем выборе быть выбран повторно. Выбор без возвращения означает, что выбираемые элементы не повторяются.

Пример 1. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Наудачу вынимают 2 шара (без возвращения). Найдём вероятность, что второй вынутый шар будет красный.

Решение. Так как шары вынимают наудачу, у каждого из 10 шаров изначально одинаковый шанс оказаться вторым выбранным. Поэтому имеем 10 равновероятных возможностей, из которых 6 благоприятствуют искомому событию. Поэтому вероятность равна 6/10.

Пример 2. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Наудачу вынимают 2 шара (с возвращением). Найдём вероятность, что второй вынутый шар будет красный.

Решение. Так как выбранные шары возвращаются в корзину, перед выбором второго шара в корзине будет 10 шаров, из которых 6 красных. Поэтому искомая вероятность равна 6/10.

Обратите внимание, что вероятность второго красного шара равна 6/10 не зависимо от того, возвращают шары в корзину или нет. При этом в решении задачи из примера 2 можно было обосновать ответ точно теми же словами, что и в примере 1.

Вместе с тем, следует заметить, что обоснование решения в примере 1 (при котором игнорируется первый шар и фактически рассматривается только второй) обычно плохо воспринимается учащимися, требующими обязательного рассмотрения ещё и первого шара. Поэтому к задаче из примера 1 помимо указанного решения можно приводить ещё и другой способ решения: с использованием формулы полной вероятности.

Другой способ решения задачи из примера 1. Введём в рассмотрение две гипотезы: H_1 – первый шар красный и H_2 – первый шар синий. И найдём полную вероятность события A – второй шар красный.

$$P(H_1) = \frac{6}{10}, \qquad P(H_2) = \frac{4}{10},$$

$$P(A|H_1) = \frac{5}{9}, \qquad P(A|H_2) = \frac{6}{9},$$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.$$

Для наглядности формульные вычисления можно сопроводить следующей схемой с деревом всех возможных вариантов: для вычисления полной вероятности надо сложить все вероятности, соответствующие второму красному шару, умножая каждую из них на всё, что расположено выше по дереву.

При составлении выборок помимо наличия повторений нужно ещё обращать внимание на то, важен ли порядок выбираемых элементов. Если для выбираемых элементов в задаче подразумеваются

различные условия, то порядок выбора важен и это размещения. Если же для выбираемых элементов, несмотря на их различие, указываются одинаковые условия, то порядок выбора не важен и это сочетания.

При решении задач по формуле классической вероятности выбираемые элементы, как правило, представляют собой отдельные материальные объекты, состоящие из различных атомов и молекул, поэтому их всегда надо считать различными и для подсчёта числа исходов пользоваться формулой для размещений.

Часто требуется найти вероятность события, в формулировке которого есть слова «хотя бы один». В этом случае почти всегда лучше найти вероятность противоположного события, в формулировке которого будут слова «ни одного».

Пример 3. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Наудачу вынимают 3 шара (без возвращения). Найдём вероятность, что из трёх вынутых шаров будет хотя бы один красный.

Решение. Обозначим событие A – из трёх вынутых шаров хотя бы один красный. И найдём вероятность противоположного события $\bar{A}$ – ни одного красного.

Общее число исходов эксперимента равно числу способов из 10 шаров выбрать 3 шара. Так как шары выбираются без возвращения, то повторений нет и следует использовать формулу для размещений из 10 по 3:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720.$$

Число исходов, благоприятствующих событию $\bar{A}$, равно способов выбрать из 4 синих шаров 3 шара. Это будут размещения из 4 по 3:

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

Отсюда вероятность события $\bar{A}$ равна:

$$P(\bar{A}) = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

А искомая вероятность будет

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}. \square$$

Как уже было сказано выше, при решении задач по формуле классической вероятности для подсчёта числа исходов следует пользоваться формулой для размещений. Однако при выборе без возвращения, т.е. без повторений, если выбираемые элементы никак в рамках задачи не различаются, можно считать их одинаковыми и использовать формулу для сочетаний, а не для размещений.

Другой способ решения задачи из примера 3. Выбираемые из корзины шары ничем, кроме цвета, в рамках задачи не различаются, и выбор производится без повторений, поэтому будем использовать формулу для сочетаний:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{\frac{4!}{3!\cdot 1!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}.$$

Как видим, у сочетаний C_4^3 и C_{10}^3 сокращается одинаковый множитель 3! и они превращаются в размещения A_4^3 и A_{10}^3. Отсюда и возможность использовать сочетания. Важно, что такая возможность появляется благодаря тому, что шары выбираются без повторений.

Третий способ решения задачи из примера 3. Для поиска вероятности хотя бы одного из трёх красного шара необязательно переходить к противоположному событию, можно использовать формулу сложения вероятностей, но вычисления будут сложнее. Обозначим через A_i, $i = \overline{1,3}$, событие, означающее, что i-й шар красный. Тогда искомое событие можно записать как сумму $A_1 + A_2 + A_3$ и

$$P = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

Из рассмотрения примеров 1 и 2 ясно, что вероятность вынуть красный шар не зависит от того, о каком шаре по счёту идёт речь, о первом вынутом, втором или любом другом. Поэтому вероятности $P(A_1)$, $P(A_2)$ и $P(A_3)$ одинаковые. Аналогично, вероятности $P(A_1A_2)$, $P(A_1A_3)$ и $P(A_2A_3)$ тоже будут одинаковые. И поскольку шары выбираются без повторений, будем считать через сочетания:

$$P = 3 \cdot P(A_1) - 3 \cdot P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3) = 3 \cdot \frac{6}{10} - 3 \cdot \frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{18}{10} - 1 + \frac{1}{6} = \frac{29}{30}. \square$$

Сочетания используются и в формуле для *гипергеометрической вероятности*: вероятность из n объектов, разделённых на два типа (n_1 объектов 1-го типа и n_2 объектов 2-го типа), выбрать k различных объектов, из которых k_1 объектов 1-го типа и k_2 объектов 2-го типа, равна:

$$P = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k}.$$

Пример 4. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Наудачу вынимают 3 шара (без возвращения). Найдём вероятность, что из трёх вынутых шаров будет два красных и один синий.

Решение. В корзине $n = 10$ шаров, разделённых на два типа: $n_1 = 6$ красных и $n_2 = 4$ синих. И надо выбрать $k = 3$ различных шара, из которых будет $k_1 = 2$ красных и $k_2 = 1$ синий. По формуле гипергеометрической вероятности получаем:

$$P = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}. \square$$

Другой способ решения задачи из примера 4. Заметим, что в этой задаче, как и в любой задаче на классическую вероятность, можно считать шары различными и решать через размещения, но тогда это будет означать, что порядок выбора шаров важен и для подсчёта числа исходов, благоприятствующих искомому событию, надо ещё умножить на число способов переставить друг относительно друга выбранные 2 красных и 1 синий шары, а это число перестановок с повторениями, которое вычисляется по формуле для полиномиальных коэффициентов $C(2,1)$.

$$P = \frac{A_6^2 \cdot A_4^1 \cdot C(2,1)}{A_{10}^3} = \frac{\frac{6!}{(6-2)!} \cdot \frac{4!}{(4-1)!} \cdot \frac{(2+1)!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{(10-3)!}} = \frac{1}{2}. \square$$

В случае если выбор осуществляется с возвращением, то вместо гипергеометрической схемы возникает схема Бернулли.

Пример 5. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Наудачу вынимают 3 шара (с возвращением). Найдём вероятность, что из трёх вынутых шаров будет два красных и один синий.

Решение. Так как шары выбираются с возвращением, то выбор каждого нового шара не зависит от выбора предыдущих. Поэтому вместо гипергеометрической схемы здесь используется биномиальная схема, т.е. схема испытаний Бернулли. Будем считать выбор красного шара «успехом», тогда вероятности успеха и неудачи соответственно равны:

$$p = 0{,}6, \qquad q = 0{,}4.$$

По формуле Бернулли ищем вероятность двух успехов в трёх испытаниях:

$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^1 = 0{,}432. \square$

Встречаются задачи, для решения которых одновременно используется и формула полной вероятности и формула Бернулли. И здесь есть особенность, в каком порядке применять эти формулы.

Пример 6. В первой корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих, а во второй корзине 8 красных шаров и 2 синих. Из наудачу выбранной корзины вынимают три случайных шара (с возвращением). Найдём вероятность, что из трёх вынутых шаров будет два красных и один синий.

Решение. В задаче речь идёт о составном событии: сначала выбирается случайная корзина, потом из неё наугад вынимают шары. Поэтому следует использовать формулу полной вероятности. Введём в рассмотрение две гипотезы: H_1 – выбрана первая корзина и H_2 – выбрана вторая корзина. И найдём полную вероятность события A – из трёх вынутых шаров два красных и один синий.

Так как корзина выбирается наудачу, то априорные вероятности гипотез будут одинаковые и равные 0,5:

$P(H_1) = 0{,}5, \qquad P(H_2) = 0{,}5.$

Так как шары вынимают с возвращением, то для вычисления условных вероятностей используем формулу Бернулли. Будем считать выбор красного шара «успехом», тогда для первой корзины вероятность успеха равна $0{,}6$, а для второй корзины – $0{,}8$.

$P(A|H_1) = C_3^2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432, \qquad P(A|H_2) = C_3^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}384.$

$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0{,}432 \cdot 0{,}5 + 0{,}384 \cdot 0{,}5 = 0{,}408.$ □

Пример 7. В первой корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих, а во второй корзине 7 красных шаров и 3 синих. Из наудачу выбранной корзины вынимают случайный шар, смотрят на его цвет и возвращают шар в корзину. Данный процесс повторяют трижды. Найдём вероятность, что из трёх вынутых шаров будет два красных и один синий.

Решение. Отличие этой задачи от предыдущей в том, что корзина теперь каждый раз выбирается заново и шары могут быть вынуты из разных корзин. Поэтому сначала находим полную вероятность выбора одного красного шара из случайной корзины. Введём в рассмотрение две гипотезы: H_1 – выбрана первая корзина и H_2 – выбрана вторая корзина. И найдём полную вероятность события A – вынут красный шар.

$P(H_1) = 0{,}5, \qquad P(H_2) = 0{,}5,$

$P(A|H_1) = 0{,}6, \qquad P(A|H_2) = 0{,}8,$

$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}7\,.$

Считая теперь вынимание красного шара из случайной корзины успехом, найдём вероятность двух успехов в трёх испытаниях Бернулли:

$P = C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441.$ □

Рассмотрим ещё два примера задач, отличие которых только в том, осуществляется выбор с возвращением или без.

Пример 8. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Дав игрока по очереди вынимают один шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет красный шар. Найдём вероятность, что выиграет игрок, начинающий игру.

Решение. Игрок, начинающий игру, может выиграть на первом ходу, втором или третьем, причём если дело дойдёт до третьего хода, то синих шаров уже не останется и игрок, начинающий игру, точно выиграет. Обозначим через A_i, $i = \overline{1,3}$, событие, означающее выигрыш игрока, начинающего игру, на i-м ходу. Тогда $P(A_1) = \frac{6}{10}$.

Событие A_2 означает одновременное наступление следующих событий: первый игрок вынимает синий шар, потом второй игрок вынимает синий шар, затем первый игрок вынимает красный шар. Это можно рассчитать по формуле умножения вероятностей:

$$P(A_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8}.$$

Аналогично находим вероятность события A_3, и искомая вероятность равна сумме вероятностей событий A_1, A_2 и A_3:

$$P = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \frac{74}{105}. \square$$

Пример 9. В корзине лежат 6 красных шаров и 4 синих. Дав игрока по очереди вынимают один шар (с возвращением). Выигрывает тот, кто первым вынет красный шар. Найдём вероятность, что выиграет игрок, начинающий игру.

Решение. Поскольку теперь шары возвращаются, синие шары в корзине не заканчиваются, и игра может длиться сколь угодно долго, вследствие чего подсчёт вероятности превращается в бесконечную сумму:

$$P = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ \ldots \ = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \ \ldots$$

Несложно увидеть здесь бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и найти вероятность как сумму всех членов такой прогрессии:

$$P = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{16}{100} + \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{16}{100}\right)^2 + \ \ldots \ = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{16}{100}} = \frac{5}{7}. \square$$

Другой способ решения задачи из примера 9. В этой задаче можно найти ответ и без использования формулы суммы геометрической прогрессии. Обозначим вероятность выигрыша игрока, начинающего игру, через x:

$$x = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{16}{100} + \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{16}{100}\right)^2 + \ \ldots$$

Тогда для другого игрока вероятность выигрыша будет равна:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{16}{100} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{16}{100}\right)^2 + \ \ldots = \frac{4}{10} \cdot x.$$

И поскольку один из двух игроков точно выиграет, сумма вероятностей должна быть равна 1:

$$x + \frac{4}{10} x = 1.$$

Откуда искомая вероятность $x = \frac{5}{7}$.

Заключение

В работе рассмотрены некоторые методические аспекты проведения семинара по теме «Сложение и умножение вероятностей», на которые важно обратить внимание преподавателю. Акцентирование внимания учащихся на рассмотренных аспектах позволит лучше усвоить материал и обращать внимание на те моменты в формулировках задач, от которых зависит выбор правильной формулы для решения. Почти к каждой рассмотренной задаче либо даётся несколько вариантов решения, либо приводится похожая задача с небольшим отличием в условии. Всё это позволяет лучше почувствовать связь между разными формулами теории вероятностей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).
2. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1994. – 112 с.: ил.
3. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2005. – 315, [5] с. : ил.
4. Лебедев А.В., Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Под ред. А.В. Лебедева. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М., 2018. – 480 с.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Дмитрий Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с. – (Высшее образование).

***Oleg N. Biryukov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
onbiryukov@bmstu.ru
***Nail A. Khasanov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
nhasanov@bmstu.ru

Methodological aspects of the seminar on "Addition and multiplication of probabilities"

Abstract. One of the first seminars in the course of probability theory is devoted to the formulas of addition and multiplication of probabilities. And despite the relative simplicity of the tasks under consideration, there are a number of aspects that it is important to pay attention to. The purpose of the paper is to discuss some methodological aspects of the seminar on the topic "Addition and multiplication of probabilities". The paper discusses individual types of tasks in detail. For almost every problem considered, there are several ways to solve it.

Keywords: probability theory, hypergeometric scheme, Bernoulli tests, formula addition of probabilities, probability multiplication formula.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Аннотация

Формирование навыков грамотного вычисления двойных интегралов является важной и актуальной задачей при подготовке инженерных кадров. Однако не менее важной задачей является развитие у студентов умения практического применения полученных знаний. Вычисление объемов тел является классическим примером применения двойных интегралов в практических задачах. В работе рассматриваются особенности методики преподавания использования двойных интегралов (в том числе замена переменных и т.п.) для нахождения объемов тел. Рассмотрены типичные ошибки и способы их устранения. В работе приводятся краткие теоретические сведения, необходимые при рассмотрении данной темы. Приведены примеры нахождения объемов тел при помощи двойного интеграла.

Ключевые слова

объем тела, цилиндрическое тело, двойной интеграл, повторный интеграл, замена переменных, полярные координаты

АВТОРЫ

Велищанский Михаил Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
velmiha@yandex.ru

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-33

Введение

Данная работа является продолжением публикаций Велищанского М.А. с соавторами [1,2] и посвящена методике преподавания семинара по вычислению объемов цилиндрических тел при помощи двойного интеграла.

Так же как задача о нахождении площади криволинейной трапеции привела к появлению определенного интеграла, так и задача о нахождении объема цилиндрического тела (но не только она одна) привела к возникновению понятия двойного интеграла и, впоследствии, его обобщения – кратного интеграла.

Вычисление объемов тел является важным, но далеко не единственным, примером практического применения кратных интегралов и двойного интеграла, в частности. Не смотря на бурное развитие и распространение различных математических пакетов, имеющих в своем составе, среди прочего, и средства для вычисления объемов тел, грамотный инженер должен иметь представление о том, как они работают, какие есть ограничения и т.п. Ведь имея хорошие практические

навыки решения подобных задач, студенту в дальнейшем не составит особого труда так поставить задачу или переформулировать уже существующую, чтобы используемые программные продукты могли найти адекватное решение.

Представленный далее материал получен на основании опыта преподавания в МГТУ им. Н.Э. Баумана семинарских занятий по курсу «Кратные и криволинейные интегралы, теория поля и ряды.

Методология и результаты исследования

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению методики проведения занятия о вычислении объема цилиндрических тел при помощи двойного интеграла, напомним некоторые известные [3-5] определения и формулы, которые будут использованы нами в дальнейшем при рассмотрении иллюстрирующих примеров.

Определение 1. Пусть в плоскости xOy замкнутый контур Γ_G ограничивает область G конечного диаметра $d(G)$ и конечной площади $m(G)$. Рассмотрим тело T, ограниченное сверху непрерывной поверхностью заданной уравнением $z = f(x,y)$, причем $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in G$, цилиндрической поверхностью C, ортогональной плоскости xOy, и областью G плоскости xOy. Данное тело T будем называть цилиндрическим телом (рис. 1).

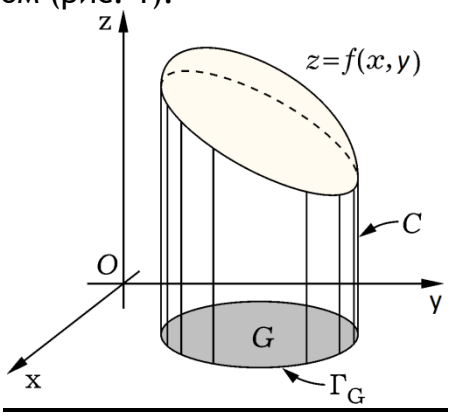

Рис. 1 Цилиндрическое тело

Замечание 1. При этом область G обычно называют проекцией объема на выбранную плоскость (в данном случае на плоскость xOy).

Как известно (см., например, [6]), объем цилиндрического тела, представленного на рис. 1, равен значению следующего двойного интеграла:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Замечание 2. В случае, если тело T из определения 1 снизу ограничено не областью G плоскости xOy, а некоторой непрерывной поверхностью $z = f_2(x,y)$, такой, что $f(x,y) \geq f_2(x,y) \ \forall (x,y) \in G$ (при этом тело T по-прежнему «проецируется» на плоскость xOy в область G), то для нахождения искомого объема в (1) необходимо заменить подынтегральную функцию на разность функций $f(x,y)$ и $f_2(x,y)$, т.е.:

$$\iint\limits_G \left(f(x,y) - f_2(x,y) \right) dxdy \qquad (2)$$

Таким образом, первой задачей, которую приходится решать в задачах на вычисление объема – это описание искомого объема как цилиндрического тела (см.

определение 1), для последующего применения формулы (1). При этом выбор плоскости, куда проектировать искомый объем (т.е. выбор плоскости, где «будет находиться» область G), не всегда однозначен и зачастую ведет к совершенно разным уровням сложности в вычислении полученного двойного интеграла. На эту особенность необходимо обратить особое внимание студентов при проведении данного семинара.

При этом на представлении искомого объема в виде (1) или (2) сложности в решении рассматриваемой задачи не заканчиваются, а переходят в плоскость вычисления полученного двойного интеграла, чему посвящены, в частности, работы Велищанского М.А. с соавторами [7,8].

Далее в работе приводятся примеры, рассматриваемые, как правило, авторами при проведении занятия по данной теме.

Пример 1. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями [9].

На рис. 2а схематично приведены указанные в условии поверхности (искомый объем закрашен зеленым). Здесь в качестве поверхности $z = f(x, y)$ из определения 1 выступает эллиптический параболоид, цилиндрическая поверхность C задается тремя плоскостями: $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 1$. Областью G на плоскости xOy будет треугольник (см. рис 2б).

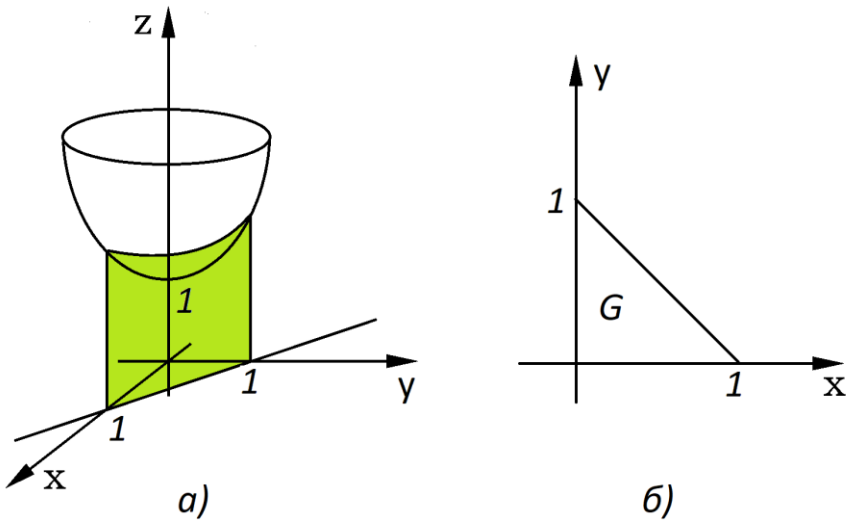

Рис. 2 Поверхности из условия примера 1 и проекция объема

Таким образом, для вычисления объема указанного тела необходимо вычислить следующий двойной интеграл: $\iint\limits_G (2x^2 + y^2 + 1)dxdy$. Вычисление данного интеграла, как, впрочем, и остальных двойных интегралов в последующих примерах, будем проводить путем сведения его к повторному интегралу (см., например, [10]).

$$\iint\limits_G (2x^2 + y^2 + 1)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1)dy = \int\limits_0^1 \left(2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + (1-x) \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + x - \frac{x^2}{2} - \frac{(1-x)^4}{3 \cdot 4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Отметим, что в данной задаче «спроектировать» искомый объем на другие координатные плоскости вряд ли получится (ввиду крайне сложной формы области G, а так же разных поверхностей, ограничивающих искомый объем сверху).

Пример 2.

Тело ограничено цилиндром $x^2+z^2=a^2$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $y=x$ и содержит точку $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{4},\frac{a}{2}\right)$. Вычислить его объем [11].

На рис. 3 схематично приведены указанные в условии поверхности. Искомый объем закрашен зеленым цветом. В данной задаче выбор ограничивающей поверхности $z=f(x,y)$, а так же цилиндрической поверхности C из определения 1 уже не так однозначен как в примере 1. Возможны два основных варианта.

1. Поскольку одной из поверхностей, ограничивающих искомый объем, является цилиндр $x^2+z^2=a^2$, то в качестве цилиндрической поверхности C можно взять данный цилиндр и плоскости $y=0$, $z=0$. Тогда в качестве ограничивающей поверхности будет плоскость $y=x$. В этом случае область G на плоскости xOz будет иметь вид, представленный на рис. 4а (для наглядности обозначена как G_1).
2. В качестве цилиндрической поверхности C можно взять плоскости $y=0$ и $y=x$, тогда ограничивающей поверхностью будет цилиндр $x^2+z^2=a^2$. Область G на плоскости xOy будет представлять собой треугольник (см. рис. 4б, область G_2)

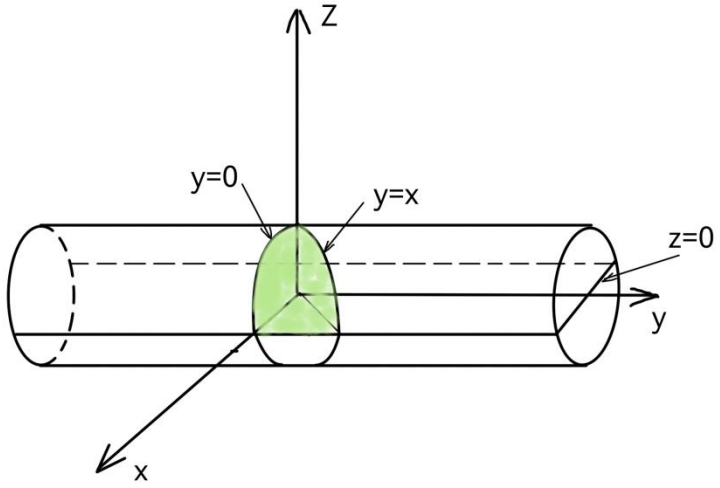

Рис. 3 Поверхности из условия примера 2

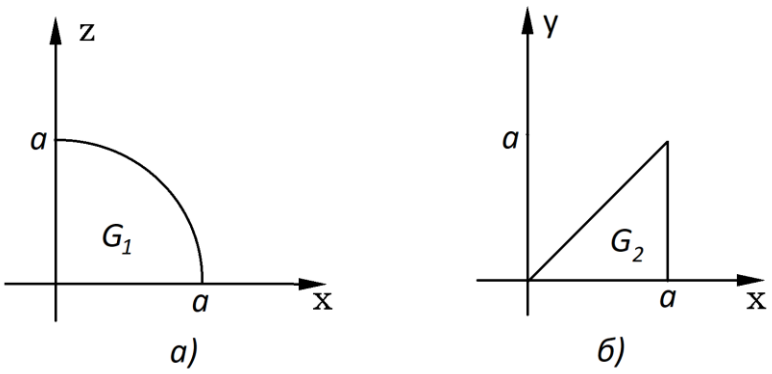

Рис. 4 Проекция объема из примера 2 на разные координатные плоскости

Отметим, что оба предложенных выше варианта ведут к абсолютно идентичным, с вычислительной точки зрения, двойным интегралам, на что следует обратить внимание студентов при разборе данного примера. Действительно, в первом случае имеем:

$$\iiint\limits_{G_1} xdxdz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xdz = \int\limits_0^a x\left(z\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \right)dx = \int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3$$

Второй вариант приводит к следующему интегралу:

$$\iiint\limits_{G_2} \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\left(y\Big|_0^x \right)dx = \int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{3}a^3.$$

При вычислении в повторных интегралах внешние интегралы оказались полностью идентичными.

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$ [12].

На рис. 5 приведены указанные в условии поверхности, а искомый объем закрашен зеленым цветом. Как и в предыдущем примере, в данной задаче возможны два варианта выбора ограничивающей поверхности $z=f(x,y)$ и цилиндрической поверхности C из определения 1.

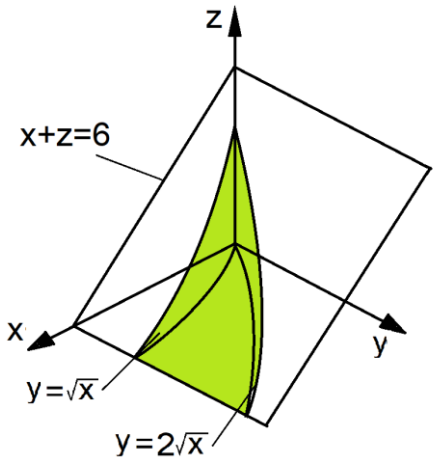

Рис. 5 Поверхности из условия примера 3

1. В первом варианте область G на плоскости xOy будет ограничена двумя параболами $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$ (этими же уравнениями будут задаваться и цилиндрические поверхности) и прямой $x=6$ (см. рис. 6а, здесь область G обозначена как G_1). Тогда в качестве ограничивающей поверхности будет плоскость $x+z=6$.
2. Во втором варианте проекция искомого объема будет располагаться на плоскости xOz и задаваться следующими прямыми: $x+z=6$, $z=0$, $x=0$ (см. рис. 6б). В качестве ограничивающей поверхности будет выступать $y=2\sqrt{x}$. Однако, в отличии от первого варианта и примеров 1 и 2, снизу искомый объем не ограничен частью плоскости, а ограничен поверхностью $y=\sqrt{x}$, т.е. для вычисления требуемого объема необходимо использовать формулу (2).

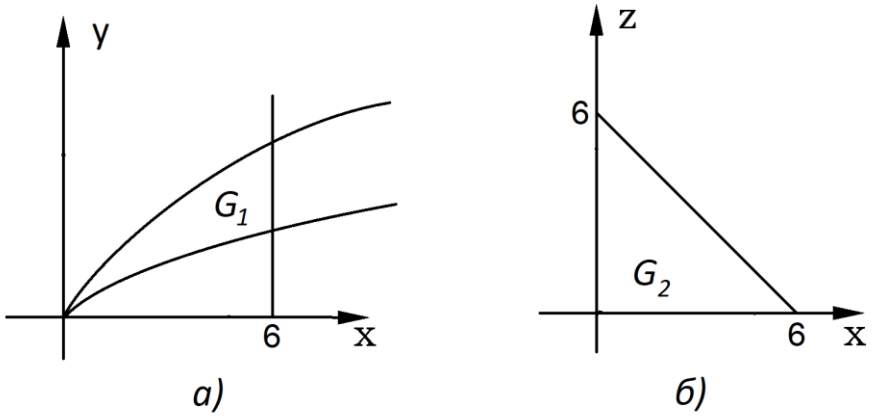

Рис. 6 Проекция объема из примера 3 на разные координатные плоскости

Заметим, что, как и в примере 2, оба указанных выше варианта вычисления искомого объема ведут к абсолютно идентичным, с вычислительной точки зрения, двойным интегралам. Действительно, в первом случае имеем:

$$\iint\limits_{G_1}(6-x)\,dxdy=\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)\,dy=\int\limits_0^6(6-x)\left(y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\right)dx=\int\limits_0^6\sqrt{x}\,(6-x)\,dx=$$

$$=6\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^6-\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^6=\frac{48}{5}\sqrt{6}.$$

Второй вариант приводит к следующему двойному интегралу:

$$\iint\limits_{G_2}\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)dxdz=\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{6-x}\sqrt{x}\,dz=\int\limits_0^a\sqrt{x}\left(z\Big|_0^{6-x}\right)dx=\int\limits_0^6\sqrt{x}\,(6-x)\,dx=\frac{48}{5}\sqrt{6}.$$

Как и в предыдущем примере, в повторных интегралах внешние интегралы оказались полностью идентичными.

Пример 4. Найти объем, заключенный между конусом $2\left(x^2+y^2\right)-z^2=0$ и гиперболоидом $x^2+y^2-z^2=-a^2$, $z\geq 0$ [13].

На рис. 7а приведены указанные в условии поверхности (искомый объем закрашен зеленым). В отличие от предыдущих двух примеров, в данной задаче выбор

ограничивающей поверхности $z = f(x, y)$ и цилиндрической поверхности C из определения 1 однозначен, хотя хочется отметить, что студенты зачастую ошибаются, предлагая другой вариант выбора данных поверхностей.

Для начала, необходимо найти уравнение линии пересечения данных поверхностей

$$\begin{cases} 2\left(x^2+y^2\right)-z^2=0 \\ x^2+y^2-z^2=-a^2 \\ z\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\left(x^2+y^2\right)-z^2=0 \\ z^2=2a^2 \\ z\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=\sqrt{2}a \end{cases}$$

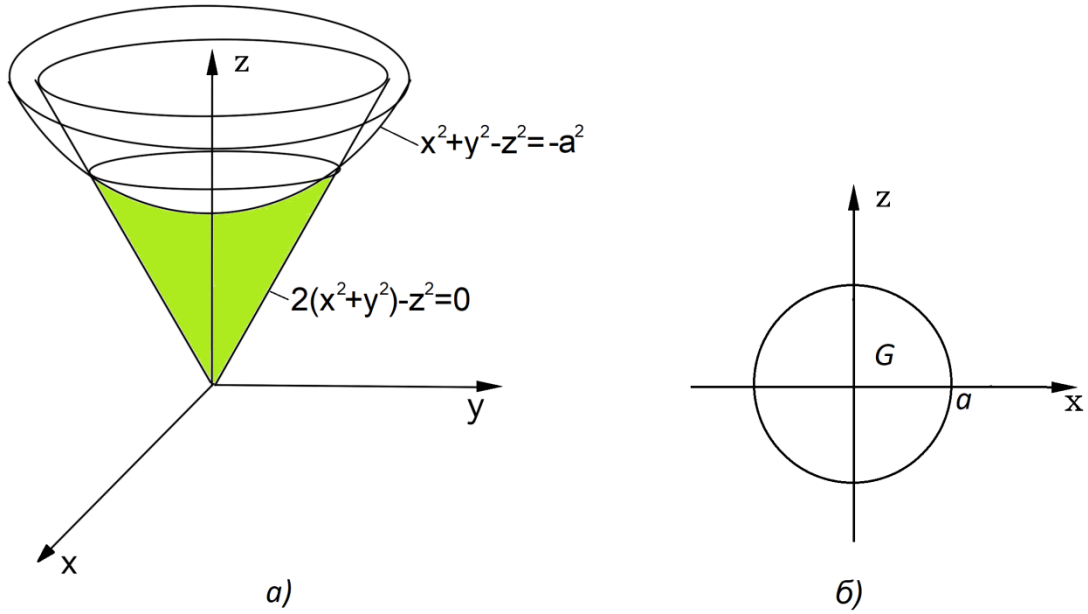

Рис. 7 Поверхности из условия примера 4 и проекция объема

Таким образом, мы получили, что линией пересечения двух данных поверхностей будет окружность радиуса a, лежащая в плоскости $z=\sqrt{2}a$. При этом, учитывая геометрию поверхностей, можно заключить, что проекцией объема на плоскость xOy будет круг $x^2+y^2\leq a^2$ (см. рис. 7б). При этом у нас будет две ограничивающие поверхности (см. рис. 7а): $x^2+y^2-z^2=-a^2$ сверху и $2\left(x^2+y^2\right)-z^2=0$ снизу. Тогда, воспользовавшись формулой (2) получаем, что искомый объем равен следующему двойному интегралу: $\iint\limits_G \left(\sqrt{x^2+y^2+a^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)dxdy$.

Вычисление данного двойного интеграла удобнее проводить перейдя в полярную систему координат (см., например, [14]):

$$\iint\limits_G \left(\sqrt{x^2+y^2+a^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\right)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\sqrt{r^2+a^2}-\sqrt{2r^2}\right)rdr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{r^2+a^2}\,d\left(r^2+a^2\right) - \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(\left(r^2+a^2\right)^{3/2}\Big|_0^a\right)d\varphi -$$

$$-\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^a\right)d\varphi = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)a^3\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) - \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{2\pi a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$

При решении данной задачи достаточно часто в качестве проекции объема студенты предлагают фигуру, представленную на рис. 8а (т.е. в качестве плоскости, на которую проектируют объем, выбирают xOz или yOz). Надо обязательно рассмотреть подобный вариант, поскольку фигура на рис. 8а не является проекцией объема, а является сечением плоскостью $y=0$ нашего тела. Данное сечение удобно использовать для верного определения подынтегральной функции в (1) или (2). Сама же проекция представлена на рис. 8б, но вычисление объема по такой проекции весьма затруднительно, ввиду сложной подынтегральной функции в (2). Следует так же обратить внимание студентов на то, что во многих задачах сечение подобное приведенному на рис. 8а не просто желательно, а можно сказать необходимо, для правильного определения подынтегральных функций в (2) (см., например, задачу 2205 [15]). Особенно часто такая потребность в сечении возникает в задачах о нахождении объема телами ограниченного телами вращения.

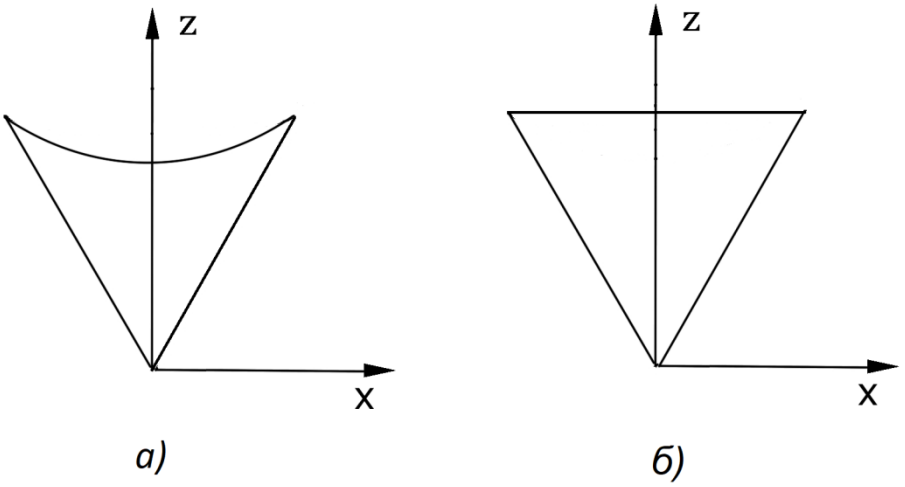

Рис. 8 Сечение объема и проекция объема из примера 4

Заключение

На основании собственного опыта, в работе авторами рассматриваются методические аспекты решения задач по вычислению объемов тел при помощи двойного интеграла, которые изучаются в курсе по кратным интегралам. Приводятся краткие теоретические сведения, а также примеры, иллюстрирующие использование двойных интегралов при вычислении объемов тел. В работе приводятся характерные ошибки, совершаемые студентами при решении задач по данной теме, и даются методические рекомендации по их устранению. Представленная методика преподавания быть использована при проведении соответствующих занятий со студентами технических специальностей.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Методологические аспекты вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат // Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - №3. - P. 50-59. – URL: https://doaj.net/issues/55
2. Велищанский М.А. Методологические аспекты использования замены переменных для вычисления двойного интеграла / М. А. Велищанский, Е. А. Власова, В. С. Попов // Modern European Researches. – 2025. – Т. 1, № 1. – С. 36-44. – DOI 10.24412/2311-8806-2025-1-1-36.
3. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 497 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: «Наука», 1985. – 560 с.
5. Безверхний Н. В. Кратные интегралы. Методические указания к решению задач по дисциплине «Кратные интегралы и теория функций комплексного переменного». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. – 68 с.
6. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
7. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Методологические аспекты вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат…
8. Велищанский М.А. Методологические аспекты использования замены переменных для вычисления двойного интеграла…
9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Астрель, 2010. – 496 с
10. Велищанский М.А., Власов П.А., Кавинов А.В. Методологические аспекты вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат…
11. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов…
12. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов…
13. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов…
14. Велищанский М.А. Методологические аспекты использования замены переменных для вычисления двойного интеграла
15. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов…

Mikhail A. Velishchanskiy,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
velmiha@yandex.ru
Pavel A. Vlasov,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
pvlx@mail.ru

Methodological features of teaching the topic "Calculating body volumes using double integrals"

Abstract. The formation of skills for the competent calculation of double integrals is an important and urgent task in the training of engineering personnel. However, an equally important task is to develop students' skills in the practical application of acquired knowledge. Calculating the volumes of bodies is a classic example of the use of double integrals in practical problems. The paper discusses the specifics of teaching methods for using double integrals (including variable substitution, etc.) to find the volumes of bodies. Typical errors and ways of their elimination are considered. The paper provides brief theoretical information necessary when considering this topic. Examples of finding the volumes of bodies using a double integral are given.

Keywords: body volume, cylindrical body, double integral, interated integral, substitution of variables, polar coordinates.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

Аннотация

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена фундаментальной ролью дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники. Изучение дифференциальных уравнений и методов их решений позволяет решать будущим инженерам практико-ориентированные задачи, способствует формированию у студентов целостного представления о мире. Содержание статьи представляет интерес для преподавателей, студентов технических и педагогических специальностей.

Ключевые слова

дифференциальные уравнения первого порядка, методика решения задач

АВТОРЫ

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва
vergazova@bmstu.ru

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва
nhasanov@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-42

Введение

Дифференциальные уравнения – один из важнейших инструментов математического моделирования. Такой инструмент позволяет описывать и анализировать процессы в природе, технике, различных областях знания. Прикладной характер дифференциальных уравнений обусловливает необходимость особого подхода в изучении данной темы. Студенты должны не просто познакомиться с различными типами дифференциальных уравнений и изучить методы их решения, но и научиться применять дифференциальные уравнения для анализа реальных физических процессов на примере решения задач.

Методология и результаты исследования

При проведении семинарских занятий по теме «Решение дифференциальных уравнений первого порядка» первокурсники Приборостроительного факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана должны освоить методы решения четырех типов уравнений: 1) с разделяющимися переменными; 2) однородных; 3) линейных; 4) уравнений Бернулли.

Рассмотрим систему задач, предназначенную для формирования и развития навыка решения линейных уравнений и уравнений с разделяющимися переменными. Такие задачи можно найти в учебниках и сборниках задач Эсгольца Л.Э., Краснова М.Л., Данко П.Е. и других. [1, 2, 3]

Пример 1. Решить уравнение $y' = 2x + y$.

Решение.

Данное уравнение можно рассмотреть как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, а также как линейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $z = 2x + y$.

$$y = z - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$
$$y' = 2x + y$$
$$\frac{dz}{dx} - 2 = z$$
$$\frac{dz}{dx} = z + 2$$
$$\frac{dz}{z+2} = dx$$

$ln|z + 2| = x + ln|C|$, $C \neq 0$.

$$z + 2 = Ce^x$$
$$2x + y + 2 = Ce^x$$

Общее решение уравнения имеет вид: $y = Ce^x - 2x - 2$. Теперь запишем исходное уравнение в виде $y' - y = 2x$. Применим к полученному линейному уравнению метод Лагранжа.

Рассмотрим соответственное однородное дифференциальное уравнение. $\frac{dy}{dx} - y = 0$, $\frac{dy}{y} = dx$, $ln|y| = x + C$, $y_{\text{одн}} = Ce^x$ - решение однородного уравнения, где $C = Const$.

Будем считать C неизвестной функцией независимой переменной x $C = C(x)$. Общее решение будет иметь вид $y_{\text{общ}} = C(x)e^x$.

$y'_{\text{общ}} = C'(x)e^x + C(x)e^x$. $C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = 2x$. $C'(x) = 2xe^{-x}$. $C(x) = 2\int xe^x\,dx$. $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

Функция имеет вид $C(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$. Найдем общее решение $y_{\text{общ}} = (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) \cdot e^x$, $y_{\text{общ}} = Ce^x - 2x - 2$. Решения в обоих способах совпадают. [4]

Пример 2.

$y' + 2y = 2xe^{-x^2}$.

Решение.

Будем искать решение в виде произведения $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Заменим y и y' в условии, уравнение примет вид:

$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}$.

Сгруппируем слагаемые по множителю u:

$$u'v + u(v' + 2 \cdot xv) = 2xe^{-x^2}$$
$$v' + 2xv = 0$$
$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$
$$\frac{dv}{v} = -2x\,dx$$
$$ln|v| = -x^2$$
$$v = e^{-x^2}$$
$$u'v = 2xe^{-x^2}$$
$$u'e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$
$$u' = 2x$$

$$u = x^2 + C$$

$y = e^{-x^2}(x + C)$, где C – постоянная интегрирования.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y' cos^2 x + y = tgx$ при начальном условии $y(0) = 0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде: $y' + \frac{y}{cos^2 x} = \frac{tg\, x}{cos^2 x}$.

Применим метод Лагранжа.

1) Решим соответствующее однородное уравнение $y' + \frac{y}{cos^2 x} = 0$. Перейдем к уравнению с разделяющимися переменными $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{cos^2 x}$, $y_{\text{одн}} = Ce^{-tg\, x}$, где C – постоянная величина.

2) Будем искать общее решение в виде $y_{\text{общ}} = C(x) \cdot e^{-tg\, x}$, где $C(x)$ – неизвестная функция. $y'_{\text{общ}}(x) = C'(x) \cdot e^{-tg\, x} + C(x) \cdot e^{-tgx} \cdot \left(-\frac{1}{cos^2 x}\right)$. Подставим в исходное уравнение $y_{\text{общ}}$ и $y'_{\text{общ}}$.

Получим $C'(x) \cdot cos^2 x \cdot e^{-tg\, x} = tg\, x$, $C(x) = \int \frac{e^{tg\, x}\, tg\, x}{cos^2 x} dx = e^{tg\, x}(tg\, x - 1) + C$. Получим общее решение уравнения $y_{\text{общ}} = Ce^{-tg\, x} + tg\, x - 1$. Применим начальное условие $y(0) = 0$, получим $0 = -1 + C$, $C = 1$.

Значит, искомое частное решение имеет вид $y = e^{-tg\, x} + tg\, x - 1$.

Для формирования устойчивого навыка применения методов Лагранжа и Бернулли в методической и учебной литературе многих авторов можно найти достаточное количество упражнений. Например, на семинаре студенты могут работать с системой задач, предлагаемых Данко П.Е. [5]

1. $xy' - y = x^2 \cos x$
2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
3. $y' \cos x + y = 1 - \sin x$
4. $y' \sin x - y \cos x = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Помимо освоения методов решения дифференциальных уравнений необходимо особое внимание уделить задачам, в которых дифференциальные уравнения описывают физические процессы. Множество задач по такой тематике предлагают авторы Агафонов С.А., Жукова Г.С. [6,7]. Например, следующие задачи, где рассматриваются электрические и механические процессы.

Пример 4. Известно, что между силой тока i и электродвижущей силой E в цепи, имеющей сопротивление R и самоиндукцию L, существует зависимость $E = iR + L\frac{di}{dt}$, где R и L – постоянные.

Если считать E функцией времени t , то получим линейное неоднородное уравнение для силы тока i:

$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E(t)}{L}$.

Найти силу тока $i(t)$ для случая, когда $E = E_0 = const$ и $i(0) = I_0$.

Решение.

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$, $i = uv$, $i' = u'v + uv'$, тогда

$u'v + uv' + \frac{R}{h} uv = \frac{E}{L}$, $v' = -\frac{R}{L} v$, $\frac{dv}{v} = -\frac{R}{L} dt$, $ln|v| = -\frac{R}{L} t$, $v = e^{-\frac{R}{L}t}$,

$u' = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} + C$.

Общее решение уравнения имеет вид $i(t) = \frac{\mathrm{E}}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

Используя начальные условия, получим, что $C = I_0 - \frac{E_0}{R}$, так что искомое решение будет $i(t) = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$.

Отсюда видно, что при $t \to \infty$ сила тока $i(t)$ стремится к постоянному значению $\frac{E_0}{R}$.

Пример 5. Электрический конденсатор емкостью C был заряжен до заряда величиной ΔQ. Конденсатор изолирован от других элементов электрической цени и постепенно теряет заряд, в результате чего уменьшается разность потенциалов ΔU на обкладках конденсатора. В любой текущий момент времени справедливо соотношение $\Delta U(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Сила тока I, проходящего при изменении ΔU в цепи, содержащей последовательно включенный конденсатор, $I = C\frac{d\Delta U}{dt}$. Предположим, что конденсатор обладает конечным внутренним сопротивлением R_k. По закону Кирхгофа $I + I_k = 0$. (Рис. 1)

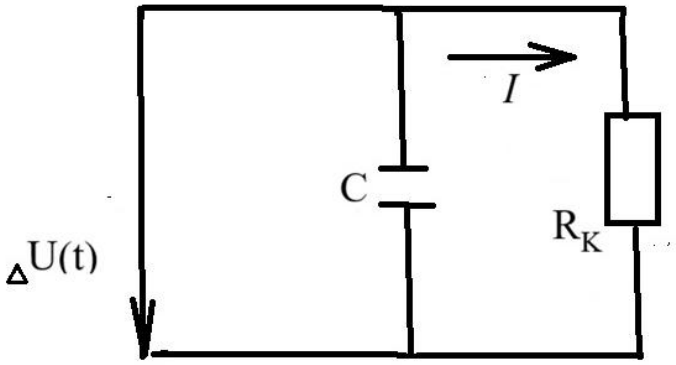

Рис. 1. Конденсатор в рассматриваемой электрической цепи

Применим закон Ома $I_k = \frac{\Delta U}{R_k}$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$C\frac{d^{\Delta U}}{dt} + \frac{\Delta U}{R_k} = 0$. Тогда $\frac{d\Delta U}{dt} = -\frac{1}{R_k C}\Delta U$. Проинтегрируем уравнение, получим

$\Delta U = C \cdot e^{-\frac{t}{R_k C}}$, где C- произвольная постоянная. Если в момент времени $t = 0$ разность потенциалов была ΔU_0, то $C = \Delta U_0$.

Таким образом, $\Delta \cup (t) = \Delta U_0 e^{-\frac{t}{R_k C}}$.

Пример 6. Под действием сопротивления воды лодка за 1 мин изменила скорость с 6 до 1 км/ч. Определить путь лодки до полной остановки.

Решение.

Пусть $v(t)$ – скорость лодки в момент времени t. Сила сопротивления воды F, пропорциональная скорости лодки, равна $F = \mu m v$.

По второму закону Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, где ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

С учетом того, что сила сопротивления воды и скорость лодки противоположно направлены, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$m\frac{dv}{dt} = -\mu m v$, $\frac{dv}{v} = -\mu v$.

Решение уравнения имеет вид $v = Ce^{-\mu t}$.

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} v(0) = 6, \\ v\left(\frac{1}{60}\right) = 1 \end{cases}.$$

Применив начальные условия, получим $C = 6$, $6e^{-\frac{\mu}{60}} = 1$, $e^{-\mu} = 6^{-60}$.

Значит, скорость движения лодки задается уравнением $v(t) = 6^{1-60t}$. Из последнего равенства следует, что $v \to 0$ при $t \to +\infty$.

Путь, пройденный лодкой,

$s = \int_0^{+\infty} 6^{1-60t}\, dt = -\frac{6^{1-60t}}{60\, ln\, 6}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{10\, ln\, 6}$. $s \approx 56$ м.

Ответ: 56 м.

Для самостоятельного решения студентам можно предложить решить следующие задачи.

1. $y^1 + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$.
2. $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$.
3. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = arcsin\, x$, $y(0) = 0$.
4. $y^1 - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
5. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. [8]

Рассмотренная система задач по теме «Решение дифференциальных уравнений в течение двух лет применялась при проведении занятий у первокурсников двух групп Приборостроительного факультета. При этом две другие группы работали с другой системой упражнений. При анализе результатов контрольных мероприятий было отмечено, что задачи с физическим содержанием успешно решали 78%-83% студентов первых двух групп. В то время, как в других группах успешно справлялись не более 58%.

Заключение

Для студентов технических специальностей очень важны навыки решения различных типов дифференциальных уравнений. Особое значение имеет формирование и развитие навыка решения задач, описывающих какие-либо физические процессы. Качественное освоение математических дисциплин создает условия для успешного и результативного изучения других учебных дисциплин в процессе подготовки будущего инженера.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - СПб. «Лань». - 2002. - 224 с.
2. Краснов М.Л., Киселев А. И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. - М. Едиториал УРСС. - 2002. - 256 с.
3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М. Издат. Дом ОНИКС. - 2003. - 416 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - СПб. «Лань». - 2002. - 224 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М. Издат. Дом ОНИКС. - 2003. - 416 с.
6. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. - М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2006.- 352 с.
7. Жукова Г.С. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. - М. ИНФРА-М. - 2024. - 384 с.
8. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М. Издат. Дом ОНИКС. - 2003. - 416 с.

Olga B. Vergazova,
Candidate of Philosophy, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
vergazova@bmstu.ru
Nail A. Hasanov,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
nhasanov@bmstu.ru

Methodology for Solving Problems on the Topic of First-Order Differential Equations"

Abstract. The relevance of the problem under study is due to the fundamental role of differential equations in various fields of science and technology. The study of differential equations and methods of their solutions allows future engineers to solve practical problems, and contributes to the formation of a holistic view of the world among students. The content of the article is of interest to teachers, students of technical and pedagogical specialties.

Keywords: first-order differential equations, problem-solving methodology.

.

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ И АЛГОРИТМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Аннотация

Задача построения максимального потока в сети – это одна из важнейших задач теории графов, имеющая приложения в экономике, логистике, и других областях. Эта задача изучается в курсах «Теория графов», «Дискретная оптимизация» и в других специальных курсах. Основным методом решения задачи является алгоритм Форда-Фалкерсона. Целью работы является изложение методического подхода к описанию алгоритма и примерам его применения. В статье приведен пример сети, на которой алгоритм может работать бесконечно долго, если не ввести дополнительные ограничения. Демонстрация подобных примеров важна для понимания алгоритма.

Ключевые слова

сеть, пропускная способность, максимальный поток, алгоритм

АВТОРЫ

Виноградова Марина Станиславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
m-s-vinogradova@yandex.ru

Андреева Татьяна Владимировна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
t-v-andreeva@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-48

Введение

В статье рассматривается широко известная задача построения максимального потока в сети и алгоритм Форда-Фалкерсона, предназначенный для ее решения. Материал статьи может быть полезен студентам бакалавриата и магистратуры, обучающимся по направлениям «прикладная математика и информатика», «информатика и вычислительная техника» и другим направлениям, связанным с математическим моделированием и программированием. Он может включен в программу дисциплины, в которой изучается теория графов или алгоритмы оптимизации на дискретных структурах.

При изложении студентам какой-либо темы, связанной с алгоритмами, полезно придерживаться следующего плана:

–ввести необходимые определения и обозначения;

–сформулировать постановку задачи, описать условия на входные данные, при которых задача поставлена корректно;

–описать алгоритм решения задачи, проанализировать его, обосновать его корректность;

–возможно, описать дополнительные условия на входные данные, которые вытекают из обоснования корректности рассматриваемого алгоритма;

−рассмотреть примеры применения алгоритма;

−оценить сложность алгоритма, если это возможно.

На этапе анализа алгоритма важно отметить, существуют ли примеры входных данных, на которых алгоритм работает неправильно, «слишком долго» или даже бесконечно. Если примеры, выявляющие недостатки алгоритма, есть, то важно обсудить, достаточно ли, например, ввести дополнительные условия на входные данные задачи или необходимо модифицировать сам алгоритм. Желательно, чтобы рассматриваемые примеры были достаточно иллюстративными, но, в то же время, не слишком громоздкими.

В нашей статье предложены примеры работы алгоритма Форда-Фалкерсона, демонстрирующие различные особенности алгоритма. Для справки кратко приведены основные понятия и утверждения.

Методология и результаты исследования

Основные понятия теории графов, постановку задачи о максимально потоке и описание алгоритмов ее решения можно найти, например, в ставших классическими книгах Н. Кристофидеса [1] и В. Липского [2]. Основным алгоритмом решения задачи является алгоритм Форда-Фалкерсона.

В книге М. О. Асанова, В. А. Баранского и В. В. Расина [3] приводится пример сети, для которой время работы алгоритма Форда-Фалкерсона может не являться функцией, зависящей от входа (см. пример 2). Кроме того, там упоминается предложенный авторами алгоритма пример сети, для которой алгоритм может работать бесконечно, но последовательность промежуточных результатов даже не будет сходиться к точному решению. Этим обусловлена необходимость модификации «базового» алгоритма Форда-Фалкерсона. Нам представляется полезным продемонстрировать студентам такой пример, однако, сеть, предложенная Фордом и Фалкерсоном, имеет 10 вершин и 48 дуг, т.е. является довольно громоздкой. В статье У. Цвика [4] приводятся примеры трех сетей, каждая из которых содержит не более 9 дуг, но в описании алгоритма используется специфическое понятие «остаточная пропускная способность».

В своей статье мы подробно разберем собственный пример сети с 6 вершинами и 11 дугами (см. пример 3), не используя термин «остаточная пропускная способность».

1. Основные понятия. Основные определения и утверждения, используемые в статье, сформулированы в книге М. О. Асанова, В. А. Баранского и В. В. Расина [5]. В случае использования иных источников будем давать на них ссылки.

Сетью называют ориентированный граф $\vec{G} = (V, \vec{E}; c)$, в котором V − множество вершин, $\vec{E} \subseteq V^2$ − множество дуг, $c: \vec{E} \to \mathbb{R}$ − весовая функция. Далее будем рассматривать сети, в которых веса всех дуг неотрицательны, а также есть хотя бы одна вершина s с нулевой степенью захода и хотя бы одна вершина t с нулевой степенью исхода. Вершина s называется *источником*, а вершина t − *стоком* сети.

Если в сети несколько источников или стоков, то можно добавить к сети общий источник s^* и общий сток t^* (см. Рис 1). При этом веса добавленных дуг $(\overrightarrow{s^*, s_i})$, $(\overrightarrow{t_j, t^*})$ выбираются достаточно большими (см., например, книгу Т. Х. Кормена, Ч. И. Лейзерсона, Р. Л. Ривеста, К. Штайна [6]). Далее будем считать, что в сети есть ровно один источник и ровно один сток.

Число $c(\vec{e})$ называется *пропускной способностью* дуги $\vec{e}$.

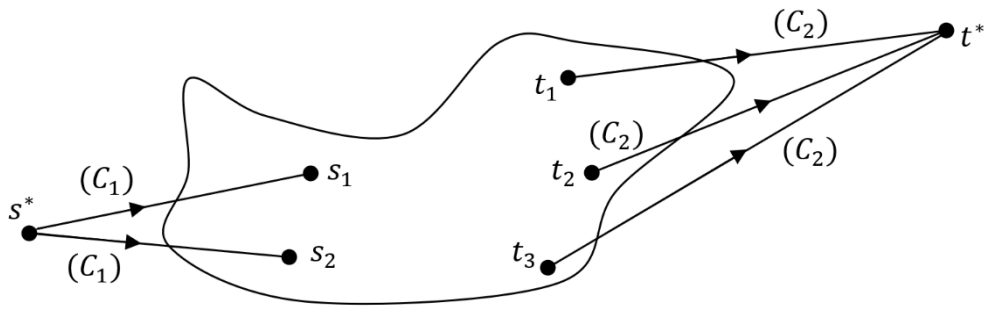

Рис. 1. Сеть с несколькими источниками

Поток f в сети $\vec{G} = (V, \vec{E}; c)$ – это функция $f: \vec{E} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для всех $\vec{e} \in \vec{E}$ выполнено $0 \le f(\vec{e}) \le c(\vec{e})$;

2) для всех $v \in V \setminus \{s, t\}$ выполнено

$$\sum_{\substack{w \in V: \\ (\overrightarrow{w,v}) \in \vec{E}}} f\big((\overrightarrow{w,v})\big) = \sum_{\substack{w \in V: \\ (\overrightarrow{v,w}) \in \vec{E}}} f\big((\overrightarrow{v,w})\big).$$

Дугу $\vec{e} = (\overrightarrow{u,v}) \in \vec{E}$ будем изображать, как это показано на Рис. 2.

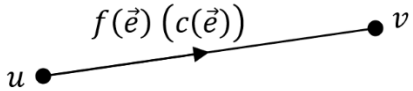

Рис. 2. Изображение дуги в сети

Величиной потока называется число, вычисляемое по формуле

$$\|f\| = \sum_{\substack{w \in V: \\ (\overrightarrow{s,w}) \in \vec{E}}} f\big((\overrightarrow{s,w})\big).$$

Поток f называется *максимальным*, если для любого потока f^* справедливо неравенство $\|f^*\| \le \|f\|$.

2. Задача о максимальном потоке. Рассмотрим следующую задачу:

Дано: сеть $\vec{G} = (V, \vec{E}; c)$ с неотрицательными весами дуг, одним источником s и одним стоком t.

Надо: найти максимальный поток f.

Заметим, что максимальный поток нельзя найти полным перебором всех потоков. Более того, существование максимального потока, вообще говоря, не очевидно. Справедлива

Теорема 1. *В каждой сети существует максимальный поток.*

Прежде, чем сформулировать алгоритм построения максимального потока, введем некоторые понятия и проиллюстрируем их.

Цепь P из вершины u в вершину w в сети $\vec{G}$ – это чередующаяся последовательность попарно различных вершин и дуг

$$P: \ u = v_0, \vec{e}_0, v_1, \vec{e}_1, v_2, \dots, v_{k-1}, \vec{e}_{k-1}, v_k = w,$$

в которой для всех $r = 0, \dots, k-1$ либо $\vec{e}_r = (\overrightarrow{v_r, v_{r+1}})$, тогда дуга называется *прямой* дугой цепи P, либо $\vec{e}_r = (\overrightarrow{v_{r+1}, v_r})$, тогда она называется *обратной* (см. Рис. 3). Для краткости будем писать $\vec{e}_r \in P$.

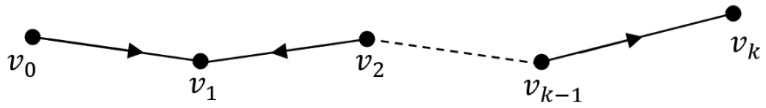

Рис. 3. Цепь в сети

Пусть в сети $\vec{G}$ задан поток f, и пусть P – цепь, $\vec{e} \in P$. Положим

$$h(\vec{e}) = \begin{cases} c(\vec{e}) - f(\vec{e}), \vec{e} - \text{прямая дуга в } P; \\ f(\vec{e}), \qquad \vec{e} - \text{обратная дуга в } P, \end{cases}$$

положим также $h(P) = \min\limits_{\vec{e} \in P}\{h(\vec{e})\}$.

Цепь P из вершины s в вершину t называется *f-дополняющей*, если $h(P) > 0$.

Лемма 1. *Пусть f – поток в сети $\vec{G}$, а P – f-дополняющая цепь. Тогда в сети $\vec{G}$ существует поток f^* такой, что $\|f^*\| = \|f\| + h(P)$.*

Мы не будем приводить доказательство леммы, а продемонстрируем построение потока f^* на примере.

Пример 1. На Рис. 4 изображена сеть с потоком f_1, $\|f_1\| = 1 + 1.8 = 2.8$. Рассмотрим f_1 -дополняющую цепь $P_1 : s, (\overrightarrow{s,v}), v, (\overrightarrow{u,v}), u, (\overrightarrow{u,t}), t$. Дуги $(\overrightarrow{s,v})$, $(\overrightarrow{u,t})$ являются прямыми, поэтому $h((\overrightarrow{s,v})) = 2 - 1.8 = 0.2$, $h((\overrightarrow{u,t})) = 1 - 0.9 = 0.1$. Дуга $(\overrightarrow{u,v})$ – обратная, поэтому $h((\overrightarrow{u,v})) = 0.2$. Значит, $h(P_1) = 0.1$.

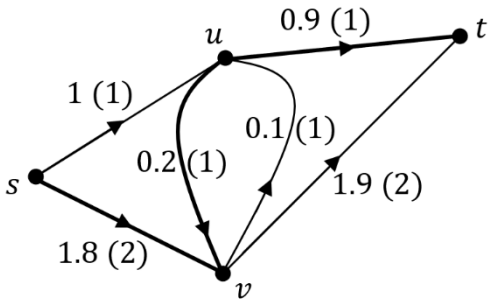

Рис. 4. f_1-дополняющая цепь в сети

Определим новый поток f_2: для дуг цепи P_1 положим

$$f_2((\overrightarrow{s,v})) = f_1((\overrightarrow{s,v})) + h(P_1) = 1.8 + 0.1 = 1.9,$$
$$f_2((\overrightarrow{u,t})) = f_1((\overrightarrow{u,t})) + h(P_1) = 0.9 + 0.1 = 1,$$
$$f_2((\overrightarrow{u,t})) = f_1((\overrightarrow{u,t})) - h(P_1) = 0.2 - 0.1 = 0.1,$$

если $\vec{e} \notin P_1$, то положим $f_2(\vec{e}) = f_1(\vec{e})$.

Теперь $\|f_2\| = \|f_1\| + 0.1 = 2.9$. Сеть с новым потоком f_2 изображена на Рис. 5. Заметим, что для f_2 выполнены условия 1) и 2) из определения потока.

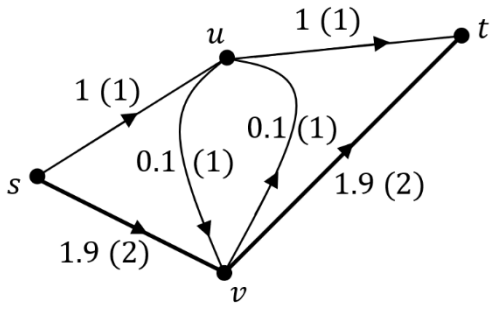

Рис. 5. f_2-дополняющая цепь в сети

Рассмотрим f_2-дополняющую цепь $P_2 : s, (\overrightarrow{s,v}), v, (\overrightarrow{v,t}), t$. Несложно видеть, что $h(P_2) = 0.1$. Определим поток f_3:

$$f_3\big((\overrightarrow{s,v})\big) = f_2\big((\overrightarrow{s,v})\big) + h(P_2) = 1.9 + 0.1 = 2,$$
$$f_3\big((\overrightarrow{v,t})\big) = f_2\big((\overrightarrow{v,t})\big) + h(P_2) = 0.9 + 0.1 = 1,$$

если $\vec{e} \notin P_2$, то положим $f_3(\vec{e}) = f_2(\vec{e})$. Теперь $\|f_3\| = \|f_2\| + 0.1 = 3$. Сеть с новым потоком f_3 изображена на Рис. 6. Несложно видеть, что в ней не существует f_3-дополняющей цепи.

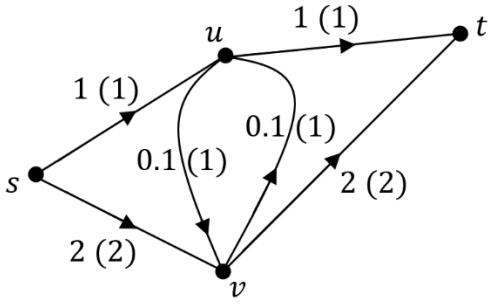

Рис. 6. Сеть с потоком f_3, в которой нет f_3-дополняющей цепи

Основным утверждением, позволяющим описать алгоритм построения максимального потока, является

Теорема 2 (Форд, Фалкерсон, 1956). *Поток f в сети $\vec{G}$ максимален тогда и только тогда, когда в $\vec{G}$ не существует f-дополняющей цепи.*

Из теоремы 2 следует, что поток f_3 в сети, изображенной на Рис. 6, является максимальным.

Заметим, что максимальный поток может быть не единственным. Если для сети, изображенной на Рис. 6, переопределить поток следующим образом:

$$f_3\big((\overrightarrow{u,v})\big) = 0,$$
$$f_3\big((\overrightarrow{v,u})\big) = 0,$$

то величина потока не изменится.

3. Алгоритм построения максимального потока. Приведем неформальное описание алгоритма:

1) положить $f(\vec{e}) = 0$ для всех дуг $\vec{e} \in \vec{E}$;
2) для текущего потока f искать f-дополняющую цепь;
3) если такая цепь P найдена, то для всех дуг положить

$$f(\vec{e}) = \begin{cases} f(\vec{e}) + h(P), & \text{если } \vec{e} - \text{прямая дуга в } P; \\ f(\vec{e}) - h(P), & \text{если } \vec{e} - \text{обратная дуга в } P; \\ f(\vec{e}), & \text{если } \vec{e} \notin P \end{cases}$$

и вернуться на шаг 2;

4) иначе СТОП. Поток f максимален в силу теоремы Форда-Фалкерсона.

Для отыскания дополняющих цепей, можно использовать, например, алгоритмы поиска.

Будем говорить, что на шаге 3 выполняется увеличение потока вдоль цепи P. Пример 1, фактически, иллюстрирует применение алгоритма: выполняются две итерации увеличения потока: вдоль цепи P_1 и вдоль цепи P_2.

Теорема 3. *Если пропускные способности всех дуг являются целыми числами, то как максимальный поток, так и все промежуточные потоки в алгоритме Форда-Фалкерсона, являются целочисленными.*

Из теоремы 3 следует, что в случае, когда пропускные способности всех дуг сети являются целыми числами, работа алгоритма обязательно завершится. Это утверждение остается справедливым и для случая, когда пропускные способности всех дуг являются рациональными числами. Однако оказывается, что при произвольном выборе дополняющей цепи в таких сетях количество итераций увеличения потока может не являться функцией, зависящей только от $|V|$ и $|\vec{E}|$.

Пример 2. Рассмотрим сеть $\vec{G}_1$, изображенную на Рис. 7, где M – произвольное натуральное число. Несложно видеть, что величина максимального потока в $\vec{G}_1$ равна $2M$.

Если в алгоритме Форда-Фалкерсона поочередно рассматривать цепи

$$s, (\overrightarrow{s,u}), u, (\overrightarrow{u,v}), v, (\overrightarrow{v,t}), t$$

и

$$s, (\overrightarrow{s,v}), v, (\overrightarrow{v,u}), u, (\overrightarrow{u,t}), t,$$

то понадобится $2M$ итераций, на каждой из которых величина потока будет увеличиваться на 1.

Если же рассматривать цепи

$$s, (\overrightarrow{s,u}), u, (\overrightarrow{u,t}), t$$

и

$$s, (\overrightarrow{s,v}), v, (\overrightarrow{u,t}), t,$$

то достаточно двух итераций на каждой из которых величина потока будет увеличивается на M.

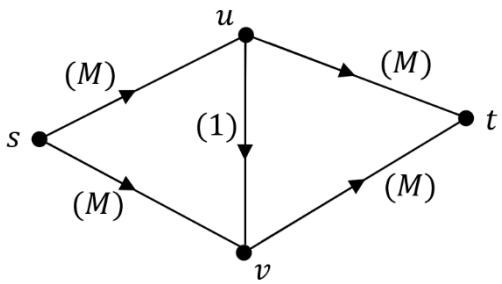

Рис. 7. Сеть $\vec{G}_1$

Форд и Фалкерсон привели пример сети с иррациональными пропускными способностями, для которой при «неудачном» выборе цепей работа алгоритма не завершится вовсе. Более того, последовательность промежуточных решений не сходится к точному решению. Однако их пример слишком громоздок. Мы предлагаем собственный пример.

Пример 3. Рассмотрим сеть $\vec{G}_2$, изображенную на Рис. 8. Положим $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $M = r + 1$. Константа r выбрана так, что $r^2 = 1 - r$, тогда при всех $k \geq 2$ выполнено $r^k = r^{k-2} - r^{k-1}$.

Положим поток f во всех дугах равным нулю и будем рассматривать цепи специального вида.

Рассмотрим цепь

$$P_{00} : s, (\overrightarrow{s,u_2}), u_2, (\overrightarrow{u_2,u_1}), u_1, (\overrightarrow{u_1,t}), t, \qquad h(P_{00}) = 1.$$

Приведем значения потока только в тех дугах, для которых он изменится после применения операций увеличения потока вдоль цепи P_{00}:

$$f\big((\overrightarrow{s,u_2})\big) = f\big((\overrightarrow{u_2,u_1})\big) = f\big((\overrightarrow{u_1,t})\big) = 1,$$

при этом $\|f\| = 1$.

Рассмотрим цепь

$$P_{01} : s, (\overrightarrow{s,u_4}), u_4, (\overrightarrow{u_4,u_3}), u_3, (\overrightarrow{u_3,t}), t, \qquad h(P_{01}) = r.$$

После применения операций увеличения потока вдоль цепи P_{01} получим новые значения потока в некоторых дугах:

$$f\big((\overrightarrow{s,u_4})\big) = f\big((\overrightarrow{u_4,u_3})\big) = f\big((\overrightarrow{u_3,t})\big) = r,$$

при этом $\|f\| = 1 + r$.

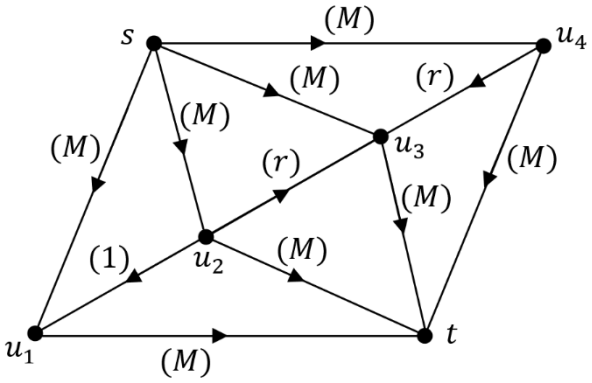

Рис. 8. Сеть $\vec{G}_2$

Рассмотрим цепи

$$P_1 : s, (\overrightarrow{s,u_1}), u_1, (\overrightarrow{u_2,u_1}), u_2, (\overrightarrow{u_2,u_3}), u_3, (\overrightarrow{u_4,u_3}), u_4, (\overrightarrow{u_4,t}), t,$$
$$P_2 : s, (\overrightarrow{s,u_4}), u_4, (\overrightarrow{u_4,u_3}), u_3, (\overrightarrow{u_2,u_3}), u_2, (\overrightarrow{u_2,t}), t,$$
$$P_3 : s, (\overrightarrow{s,u_3}), u_3, (\overrightarrow{u_2,u_3}), u_2, (\overrightarrow{u_2,u_1}), u_1, (\overrightarrow{u_1,t}), t.$$

Последовательно применим операцию увеличения потока, рассматривая эти цепи в следующем порядке: P_1, P_2, P_1, P_3. При этом $h(P_1) = r$, $h(P_2) = r$, $h(P_1) = r^2$, $h(P_3) = r^2$. В итоге величина потока будет равна $1 + r + 2(r + r^2)$.

Последовательность цепей P_1, P_2, P_1, P_3 можно рассматривать бесконечно много раз в указанном порядке.

Выполним еще четыре итерации: $h(P_1) = r^3$, $h(P_2) = r^3$, $h(P_1) = r^4$, $h(P_3) = r^4$. В итоге величина потока будет равна $1 + r + 2(r + r^2) + 2(r^3 + r^4)$.

Для краткости изменение потока в дугах сети показано в таблице на Рис. 9. Серым выделено значение потока в дуге, если оно изменилось по сравнению с предыдущей итерацией. Это позволяет увидеть закономерность изменения потока в каждой дуге. В последней строке таблицы приведены предельные значения потоков в дугах.

Чтобы найти предельное значение потока в каждой дуге, воспользуемся следующими тождествами:

$$r + r^2 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} r^i = \frac{r}{1-r} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r} = r+1,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} r^{2i} = \frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{r} = r+1,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} r^{2i+1} = \frac{r}{1-r^2} = \frac{r}{r} = 1.$$

Несложно видеть, что величина потока, который строится в алгоритме, сходится к числу $3(1+r) = 3M$, а величина максимального потока равна $4M$.

Заметим, что если выполнить четыре итерации увеличения потока вдоль цепей вида

$$Q_i : s, (\overrightarrow{s,u_i}), t, \qquad h(Q_i) = M, \quad i = 1,2,3,4,$$

в произвольном порядке, то поток каждый раз будет увеличиваться на M. Алгоритм завершит работу, максимальный поток будет построен.

	$h(P)$	$(\overrightarrow{s,u_1})$	$(\overrightarrow{s,u_2})$	$(\overrightarrow{s,u_3})$	$(\overrightarrow{s,u_4})$	$(\overrightarrow{u_2,u_1})$	$(\overrightarrow{u_2,u_3})$	$(\overrightarrow{u_4,u_3})$	$(\overrightarrow{u_1,t})$	$(\overrightarrow{u_2,t})$	$(\overrightarrow{u_3,t})$	$(\overrightarrow{u_4,t})$
P_{00}	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
P_{01}	r	0	1	0	r	1	0	r	1	0	r	0
P_1	r	r	1	0	r	$1-r = r^2$	r	0	1	0	r	r
P_2	r	r	1	0	$2r$	r^2	0	r	1	r	r	r
P_1	r^2	$r+r^2$	1	0	$2r$	0	r^2	$r-r^2 = r^3$	1	r	r	$r+r^2$
P_3	r^2	$r+r^2$	1	r^2	$2r$	r^2	0	r^3	$1+r^2$	r	r	$r+r^2$
P_1	r^3	$r+r^2+r^3$	1	r^2	$2r$	r^4	r^3	0	$1+r^2$	r	r	$r+r^2+r^3$
P_2	r^3	$r+r^2+r^3$	1	r^2	$2r+r^3$	r^4	0	r^3	$1+r^2$	$r+r^3$	r	$r+r^2+r^3$
P_1	r^4	$r+r^2+r^3+r^4$	1	r^2	$2r+r^3$	0	r^4	r^5	$1+r^2$	$r+r^3$	r	$r+r^2+r^3+r^4$
P_3	r^4	$r+r^2+r^3+r^4$	1	r^2+r^4	$2r+r^3$	r^4	0	r^5	$1+r^2+r^4$	$r+r^3$	r	$r+r^2+r^3+r^4$
		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		$r+1$	1	r	$r+1$	0	0	0	$1+r$	1	r	$r+1$

Рис. 9. Изменение потока в дугах сети $\vec{G}_2$

Мы показали, что если выбирать дополняющие цепи произвольным образом, то алгоритм может либо работать очень долго, либо никогда не закончить работу. Вместе с тем, можно заметить, что в примерах 2 и 3 достаточно было выбирать цепи с наименьшим числом дуг, чтобы работа алгоритма завершилась за разумное время.

В следующей теореме утверждается, что если добавить простое условие выбора цепей, то алгоритм не только будет всегда завершать работу, но и время работы алгоритма будет зависеть от размера задачи, т.е. от $|V|$ и $|\vec{E}|$.

Теорема (Эдмондс, Карп, 1972). *Если на каждой итерации алгоритма Форда-Фалкерсона выбирать кратчайшую по числу дуг f-дополняющую цепь в сети*

$\vec{G} = (V, \vec{E}; c)$, то построение максимального потока требует не более $|\vec{E}|(|V| + 2)/2$ итераций.

Для отыскания цепей, кратчайших по числу дуг, можно использовать, например, алгоритм поиска и ширину.

Заключение

В статье рассмотрена задача построения максимального потока в сети и алгоритм Форда-Фалкерсона, предназначенный для ее решения. Основной акцент сделан на методике подбора и изложения примеров применения алгоритма, иллюстрирующих особенности его работы.

Материал статьи может быть рекомендован для изучения студентам бакалавриата и магистратуры, изучающим дискретную математику, математическое моделирование и программирование.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход: Пер. с англ. М.: Мир, 1978, 432 с.
2. Липский, В. Комбинаторика для программистов: Пер. с польск. – М.: Мир, 1988. – 213 с.
3. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учебное пособие для вузов / 5-е изд. стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2026, 364 с.
4. Zwick, Uri. The smallest networks on which the Ford-Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate (англ.) / Theoretical Computer Science: journal. – 1995. – 21 August (vol. 148, no. 1). – P. 165-170.
5. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учебное пособие для вузов …
6. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. – М.: Вильямс, 2013. – 1328 с.

***Marina S. Vinogradova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
m-s-vinogradova@yandex.ru
***Tatiana V. Andreeva*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
t-v-andreeva@mail.ru

Methodology for presenting the maximum flow problem and the algorithm for its solution

Abstract. Finding the maximum flow in a network is one of the most important problems in graph theory, with applications in economics, logistics, and other fields. This problem is studied in the courses "Graph Theory," "Discrete Optimization," and other specialized courses. The primary method for solving this problem is the Ford-Fulkerson algorithm. This paper aims to present a methodological approach to describing the algorithm and providing application examples. The article provides an example of a network on which the algorithm can run indefinitely unless additional constraints are introduced. Demonstrating such examples is important for understanding the algorithm.

Keywords: network, capacity, maximum flow, algorithm

СРАВНЕНИЕ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ РАВЕНСТВА МАСШТАБА ДВУХ ВЫБОРОК МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация

В работе рассматривается задача проверки гипотезы о равенстве параметров масштаба двух независимых выборок, для решения которой применяются критерий Фишера, критерий Ансари — Брэдли, критерий Левена, критерий Клотца, критерий Муда и квартильный критерий. С использованием метода Монте-Карло проведён сравнительный анализ эффективности указанных критериев при различных распределениях наблюдений. Актуальность исследования обусловлена тем, что к данной статистической задаче сводится проблема тестирования измерительных приборов и задача сравнения рисков активов и портфелей. На основании сравнительного анализа эмпирических функций мощности критериев даны практические рекомендации по применению рассмотренных критериев проверки однородности.

Ключевые слова

метод Монте-Карло, функция мощности критерия, эмпирическая функция мощности, критерий Фишера, критерий Ансари — Брэдли, квартильный критерий, критерий Клотца, критерий Муда, критерий Левена, критерий Колмогорова — Смирнова

АВТОРЫ

Горяинов Владимир Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
vb-goryainov@bmstu.ru

Горяинова Елена Рудольфовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
goryainova@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-57

Введение

В настоящее время задача проверки равенства среднеквадратических отклонений двух совокупностей данных чрезвычайно востребована инвесторами, которые решают проблему вложения инвестиций в различные активы. Как правило при одинаковых средних доходностях двух активов инвестору для размещения средств Де Фуско Р. и соавторы в [1] рекомендуют выбрать актив с меньшим риском. Риск актива полностью описывается среднеквадратическим отклонением доходности актива. Также согласно Швесеру [2] следует придерживаться тактики выбора портфеля с меньшим риском при формировании диверсифицированного портфеля ценных бумаг.

Холлендером М. и соавторами в [3] рассматриваются задачи внедрения новых химических технологий по определению процентного содержания некоторого вещества в составе крови. Новую технологию предлагают к внедрению только в ситуации, когда погрешность измерения вещества с помощью новой технологии меньше, чем погрешность старой технологии. Решение такой задачи сводится к

проверке гипотезы равенства дисперсий погрешностей старой и новой технологий. Проблема сравнения точности изготовления деталей разными производителями, так же как и точности измерительной техники, произведённой при различных поставках комплектующих, тоже сводится к задаче проверки однородности против альтернатив растяжения/сжатия одной совокупности относительно другой. Рассматриваемые критерии Фишера, Ансари — Брэдли, Клотца, Муда, Левена и квартильный являются состоятельными для проверки гипотезы об однородности выборок против указанной альтернативы.

Методология и результаты исследования

Описание критериев

Рассмотрим задачу проверки однородности двух выборок, которые могут отличаться параметром масштаба. Пусть выборка $\mathrm{X}_m = (X_1,\ldots,X_m)$ порождена случайной величиной с функцией распределения $F(x-\mu_X)$, а выборка $\mathrm{Y}_n = (Y_1,\ldots,Y_n)$ порождена случайной величиной, имеющей функцию распределения $F((x-\mu_Y)/\Delta)$, $\Delta > 0$. Везде далее предполагаеся, что все наблюдения независимы. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0 : \Delta = 1$ (однородность) против альтернативы $H_1 : \Delta > 1$ (масштаб второй выборки больше). Ниже кратко описаны наиболее распространённые критерии проверки H_0 против альтернативы H_1 в контексте решаемой задачи.

Критерий Фишера. Предполагается, что X_m и Y_n — выборки из нормальных распределений $\mathrm{N}(\mu_X;\sigma_X^2)$ и $\mathrm{N}(\mu_Y;\sigma_Y^2)$ соответственно с неизвестными параметрами $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$. Это означает, что гипотеза $H_0 : \Delta = 1$ эквивалентна равенству дисперсий $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Статистика критерия имеет вид

$$F_{n,m} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\hat{S}_Y^2}{\hat{S}_X^2}, \qquad (1)$$

где $\hat{S}_X^2$, $\hat{S}_Y^2$ — исправленные выборочные дисперсии.

Если верна гипотеза H_0, то статистика $F_{n,m}$ имеет распределение Фишера $F(n-1;m-1)$ с $n-1$ и $m-1$ степенями свободы, а критическая область для альтернативы $H_1 : \Delta > 1$ (т.е. $\sigma_Y^2 > \sigma_X^2$) описывается неравенством

$$F_{n,m} > f_{1-\alpha}(n-1;m-1),$$

где $f_{1-\alpha}(n-1;m-1)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $F(n-1;m-1)$. Если наблюдаемое значение статистики не превышает критического, гипотеза H_0 не отвергается.

Рассмотренный критерий Фишера в гауссовском случае является (доказательство приведено, например, Ивченко Г.И., Медведевым Ю.И. в [4]) равномерно наиболее мощным критерием для альтернативы $H_1 : \Delta > 1$, однако он чувствителен к отклонениям от нормальности. При негауссовских распределениях его фактический уровень значимости может сильно отличаться от номинального.

Критерий Левена. Данный критерий был предложен Левеном в [5].

Предполагается, что X_m и Y_n — выборки из непрерывных распределений с конечными дисперсиями. Статистика критерия имеет вид

$$W = (N-2)\frac{m(\bar{Z}_X - \bar{Z}_\cdot)^2 + n(\bar{Z}_Y - \bar{Z}_\cdot)^2}{\sum_{i=1}^{m}(Z_i^{(X)} - \bar{Z}_X)^2 + \sum_{j=1}^{n}(Z_j^{(Y)} - \bar{Z}_Y)^2}, \quad (2)$$

где

$$Z_i^{(X)} = |X_i - med(X)|, \quad i = 1,\ldots,m, \qquad Z_j^{(Y)} = |Y_j - med(Y)|, \quad j = 1,\ldots,n,$$

— абсолютные отклонения от медиан выборок, а

$$\bar{Z}_X = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Z_i^{(X)}, \quad \bar{Z}_Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j^{(Y)}, \quad \bar{Z}_\cdot = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{m} Z_i^{(X)} + \sum_{j=1}^{n} Z_j^{(Y)}\right), \; N = m+n,$$

— выборочные средние отклонений в группах и общее выборочное среднее.

При H_0 статистика W имеет приближённое распределение Фишера $F(1, N-2)$. Альтернатива $H_1 : \Delta > 1$ принимается, если

$$W \geq f_{1-\alpha}(1, N-2) \text{ и } \bar{Z}_Y > \bar{Z}_X.$$

Обязательное условие $\bar{Z}_Y > \bar{Z}_X$ гарантирует, что больший разброс наблюдается именно во второй выборке, что соответствует смыслу альтернативы.

Критерий рекомендуется использовать при $m, n > 10$, при малых выборках точность F-аппроксимации снижается. Также критерий требует интервальной шкалы и конечности дисперсии исходных данных.

Двухвыборочный критерий Колмогорова — Смирнова. Двухвыборочный критерий Колмогорова — Смирнова предназначен для проверки гипотезы о том, что две независимые выборки извлечены из одного и того же непрерывного распределения. Он чувствителен к различиям в положении, масштабе и форме распределений.

Предполагается, что выборки X_m и Y_n извлечены из непрерывных распределений с функциями распределения $F(x)$ и $G(y)$ соответственно.

Нулевая гипотеза $H_0 : F(t) = G(t)$ для всех t заключается в совпадении распределений. При двусторонней альтернативе H_1 справедливо $F(t) \neq G(t)$ хотя бы для одного t. Возможны также односторонние альтернативы: $H_1^+ : F(t) \leq G(t)$ (распределение X стохастически больше Y) и $H_1^- : F(t) \geq G(t)$ (распределение X стохастически меньше Y).

В задаче рассматривается альтернатива $H_1 : \Delta > 1$, означающая, что масштаб второго распределения больше. При этом функции распределения имеют вид $F_X(t) = F(t-\mu)$ и $F_Y(t) = F((t-\mu)/\Delta)$ с общим сдвигом μ. Для $\Delta > 1$ эти функции пересекаются в точке $t = \mu$: при $t < \mu$ выполняется $F_Y(t) \geq F_X(t)$; при $t > \mu$ выполняется $F_Y(t) \leq F_X(t)$.

Таким образом, ни условие стохастического доминирования $F_X(t) \leq F_Y(t)$ для всех t (что соответствует альтернативе H_1^+ : X стохастически больше Y), ни обратное $F_X(t) \geq F_Y(t)$ (альтернатива H_1^-) не выполняются. Следовательно, гипотеза $\Delta > 1$ не может быть описана односторонними альтернативами критерия Колмогорова–Смирнова. Для её проверки следует использовать двусторонний критерий, который чувствителен к любым различиям в распределениях, включая

изменение масштаба.

Пусть $\hat{F}_m(t)$ и $\hat{G}_n(t)$ — эмпирические функции распределения, построенные по выборкам X_m и Y_n соответственно

$$\hat{F}_m(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} I(X_i \le t), \qquad \hat{G}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Y_j \le t)$$

(здесь и далее всюду $I(\cdot)$ — индикатор множества). Двухвыборочная статистика Колмогорова — Смирнова определяется как максимальное расстояние между этими эмпирическими функциями

$$D_{m,n} = \sup_{t\in \mathrm{R}} |\hat{F}_m(t) - \hat{G}_n(t)| = \max_{1\le i\le N} |\hat{F}_m(Z_{(i)}) - \hat{G}_n(Z_{(i)})|, \qquad (3)$$

где $Z_{(1)} \le Z_{(2)} \le \ldots \le Z_{(N)}$ — упорядоченные значения объединённой выборки, а $N = m+n$.

При справедливости H_0 и непрерывности распределений статистика $D_{m,n}$ является свободной от распределения. В работе Большева Л.Н. и Смирнова Н.В. [6] приведены квантили точного распределения $D_{m,n}$ для небольших объёмов выборок $n \le 20, m \le 20$. Для больших m,n используют асимптотическую аппроксимацию, состоящую в том, что при $m,n \to \infty$ и фиксированном отношении $m/n \to \lambda > 0$

$$\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \xrightarrow{d} K,$$

где K — случайная величина с функцией распределения Колмогорова

$$K(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2x^2}, \quad x > 0.$$

Критическая область имеет вид

$$D_{m,n} > k_\alpha \sqrt{\frac{m+n}{mn}}.$$

где k_α - квантиль уровня $1-\alpha$ распределения Колмогорова.

Ранговый критерий Ансари — Брэдли. В этом и всех последующих критериях предполагается, что выборка X_m соответствует непрерывному распределению $F(t-\mu)$, а выборка Y_n — распределению $F((t-\mu)/\Delta)$, $\Delta > 0$, где параметры μ и Δ неизвестны, причём μ является медианой, т.е. $F(\mu) = 0{,}5$. Если же распределения могут различаться ещё и по положению (разные медианы μ_X и μ_Y), то все послеующие критерии применяются к центрированным выборкам $\tilde{X}_i = X_i - \hat{\mu}_X$, $\tilde{Y}_j = Y_j - \hat{\mu}_Y$, где $\hat{\mu}_X$ и $\hat{\mu}_Y$ — выборочные медианы. Такой подход является приближённым, особенно при малых m и n.

Обозначим R_i ранг элемента X_i в объединённой выборке $(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)$, $N = m+n$. Тогда статистика критерия Ансари-Брэдли равна

$$A_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{N+1}{2} - \left|R_i - \frac{N+1}{2}\right|\right) \qquad (4)$$

и представляет собой сумму весов, приписываемых элементам первой выборки. Видно, что максимальный вес получают наблюдения с рангами, близкими к медианному $(N+1)/2$, а крайние ранги имеют малый вес.

При справедливости H_0 и отсутствии связей точное распределение $A_{m,n}$

табулировано для $m+n \le 20$ (см., например, монографию Холлендера М. и Вульфа Д. [7]). Для больших объёмов используют асимптотическую аппроксимацию статистики $A_{m,n}$ нормальным распределением. Математическое ожидание и дисперсия $A_{m,n}$ равны

$$\mathrm{M}A_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{m(N+2)}{4}, & N - \textit{четное}, \\ \dfrac{m(N+1)^2}{4N}, & N - \textit{нечетное}; \end{cases}$$

$$\mathrm{D}A_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{mn(N+2)(N-2)}{48(N-1)}, & N - \textit{четное}, \\ \dfrac{mn(N^2+3)(N+1)}{48N^2}, & N - \textit{нечетное}. \end{cases}$$

Стандартизованная статистика

$$A^*_{m,n} = \frac{A_{m,n} - \mathrm{M}A_{m,n}}{\sqrt{\mathrm{D}A_{m,n}}}$$

при $m,n \to \infty$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Для альтернативы $\Delta > 1$ (увеличение масштаба второй выборки) статистика $A_{m,n}$ имеет тенденцию к уменьшению, поэтому точная и приближенная критические области имеют вид соответственно $A_{m,n} \le a_\alpha$ и $A^*_{m,n} \le u_\alpha$, где a_α — квантиль уровня α точного распределения $A_{m,n}$ (при малых N), а u_α — α -квантиль стандартного нормального распределения.

Если в объединённой выборке есть совпадающие значения (связки), дисперсию статистики заменяют скорректированной оценкой

$$\tilde{\mathrm{D}}A_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{mn\left(16\sum\limits_{j=1}^{k} t_j R_j^2 - N(N+2)^2\right)}{16N(N-1)}, & N - \textit{нечетное}, \\ \dfrac{mn\left(16N\sum\limits_{j=1}^{k} t_j R_j^2 - (N+1)^4\right)}{16N^2(N-1)}, & N - \textit{нечетное}. \end{cases}$$

где k — число связок, t_j — размер j-й связки, R_j — средний ранг элементов этой связки.

Критерий не требует конечности дисперсии исходного распределения, является свободным от распределения для непрерывной F и состоятелен против альтернатив вида $\Delta > 1$.

Ранговый критерий Муда. Обозначим R_i ранг элемента X_i в объединённой выборке $(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)$, $N = m+n$. Статистика критерия Муда

$$M_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\left(R_i - \frac{N+1}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

определяется как сумма квадратов отклонений рангов первой выборки от среднего ранга. В отличие от критерия Ансари-Брэдли, где веса линейно убывают по мере

удаления от центра, здесь вклад крайних рангов (как малых, так и больших) растёт квадратично.

При справедливости H_0 и отсутствии связей точное распределение $M_{m,n}$ табулировано для малых m и n, например, у Кобзаря А.И. [8]. Для больших m,n стандартизованная статистика

$$M^*_{m,n} = \frac{M_{m,n} - \mathrm{M}M_{m,n}}{\sqrt{\mathrm{D}M_{m,n}}},$$

где математическое ожидание и дисперсия равны

$$\mathrm{M}M_{m,n} = \frac{m(N^2-1)}{12},$$

$$\mathrm{D}M_{m,n} = \frac{mn(N+1)(N^2-4)}{180},$$

при $m,n \to \infty$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Если вторая выборка имеет больший масштаб ($\Delta > 1$), её наблюдения чаще занимают крайние ранги, а наблюдения первой выборки концентрируются в центре, что приводит к уменьшению статистики $M_{m,n}$. Поэтому для альтернативы $\Delta > 1$ критическая область имеет вид

$$M_{m,n} \le m_\alpha \quad \text{или} \quad M^*_{m,n} \le u_\alpha,$$

где m_α — квантиль уровня α точного распределения $M_{m,n}$ (при малых N), а u_α — α-квантиль стандартного нормального распределения.

При наличии связок следует использовать скорректированную на связки формулу дисперсии

$$\tilde{\mathrm{D}}M_{m,n} \approx \frac{mn(N+1)}{180}\left[(N^2-4) - \frac{\sum_{j=1}^{k}(t_j^3 - t_j)}{N(N-1)}\right],$$

где k — число связок, t_j — размер j-й связки.

Критерий Муда состоятелен против альтернатив вида $\Delta > 1$, свободен от распределения при условии непрерывности исходных данных и равенства медиан и не требует конечности дисперсии исходного распределения.

Квартильный критерий для сравнения масштабов. Объединим выборки в один вариационный ряд $\mathrm{Z}_N = (Z_{(1)},\ldots,Z_{(N)})$, $N = m+n$. Обозначим Q_1 и Q_3 нижнюю и верхнюю выборочные квартили объединённой выборки, соответствующие рангам $k_1 = \left[\frac{N+1}{4}\right]$ и $k_2 = \left[\frac{3(N+1)}{4}\right]$ (здесь $[\cdot]$ — целая часть числа). Рассмотрим центральную область из наблюдений, строго заключенных между Q_1 и Q_3. Её объём $K = k_2 - k_1 - 1$. Статистика квартильного критерия $Q_{m,n}$ равна числу наблюдений первой выборки, попавших в эту область

$$Q_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} I(Q_1 < X_i < Q_3). \qquad (6)$$

При альтернативе $\Delta > 1$ (масштаб второй выборки больше) наблюдения Y_n

сильнее разбросаны по хвостам, а X_m концентрируются вокруг медианы. Поэтому доля элементов X_m в центральной части объединённой выборки выше ожидаемой.

В отсутствие связей статистика $Q_{m,n}$ имеет гипергеометрическое распределение — из N элементов выбирается m (первая выборка), причём K элементов в центральной области считаются «успехами». Поэтому математическое ожидание и дисперсия $Q_{m,n}$ имеют вид

$$\mathrm{M}Q_{m,n} = m\frac{K}{N}, \qquad \mathrm{D}Q_{m,n} = m\frac{K}{N}(1-\frac{K}{N})\frac{N-m}{N-1}.$$

При больших N можно использовать приближение $EQ_{m,n} \approx m/2$, поскольку $K \approx N/2$.

Гаеком Я. и Шидаком З. в [9] показано, что стандартизованная статистика

$$Q^*_{m,n} = \frac{Q_{m,n} - \mathrm{M}Q_{m,n}}{\sqrt{\mathrm{D}Q_{m,n}}}$$

при $m,n \to \infty$ сходится по распределению к стандартной нормальной величине.

Поскольку при альтернативе $\Delta > 1$ статистика $Q_{m,n}$ имеет тенденцию к увеличению, то критическая область имеет вид

$$Q_{m,n} \geq q_{1-\alpha} \quad \text{или} \quad Q^*_{m,n} \geq u_{1-\alpha},$$

где $q_{1-\alpha}$ — $(1-\alpha)$-квантиль гипергеометрического распределения (при малых N), $u_{1-\alpha}$ — $(1-\alpha)$-квантиль стандартного нормального распределения.

При наличии совпадающих значений на границах квартилей обычно используют средние ранги или исключают такие наблюдения.

Критерий свободен от распределения при непрерывности данных и не требует конечности дисперсии исходного распределения.

Критерий Клотца. Обозначим функцию стандартного нормального распределения через $\Phi(\cdot)$, а её обратную — через $\Phi^{-1}(\cdot)$. Для каждого ранга $j \in \{1,\ldots,N\}$, $N = m+n$, определим нормальную метку $a_N(j) = \Phi^{-1}(j/(N+1))$. Статистика Клотца определяется как сумма квадратов меток для элементов первой выборки

$$K_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\left[a_N(R_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{m}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right]^2, \qquad (7)$$

где R_i — ранг элемента X_i в объединённой выборке.

Точное распределение $K_{m,n}$ табулировано для малых m,n. При больших объёмах выборок используется асимптотическая нормальность $K_{m,n}$. Математическое ожидание и дисперсия при гипотезе $H_0 : \Delta = 1$ равны

$$\mathrm{M}K_{m,n} = \frac{m}{N}C_N, \qquad \mathrm{D}K_{m,n} = \frac{mn}{N(N-1)}Q_N,$$

где

$$C_N = \sum_{j=1}^{N} a_N^2(j), \qquad Q_N = \sum_{j=1}^{N}\left(a_N^2(j) - \frac{C_N}{N}\right)^2.$$

Гаек Я. и соавторы указывают в [10], что статистика $K^*_{m,n} = (K_{m,n} - \mathrm{M}K_{m,n})/\sqrt{\mathrm{D}K_{m,n}}$ сходится к стандартному нормальному распределению.

При альтернативе $\Delta > 1$ масштаб второй выборки больше, поэтому наблюдения Y чаще занимают крайние позиции (малые и большие ранги), где $|a_N(j)|$ велики. В то же время наблюдения X концентрируются в центре (ранги близки к $N/2$), где $a_N(j) \approx 0$. Следовательно, статистика $K_{m,n}$ принимает малые значения. Поэтому для альтернативы $\Delta > 1$ критическая область имеет вид

$$K_{m,n} \le k_\alpha \quad \text{или} \quad K^*_{m,n} \le u_\alpha,$$

где k_α и u_α — α-квантили точного и стандартного нормального распределений соответственно.

Критерий Клотца является свободным от распределения при условии непрерывности и симметрии исходных распределений.

Описание распределений для сравнения функций мощности критериев

Определим понятие функции мощности критерия (см., например, Горяинова Е.Р. и соавторы [11]).

Пусть выборка X_m соответствует непрерывному распределению $F(t-\mu)$, выборка Y_n — распределению $F((t-\mu)/\Delta)$, $\Delta > 0$, и критерий со статистикой $Q(\mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_n)$ проверяет нулевую гипотезу $H_0 : \Delta = 1$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \Delta > 1$ на уровне значимости α. Тогда функция

$$\beta(\Delta) = P(Q(\mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_n) \in V_\alpha \mid H_1 - \text{верна}),$$

где V_α — критическая область критерия со статистикой $Q(\mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_n)$, соответствующая уровню значимости α, называется функцией мощности критерия для альтернативы $H_1 : \Delta > 1$.

Согласно определению функция мощности критерия в каждой точке $\Delta > 1$ показывает вероятность принятия гипотезы H_1 в ситуации, когда H_1 верна, то есть имеет место растяжение выборки Y_n по сравнению с выборкой X_m. Критерий, показывающий более высокие значения функции мощности по сравнению с другими критериями, является предпочтительным. Однако поведение функции мощности существенно зависит от функции распределения выборки $F(x)$.

Для сравнения функций мощности указанных выше критериев необходимо выбрать набор распределений, охватывающих различные условия: от идеальных для F-теста до ситуаций, где его применение проблематично. Рассмотрим следующие типы распределений.

Распределение Стьюдента. Плотность распределения t_ν Стьюдента с ν степенями свободы имеет вид

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathrm{R},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Распределение Стьюдента при $\nu > 1$ имеет нулевое математическое ожидание, а при $\nu > 2$ дисперсию $\dfrac{\nu}{\nu-2}$.

Распределение Лапласа (двойное экспоненциальное). Распределение Лапласа с нулевым средним и параметром масштаба $b > 0$ имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x|}{b}\right), \quad x \in \mathrm{R}.$$

Дисперсия этого распределения равна $2b^2$.

Загрязнённое нормальное распределение. Загрязнённое нормальное распределение определяется как смесь двух нормальных распределений с одинаковыми математическими ожиданиями (обычно нулевыми) и разными дисперсиями. Плотность такого распределения можно записать как

$$f(x) = (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad x \in \mathrm{R}, \quad \varepsilon \in [0,1], \sigma_2^2 > \sigma_1^2.$$

Это распределение имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $(1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2$.

Экспоненциальное распределение со сдвигом. Стандартное экспоненциальное распределение с масштабом 1, плотность которого

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

сдвигается так, чтобы его медиана стала равной нулю. Плотность экспоненциального распределения со сдвигом равна

$$f(x) = e^{-(x+\ln 2)} = 2e^{-x-\ln 2}, \quad x \geq -\ln 2.$$

Анализ результатов моделирования

Для того, чтобы построить функцию мощности критерия, требуется знать распределение статистики критерия при справедливости альтернативы $H_1 : \Delta > 1$. Однако при малых объёмах выборок для некоторых рассмотренных критериев найти это распределение непросто. Поэтому в данной работе вероятности $\beta(\Delta) = P(Q(\mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_n) \in V_\alpha \mid H_1 - \text{верна})$ оцениваются как частоты соответствующих событий. С помощью метода Монте-Карло проводится $M = 1000$ моделирований пар выборок X_m и Y_n и вычисляется частота принятия альтернативы в точках Δ, где параметр масштаба Δ изменяется от 1 до 3 с шагом 0.2.

Отметим, что аналогичный подход сравнения эмпирических функций мощности критериев, предназначенных для проверки гипотезы об однородности против альтернативы сдвига, был представлен Горяиновым В.Б., Горяиновой Е.Р. в [12].

В данной работе сравнивается мощность следующих семи статистических критериев, предназначенных для проверки односторонней альтернативы $H_1 : \sigma_Y > \sigma_X$ (масштаб второй выборки больше масштаба первой): F-критерия, критерия Левена, двустороннего критерия Колмогорова–Смирнова, критерия Ансари–Брэдли, квартильного критерия, критерия Клотца и критерия Муда.

Моделирование выполнялось для восьми распределений: нормального, распределений Стьюдента с 3, 5, 10 и 30 степенями свободы, распределения Лапласа, сдвинутого экспоненциального распределения и загрязнённого нормального распределения с параметрами $\varepsilon = 0{,}1$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 9$. Все распределения имеют нулевые медианы. Объёмы выборок $m = n = 20$, уровень значимости $\alpha = 0.05$, число повторений $M = 1000$.

Оценка уровня значимости критерия. При справедливости нулевой гипотезы значение функции мощности в точке $\Delta = 1$ должна быть равна $\alpha = 0.05$, то

есть $\beta(1) = \alpha$. В таблице 1 приведены оценки значения $\beta(1) = \alpha$ для всех критериев.

Таблица 1.

Эмпирическая мощность в точке $\Delta = 1$ (уровень значимости)

Распределение	***Критерий***						
	Фишера	Ансари-Брэдли	Квартильный	Клотца	Муда	Левена	Колмогорова-Смирнова
Нормальное	0.050	0.053	0.046	0.054	0.053	0.042	0.033
Стьюдента с 3 степ. свободы	0.183	0.049	0.046	0.053	0.052	0.042	0.031
Стьюдента с 5 степ. свободы	0.121	0.047	0.053	0.051	0.050	0.043	0.032
Стьюдента с 10 степ. свободы	0.076	0.050	0.055	0.053	0.052	0.046	0.036
Стьюдента с 30 степ. свободы	0.056	0.047	0.052	0.052	0.050	0.040	0.032
Лапласа	0.129	0.049	0.048	0.052	0.050	0.045	0.034
Сдвинутое экспоненциальное	0.174	0.048	0.051	0.049	0.050	0.048	0.032
Загрязненное нормальное	0.158	0.048	0.053	0.050	0.049	0.040	0.037

Анализ таблицы 1 позволяет сделать следующие выводы.

1) F-критерий демонстрирует существенное завышение вероятности ошибки I рода для распределений с тяжёлыми хвостами (распределения Стьюдента с 3 и 5 степенями свободы), а также для распределения Лапласа (0.129), сдвинутого экспоненциального (0.174) и загрязнённого нормального (0.158). Таким образом, критерий Фишера не является несмещённым на этих распределениях, что делает его применение в таких условиях некорректным. Для распределения Стьюдента с 10 степенями свободы отклонение ещё заметно, для распределения Стьюдента с 30 степенями свободы и нормальному распределению близко к номиналу.

2) Все робастные критерии (Ансари–Брэдли, Клотца, Муда, квартильный, Левена) в целом удерживают уровень вблизи 0.05 для всех восьми распределений, включая асимметричные и загрязнённые. Небольшие колебания находятся в пределах статистической погрешности (стандартная ошибка ≈ 0.007).

3) Критерий Колмогорова–Смирнова проявляет консервативность (заниженный уровень) во всех случаях, что характерно для двусторонних критериев при малых выборках и особенно заметно для асимметричных распределений.

Сравнение мощности при $\Delta > 1$. Для наглядности рассмотрим значения эмпирической мощности при $\Delta = 2.0$ (умеренное различие дисперсий) и $\Delta = 3.0$ (сильное различие дисперсий), которые приведены соответственно в таблицах 2 и 3. Графики эмпирических функций мощности для каждого распределения представлены на рисунках 1– 8.

Таблица 2

Эмпирическая мощность в точке $\Delta = 2.0$

Распределение	***Критерий***						
	Фишера	Ансари-Брэдли	Квартильный	Клотца	Муда	Левена	Колмогорова-Смирнова
Нормальное	0.903	0.709	0.600	0.834	0.789	0.823	0.118
Стьюдента с 3 степ. свободы	0.768	0.594	0.543	0.639	0.644	0.610	0.092
Стьюдента с 5	0.822	0.641	0.579	0.714	0.704	0.715	0.104

степ. свободы							
Стьюдента с 10 степ. свободы	0.870	0.677	0.605	0.780	0.753	0.779	0.112
Стьюдента с 30 степ. свободы	0.897	0.694	0.613	0.818	0.776	0.814	0.116
Лапласа	0.813	0.540	0.477	0.625	0.605	0.653	0.079
Сдвинутое экспоненциальное	0.771	0.780	0.454	0.877	0.857	0.560	0.202
Загрязненное нормальное	0.787	0.653	0.610	0.699	0.711	0.673	0.114

Из таблицы 2 видно, что если $\Delta = 2.0$, то при нормальном распределении лучшие результаты у F-критерия с мощностью 0.903, за ним следуют критерий Клотца с мощностью 0.834 и критерий Левена с мощностью 0.823. Мощность 0.709 критеря Ансари–Брэдли уступает им, но превосходит мощность 0.6 квартильного критерия. Критерий Колмогорова-Смирнова имеет очень низкую мощность 0.118, так как не ориентирован специально на масштаб.

Для критерия Стьюдента с 3 степенями свободы среди корректных критериев лидируют критерии Муда (0.644), Клотца (0.639), Левена (0.610) и Ансари–Брэдли (0.594). Квартильный критерий отстаёт (0.543).

Для распределения Лапласа (симметричное, тяжёлые хвосты) картина аналогична распределениям Стьюдента: среди робастных критериев лидируют критерии Левена (0.653) и Клотца (0.625).

Для сдвинутого экспоненциального распределения (являющегося асимметричным) наблюдается качественно иная картина: критерии Клотца (0.877) и Муда (0.857) демонстрируют мощность выше, чем у F-критерия (0.771), при этом сохраняя корректный уровень значимости. Критерий Ансари–Брэдли также показывает высокую мощность (0.780). Критерий Левена, эффективный для симметричных распределений, здесь уступает (0.560), что объясняется чувствительностью абсолютных отклонений от медианы к асимметрии.

Для загрязнённого нормального распределения результаты близки к распределениям Стьюдента с умеренными хвостами: критерии Клотца, Муда и Левена демонстрируют сопоставимую высокую мощность (0.67–0.71).

Таблица 3

Эмпирическая мощность при $\Delta = 3.0$

Распределение	***Критерий***						
	Фишера	Ансари-Брэдли	Квартильный	Клотца	Муда	Левена	Колмогорова-Смирнова
Нормальное	0.998	0.949	0.917	0.987	0.975	0.991	0.281
Стьюдента с 3 степ. свободы	0.940	0.900	0.874	0.917	0.927	0.900	0.226
Стьюдента с 5 степ. свободы	0.980	0.923	0.907	0.958	0.955	0.965	0.243
Стьюдента с 10 степ. свободы	0.995	0.938	0.917	0.976	0.968	0.984	0.265
Стьюдента с 30 степ. свободы	0.997	0.946	0.925	0.986	0.977	0.990	0.280
Лапласа	0.979	0.855	0.811	0.916	0.901	0.936	0.182
Сдвинутое экспоненциальное	0.956	0.960	0.781	0.986	0.981	0.877	0.432
Загрязненное нормальное	0.968	0.930	0.919	0.951	0.955	0.954	0.254

Из таблицы 3 видно, что при сильном различии дисперсий ($\Delta = 3$) все робастные критерии достигают мощности выше 0.9 для симметричных распределений. Для экспоненциального распределения со сдвигом, являющимся асимметричным, критерии Клотца (0.986) и Муда (0.981) формально превосходят даже F-критерий (0.956), причём с гарантированным уровнем значимости. Для этого распределения критерий Колмогорова–Смирнова демонстрирует более высокую мощность (0.432) по сравнению с другими распределениями. Это объясняется тем, что при асимметрии различия в масштабе сопровождаются изменениями формы распределения, которые эффективно обнаруживаются двусторонним критерием Колмогорова–Смирнова. Однако его использование всё равно не рекомендуется для целенаправленной проверки гипотезы о масштабе из-за отсутствия направленности альтернативы.

Квартильный критерий при $\Delta = 3$ показывает приемлемую мощность (0.78–0.92) для всех распределений, что подтверждает его пригодность для экспресс-анализа, хотя для точных выводов предпочтительнее более мощные методы.

На рисунках 1–8 представлены графики эмпирической мощности для всех распределений. Кривые позволяют наглядно сравнить поведение критериев во всём диапазоне Δ.

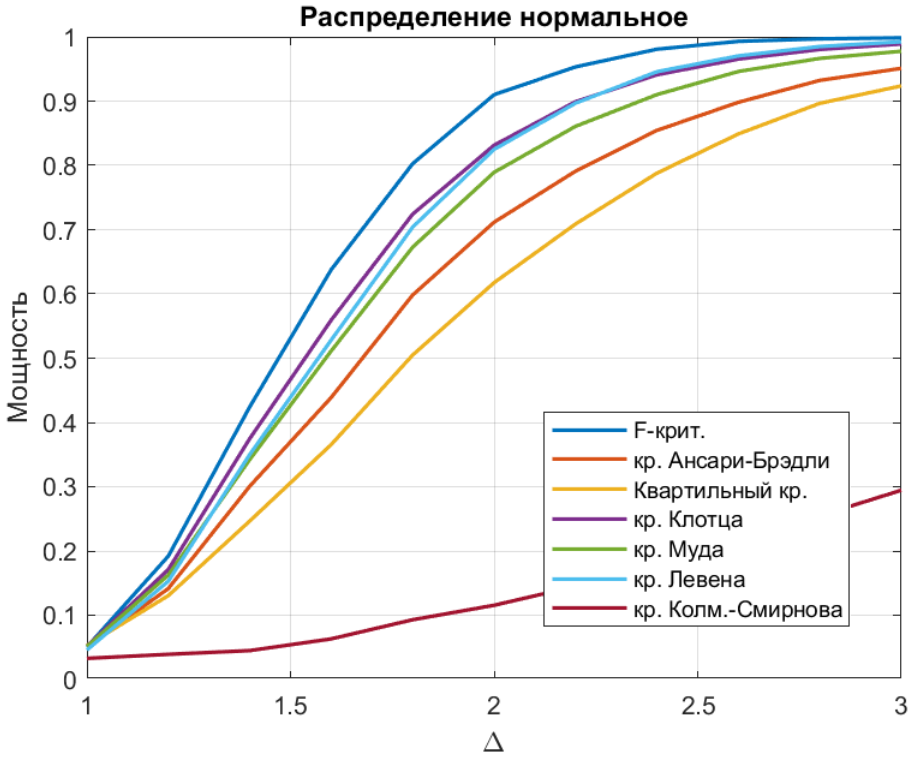

Рис. 1. Эмпирическая мощность, нормальное распределение

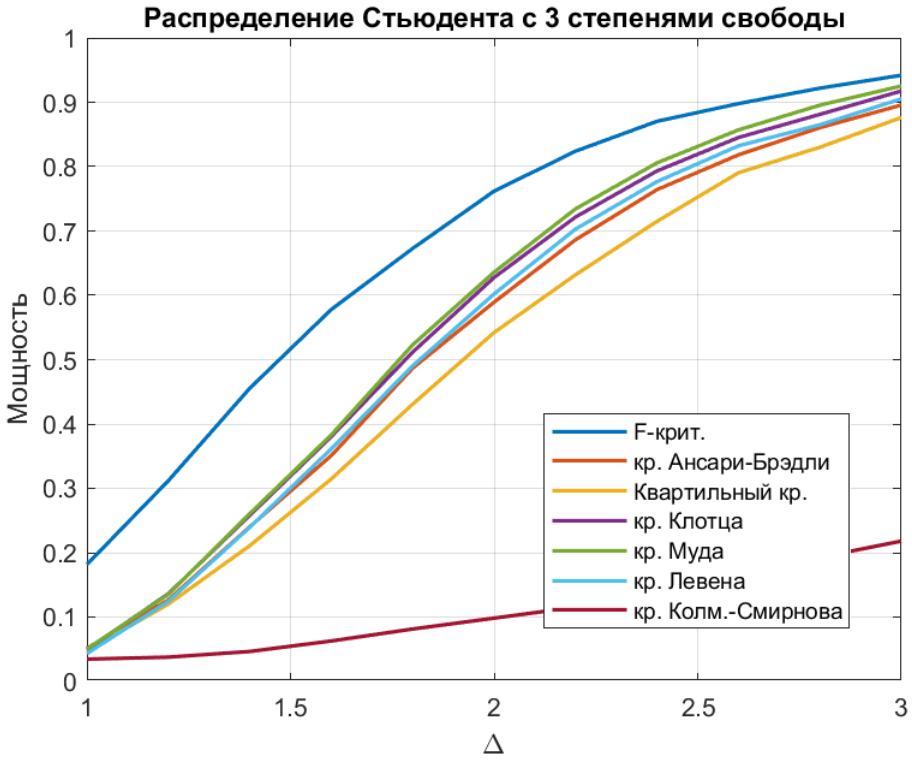

Рис. 2. Эмпирическая мощность, распределение Стьюдента с 3 степенями свободы

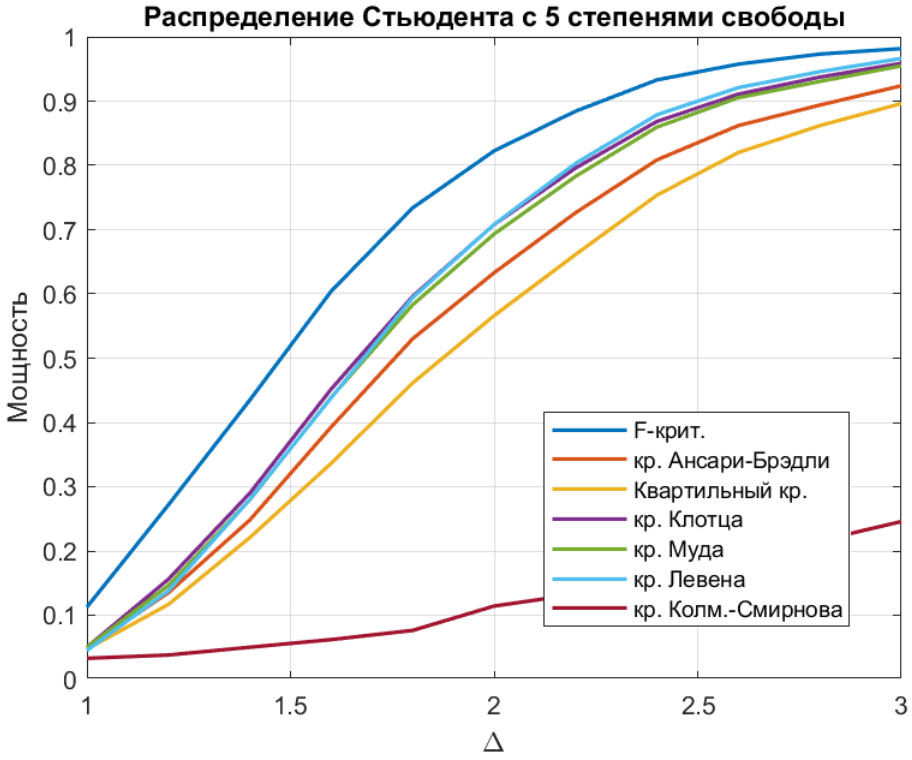

Рис. 3. Эмпирическая мощность, распределение Стьюдента с 5 степенями свободы

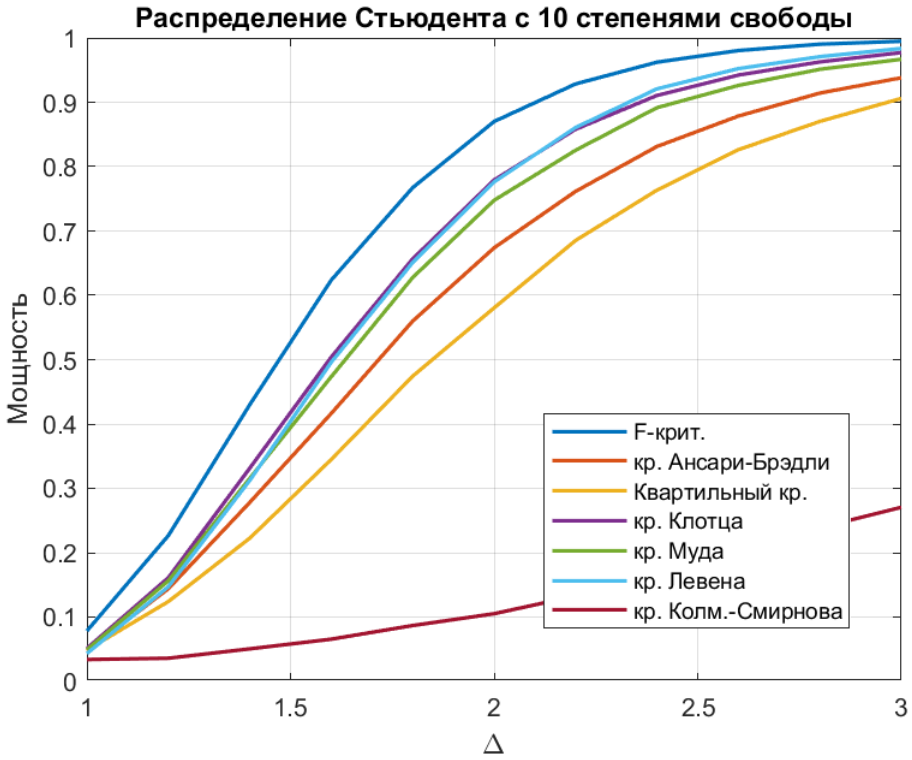

Рис. 4. Эмпирическая мощность, распределение Стьюдента с 10 степенями свободы

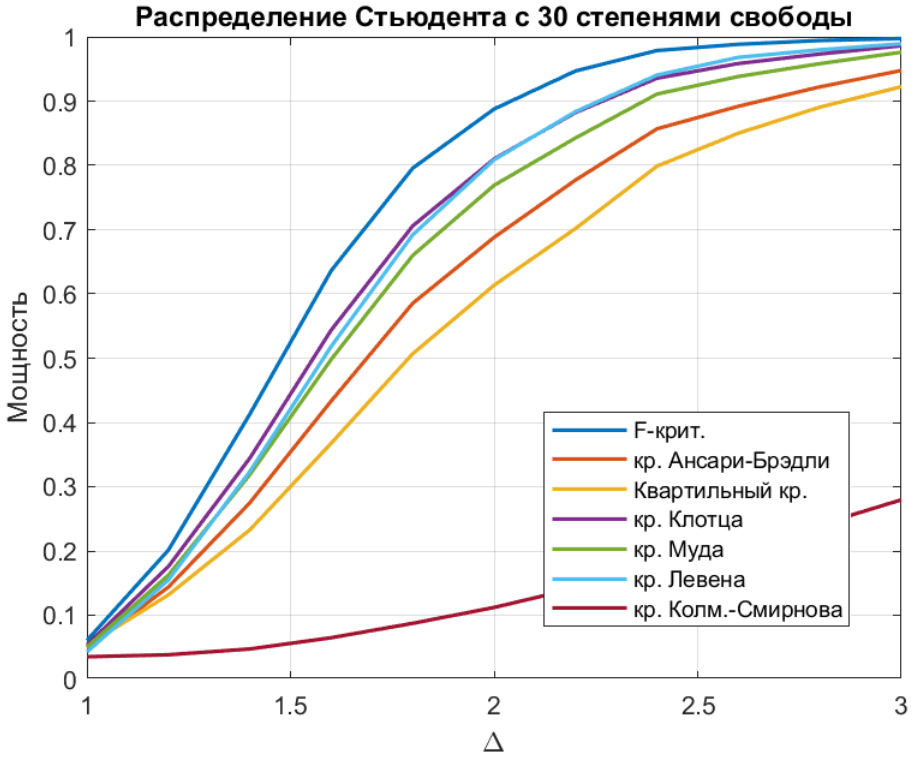

Рис. 5. Эмпирическая мощность, распределение распределение Стьюдента с 30 степенями свободы

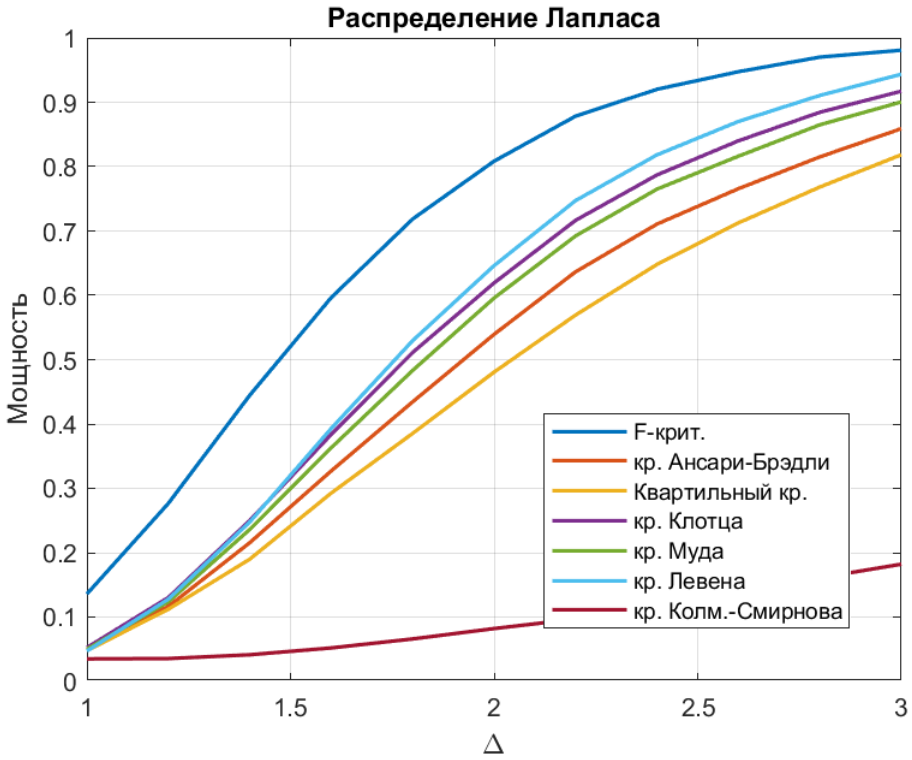

Рис. 6. Эмпирическая мощность, распределение Лапласа

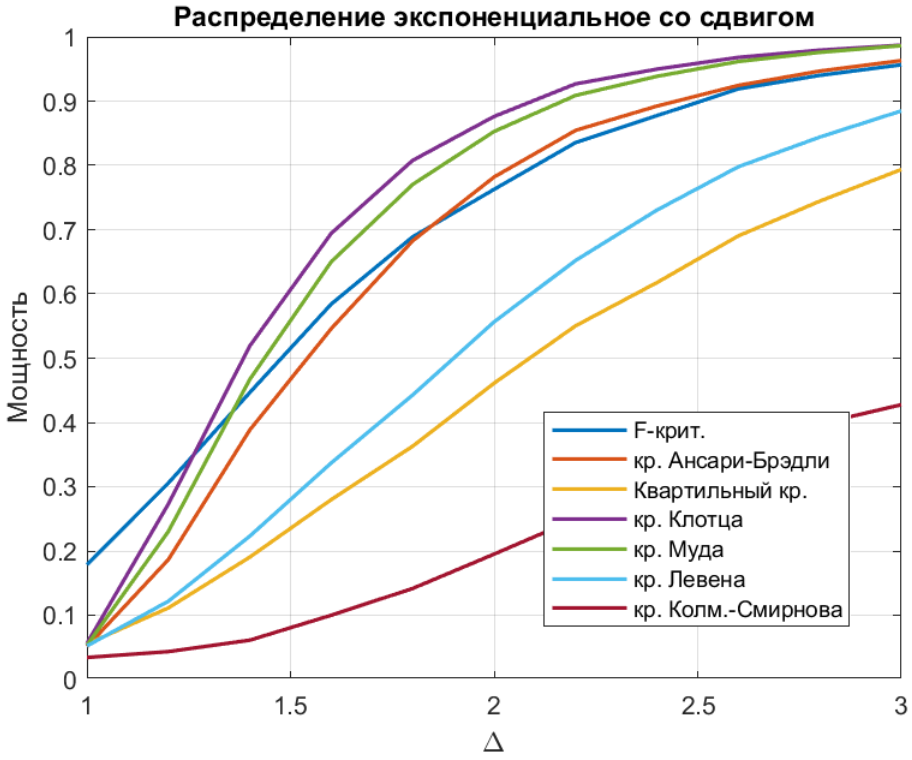

Рис. 7. Эмпирическая мощность, сдвинутое экспоненциальное распределение

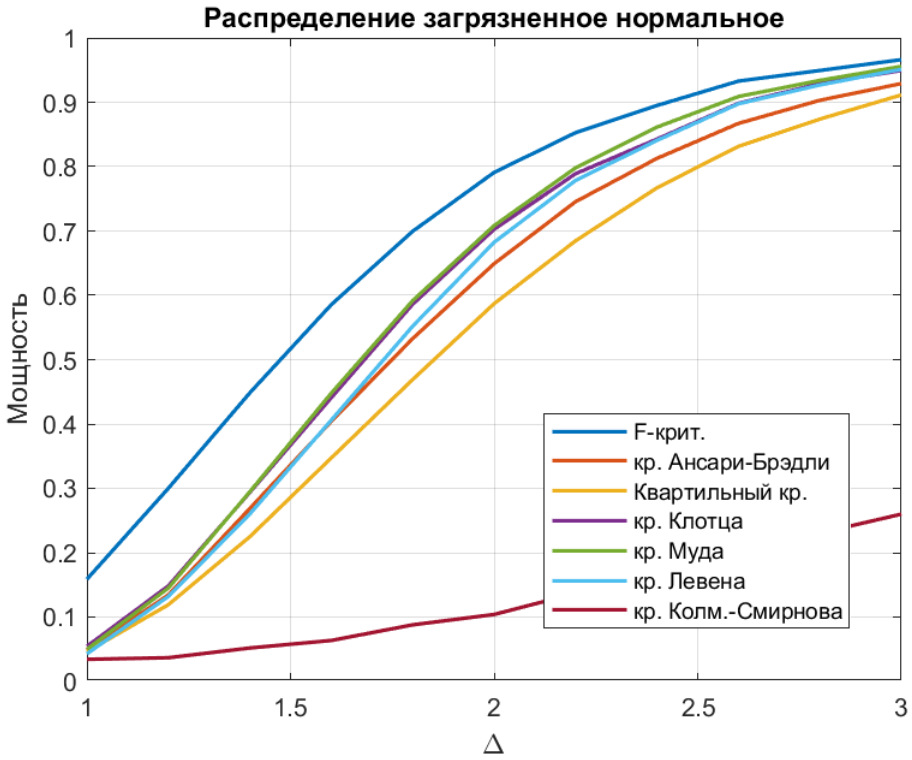

Рис. 8. Эмпирическая мощность, загрязнённое нормальное распределение

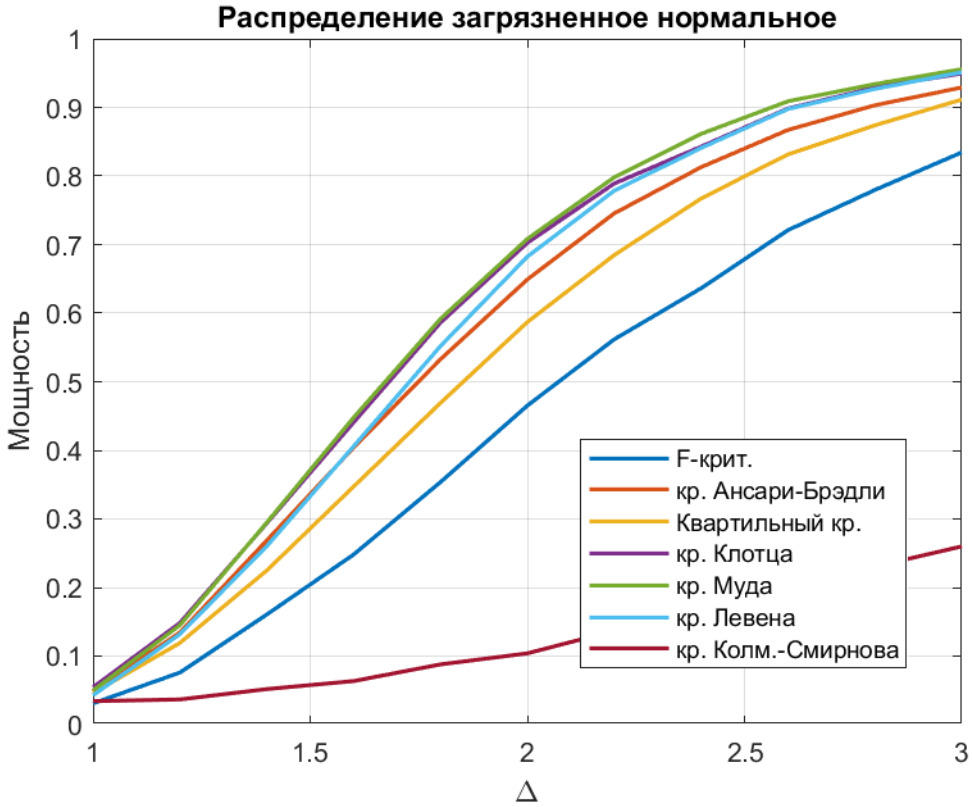

Рис. 9. Откалиброванный уровень значимости, загрязнённое нормальное распределение

Отметим, что высокие значения эмпирической мощности F-критерия для всех распределений, за исключением нормального, обусловлены иссключительно тем, что эмпирическое значение вероятности ошибки I рода превосходит номинальный уровень 0,05. Если откалибровать принятие решения так, чтобы оценка от $\beta(1) = 0,05$

, то эмпирическая функция мощности F-критерия будет уступать всем рассмотренным критериям, за исключением критерия Колмогорова – Смирнова. Графики эмпирических мощностей всех рассмотренных критериев для загрязненного нормального распределения с откалиброванным значением вероятности ошибки I рода для F-критерия приведены на рис. 9. Аналогичная картина наблюдается на всех рассмотренных распределениях, за исключением нормального.

Заключение

На основе проведённого моделирования можно дать следующие практические рекомендации.

Если есть веские основания считать распределения нормальными (например, после проверки нормальности), можно использовать F-критерий, так как он обладает наибольшей мощностью. Однако даже при небольших отклонениях от нормальности (особенно при наличии тяжёлых хвостов или асимметрии) его применение приведёт к неконтролируемому росту ошибок первого рода.

Для реальных данных, распределение которых может отличаться от нормального, но является симметричным, рекомендуется использовать критерий Клотца, критерий Муда или критерий Левена. Они сохраняют номинальный уровень значимости и демонстрируют высокую мощность как при нормальности, так и при распределениях с тяжёлыми хвостами.

Для асимметричных распределений (например, экспоненциального типа) особенно рекомендуются критерии Клотца и Муда, которые демонстрируют высокую мощность даже при умеренных различиях масштаба и сохраняют номинальный уровень значимости. Критерий Левена может уступать им в таких условиях из-за чувствительности абсолютных отклонений к асимметрии.

При наличии в наблюдениях выбросов, которые моделируются загрязненным нормальным распределением, все робастные критерии показывают сопоставимую высокую эффективность, что делает их надёжным выбором для реальных социально-экономических данных, часто содержащих аномальные наблюдения.

Критерий Ансари–Брэдли также является надёжным выбором, хотя его мощность иногда немного ниже, чем у лидеров. Он особенно полезен, когда требуется полностью ранговый метод без предположений о распределении.

Квартильный критерий можно использовать для быстрой предварительной оценки, но для серьёзных выводов его мощность недостаточна, особенно при умеренных различиях.

Критерий Колмогорова – Смирнова не следует применять для проверки именно масштаба, так как он разменивает мощность на универсальность. Лучше выбрать односторонний критерий, специально предназначенный для сравнения масштабов. Если в данных присутствует выраженная асимметрия, критерий Колмогорова–Смирнова может показывать повышенную мощность за счёт реакции на изменения формы распределения, однако это не делает его пригодным для проверки именно гипотезы о масштабе: интерпретация результата становится неоднозначной.

В заключение заметим, что при сравнении мощности критериев необходимо контролировать фактический уровень значимости. В расширенном исследовании особенно наглядно проявляется, что для асимметричных распределений ранговые критерии Клотца и Муда не только сохраняют номинальный уровень, но и демонстрируют мощность, превосходящую мощность параметрического F-критерия. Это опровергает распространённое заблуждение о том, что робастные методы всегда платят за устойчивость снижением эффективности: при корректной спецификации

альтернативы они могут быть оптимальными даже относительно параметрических аналогов.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Richard A. DeFusco, Dennis W. McLeavey, Jerald E. Pinto, David E. Runkle, Mark J. P. Anson. Quantitative Investment Analysis (CFA Institute Investment Series) 4rd Edition by Wiley,2015.
2. Kaplan Schweser. SchweserNotes™ 2020 Level I CFA® Book 1: Ethical and professional standards and quantitative methods. Kaplan, Inc.,2019.
3. Hollander M., Wolfe D. A., Chicken E. Nonparametric Statistical Methods (3rd ed.). Wiley, 2014.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. - М.: Издательство ЛКИ, 2010. - 600 с.
5. Levene H. Robust tests for equality of variances // Contributions to Probability and Statistics. - Stanford University Press, 1960. - P. 278–292.
6. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Издательство Наука ,1983. - 416 с.
7. Холлендер М., Вульф Д. Непараметрические методы статистики. - М.: Финансы и статистика, 1983.
8. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. - М.: ФМЛ, 2006. - 816 с.
9. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. - М.: Издательство «Наука», 1971. - 376 с.
10. Hajek J., Z.Sidak, P.K.Sen. Theory of Rank Tests 2ed., Academic Press, 1999. - 450 p.
11. Горяинова Е.Р., Панков А.Р., Платонов Е.Н. Прикладные методы анализа статистических данных. - М.: Издательский дом Высшей школы экономики, 2012. - 285 с.
12. Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р. Применение метода Монте-карло для сравнения оценок функции мощности критериев проверки однородности.-Modern European Researches. 2025. - Т. 1. - № 2. - С. 51-60.
13. Lehmann E.L., D'Abrera H.J.M. *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. Springer, 2006.
14. Gibbons J. D., Chakraborti S. Nonparametric Statistical Inference (5th ed.). CRC Press, 2010.
15. Motulsky H. Intuitive Biostatistics (4th ed.). Oxford UP, 2018.
16. Moore D.S., McCabe G.P., Craig B.A. Introduction to the Practice of Statistics, 9th edition. New York: W.H. Freeman, 2019 .
17. Conover W.J. Practical Nonparametric Statistics. - 3rd ed. - Wiley, 1999.
18. Brown M.B., Forsythe A.B. Robust tests for the equality of variances // Journal of the American Statistical Association. - 1974. - Vol. 69. - P. 364–367.

***Vladimir B. Goryainov*,**
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
vb-goryainov@bmstu.ru
***Elena R. Goryainova*,**
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
goryainova@bmstu.ru

Comparison of the power of criteria for testing the equality of the scale of two samples by the monte-carlo method

Abstract; The paper considers the problem of testing the hypothesis of equality of the scale parameters of two independent samples, for which the Fisher criterion, the Ansari-Bradley criterion, the Leven criterion, the Klotz criterion, the Mood criterion, and the quartile criterion are used. A comparative analysis of the effectiveness of these criteria under different distributions of observations is carried out using the Monte-Carlo method. The relevance of the study is due to the fact that the problem of testing measuring devices and the problem of comparing the risks of assets and portfolios are reduced to this statistical task. Based on a comparative analysis of the empirical power functions of the criteria, practical recommendations are given for the application of the considered criteria for checking the homogeneity.

Keywords: Monte Carlo method, power function of the criterion, empirical power function, Fisher criterion, Ansar-Bradley criterion, quartile criterion.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ И ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

Статья посвящена изучению основных методов решения плохо обусловленных или вырожденных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Приведены прямые и итерационные алгоритмы решения подобных СЛАУ. Рассмотренные алгоритмы могут быть полезны студентам при изучении численных методов линейной алгебры, методов решения некорректных задач при выполнении курсовых и выпускных квалификационных задач.

Ключевые слова

некорректные задачи, регуляризация, число обусловленности, вычислительная погрешность

АВТОРЫ

Грибов Александр Федорович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
alexandr-gribov@list.ru

Краснов Игорь Константинович,
кандидат технических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
igorkrsnv@yandex.ru

Жидков Евгений Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
enzhidkov@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-75

Введение

В настоящее время обратные и некорректные задачи превратились в объект систематического изучения и применения в физике, медицине, астрономии, геофизике и вообще во всех областях знаний, в которых применяются математические методы. численного решения подобных задач. Известно, что СЛАУ может быть сформулировано в виде операторного уравнения

$$A\bar{x} = \bar{f}, \bar{x} \in X, f \in F.$$

Здесь $A-$ линейный оператор, $f-$ исходные данные, X и $F-$ метрические пространства.

Согласно классическому определению французского математика Адамара, задача (1) называется корректной в паре метрических пространств X и F, если выполняются следующие условия:

1) для любых исходных данных $f \in F$ существует решение $\bar{x} \in X$;

2) это решение единственное;

3) это решение устойчивое в том смысле, что достаточно малому (в метрике F) изменению f соответствует сколь угодное малое (в метрике X) изменение $\bar{x}$.

Однако при решении практических задач, где исходные данные получаются, как правило, из измерений, зачастую приходится сталкиваться с ситуациями, в которых хотя бы одно из перечисленных условий не выполняется. В дальнейшем такие СЛАУ будем называть некорректными. Решение некорректных СЛАУ достигается специальными средствами регуляризации, основоположником которых является выдающийся советский математик А.Н. Тихонов. Описанию методов построения устойчивых приближенных решений некорректных задач посвящена фундаментальная работа А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [1]. Изложения численных методов решения некорректных посвящена работа А.Н. Тихонова с соавторами [2]. Задача статьи – изложить методику изучения методов решения некорректных СЛАУ для первоначального ознакомления студентов с методами регуляризации.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим примеры уравнений или их систем, задача решения которых некорректна.

Пример 1. Переопределенная СЛАУ.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 15 \end{cases}$$

Такая система не имеет решения. Действительно, если рассматривать лишь первые два уравнения, то получим решение: $x_1 = 1, x_2 = 2$. Если рассматривать второе и третье уравнения, то получим $x_1 = x_2 = 3$. Следовательно, решения не существует – нарушен первый пункт корректности по Адамару.

Пример 2. Недоопределенная СЛАУ.

$$-x_1 + 2x_2 = -4$$

Система имеет множество решений, например $x_1 = 0, x_2 = -2$ или $x_1 = 4, x_2 = 0$ и так далее. Таким образом, решение СЛАУ неединственно – нарушен второй пункт корректности по Адамару.

Пример 3. Плохо обусловленная СЛАУ.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ -1{,}33x_1 + 2x_2 = -1{,}99 \end{cases}$$

Решение системы существует и единственно: $x_1 = 3, x_2 = 1$. Однако, если правые части немного изменить, а именно

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3{,}01 \\ -1{,}33x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$$

то есть внести относительные погрешности $||\delta f||/||f|| < 0{,}5\%$, то получим новое, заметно отличное решение: $x_1 = 2$ (относительная погрешность более 30%), $x_2 = 0{,}33$ (относительная погрешность более 60%), то есть относительная погрешность решения на два порядка превышает относительную погрешность правой части. Системы, у которых небольшие погрешности в правой части системы или погрешности в матрице коэффициентов или погрешности, возникающие при численной реализации, приводят к существенному отклонению полученного решения от точного получили название плохо обусловленных или практически неустойчивых. Приведенные примеры показывают, что решение системы линейных алгебраических уравнений может быть некорректной задачей для прямоугольных матриц коэффициентов системы, а также для квадратных плохо обусловленных или вырожденных матриц.

Остановимся подробнее на понятии плохо обусловленных систем.

Пусть в СЛАУ $Ax = f$ квадратная матрица A и правая часть заданы с некоторой погрешностью. Введем понятие числа обусловленности

$$\mu(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Имеет место следующая оценка относительной погрешности решения

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \cdot \frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{\left|\left|\Delta x\right|\right|}{\left|\left|x\right|\right|} + \frac{\left|\left|\Delta f\right|\right|}{\left|\left|f\right|\right|} \right).$$

Если матрица без погрешности $(\Delta A = 0)$, то

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \mu(A) \frac{\left|\left|\Delta f\right|\right|}{\left|\left|f\right|\right|}.$$

Если пренебречь величинами второго порядка малости и выше $(\Delta A \cdot \Delta x \approx 0)$, тогда

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \mu(A) \left(\frac{\left|\left|\Delta x\right|\right|}{\left|\left|x\right|\right|} + \frac{\left|\left|\Delta f\right|\right|}{\left|\left|f\right|\right|} \right).$$

Число обусловленности определяет насколько погрешность входных данных может повлиять на решение системы. При $\mu(A) = 1 \div 10$ система считается хорошо обусловленной, ошибки входных данных слабо сказываются на решении системы. При $\mu(A) \geq 100$ система считается плохо обусловленной. При этом

$$\left|\left|A\right|\right| = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}, \quad \left|\left|f\right|\right| = \sqrt{\sum_i f_i^2}, \quad \left|\left|x\right|\right| = \sqrt{\sum_i x_i^2}.$$

Обобщенное решение. Псевдорешение

Прежде чем перейти к изложению методов решения некорректных СЛАУ определим, что будем понимать под решением таких систем.

Пусть $Ax = f, \text{где } x \in R^n, \quad f \in R^m, \ A -$ вещественная матрица размером $m \times n$.

Псевдорешение. Вектор $x \in R^n$, реализующий минимум нормы невязки

$$\mathcal{J}(x) = ||Ax - f||^2 \to \min$$

называется псевдорешением системы $Ax = f$. Необходимым условием минимума будет $A^T Ax - A^T f = 0, \text{где } A^T -$ транспонированная матрица. Следовательно, вектор x является решением системы уравнений

$$A^T Ax = A^T f,$$

сама эта система называется нормальной системой по отношению к системе $Ax = f$.

Установлено, что для любого f система нормальных уравнений всегда имеет решение, которое называется псевдорешением системы $Ax = f$. Псевдорешение может быть неединственным (если определитель $\det A^T A = 0$), если же $\det A^T A \neq 0$, то псевдорешение единственно. Обозначим множество псевдорешений X_n. Если система $Ax = f$ имеет решение, то оно совпадает с решением $A^T Ax = f$. В этом случае $\min\limits_{x \in R^n} \mathcal{J}(x) = \mu = 0$. Если же $\min\limits_{x \in R^n} \mathcal{J}(x) = \mu > 0$, то система $Ax = f$ не имеет решения, но имеет псевдорешение (возможно неединственное). Число μ обычно называют мерой несовместности системы $Ax = f$.

Определение. Нормальное псевдорешение x_H системы $Ax = f -$ это псевдорешение с минимальной нормой. Его можно найти, решая задачу $\min ||x||$. Нормальное псевдорешение $x \in X_n$ существует и единственно. Нормальное псевдорешение непрерывно зависит от ошибок в правой части f. Однако нормальное псевдорешение x_H неустойчиво по отношению к возмущениям элементов матрицы A.

Пусть задана несовместная система

$$\begin{cases}1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1\end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}.$$

Перейдем к нормальной системе с

$$A^T A = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad A^T f = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}.$$

Построим множество псевдорешений системы $Ax = f$;

$$X_n = \{(x_1, x_2): x_1 = 1, x_2 \in R\}.$$

Тогда нормальным псевдорешением данной системы будет вектор $x_H = (1,0)^T$.

Возмущенную систему возьмем в виде

$$\begin{cases}1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + h \cdot x_2 = 1'\end{cases}$$

где $h -$ малый параметр.

Поскольку эта система имеет единственное решение $x = (1,1/h)^T$, то оно и будет нормальным псевдорешением возмущенной системы $x_{Hh} = (1,1/h)^T$. Очевидно, $\mathcal{J}_{Hh} \to \infty$ при $h \to 0$, то есть $\left||x_H - x_{Hh}|\right| \to \infty$ при $h \to 0$, что и доказывает неустойчивость нормального псевдорешения по отношению к возмущениям элементов матрицы коэффициентов системы.

Метод регуляризации решения операторных уравнений

В качестве некорректно поставленной задачи будем рассматривать задачу решения уравнения

$$A\bar{x} = \bar{f}$$

относительно $\bar{x}$, где $f \in F,\ x \in X,\ F, X -$ метрические пространства. Оператор A отображает X на F. Обычно рассматривают случаи, когда класс возможных решений является компактом. Однако в прикладных задачах часто возникает ситуация, когда этот класс не является компактом. Кроме того изменения правой части уравнения, связанные с ее приближенным характером, могут выводить за пределы множества $AX -$ образа множества X при отображении его с помощью оператора A. Такие задачи называются существенно некорректными. Был разработан новый подход к решению некорректно поставленных задач, позволяющий строить приближенные решения, устойчивые к малым изменениям исходных данных. В основе этого подхода лежит фундаментальное понятие регуляризирующего оператора. Перейдем к рассмотрению этого понятия полагая, что в уравнении приближенной является правая часть, а оператор задан точно.

Метод регуляризации. Рассмотрим понятие регуляризирующего алгоритма (РА), которое лежит в основе методов решения некорректных задач. Далее в этом разделе $A -$ квадратная матрица.

Будем различать в задаче $Ax = f$ точные данные $\{A, f\}$, которые нам неизвестны, и приближенные данные $\{A_h, f_\delta\}, h > 0, \delta > 0, ||A_h - A|| \le h,\ ||f_\delta - f|| \le \delta$ с уровнем погрешности h, δ.

Рассмотрим семейство векторов, сходящихся к нормальному псевдорешению $x_{НП}$ уравнения $Ax = f$ при $h, \delta \to 0$. За приближенное решение, нельзя принимать нормальное псевдорешение возмущенного уравнения $A_h x = f_\delta$ поскольку нормальное псевдорешение неустойчиво. Пусть в нашем распоряжении имеется семейство алгоритмов $\{R_\alpha\}, \alpha > 0$, каждый из которых паре $\{A_h, f_\delta\}, h > 0, \delta > 0$ однозначно сопоставляет вектор $R_\alpha(A_h, f_\delta) = x_{h\delta}^{\propto} \epsilon X = R^n$. Если существует зависимость параметра $\alpha = \alpha(h, \delta)$ от погрешностей h, δ исходных данных, такая, что $\lim\limits_{h,\delta \to 0} \alpha(h, \delta) = 0$, $\lim\limits_{h,\delta \to 0} ||x_{h\delta}^{\alpha} - x_{\text{НП}}|| = 0$, то $\{x_{h\delta}^{\alpha}\}, h > 0, \alpha > 0, \delta > 0$ называется регуляризированным семейством приближенных решений, а алгоритм $R_\alpha -$ регуляризирующим алгоритмом для задачи $Ax = f$, а параметр α называется параметром регуляризации.

Необходимо отметить, что нормальное псевдорешение системы $Ax = f$ совпадает с ее точным решением, если эта система однозначно разрешима, и с нормальным решением, если система $Ax = f$ имеет множество решений.

Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов

Вариационный подход к построению регуляризирующих алгоритмов был впервые предложен А.Н. Тихоновым. В дальнейшем были предложены итерационные алгоритмы, описанные в работе А.Б. Бакушинского и А.В. Гончарского [3] и регуляризация М.А. Лаврентьева, рассмотренная в книге С.И. Кабанихина [4]. Рассмотрим подход А.Н. Тихонова применительно к решению некорректных СЛАУ. В соответствии с этим подходом вводится функционал (функционал Тихонова)

$$\mu^{\alpha}[x] = \left||A_h x - f_\delta||^2 + \alpha||x||^2,\right.$$

$\alpha > 0 -$ параметр регуляризации, и ставится экстремальная задача: найти $\min\limits_{x \in X} \mu^{\alpha}[x]$, полагая $X = R^n$. Данный функционал является суммой выпуклого и сильно выпуклого функционалов и поэтому существует и притом единственный элемент $x_{h\delta}^{\alpha} = \operatorname{argmin} \mu^{\alpha}[x]$. Численные методы отыскания элемента, на котором функционал Тихонова достигает минимума при фиксированном значении параметра регуляризации основан на двух следующих подходах: необходимым и достаточным условием является обращение в нуль градиента.

Таким образом получается уравнение Эйлера

$$(A_h^T \cdot A_h + \alpha I) x_{h\delta}^{\alpha} = A_h^T f_\delta.$$

Для того чтобы решение уравнения Эйлера сходилось к точному решению уравнения $Ax = f$ необходимо, чтобы параметр α был согласован с погрешностями h, δ. Пусть $\det A_h \neq 0$.

Определение. Функция параметра регуляризации $\alpha > 0$

$$\rho_{h\delta}(\alpha) = ||A_h x_{h\delta}^{\alpha} - f_\delta||^2 - (\delta + h||x_{h\delta}^{\alpha}||^2)$$

называется обобщенной невязкой.

Следующий способ выбора параметра регуляризации называется обобщенным принципом невязки.

Пусть условие $\left||f_\delta|\right| > \delta$ не выполнено. Тогда в качестве приближенного решения выберем $x_{h\delta}^{\alpha} = 0$. В противном случае обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$, то есть $\rho_{h\delta}(\alpha^*) = 0$ или $\left||A_h x_{h\delta}^{\alpha^*} - f_\delta\right||^2 = (\delta + h\left||x_{h\delta}^{\alpha^*}\right||^2)$. В этом случае приближенное решение $z_{h\delta}^{\alpha^*}$ определяется единственным образом и $z_{h\delta}^{\alpha^*} \to x$ при $(h, \delta) \to (0,0)$. Функция $\rho_{h\delta}(\alpha)$ непрерывная и монотонная не убывает при $\alpha > 0$ и меняет знак с плюса на минус. Тогда $\rho_{h\delta}(\alpha) = 0$ имеет корень, который может быть найден с использованием известных численных методов отыскания корней монотонных непрерывных функций (например, метод секущих).

В случае, если матрица A задана точно ($h = 0$), то функционал Тихонова имеет вид

$$\mu^{\alpha}[x] = \left||A\,x - f_\delta||^2 + \alpha||x||^2, \qquad \alpha > 0.\right.$$

Тогда уравнение Эйлера, соответствующее данному функционалу

$$(A^T \cdot A + \alpha I) x_\delta^{\alpha} = A^T f_\delta.$$

Если параметр α выбрать из соотношения $\left||A\,x_\delta^{\alpha} - f_\delta|\right| = \delta$, то решение x_δ^{α} стремится к точному решению x при $\delta \to 0$.

Отметим, что для желающих углубить свои знания по данной теме стоит обратиться к работе С.К. Годунова [5].

Заключение

В статье рассмотрен метод решения плохо обусловленных и вырожденных систем линейных уравнений с помощью регуляризации Тихонова А.Н. В основе этого метода лежит вариационный подход, который позволяет построить приближенные решения, сходящиеся к точному при стремлении погрешности в задании матрицы коэффициентов и правых частей уравнений к нулю. Метод регуляризации, предложенный А.Н. Тихоновым является одним из первых методов решения некорректных задач. Наряду с вариационным подходом впоследствии были разработаны итеративные методы регуляризации, в которых в качестве параметра регуляризации выступает число итераций. Необходимо отметить и регуляризацию Лаврентьева М.А., разработанную для матриц коэффициентов специального вида. Данная работа будет полезна студентам третьего и четвертого курсов МГТУ им. Баумана при изучении курса «Введение в теорию обратных и некорректных задач».

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: УРСС, 2022 г. – 288 с.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990 г. – 230 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989 г. – 126 с.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебное пособие. Новосибирск: Сибирское отд. Российской акад. наук, 2018 г. – 511 с.
5. Годунов С.К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002 г. – 240 с.

***Alexander F. Gribov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Mosco
alexandr-gribov@list.ru
***Igor K. Krasnov*,**
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, igorkrsnv@yandex.ru
***Evgeny N. Zhidkov*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
enzhidkov@yandex.ru

Methods for solving degenerate and ill-conditioned systems of linear algebraic equations

Abstract. This article explores the fundamental methods for solving ill-conditioned or degenerate systems of linear algebraic equations (SLAEs). Direct and iterative algorithms for solving such SLAEs are presented. The algorithms discussed can be useful for students studying numerical methods in linear algebra and methods for solving ill-posed problems when completing coursework and final qualification assignments.

Keywords: ill-posed problems, regularization, condition number, computational error.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ "ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ"

Аннотация

Изучение интегрального исчисления в высшей школе вызывает у студентов значительные трудности, связанные с абстрактностью понятий и необходимостью осознанного выбора методов интегрирования. Цель статьи является теоретическое обоснование и методическая иллюстрация подхода, позволяющего организовать работу по преодолению этих трудностей, а именно: применение структурно-логических схем (СЛС) при изучении темы «Интегральное исчисление функции одной переменной». В результате на основе анализа литературы выделены типы и принципы построения СЛС; разработаны три авторские схемы по ключевым разделам; для каждой сформулированы дидактические цели, приведены методические рекомендации и варианты заданий, а также выявлены ограничения применения СЛС.

Ключевые слова

структурно-логические схемы, интегральное исчисление, визуализация учебной информации, методы интегрирования

АВТОРЫ

Забелина Светлана Борисовна,
кандидат педагогических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
zabelina_sb@mail.ru

Пинчук Ирина Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
доцент ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», г. Москва
irenepin@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-81

Введение

Интегральное исчисление функции одной переменной является одним из фундаментальных разделов математического анализа, традиционно вызывающим значительные трудности у студентов. Сложность обусловлена необходимостью усвоения большого объема теоретического материала (определения, теоремы, свойства), формирования навыков применения различных методов интегрирования и понимания прикладного значения интеграла. В связи с этим актуальным становится поиск эффективных методов обучения, среди которых особое место занимает использование структурно-логических схем (СЛС).

Представим анализ результатов исследований, посвященных применению структурно-логических схем в обучении математике, с целью выявления

возможностей и особенностей использования данного подхода при изучении интегрального исчисления.

В научно-педагогической литературе структурно-логические схемы определяются как компактное схематическое отображение основных дидактических единиц учебного материала с указанием логических связей между ними. Жарикова О.С. и Мироненкова Н.Н. подчеркивают, что СЛС представляют собой оригинальный эффективный инструментарий для активизации всех познавательных способностей студента, включая восприятие, воображение, память, представление и мышление. [1]. Структурно-логические схемы относятся к классу знакового моделирования, которое, по определению Гурбатовой Е.Р. и Когаловского С.Р., «служит и средством достижения и удержания в сознании целостности предмета рассмотрения, и средством его преобразований, и средством восхождений к метауровневым рассмотрениям, и средством выражения программы действий» [2].

В зависимости от характера логических связей между элементами учебного материала исследователи выделяют несколько типов СЛС. Опишем некоторые из них в свете преподавания интегрального исчисления.

«Схема следование» — алгоритм, в котором суждения, умозаключения и понятия имеют однократную последовательную связь. Данный тип применим для представления последовательности действий при вычислении интеграла методом подстановки или интегрирования по частям.

«Циклическая схема» — алгоритм, в котором выявлены смысловые аналогии, повторяющиеся по заданному логической цепочке циклу в причинно-следственной связи. Этот тип позволяет отразить взаимосвязь между определенным и неопределенным интегралом, а также между дифференцированием и интегрированием.

«Образно-наглядная схема» — алгоритм, строящийся на основе образа в причинно-следственной связи понятий, суждений, умозаключений по заданной проблеме. Данный тип наиболее сложен и требует комментария, особенно при объяснении геометрического смысла определенного интеграла.

Асауленко Е.В. с соавторами вводят понятие структурно-ментальных схем, выделяя три типа задач и соответствующих им схем: расчетные задачи (схемы на основе вычислительных примитивов), операционные задачи (иерархические процедурные схемы) и алгоритмические задачи (традиционные блок-схемы) [3]. Эффективность СЛС объясняется их соответствием психофизиологическим особенностям современных обучающихся. Как отмечается в исследовании Жариковой О.С. и Мироненковой Н.Н., подача материала в структурно-логической форме ориентируется не только на левое полушарие мозга (отвечающее за логику и последовательность), но и в большей степени на правое (отвечающее за образное мышление и целостное восприятие). Панова Н.В. подчеркивает, что актуальность применения структурно-логических схем обусловлена приходом в образовательные учреждения поколения детей с клиповым мышлением, предпочитающих нетекстовую, наглядно-образную информацию и испытывающих трудности в восприятии длительной линейной последовательности [4].

В методической литературе выделяются следующие дидактические функции СЛС:

1. Организующая — обеспечение выделения тех элементов знаний и отношений между ними, которые могли бы оказаться вне поля внимания студентов.

2. Координирующая — направление познавательной деятельности в русло последовательного освоения материала.

3. Информационная — компактное представление укрупненных единиц учебной информации.

4. Интегрирующая — объединение разрозненных знаний в целостную систему.

5. Контролирующая — обеспечение возможностей для самопроверки усвоения материала.

Конышева Л.К. с соавторами отмечает, что структурно-логическая схема курса математики может служить основой проектирования образовательной программы, обеспечивая целостность курса и повышая качество его усвоения студентами.

Таким образом, возникает противоречие между потребностью в формировании у студентов алгоритмической компетентности при изучении интегрального исчисления, с одной стороны, и недостаточной разработанностью процессуальных форм структурно-логических схем, способных служить инструментом навигации в пространстве методов и приемов интегрирования, с другой стороны. Это противоречие определяет актуальность нашего исследования.

Методология и результаты исследования

Отметим особенности применения структурно-логических схем при изучении интегрального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной характеризуется рядом особенностей, которые делают применение СЛС особенно целесообразным:

1. Многоуровневая структура понятийного аппарата: от первообразной и неопределенного интеграла до определенного интеграла и его приложений.

2. Разнообразие методов интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям, интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных функций.

3. Взаимосвязь с дифференциальным исчислением: интеграл как операция, обратная дифференцированию.

4. Множественность прикладных интерпретаций: площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, работа переменной силы и др.

Основываясь на анализе работ, можно выделить следующие принципы построения СЛС при изучении интегрального исчисления.

Принцип укрупнения дидактических единиц. При разработке СЛС сначала путем обобщения принципиально сходных элементов знаний по конкретной теме создаются укрупненные единицы учебной информации, а затем между ними устанавливаются логические и функциональные связи.

Принцип иерархической вложенности. Знание о структуре интегрального исчисления предполагает выстраивание многоуровневой системы, где каждый последующий уровень конкретизирует предыдущий.

Принцип отражения генетической связи понятий. В рамках развивающего обучения (Эльконина-Давыдова) важно отразить в схеме происхождение понятия интеграла из практической задачи нахождения площади или восстановления движения по скорости.

На основе обобщения теоретических положений может быть предложена следующая структура СЛС по теме "Интегральное исчисление функции одной переменной".

Уровень 1: Базовые понятия.

- Первообразная (определение, основное свойство).
- Неопределенный интеграл (определение, геометрический смысл).
- Определенный интеграл (определение, геометрический смысл).

Уровень 2: Свойства.

- Свойства неопределенного интеграла.
- Свойства определенного интеграла.

Уровень 3: Методы интегрирования.
- Непосредственное интегрирование.
- Метод подстановки.
- Интегрирование по частям.
- Интегрирование классов функций (рациональных, тригонометрических, иррациональных).

Уровень 4: Взаимосвязи.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Интеграл с переменным верхним пределом.

Уровень 5: Приложения.
- Геометрические (площадь, объем, длина дуги).
- Физические (работа, давление, центр масс.)

Рассмотрим особенности представления математической информации. При составлении СЛС по интегральному исчислению используются разнообразные средства наглядности: графики, таблицы, рисунки, схемы, символы, формулы. СЛС представляет собой модель знаний, системно и лаконично отражающую учебный материал.

Особую роль играет визуализация геометрического смысла интеграла. Как отмечает Панова Н.В., рисунок на доске, появляющийся постепенно, способствует более яркому выделению отличительных структурных черт, повышает обучающую ценность. Штрих за штрихом, линия за линией вместе с объяснением возникает изображение, служащее обобщенным выражением зрительного образа.

Технология создания структурно-логических схем может быть выражена в следующей последовательности действий при разработке:

1. Выбор проблемы, аспекта, явления для разработки и приемлемого вида структурно-логической схемы для решения поставленной задачи.

2. Установление причинно-следственных связей и их графическое выстраивание в схеме. Можно использовать свойства геометрических фигур, помогающие в установлении смысловых связей.

3. Выбор ключевых понятий, фактов, которые становятся основой смыслового взаимодействия с опорой на логические связи.

4. Конструирование модели. В центр будущей системы помещается объект конструирования (тема «Определенный интеграл», понятие «Первообразная» и т.п.). Определяется набор координат — «круг вопросов» по проектируемой теме. Определяется набор опорных узлов — «смысловых гранул» для каждой координаты. Осуществляется перекодирование информационных фрагментов для каждой гранулы путем замены ключевыми словами или словосочетаниями. Выполняется ранжирование гранул и расстановка на координатах.

Структурно-логические схемы могут использоваться на различных этапах изучения интегрального исчисления. На этапе лекционного изложения СЛС выполняет функцию наглядной опоры, позволяя преподавателю представить целостную картину темы. На этапе самостоятельной работы СЛС служит дидактическим ориентиром. В исследовании подчеркивается, что средством, организующим понимание и усвоение запрограммированной в каждой схеме информации, являются задания к ним. Форма предъявления заданий обеспечивает выделение тех элементов знаний и отношений между ними, которые могли бы оказаться вне поля внимания студентов. На этапе контроля и самоконтроля СЛС позволяет студенту проверить полноту и системность усвоения материала. Последовательное выполнение заданий призвано содействовать повышению качества знаний и постепенному переходу от просто ориентировки в учебном материале к его творческому применению.

Ниже представлена разработка конкретных структурно-логических схем (СЛС) для двух ключевых разделов интегрального исчисления функции одной переменной.

СХЕМА 1. ГЕНЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛА (ДВИЖЕНИЕ → ПЛОЩАДЬ → ИНТЕГРАЛ).

Дидактическая цель - сформировать у студентов понимание, что определённый интеграл возникает из двух разных задач (восстановление пути по скорости → накопление; площадь под графиком → геометрия), которые приводят к одному математическому объекту.

ГЕНЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА
Две задачи → одна математическая модель → формула Ньютона–Лейбница

ЗАДАЧА 1 (ФИЗИКА)

Найти путь, пройденный телом за время от a до b
Дано: v(t) — скорость в момент времени t
Найти: S — путь
Процесс нахождения пути:

Разбиваем интервал [a; b] на n частей
↓
На каждом участке считаем $\Delta S_i \approx v(t_i) \cdot \Delta t$
↓
Суммируем: $S \approx \Sigma\, v(t_i) \cdot \Delta t$
↓
Устремляем $n \to \infty$ ($\Delta t \to 0$)
↓
$S = \lim \Sigma\, v(t_i) \cdot \Delta t$

ЗАДАЧА 2 (ГЕОМЕТРИЯ)

Найти площадь криволинейной трапеции под графиком f(x)
Дано: $f(x) \geq 0$ на [a; b]
Найти: S — площадь
Процесс нахождения площади:
Разбиваем интервал [a; b] на n частей
↓
На каждом участке заменяем кривую прямоугольником: $\Delta S_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x$
↓
Суммируем: $S \approx \Sigma\, f(x_i) \cdot \Delta x$
↓
Устремляем $n \to \infty$ ($\Delta x \to 0$)
↓
$S = \lim \Sigma\, f(x_i) \cdot \Delta x$

ЕДИНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b$$

$$\int_a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma\, f(\xi_i)\cdot \Delta x$$

(предел интегральных сумм)

ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА (связь двух задач)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

где F(x) — первообразная функции f(x) (F'(x) = f(x))

ИТОГОВОЕ ПОНИМАНИЕ

Аспект	***Содержание***
Физическая интерпретация	Интеграл от скорости — путь
Геометрическая интерпретация	Интеграл от функции — площадь под графиком
Математическая сущность	Предел интегральных сумм

ЦИКЛИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ: ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ⇄ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА: СОПОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧ

Элемент	***Физическая задача (путь)***	***Геометрическая задача (площадь)***
Исходные данные	$v(t)$ — скорость	$f(x)$ — высота кривой
Разбиение	Интервал времени $[a;b]$	Отрезок $[a;b]$ по оси x
Элементарная величина	$\Delta S \approx v(ti)\cdot\Delta t$	$\Delta S \approx f(xi)\cdot\Delta x$
Суммирование	$S \approx \sum v(ti)\Delta t$	$S \approx \sum f(xi)\Delta x$
Предел	$S=\lim\sum v(ti)\Delta t$	$S=\lim\sum f(xi)\Delta x$
Математическая запись	$\int_b^a v(t)dt$	$\int_a^b f(x)dx$
Исходные данные	$v(t)$ — скорость	$f(x)$ — высота кривой

Пояснение для преподавателя.

Схема строится на доске постепенно:

1. Слева / справа — две разные задачи.

2. Показывается, что обе приводят к одной и той же предельной конструкции (интегральная сумма).

3. Вводится обозначение интеграла.

4. Вводится формула Ньютона–Лейбница как мостик между ними.

5. Формулируется вывод: интеграл — это не «площадь» и не «путь», а оператор, который в приложениях интерпретируется по-разному.

Задание к схеме для студентов.

Используя схему, объясните:

1. Почему физическая и геометрическая задачи приводят к одной математической модели?

2. В каком месте схемы появляется первообразная?

3. Приведите пример, где одна и та же функция (f(x)) в одной задаче означает скорость, а в другой — плотность распределения.

Схема 2. Методы интегрирования (классификация и выбор).

Дидактическая цель - обучить студентов осознанному выбору метода интегрирования, а не хаотичному перебору.

АЛГОРИТМ ВЫБОРА МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$\int f(x)\,dx$
▼
ВОПРОС 1. Является ли интеграл ТАБЛИЧНЫМ?

ДА	НЕТ
↓ Записать табличный интеграл → ответ	↓ Переход к вопросу 2

▼

ВОПРОС 2. Можно ли использовать СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОСТИ?

$$\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$$
$$\int (c \cdot f)\,dx = c \cdot \int f\,dx$$

ДА	НЕТ
↓ Разбить на сумму / простых интегралов табличных	↓ Переход к вопросу 3

▼

ВОПРОС 3. Определить ВИД ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ и выбрать соответствующий метод (см. таблицу ниже)

▼

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ШАГ. Проверить результат ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

ТАБЛИЦА МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

№	***Признак подынтегрального выражения***	***Метод***	***Формула / действие***
1	$f(x)=g(kx+b)$ (линейный аргумент)	Линейная замена	t= $kx+b$ $dx=\frac{dt}{k}$
2	$f(x)=u(x)\cdot v'(x)$ (произведение разнородных функций)	Интегрирование по частям	$\int udv=uv-\int vdu$
3	$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (рациональная дробь)	Разложение на простейшие дроби	1) Выделить целую часть 2) Разложить на сумму дробей типа $\frac{A}{(x-a)^k}$ и $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$
4	$f(x)=sin^m x\cdot cos^n x$ (тригонометрические)	Универсальная подстановка или формулы понижения	$t=tg\frac{x}{2}$ либо замена $t=sinx$ / $t=cosx$ либо $(sin\ x)^2=\frac{1-cos\ 2x}{2}$
5	$f(x)=R(x,\sqrt{ax+b})$ (иррациональность)	Замена, избавляющая от корня	$t=\sqrt{ax+b}$ или t = $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ КАЖДОГО МЕТОДА (см., например, [8])

Метод	***Пример***	***Ключевое действие***
Линейная замена	$\int cos(3x+2)dx$	$t=3x+2$

Интегрирование по частям	$\int xe^x dx$	$u = x, dv = e^x dx$
Рациональные дроби	$\int \frac{dx}{x^2-1}$	$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$
Тригонометрические	$\int sin^2 x dx$	$sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$
Иррациональности	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	$t = \sqrt{x+1}$

АЛГОРИТМ ВЫБОРА МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПРИМЕРОМ

$\int f(x)\,dx$

▼

ВОПРОС 1. Является ли интеграл ТАБЛИЧНЫМ?

ДА	НЕТ
↓ ПРИМЕР: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int dx/x = \ln\|x\| + C$	↓ Переход к вопросу 2

▼

ВОПРОС 2. Можно ли использовать СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОСТИ?

$\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

$\int (c \cdot f)\,dx = c \cdot \int f\,dx$

ДА	НЕТ
↓ ПРИМЕР: $\int (3x^2 + 2\sin x)\,dx =$ $= 3\int x^2\,dx + 2\int \sin x\,dx =$ $= 3 \cdot (x^3/3) + 2 \cdot (-\cos x) + C =$ $= x^3 - 2\cos x + C$	↓ Переход к вопросу 3

▼

ВОПРОС 3. Определить ВИД ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО и выбрать соответствующий метод (см. таблицу ниже)

▼

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ШАГ. Проверить результат ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

ПРИМЕР: Получили $F(x) = x^3 - 2\cos x + C$

Проверка: $F'(x) = 3x^2 + 2\sin x$ — совпадает с подынтегральной

Пояснение для преподавателя.

Схема даётся в свёрнутом виде: только вопросы и названия методов, студент дописывает примеры самостоятельно.

Схема 1 используется в начале темы (2–3 лекции) для формирования понятийного аппарата. Её нельзя «раздать и забыть» — она должна быть на доске / экране и сопровождаться постоянным обращением. Схема 2 используется после изучения методов как инструмент рефлексии и алгоритмизации. Эффективна при парной работе: один студент ведёт по схеме, другой решает.

Для студентов предлагаются режимы работы:

Режим	***Описание***
Воспроизведение	Восстановить схему по памяти (или её фрагмент)
Дополнение примерами	К каждому блоку подобрать 1–2 примера
Схема → текст	Преобразовать блок схемы в связный текст
Текст → схема	По лекционному конспекту построить структурно-логическую схему |

Несмотря на значительные преимущества, исследователи указывают на ряд ограничений использования структурно-логических схем [6,7]:

1. Не весь учебный материал «поддается» структурированию. В частности, при доказательстве теорем со всеми вытекающими друг из друга логическими связями линейно-текстовая форма может быть более адекватной.

2. Возможно неполное соответствие содержанию излагаемого материала. Схематизация неизбежно связана с некоторым упрощением и потерей нюансов.

3. Требования к преподавателю. Не все преподаватели обладают модельным мышлением на уровне, достаточном для создания качественных СЛС.

4. Особенности восприятия отдельных студентов. Для некоторых обучающихся, привыкших к линейному изложению, переход к схематической форме может вызывать первоначальные трудности.

Заключение

На основе проведенного анализа научной литературы можно сделать следующие выводы.

Структурно-логические схемы представляют собой эффективное средство обучения, позволяющее систематизировать учебный материал, выявить логические связи между понятиями, представить целостную картину изучаемой темы.

Применение СЛС при изучении интегрального исчисления способствует преодолению основных трудностей, связанных с большим объемом материала, многообразием методов интегрирования и необходимостью понимания прикладных аспектов.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на разработку конкретных структурно-логических схем по отдельным разделам интегрального исчисления, экспериментальную проверку их эффективности в различных образовательных учреждениях, а также на создание электронных образовательных ресурсов, реализующих принципы знакового моделирования при изучении математического анализа.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Жарикова О.С., Мироненкова Н.Н. Преимущества представления математической информации в структурно-логической форме // КиберЛенинка. – 2018. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preimuschestva-predstavleniya-matematicheskoy-informatsii-v-strukturno-logicheskoy-forme (дата обращения: 22.03.2026).
2. Гурбатова Е.Р., Когаловский С.Р. Знаковое моделирование как метод формирования теоретического мышления студентов при обучении математике // Современные проблемы математического образования : материалы Всерос. науч.-практ. конф. – Томск : Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2006. – С. 45–49.
3. Асауленко Е.В., Баженова И.В., Клунникова М.М., Пак Н.И. Структурно-ментальные схемы как когнитивные инструменты формирования и развития учебных компетенций // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». – 2024. – № 3 (69).
4. Панова Н.В. Вербальные средства обучения на уроках математики // Образовательная социальная сеть nsportal.ru. – 2021. – URL: https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2021/01/20/verbalnye-sredstva-obucheniya-na-urokakh-matematiki (дата обращения: 22.03.2026).
5. Дударева Н.В., Утюмова Е.А. Модель формирования функционально-математической грамотности в процессе обучения математике // Педагогическое образование в России. – 2021. – № 4. – С. 14-25.
6. Знаенко Н.С., Коноплева И.В. Применение методов визуального структурирования при изучении математики // Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы MATHEDU' 2023. – Казань: КФУ, 2023. – С. 184-190.
7. Зарубин В. С., Иванова Е. Е., Кувыркин Г. Н. Интегральное исчисление функций одного переменного : учебник для студентов втузов / Зарубин В. С., Иванова Е. Е., Кувыркин Г. Н. ; ред.

Зарубин В. С., Крищенко А. П. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. - 527 с. - (Математика в техническом университете. Комплекс учебников из 20 выпусков ; вып. VI). - Библиогр.: с. 516-518.
8. Шипов Н. В. Основные методы интегрирования : учебно-методическое пособие. - Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024. - 79 с.

***Svetlana B. Zabelina*,**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University,; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
zabelina_sb@mail.ru
***Irina A. Pinchuk*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Federal State University of Education, Moscow
irenepin@yandex.ru

Using the method of structural and logical diagrams to study the topic "Integral Calculus of a Function of a Single Variable"

Abstract. Studying integral calculus in higher education poses significant challenges for students due to the abstract nature of the concepts and the need to consciously select integration methods. This article aims to provide a theoretical justification and methodological illustration of an approach to overcoming these challenges, namely, the use of structural-logical schemes (SLS) in studying the topic "Integral Calculus of a Function of One Variable." Based on a literature review, the types and principles of constructing SLSs were identified; three original schemes were developed for key areas; didactic goals were formulated for each, methodological recommendations and assignment options were provided, and limitations of SLS application were identified.

Keywords: structural and logical diagrams, integral calculus, visualization of educational information, integration methods.

ПРОЕКТНОЕ ОБУЧЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена потребностью в доказательной оценке эффективности проектного обучения (PjBL) в системе инженерного образования. Цель работы — синтез результатов метаанализов и эмпирических исследований, оценивающих влияние PjBL на академические результаты студентов. Установлен статистически значимый умеренный положительный эффект метода на уровне бакалавриата, идентифицированы ключевые факторы (модель обучения, методы оценки, размер группы), выявлены существенные пробелы в изучении эффективности PjBL в магистратуре и программах непрерывного профессионального развития.

Ключевые слова

геометрия, учебное видео, проектная деятельность, проектное обучение, инженерное образование, академические результаты, метаанализ, STEM-образование, бакалавриат, факторы

АВТОРЫ

Зубков Владимир Александрович,
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
donman.doc@mail.ru

Ивахненко Наталья Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана ", г. Москва
yulduz19.77@mail.ru

Бадекин Максим Юрьевич,
кандидат технических наук, старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К. А. Тимирязева», г. Москва
korund2002@list.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-92

Введение

Оценка эффективности проектного обучения (Project-Based Learning, PjBL) в системе инженерного образования требует анализа как отдельных исследований, так и их синтеза в рамках метаанализов, которые предоставляют общую картину и позволяют выявить ключевые тенденции. Предоставленные источники содержат несколько значимых метаанализов, посвященных не только PjBL, но и более широкой парадигме STEM-образования (наука, технология, инженерия и математика), что позволяет получить комплексное представление об эффективности этих активных методов обучения [1, 2, 3]. Важно отметить, что хотя PjBL является центральным элементом многих STEM-подходов, они не тождественны. Тем не менее, метаанализы

STEM-образования служат ценным индикатором общего положительного влияния проблемно-ориентированной педагогики на академические достижения.

Первый значимый метаанализ, охватывающий 56 количественных исследований, опубликованных в период с 2014 по 2021 год, фокусировался на эффекте STEM-образования в целом. Этот анализ выявил статистически значимый положительный эффект на академическую успеваемость студентов, который был очень высоким по своему абсолютному значению — размер эффекта Хеджеса, который составил 1.150 в модели со случайными эффектами. Такой высокий показатель указывает на существенное преимущество STEM-подходов перед традиционными методами преподавания [4]. Этот анализ предоставляет более консервативную, но все же убедительную оценку. Он установил, что STEM-образование оказывает общий умеренный положительный эффект на результаты обучения студентов. Это значение классифицируется как «умеренная» величина эффекта, что говорит о реальном, но не кардинальном преимуществе данного подхода. Ключевым выводом данного метаанализа является то, что между различными типами проблемно-ориентированного обучения — проблемно-ориентированным (например, PBL), проектно-ориентированным и исследовательским — не было найдено статистически значимой разницы в их эффективности [5]. Это позволяет рассматривать эти методы как единый блок, объединенный общей идеологией активного обучения. Интересно, что каждый из этих подходов имел свой собственный, хоть и незначительно отличающийся, эффект: проблемно-ориентированный подход показал самый высокий эффект, за ним следует проектно-ориентированный, а исследовательский — самый низкий. Это позволяет с уверенностью говорить о том, что проектное обучение в рамках STEM- образования является одним из наиболее эффективных вариантов проблемно-ориентированного обучения.

Важнейшим аспектом метаанализа является разделение влияния STEM- подходов на различные категории результатов обучения. Исследование четко показало, что наибольший положительный эффект наблюдается на когнитивные способности, включающиие академическую успеваемость, знания и запоминание информации [6].

Третий метаанализ, проведенный в период с 2010 по март 2022 года, сфокусировался исключительно на неформальном проектном обучении в контексте STEM-образования. Его результаты представляют собой еще более скромную, но все же статистически значимую оценку. Общая эффективность PjBL была определена как умеренная по сравнению с традиционными классными формами обучения [7].

Наибольшую научную обоснованность имеет оценка умеренного эффекта, соответствующая значениям стандартизированной разницы средних. Это означает, что студенты, обучающиеся по проектному методу, в среднем демонстрируют более высокие академические результаты по сравнению со сверстниками, обучающимися по традиционным методам, но разница не является катастрофической. Этот реалистичный взгляд на эффективность необходим для дальнейшего анализа и применения данного метода на различных уровнях инженерного образования [8, 9]. Кроме того, важно понимать, что проектное обучение является лишь одним из компонентов более широкой парадигмы STEM, которая сама по себе является мощным инструментом повышения академической успеваемости, особенно в области когнитивных способностей.

Методология и результаты исследования

Уровень бакалавриата в инженерном образовании является наиболее освещенным в предоставленных материалах с точки зрения применения проектного обучения и его влияния на академические результаты. Именно здесь сосредоточены

как общие метааналитические выводы, так и конкретные эмпирические исследования, позволяющие провести глубокий анализ эффективности метода. Анализ данных для студентов бакалавриата выявляет как прямые доказательства повышения успеваемости, так и важные детерминанты, определяющие успех проектной деятельности [10,11].

Наиболее ярким и убедительным свидетельством эффективности проектного обучения на данном уровне является исследование, проведенное среди 271 студентов, успешно завершивших программу бакалавриата по направлению "Компьютерная инженерия". В ходе этого исследования были собраны и проанализированы академические данные за шесть академических лет. Центральным и поразительным результатом стало то, что средняя оценка за итоговый проект составила 8.23, что статистически и практически значимо превышало средний итоговый балл по всему курсу обучения, который составил 7.02. Разница в средних оценках была равна -1.21 баллу, и она достигла уровня статистической значимости. Этот факт является эмпирическим подтверждением того, что проектное обучение, не просто не снижает, а скорее повышает академическую успеваемость в заключительной стадии обучения. Это ставит под сомнение распространенную точку зрения о том, что проектная деятельность является исключительно "отсеивающим" механизмом, отсекающим слабых студентов. Напротив, представленные данные свидетельствуют о том, что этот вид деятельности может служить "повышающим" фактором для академического успеха.

Дополнительный анализ этого же исследования позволяет глубже понять природу этого явления. Процент успешной сдачи итогового проекта оказался очень высоким: глобальный показатель составил 93.4%, а процент студентов, успешно защитивших проект с первого раза, колебался в пределах: от 82.1% до 98.0% в зависимости от года. Такой высокий уровень успеха при одновременно более высокой оценке по сравнению со средним баллом по курсу говорит о том, что итоговый проект, вероятно, оценивает и поощряет иные, более комплексные навыки, которые трудно измерить стандартными экзаменационными формами (такие как решение сложных, открытых инженерных задач, командная работа, управление проектом). Система оценки, применяемая для итоговых проектов, возможно, адаптирована таким образом, чтобы справедливо отражать эти навыки, что и приводит к более высоким итоговым оценкам для успешных студентов. Это также может указывать на то, что проектная деятельность способствует более глубокому и прочному усвоению материала, что и проявляется в лучших результатах.

Анализ факторов, предопределяющих успех в итоговом проекте, дает практические рекомендации по повышению эффективности проектного обучения. Многофакторный регрессионный анализ позволил идентифицировать ключевые предикторы оценки, которую руководитель присваивает студенту. Факт наличия у студента обязательной стажировки или ее получения в качестве освобождения от нее не повлиял на итоговую оценку. Эти результаты могут иметь два объяснения. Во-первых, система оценки итогового проекта может быть настолько хорошо структурирована и стандартизирована, что она "нейтрализует" вариативность в опыте руководителя или дополнительные условия выполнения проекта. Во-вторых, это может свидетельствовать о том, что сама по себе стажировка не является достаточным условием для успешного выполнения проекта, если в нем нет должной структуры и научного аппарата. Однако это же исследование выявило серьезную проблему, связанную с оценкой: существовали значительные различия в средних оценках, выставляемых разными категориями экспертов. Руководители выставляли более высокие оценки, чем тьюторы, а экзаменационные комиссии — более низкие, чем обе предыдущие группы. Более того, один и тот же преподаватель-факультетный

сотрудник мог выставлять разные оценки, будучи в роли тьютора и члена экзаменационной комиссии. Такая несогласованность в стандартах оценки является серьезной проблемой, поскольку она может влиять на итоговые академические результаты студентов и снижать воспринимаемую объективность системы.

Помимо конкретных исследований итоговых проектов, в предоставленных материалах упоминаются многочисленные примеры применения проектного обучения в инженерном бакалавриате.

На уровне магистратуры, где обучение направлено на углубление теоретических знаний и развитие исследовательских компетенций, проектное обучение также нашло свое применение. В предоставленных материалах есть ссылка на исследование, в котором проектно-ориентированный подход был использован для развития предпринимательских компетенций в рамках программы магистратуры по компьютерной инженерии, что свидетельствует об использовании метода в магистерской практике.

Это открывает широкую область для будущих исследований, которые могли бы ответить на вопросы: является ли проектное обучение в магистратуре таким же эффективным для повышения успеваемости, как в бакалавриате? Изменяется ли оптимальная модель проекта (например, ее длительность, степень структурированности) для более взрослой и специализированной аудитории? Ответы на эти вопросы имеют огромное значение для совершенствования магистерских программ в инженерной сфере.

Ситуация на уровне непрерывного профессионального развития (НПР) еще более показательна. В предоставленных материалах абсолютно нет никаких данных, касающихся применения проектного обучения для повышения квалификации или переподготовки уже работающих инженеров. Ни один из источников не затрагивает эту тему. Соответственно, нет и никаких метрик академических результатов (тесты, экзамены, проектные отчеты, их оценки), которые могли бы быть использованы для оценки эффективности этого метода в контексте НПР. Это создает полный информационный вакуум по данной теме.

Напротив, она представляет собой функцию от множества контекстуальных и дизайнерских переменных, которые могут усиливать или ослаблять его влияние на академические результаты студентов. Понимание этих факторов имеет критическое значение для практиков, стремящихся внедрить PjBL с целью повышения успеваемости. Синтез данных из различных метаанализов и исследований позволяет выделить несколько ключевых аспектов, определяющих успех проектной деятельности.

Таким образом, эффективность проектного обучения — это не данность, а результат его правильного и продуманного применения. Для достижения наилучших академических результатов необходимо учитывать все эти модерирующие переменные при проектировании учебных программ: выбирать центральную модель PjBL, использовать триангуляцию для оценки, оптимизировать размер групп, продумывать продолжительность проекта и адаптировать метод под конкретную инженерную дисциплину, уделяя особое внимание стандартизации критериев оценки.

Заключение

Проведенное исследование эффективности проектного обучения (PjBL) в системе инженерного образования по критерию академических результатов студентов позволяет сформулировать ряд ключевых выводов и стратегических рекомендаций. Анализ предоставленных метаанализов и эмпирических данных выявил четкую картину, в которой проектное обучение демонстрирует устойчивое, хотя и умеренное, положительное влияние на успеваемость, особенно на уровне

бакалавриата. Однако его эффективность не является автоматической и сильно зависит от множества дизайнерских и контекстуальных факторов.

Во-первых, общий эффект проектного и смежных с ним методов обучения (STEM) на академические результаты является статистически значимым и положительным. Метаанализы, охватывающие десятки исследований, находят умеренный эффект, который можно охарактеризовать коэффициентом Среднего

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Басгаль, В. В. Развитие вычислительного мышления в контексте инженерно-политехнического образования / В. В. Басгаль // Наука о человеке: гуманитарные исследования. – 2025. – Т. 19, № 4. – С. 136–146. – DOI: 10.57015/issn1998-5320.2025.19.4.13. – EDN: DRSFVD.
2. Биткина, И. К. Компаративный анализ проектного обучения в инженерном и гуманитарном образовании / И. К. Биткина // Инженерное образование. – 2023. – № 34. – С. 101–108. – DOI: 10.54835/18102883_2023_34_9. – EDN: VBDPQG.
3. Дреер, Р. Применение принципов проектного образования в программах бакалавриата / Р. Дреер // Высшее образование в России. – 2013. – № 2. – С. 46–49. – EDN: PVJWON.
4. Ивахненко, Н. Н. Аспекты методики преподавания высшей математики студентам технических специальностей / Н. Н. Ивахненко, М. Ю. Бадекин // Эвристическое обучение математике : материалы IV Международной научно-методической конференции, Донецк, 19–20 апреля 2018 года. – Донецк : Донецкий национальный университет, 2018. – С. 162–164. – EDN: UOKYYG.
5. Ивахненко, Н. Н. Особенности адаптации студентов в высшем учебном экономическом заведении / Н. Н. Ивахненко // Вестник Донецкого педагогического института. – 2018. – № 3. – С. 293–298. – EDN: YNLZSP.
6. Мельник, А. Д. Проектное обучение в передовых инженерных школах: опережающее образование личности / А. Д. Мельник, А. В. Меренков, Д. Г. Сандлер // Интеграция образования. – 2025. – Т. 29, № 2(119). – С. 282–299. – DOI: 10.15507/1991-9468.029.202502.282-299. – EDN: FJAZPW.
7. Пивень, В. В. Проектное обучение как форма совершенствования инженерного образования / В. В. Пивень, С. И. Челомбитко // Современные проблемы науки и образования. – 2021. – № 1. – С. 38. – DOI: 10.17513/spno.30541. – EDN: OMSBPZ.
8. Семенова, В. В. Инновационные технологии в высшем инженерном образовании: проектное обучение / В. В. Семенова, Е. А. Свистунова, Ю. В. Егоров // Экономический вестник ИПУ РАН. – 2023. – Т. 4, № 3. – С. 21–29. – DOI: 10.25728/econbull.2023.3.3-semenova. – EDN: QOIHXY.
9. Столбова, И. Д. О возрастании роли цифровой 3D-модели в проектной деятельности и геометрографическом образовании / И. Д. Столбова, Л. В. Кочурова, К. Г. Носов // Информатика и образование. – 2022. – Т. 37, № 1. – С. 59–68. – DOI: 10.32517/0234-0453-2022-37-1-59-68. – EDN: JGXHJJ.
10. Шелупанов, А. А. Проектное обучение – парадигма элитного инженерного образования в России в условиях стратегии инновационного развития / А. А. Шелупанов, Е. М. Давыдова, Р. В. Мещеряков // Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8. – С. 9–15. – EDN: VWWTBJ.
11. Шишлина, Н. В. Системный подход к реализации проектного обучения в инженерном образовании / Н. В. Шишлина, О. Ф. Шихова, И. О. Архипов // Управление устойчивым развитием. – 2022. – № 5(42). – С. 110–118. – DOI: 10.55421/2499992X_2022_5_110. – EDN: JZQWHK.

***Vladimir Al.Zubkov*,**
Senior Lecturer, Donetsk National Technical University, Donetsk
donman.doc@mail.ru
***Natalya N. Ivakhnenko*,**
PhD, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
yulduz19.77@mail.ru
***Maksim Yu. Badekin*,**
PhD, Senior Lecturer, Timiryazev Russian State Agrarian University – Moscow Agricultural Academy, Moscow
korund2002@list.ru

Project-based learning in engineering education: evidence of effectiveness at the undergraduate level and areas of uncertainty at the graduate and CPD levels

Abstract. The relevance of this study stems from the need for evidence-based evaluation of the effectiveness of project-based learning (PjBL) in engineering education. The aim of this study is to synthesize the results of meta-analyses and empirical studies assessing the impact of PjBL on student academic outcomes. A statistically significant moderate positive effect of the method was established at the undergraduate level, key moderating factors (instructional model, assessment methods, and group size)

were identified, and significant gaps in the study of the effectiveness of PjBL in graduate programs and continuing professional development programs were identified.
Keywords: Geometry, educational video, project-based learning, project-based learning, engineering education, academic outcomes, meta-analysis, STEM education, undergraduate education, moderating factors.

О МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ “ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ”

Аннотация

Тема “Определённый интеграл” в разных вузах (а также в одном и том же вузе, но на разных факультетах) излагается с различной степенью подробности в зависимости от количества часов, выделенных на её изучение. В данной работе рассматриваются как краткий, так и расширенный варианты изучения этой темы. Даются советы по составлению соответствующего конспекта лекций. При этом мы не рассматриваем приложения определённого интеграла к вычислению различных геометрических и механических величин. Полагаем, что статья может оказаться полезной для лектора, впервые приступающего к преподаванию данной темы. Статья может быть также интересной для студентов младших курсов технического вуза.

Ключевые слова

определённый интеграл, понятие базового курса, понятие расширенного курса, площадь криволинейной трапеции, мгновенная скорость, масса стержня, работа переменной силы

АВТОРЫ

Иванков Павел Леонидович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ivankovpl@mail.ru

Обухов Виктор Павлович
старший преподаватель
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
wiktorobuhov@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-98

Введение

Успешное освоение студентами рассматриваемой темы основано на знании материала предыдущего семестра; при этом особенно важно знать основные положения теории пределов. Умение находить первообразные элементарных функций также играет здесь особую роль, т.к. при практическом применении определённых интегралов для вычисления конкретных геометрических, механических и физических величин требуется знание неопределённых интегралов.

Методология и результаты исследования

В этом разделе мы рассмотрим варианты изложения темы “Определённый интеграл” как для базового, так и для расширенного курса. Обычно на данном этапе изучения высшей математики преподавателю уже известно, что интересует студентов в первую очередь: прикладные вопросы или различные аспекты “ математической строгости”. Последнее обычно интересует студентов в б о′ льшей степени при

изучении математики по рассмотренной программе. Исходя из этого следует ограничить или наоборот расширить список задач из различных областей естествознания, которые приводят к понятию определённого интеграла. Список таких задач обычно состоит из четырёх пунктов, первый из которых надлежит обязательно включить в лекционный курс. Более сложные примеры применения определённого интеграла для вычисления геометрических и физических величин разумно рассмотреть в разделе приложения “определённого интеграла”.

1. На первое место следует поставить задачу об определении площади криволинейной трапеции. Так называют фигуру на плоскости, которая ограничена снизу отрезком $a \le x \le b$ оси абсцисс, с боков вертикальными отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, сверху графиком (непрерывной и положительной) функции $y = f(x)$. При этом, предполагается, что на плоскости введена декартова прямоугольная система координат. Уже здесь вводится понятие разбиения с отмеченными точками, т. е. два набора точек

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad (1)$$

и

$$\xi_1, \cdots, \xi_n, \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \cdots, n, \quad (2)$$

по которым строится интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Такая сумма даёт приближённое значение площади криволинейной трапеции, а точное значение получается в пределе при условии, что

$$\max_i \Delta x_i \to 0,$$

причём этот предел не зависит от точек ξ_i на отрезках разбиения. В данном месте изложения курса не следует останавливаться на уточнении понятия площади. В базовом курсе такое уточнение не предусмотрено, а в расширенном курсе разумнее рассмотреть этот вопрос при изучении двойных интегралов. При рассмотрении данного (и последующих) примеров не следует также уточнять понятие

$$\min_i \Delta x_i \to 0,$$

Разумнее сделать это по ходу введения понятия определённого интеграла.

2. Восстановление пройденного пути по известной зависимости мгновенной скорости от времени t. Пусть дана такая зависимость в виде функции $\vartheta = \vartheta(t)$. И здесь целесообразно рассмотреть отрезок времени $[T_1, T_2]$, взять его разбиение $T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T_2$ и выбрать точки $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \cdots, n$. Если длины отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ настолько малы, что в пределах отрезка времени $[t_{i-1}, t_i]$ скорость $\vartheta(t)$ можно считать постоянной, то пройденный путь приближённо будет равен

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\tau_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, а точное значение пройденного пути s, как и в предыдущем случае получается при переходе к пределу

$$s = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\tau_i)\Delta t_i.$$

Мы видим (учитывая предыдущий пример), что пройденный путь определяется по графику скорости и численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Именно, способом в “Элементарном учебнике физики” под редакцией академика Г.С. Ландсберга (см. $[\text{т.}1, §22]$), $[1]$ определяется пройденный путь при равноускоренном движении. Заметим, что цифра в квадратных скобках означает номер на источник ссылки. Если этот пример включается в лекционный курс, то можно студентам напомнить упомянутое обстоятельство, т.к. многие из них использовали книгу Г.С. Ландсберга $[\text{т.}1], [2]$ при изучении физики в школе. Во всяком случае в предисловии к этой книге сказано, что данный учебник “ завоевал большую популярность и стал настольной книгой многих школьников и абитуриентов “.

3. Вычисление массы стержня из неоднородного материала. Если этот стержень представлен отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, и линейная плотность распределения масс характеризуется функцией $\rho(x)$, то масса стержня выражается приближённым равенством

$$m \cong \sum_{i=1}^{n} \rho(x)\, \Delta x_i ,$$

а точное равенство получается в пределе при

$$\max_i \Delta x_i \to 0.$$

4. Работа переменной силы при перемещении материальной точки вдоль прямолинейного отрезка $[a, b]$ оси абсцисс при условии, что вектор силы характеризуется абсолютной величиной $F(x)$ и направлен вдоль оси Ox от точки a к точке b. Упомянутая работа приближённо равна

$$W \cong \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i,$$

а точное значение W получается в пределе при условии, что

$$\max_i \Delta x_i \to 0.$$

Можно также рассмотреть примеры, учитывающие специализацию студентов. В случае расширенного курса рекомендуется рассмотреть лишь первый из этих примеров, и сэкономленное время использовать для более подробного рассмотрения теорем о существовании определенного интеграла.

После рассмотрения перечисленных примеров (или их части) следует перейти к непосредственному определению интеграла вида

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Такой интеграл определяется как предел соответствующих интегральных сумм. Обязательно следует указать названия элементов, присутствующих в записи интеграла:

a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла (или интегрирования); $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx -$ подынтегральным выражением, x называется переменной интегрирования. Уже в этом месте можно обратить внимание студентов на то, что значение интеграла не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$$

и так далее. Можно также (для того, чтобы хоть немного развеять скуку, которую вызывают у студентов определения, формулы и рассуждения) сообщите правило, определяющее написание слова “подынтегральный”. В этом есть некоторый смысл,

т.к. например, в учебнике Г.М. Фихтенгольца $[\text{т. II}], [3]$ на странице 147 мы встречаем “под**Ы**нтегральное выражение“, а на странице 114 речь идёт о “под**И**нтегральной функции “. Во всех старых учебниках пишется слово “под**И**нтегральный “. Можно предположить, что такой орфографический дуализм имеет следующее происхождение. В 1956 году были опубликованы новые “Правила русской орфографии и пунктуации “, в соответствии с которыми вместо начального “и “ пишется “ы “ после приставок, оканчивающихся на согласную: июльский – предыюльский, исторический – предысторический, интегральный – подынтегральный. Это правило, однако, не распространяется на заимствованные приставки: предындустриальный, но постиндустриальный. Термина “постинтегральный “, по – видимому, не существует, но если бы он существовал, после приставки следовало бы писать “и “. См. по этому поводу в справочнике по русскому языку Д.Э. Розенталя $[\S\ 29,\ \text{с.}\ 47-48]$, $[4]$. Заметим ещё, что в учебниках, изданных до реформы 1956 года, встречаются и другие орфографические неожиданности. Например, учебник для технических вузов Н.Н. Лузина $[5]$ называется“ Ди**Ф**еренциальное исчисление “, причём в первом слове этого названия нет удвоения буквы “ф “.

При составлении конспекта лекций по – видимому разумно использовать несколько учебников, но какой-то один следует взять в качестве основного. Для нас основным будет учебник В.С. Зарубина, Е.Е. Ивановой, Г.Н. Кувыркина $[6]$. Рассматриваемая тема излагается здесь, начиная с шестой главы. При определении интеграла как предела интегральных сумм здесь даётся лишь определение через $\varepsilon - \delta$. В элементарной теории пределов такое определение называют обычно определением по Коши. Но бывает полезным и определение по Гейне, или определение через последовательности. Поскольку в базовом курсе доказательства часто пропускаются, то можно определение по Гейне и не рассматривать. Но при более подробном изложении лучше дать оба определения. Можно включить также и определение по базе (если эта тема излагалась ранее при изучении пределов). В учебниках этот вопрос рассматривается довольно часто (см., например, книгу В.А. Зорича $[7]$, Г.Е. Шилова $[8]$, В.А. Ильина, В.А. Садовничего, Бл.Х. Сендова $[9]$, Г.И. Архипова $[10]$). Применительно к теории определённого интеграла в качестве множества, в котором вводится база, берётся множество $\mathcal{P}$ всех разбиений с отмеченными точками. Разбиением отрезка $[a, b]$ называется набор точек (1), а если на каждом отрезке разбиения выбрана точка ξ_i, т.е. мы имеем набор точек (2) , то говорят, что задано разбиение с отмеченными точками. Базой в множества $\mathcal{P}$ называется совокупность всех его подмножеств $\{\mathcal{B}_\delta\}$, где $\delta > 0$, и элементами $\{\mathcal{B}_\delta\}$ являются те разбиения с отмеченными точками у которых

$$\max_i \Delta x_i < \delta,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \cdots, n.$$

Если дана функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, то можно рассмотреть функцию на множестве $\mathcal{P}$, поставив в соответствие разбиению (1) интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Предел получившейся функции на множестве $\mathcal{P}$ по базе $\{\mathcal{B}_\delta\}$ и называется определённым интегралом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

База $\mathcal{B}_\delta$ обозначается $\lambda \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Рассмотрение этого подхода к определению интеграла возможно лишь в расширенном курсе, и при условии, что в теории пределов рассматривалось понятие базы и предела по базе. Поскольку свойства по базе известны, то нет необходимости доказывать, например, единственность предела интегральных сумм или арифметические свойства такого предела. Тут, правда, есть опасность, что некоторые студенты, трактуя слишком широко теорему о пределе произведения, подумают, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx\,.$$

Возможно, не лишним будет предостеречь студентов от таких поспешных выводов. В принципе можно и не включать в лекционный курс понятие предела по базе в множестве разбиений с отмеченными точками.

После определения понятия интеграла в первую очередь следует рассмотреть необходимое условие его существования, т.е. ограниченность подынтегральной функции. Слишком краткое замечание без точной формулировки соответствующего утверждения и подробного доказательства здесь вряд ли уместно. Например, в учебнике А.Т. Курош [11, стр. 323] читаем такое замечание по поводу необходимого условия интегрируемости:

“Прежде всего заметим, что высказанное определение в действительности может быть приложено лишь к ограниченной функции. В самом деле, если бы функция $f(x)$ была в промежутке $[a,b]$ неограничена, то – при любом разбиении промежутка на части – она сохранила бы подобное свойство хоть в одной из частей. Тогда за счёт выбора в этой части точки ξ можно было бы сделать $f(\xi)$, а с ней и сумму σ, сколь угодно большой; при этих условиях конечного предела для σ, очевидно, существовать не могло бы. Итак, интегрируемая функция необходимо ограничена”.

Заметим, что аналогичного характера утверждение (лемма о модуле старшего члена) в книге Л. Д. Кудрявцева [12] доказывается весьма подробно, и это оправдано: студенты на данном этапе обучения не всегда могу восстановить все пропущенные детали рассуждения. Для конспекта лекций можно порекомендовать доказательство теоремы о необходимом условии интегрируемости из учебника В. С. Зарубина, Е. Е. Ивановой, Г.Н. Кувыркина [13] или учебника Л. Д. Кудрявцева [14]. Затем разумно рассмотреть пример, показывающий, что ограниченность функции не является достаточным условием интегрируемости. Для этого идеально подходит функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Ограниченность этой функции очевидна, и без труда доказывается, что она не интегрируема, например, на отрезке [0,1].

Далее предстоит более серьёзная задача: сформулировать и доказать теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции на отрезке.

При изложении рассматриваемой темы на уровне базового курса целесообразно отказаться даже от формулировки соответствующего критерия, т. к. для такой формулировки неизбежно пришлось бы привлекать понятия точных нижней и верхней граней. Рекомендуется поступить следующим образом. Без доказательства

сформулировать утверждение об интегрируемости непрерывной на отрезке функции и дополнить его обобщением об интегрируемости ограниченной функции, имеющей на отрезке лишь конечное число разрывов. Можно также уже здесь ввести понятие кусочно непрерывной функции (оно всё равно потребуется в дальнейшем). Целесообразно дать два определения этого понятия.

Функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ называется кусчно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если существует разбиение этого отрезка

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

такое, что сужение функции f на любой интервал $(x_{i-1}, x_i), 1 \le i \le n$ есть функция непрерывная и, кроме того, существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_i - 0} f(x)$$

Считается, что другое (краткое) определение удобнее для запоминания. Приводим его.

Функция называется кусочно непрерывной на некотором отрезке, если она непрерывна на этом отрезке всюду за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых эта функция имеет разрывы первого рода.

Сокращение здесь достигается за счёт использования понятия разрыва первого рода. Обязательно надо отметить, что для кусочно непрерывной на отрезке функции вставка “быть может” включена в определение неспроста ! В виде замечания полезно отметить также и утверждение о том, что если изменить значения интегрируемой функции в конечном числе точек, то это никак не отразится на интегрируемости функции и на значение её интеграла.

Рассмотрим теперь изложение вопросов, связанных с критерием интегрируемости функции на отрезке при расширенном изучении курса анализа. Сначала следует напомнить определение точных граней множества. Перед этим полезно обратить внимание студентов на ударение в слове **и**'нфимум; ударение здесь на первом слоге (см. у Н. С. Пискунова [15 , с. 347]). Посколько, однако, многие математики произносят это учёное название точной нижней грани с “ неправильным “ ударением на втором слоге, то и студентов нет особого смысла поправлять, если они говорят “как все“. Но с неправильным написанием (“инфи**н**'нум “ вместо “инфи**м**'ум “) следует боротьса. Определение супре'мума и и'нфимума надо дать конструктивно. Если сказать, что точной верхней гранью числового множества называется наименьшая из его верхних границ, то это будет правильным определением, но такое определение неудобно использовать в рассуждениях. Поэтому супре'мум лучше определить так.

Пусть $\underline{\overline{X}}$ – числовое множество; число M называется его точной верхней гранью (при этом пишут $M = \sup \underline{\overline{X}}$), если выполнены два условия

1) для любого $x \in \underline{\overline{X}}$ выполняется неравенство $x \le M$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x' \in \underline{\overline{X}}$ такое, что $x' > M - \varepsilon$.

После этой формулировки можно спросить у студентов, изменится ли смысл этого определения, если последнее неравенство заменить на нестрогое: $x' \ge M - \varepsilon$. Аналогичным образом следует напомнить и понятие точной нижней грани. Далее следует напомнить теорему (при некоторых способах изложения вещественных чисел аксиому) о существовании точной верхней грани у всякого непустого ограниченного сверху множества чисел. При этом подчеркнуть важность слова “непустого “ в этом утверждении.

Это слово включить в формулировку данного утверждения забывают даже авторы широко известных учебников (см. , например, А. Г. Курош [16 , с. 25] или учебник под редакцией А.В. Ефимова и Б. П. Демидовича [17, с. 15]). Можно

напомнить также известные соглашения о том, что $\sup \underline{X} = +\infty$ для неограниченного сверху множества и
$inf\, \overline{X} = -\infty$, если $\underline{X}$ не ограничено снизу.
Затем следует определить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу.
Пусть $f: [a, b] \to \mathbb{R}$; для разбиения (1) отрезка $[a, b]$ положим

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

и составим суммы

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \,, \; s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i.$$

Эти суммы и называются соответственно верхней и нижней суммой Дарбу (для функции f и для разбиения отрезка $[a, b]$).

В книге Г. С. Ландсберга [18] на с. 359 читаем: “заметим, что нижняя интегральная сумма $\underline{s}_n$ и верхняя интегральная сумма $\overline{s}_n$ являются частными случаями интегральной суммы (5)”; под интегральной суммой (5) здесь понимается сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, т.е. обычная интегральная сумма. Откроем теперь книгу Я.С. Бугрова, С. М. Никольского [19]; на с. 246 читаем: “ суммы Дарбу не обязательно являются интегральными суммами”. Как же так? Кому верить? Но читаем дальше: ”однако если $f(x)$ непрерывная функция, то s_R и S_R являются соответственно наименьшей и наибольшей из интегральных сумм, отвечающих данному разбиению”. Так вот оно что: оказывается всё дело в непрерывности! И действительно, хорошенько поискаф, можно найти в книге Н. С. Пискунова [20] замечание о том, что рассматриваемая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

После определения верхней и нижней сумм Дарбу следует рассмотреть их свойства, которые потребуются при доказательстве основной теоремы о необходимом и достаточ –ном условии интегрируемости функции на отрезке.

Свойства сумм Дарбу удобно сформулировать в виде ряда вспомогательных утверждений. Например, так.
1. Лемма о точных гранях совокупности интегральных сумм, отвечающих данному разбиению τ и всевозможным наборам отмеченных точек. Такими точными гранями являются суммы Дарбу s_τ и S_τ .
2. Лемма о добавлении новых точек разбиения. Здесь надо рассмотреть утверждение о том, что при добавлении новых точек разбиения нижняя сумма Дарбу может разве лишь увеличиться, а верхняя сумма Дарбу – разве лишь уменьшиться.
3. Лемма о том, что $s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$ для любых разбиений τ_1 и τ_2 . После этого вводится понятие нижнего и верхнего интеграла функции f на отрезке $[a, b]$:

$$I_* = \sup_\tau s_\tau,$$
$$I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

Некоторые авторы называют такие интегралы интегралами Дарбу, но единства здесь нет.
4. Далее надо доказать, что $I_* \le I^*$. Ссылка на “очевидность” здесь вряд ли уместна. Можно, конечно, пропустить доказательство, сославшись на нехватку времени, но утверждать, что данное неравенство очевидно, не следует.
5. Можно ещё доказать (или хотя бы сформулировать) утверждение о том, что колебания ограниченной на множестве $\underline{X}$ функции f, т.е. величина

$$\omega = \sup_{x_1, x_2 \in \underline{X}} |f(x_1) - f(x_2)|, \qquad (3)$$

равна $M-m$, где

$$m_i = \inf_{x\in\overline{X}} f(x)\,, M_i = \sup_{x\in\overline{X}\ ]} f(x)\,.$$

Иногда любознательные студенты спрашивают, зачем знак модуля в правой части (3). А в самом деле зачем? Здесь трудно дать удовлетворительный ответ. По-видимому, так уж исторически сложилось.

Теперь формулируем и доказываем критерий интегрируемости функции на отрезке.

Теорема. Ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Здесь, как обычно, через $\lambda(\tau)$ обозначен диаметр разбиения τ. Формулировке теоремы следует предпослать аккуратное и подробное напоминание определений всех фигурирующих в этой теореме понятий. Последнее равенство с учётом всех ранее рассмотренных вспомогательных утверждений можно переписать так

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_i \omega_i \Delta x_i = 0,$$

где через ω_i обозначено колебание рассматриваемой функции на $i-$м отрезке разбиения. На деле не обязательно требовать, чтобы выполнялось равенство $\lim_{\lambda(\tau)\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0.$ Для интегрирования функции достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось (хотя бы одно) разбиение τ, для которого $(S_\tau - s_\tau) < \varepsilon$. Однако, такое усиление основной теоремы требует времени для обоснования. Поэтому рекомендуется ограничиться лишь указанием на возможность упомянутого усиления, не приводя доказательства.

Теперь настало время сбора плодов. Проверяем с помощью основной теоремы, что интегрируемыми являются не только все непрерывные на отрезке функции, но также и ограниченные на этом отрезке функции, имеющие лишь конечное число точек разрыва. Полезно здесь же дать определение кусочно непрерывной функции и проверить её интегрируемость. Интегрируемость монотонной на отрезке на отрезке функции также без труда устанавливается с помощью основной теоремы. Можно ещё отметить, что изменение значений функции в конечном числе точек никак не отражается на её интегрируемости и на значении интеграла (если подобный существует).

Заключение

Мы рассмотрели возможные варианты составления конспекта вводных лекций по теме “Определённый интеграл” для базового и расширенного курса высшей математики для технического вуза. Основную теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции на отрезке можно (в виде формулировки) включить и в базовой курс. Однако использовать её для доказательства интегрируемости можно лишь в случае монотонных функций. Дело в том, что, применяя эту теорему для доказательства интегрируемости непрерывной функции, мы неизбежно сталкиваемся с необходимостью использовать понятие равномерной непрерывности, которое обычно не включается в базовый курс анализа для технических вузов. Эту трудность можно обойти, сузив класс рассматриваемых функций. Смотри по этому поводу нашу статью П. Л. Иванкова, В. П. Обухова [21].

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Элементарный учебник физики. Под редакцией академика Г.С. Ландсберга. -Т.1. -М. "Наука”, 1985. - 606 с.

2. Элементарный учебник физики. Под редакцией академика Г.С. Ландсберга…
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. - т. II.- М.: "Наука", 1964. - 463с.
4. Розенталь Д.Э. Справочник по русскому языку. Москва, "ОНИКС", " Мир и образование".
5. Лузин Н.Р. Дифернциальное исчисление. - М. : Советская наука, 1949. - 476 с.
6. Интегральное исчисление функций одного переменного; вып. 6 , Математика в техническом университете. В.С. Зарубин, Е.Е. Иванова, Г.Н. Кувыркин. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. - 526с.
7. Зорич В.А. Математический анализ, т. 1. - М.: "Наука", 1981. - 543 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ функции одного переменного. Части 1 -2. - -М.: "Наука", 1969. - 527с.
9. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ, часть 1. издательство МГУ, 2004. - 660с.
10. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: "Высшая школа", 1999. - 695с.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: "Наука", 1964. - 440с.
12. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. - М.: "Наука", 1989. - 736с.
13. Зорич В.А. Математический анализ, т. 1…
14. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа….
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.1. - М.: "Наука", 1985.- 439с.
16. Курош А.Г. Курс высшей алгебры…
17. Сборник задач по математике под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича, т. 1. - М.:"Наука",1986. - 462с.
18. Элементарный учебник физики. Под редакцией академика Г.С. Ландсберга…
19. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.:"Наука",1988. - 430с.
20. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.1…
21. Иванков П.Л., Обухов В. П. Методика преподавания основ анализа без использования понятия равномерной непрерывности. //Modem European Researches . - Salzburg, 2021. -Т1. - №2. -Р. 90-05.

Pavel L. Ivankov,
Doctor of Physical out Mathematical Sciences, Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
ivankovpl@mail.ru
Victor P. Obuhov
Senior Lecturer, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
wiktorobuhov@yandex.ru

Methodology for teaching of the theme "Definite integral"

Abstract. Theme "Definite integral" is studied in various colleges (and also in one and the same college but at different departments) with diverse degree of elaboration depending on the quantity of hours allotted for its study. We give numerous counsels on compiling the corresponding conspectus of lectures; these counsels can be useful for the beginner lecturer who for the first time enters upon teaching this theme. The paper can also be useful for the first-year students of a technical college.

Keywords: definite integral, the concept of a basic course, the concept of an advanced cource, the area of a curved trapezoid, rod weight, pover work.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ»

Аннотация

Актуальность исследования обусловлена необходимостью формирования единообразного подхода при изучении производной по направлению и градиента, при их широком применении в решении прикладных задач в физике, химии и экономике. Цель - описать методику проведения занятий студентам естественнонаучных, технических и экономических направлений. Результат: при строгом выводе формулы производной и рассмотренной теоремы о проекции градиента предложена наглядная геометрическая модель на основе сферы, построенной на векторе градиента. Методика проиллюстрирована стандартными примерами и олимпиадной задачей о конфигурации парабол, демонстрирующей применение градиента в неочевидных геометрических контекстах.

Ключевые слова

градиент скалярной функции, производная по направлению, функция нескольких переменных, алгоритмизация обучения, частные производные, прикладные задачи математического анализа

АВТОРЫ

Нараленкова Ирина Игоревна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва;
доцент СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
i.i.naralenkova@gmail.com

Шивринская Елена Вячеславовна,
кандидат педагогичекисх наук, доцент
СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
shivrinsckaya@yandex.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-107

Введение

Вопросы, связанные с изучением функций нескольких переменных, представлены в трудах многих авторов (например, [1], [2]), а также в учебном пособии [3]. Несмотря на большое количество литературы по данной теме, в настоящей работе представлен авторский подход к изложению тем градиента и производной по направлению. Предлагаемая методика основывается на алгоритмизации решения задач: четкая пошаговая инструкция призвана минимизировать количество вычислительных ошибок, отличать градиент скалярной функции от дивергенции вектора, что способствует более осознанному усвоению учебного материала студентами.

Методология и результаты исследования

Рассмотрим в области D функцию $u = u(x, y, z)$ и точку $M(x, y, z)$. Определение функции нескольких переменных и частных производных дано во многих учебниках и

статьях, например в [4], [5]. Проведем из точки M вектор $\vec{S}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ (рис.1).

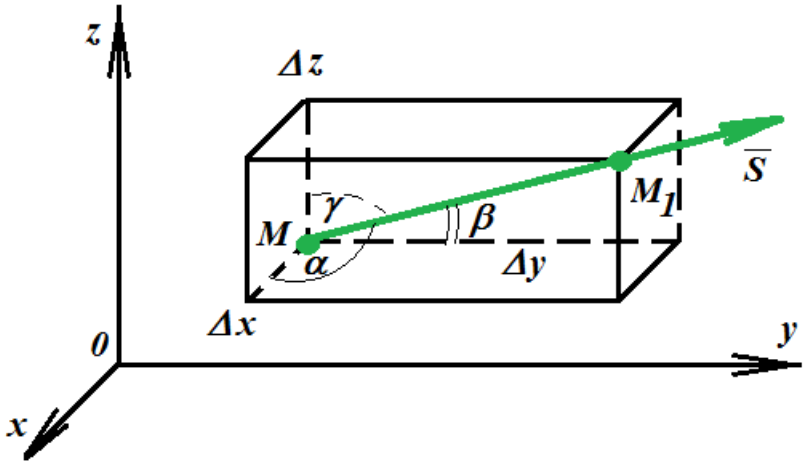

Рис. 1

На векторе $\vec{S}$, на расстоянии Δs от его начала рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$.

Таким образом,

$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Будем предполагать, что функция $u = u(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области *D*.

Аналогично тому, как это делалось в статье [5] полное приращение функции можно представить так:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 стремятся к нулю при $\Delta s \to 0$. Разделим все члены равенства (1) на Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Следовательно, равенство (2) можно переписать так:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \qquad (3)$$

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется *производной от функции* $u = u(x,y,z)$ *в точке* (x,y,z) *по направлению вектора* $\vec{S}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$, т.е.

$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (3), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти производную $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке $M(1,1,1)$:

а) в направлении вектора $\vec{S}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;

б) в направлении вектора $\vec{S}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Решение.

а) находим направляющие косинусы вектора $\vec{S}_1$:

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{14}}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Частные производные в точке $M(1,1,1)$ будут

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 2.$$

Итак,

$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}$.

б) находим направляющие косинусы вектора $\vec{S}_2$:

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Заметим, что $2\sqrt{3} > \frac{12}{\sqrt{14}}$.

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = u(x,y,z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\overrightarrow{grad\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (4)$$

Этот вектор называется *градиентом* функции $u = u(x,y,z)$. Говорят, что в области D определено векторное поле градиентов.

Теорема. Пусть дано скалярное поле $u = u(x,y,z)$ и определен в этом поле градиент (4). Тогда производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial s}$ некоторого вектора $\vec{S}$ равняется проекции вектора $\overrightarrow{grad\, u}$ на вектор $\vec{S}$.

$$\text{пр}_{\vec{S}_0}\overrightarrow{grad\, u} = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Или, если обозначить угол между векторами $\overrightarrow{grad\, u}$ и $\overrightarrow{S_0}$ через φ, можно записать (рис.2):

$\left|\overrightarrow{grad\, u}\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$. (5)

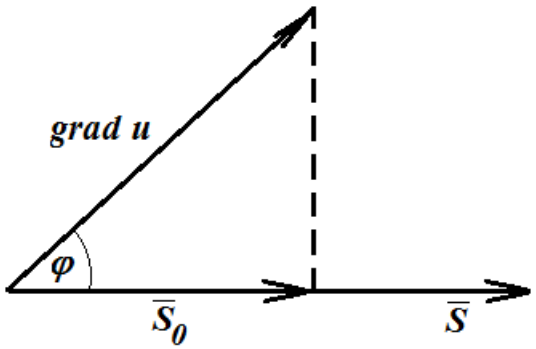

Рис. 2

На основании данной теоремы наглядно устанавливается связь между градиентом и производной в данной точке по любому направлению. В данной точке $M(x,y,z)$ строим вектор $\overrightarrow{grad\, u}$ (рис. 3).

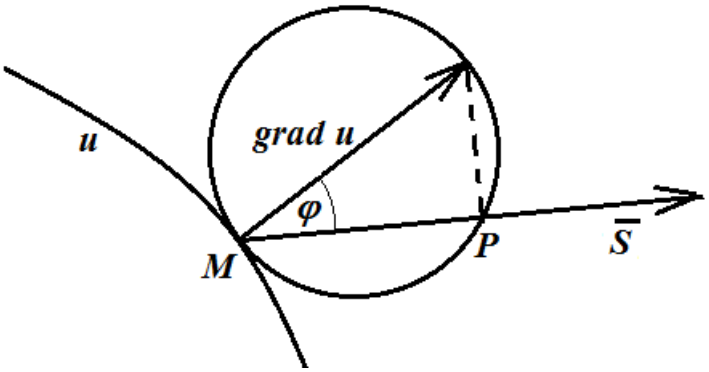

Рис. 3

Строим сферу, для которой $|\overrightarrow{grad\,u}|$ является диаметром. Из точки $M(x,y,z)$ проводим вектор $\vec{S}$. Обозначим точку пересечения вектора $\vec{S}$ с поверхностью сферы через P. Тогда очевидно, что $MP = |\overrightarrow{grad\,u}|\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\overrightarrow{grad\,u}$ и $\overrightarrow{MP}$ (при этом $\varphi < \pi/2$), т.е. $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Пример 2. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$. а) Определить градиент в точке $M(1,1,1)$; б) определить производную от функции u в точке $M(1,1,1)$ в направлении градиента.

Решение.

а) Определим градиент в точке $M(1,1,1)$. Выражение градиента в произвольной точке будет

$\overrightarrow{grad\,u} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$.

Следовательно,

$\left(\overrightarrow{grad\,u}\right)_M = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \left|\overrightarrow{grad\,u}\right|_M = 2\sqrt{3}$.

б) Определим производную от функции u в точке $M(1,1,1)$ в направлении градиента. Направляющие косинусы градиента будут

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\overrightarrow{grad\,u}|.$$

Пример 3. Определить градиент функции $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ (рис. 4) в точке $M(2,4)$.

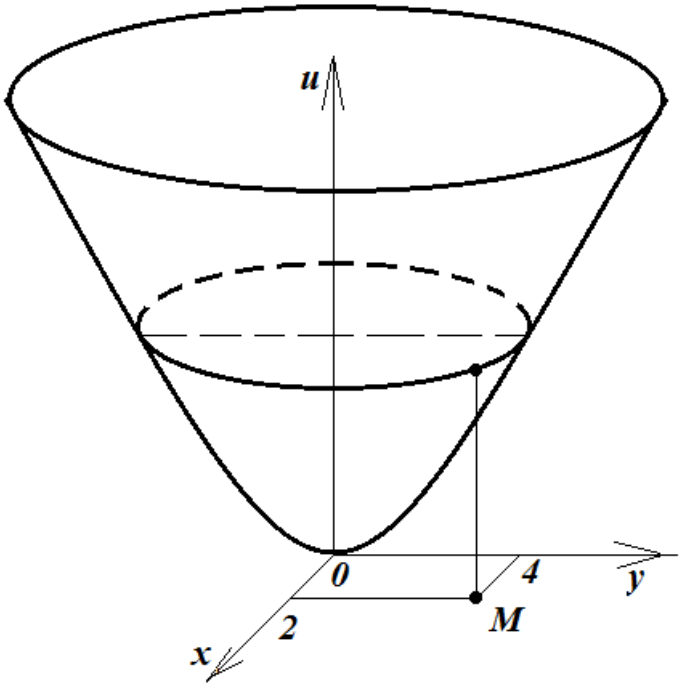

Рис. 4

Решение.
Здесь
$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = x|_M = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = \frac{2}{3}y|_M = \frac{8}{3}$.
Следовательно,

$$\left(\overrightarrow{grad\ u}\right)_M = 2\vec{i} + \frac{8}{3}\vec{j}$$

Уравнение линии уровня (рис. 5), проходящей через данную точку, будет
$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = \frac{22}{3}$.

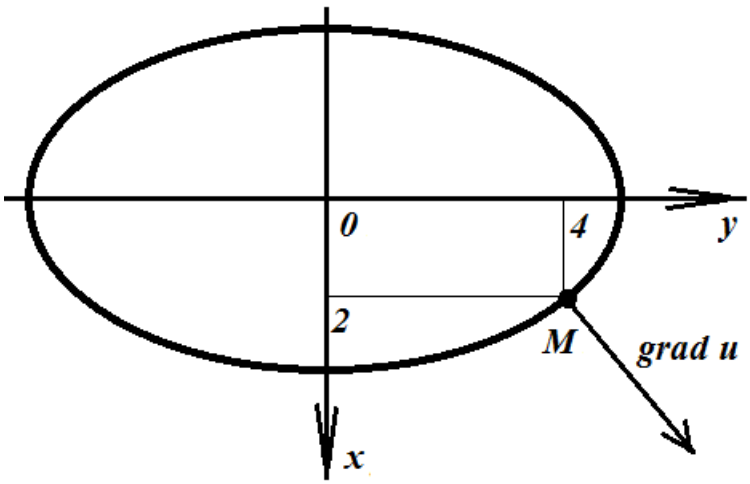

Рис. 5

В качестве примера 4 приведем условия задачи заключительного этапа олимпиады школьников Ломоносов, которая в некоторых случаях (для трех или шести парабол) хорошо решается через использование производной или градиента.

Четыре графика параболы $y = Cx^2$ повернули и состыковали так, что получился равносторонний симметричный «квадрат» с нулевыми углами. Найдите радиус вписанной в этот «квадрат» окружности, если измеренное по прямой расстояние между соседними вершинами «квадрата» равно 1. (Ответ: $1/4$).

В случае квадрата (рис. 6) эта задача решается и вполне школьными методами, однако, если «квадрат» заменить на «треугольник» или «шестиугольник», самым продвинутым решением будет использование градиента.

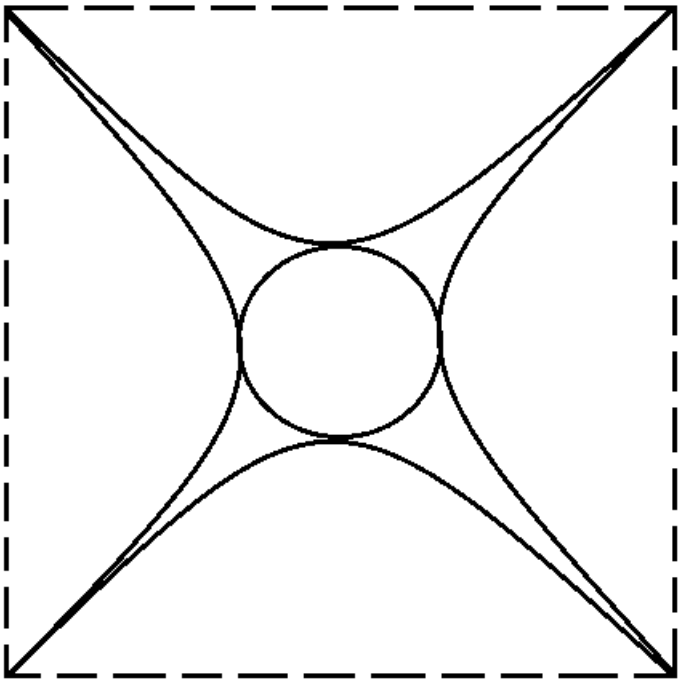

Рис. 6

Заключение

Авторы полагают, что разобранные примеры помогут студентам выйти за рамки формального заучивания и глубже вникнуть в геометрическую суть задачи. Отработка свойств на наглядных задачах создает основу для успешного восприятия абстрактного курса линейной алгебры.

Особое внимание в работе авторы уделяют необходимости подкреплять алгоритмические навыки теоретическими знаниями. Конечная цель математического образования — не научить шаблонным действиям, а воспитать способность к анализу условия задачи, поиску эффективного пути решения среди множества возможных, в том числе и ошибочных гипотез. Не механически следовать инструкциям, а искать правильный путь в условиях некоторой неопределенности. Задача преподавателя — создать среду, в которой студент учится мыслить критически и самостоятельно преодолевать трудности. Достижение этой цели напрямую зависит от методической подготовки и глубокого понимания предмета преподавателем.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. для вузов /. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 457 с
2. Фоменко Т.Н., Садовничая И.В. Математический анализ. Функции многих переменных, 2-е изд., перераб. и доп. -М.: Изд-во «Юрайт», 2025. - 206 с
3. Дубограй И.В., Скуднева О.В. Линейная алгебра и функции нескольких переменных. Курс лекций: учебное пособие / Дубограй И.В., Скуднева О.В. МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет). -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. - 145 с.
4. Нараленкова И.И. Методика введения начальных понятий на семинаре по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» // Modern European Researches. - Salzburg, 2022. - Т. 1. №3. - P. 152-157. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49433669
5. Нараленкова И.И. Методика введения понятий частная производная функций нескольких переменных на семинаре по теме «Частные производные функции нескольких переменных» //

Modern European Researches. - Salzburg, 2023. - T. 1, №1. - P. 139-143. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=53115576

***Irina I. Naralenkova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor Bauman Moscow State Technical University, Moscow; Associate Professor of the Lomonosov Moscow State University, Moscow
i.i.naralenkova@gmail.com
***Elena V. Shivrinskaya*,**
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor Lomonosov Moscow State University, Moscow
shivrinsckaya@yandex.ru

Methods of conducting classes on the topic «Directional Derivative and Gradient»

Abstract: The relevance of the research is due to the need to form a uniform approach to the applied problems in physics, chemistry and economics. The purpose is to describe the teaching methodology for students of natural sciences, technical and economic fields. Result: with a strict derivation of the derivative formula and the considered gradient projection theorem, a visual geometric model based on a sphere based on the gradient vector is proposed. The technique is illustrated with standard examples and an Olympiad problem on the configuration of parabolas, demonstrating the use of a gradient in non-obvious geometric context of the directional derivative and gradient, with their wide application in solving

Keywords: gradient of a scalar function, directional derivative, function of several variables, learning algorithmization, partial derivatives, applied problems of mathematical analysis

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ДЕРЕВО РЕШЕНИЙ» В КУРСЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Аннотация

Методы машинного обучения активно внедряются в образовательные программы вузов технического и экономического профиля; создание методических материалов для практических занятий по данной теме представляет значительный педагогический интерес. В статье представлен материал для лабораторной работы по теме «Дерево решений». Излагаются теоретические основы метода (алгоритм CART, критерии информативности, критерии остановки), практическая реализация задач классификации и регрессии средствами scikit-learn, а также пошаговый ручной разбор алгоритма на малом наборе данных. Все этапы сопровождаются визуализацией и вычислением метрик качества.

Ключевые слова
дерево решений, алгоритм CART, классификация, регрессия, машинное обучение, scikit-learn

АВТОР

Одинцова Вера Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технических университет им. Н.Э. Баумана»;
доцент ФГОБУ ВО Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», г. Москва
odintsova_va@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-114

Введение

Дерево решений (Decision Tree) является одним из базовых алгоритмов классического машинного обучения и обязательно включается в учебные курсы по анализу данных и машинному обучению в большинстве российских и зарубежных вузов [1, 2, 3]. Методу присущи несколько важных педагогических достоинств: он применим к задачам как классификации, так и регрессии; допускает наглядную визуализацию в виде дерева правил «если–то». При этом алгоритм достаточно прост в понимании и служит фундаментом для более сложных ансамблевых методов — случайного леса и градиентного бустинга [4, 5].

Вместе с тем в отечественной учебной литературе наблюдается дефицит практических пособий, сочетающих строгое математическое изложение алгоритма с готовыми кодовыми примерами на Python [6, 7, 8, 9]. Настоящая статья восполняет этот пробел: в ней представлен материал для компьютерной лабораторной работы, включающий вывод формул, программную реализацию, визуализацию и анализ результатов.

В данной работе предлагается последовательно выполнить следующие шаги. Сначала рассматриваются теоретические основы метода: алгоритм CART, критерии информативности H (энтропия и коэффициент Джини для классификации; MSE для регрессии), а также условия остановки рекурсии. Для закрепления теории приводится пошаговый ручной разбор алгоритма CART на учебном наборе данных из

10 объектов и 2 признаков: на каждом этапе вычисляются коэффициент Джини, прирост информации ΔH, выбирается оптимальное разбиение, и результат визуализируется в виде графа дерева. Затем для задачи классификации на синтетических данных строится и визуализируется дерево решений глубины 4, вычисляются метрики Accuracy и F1-macro, анализируется матрица ошибок. Аналогичный анализ проводится для задачи регрессии.

Методология и результаты исследования

Теоретические основы метода

Введём основные понятия. Дерево решений — это бинарное ориентированное дерево (частный случай графа без циклов), в котором каждый внутренний узел соответствует условию разбиения по одному признаку (например, $X_0 \leq 1.5$), ветви — результатам выполнения этого условия (да / нет), а листья — итоговым предсказаниям модели. Бинарность означает, что каждый внутренний узел порождает ровно два дочерних узла. Корневой узел — единственный узел без родителя, ему соответствует вся обучающая выборка; с него начинается процесс построения дерева. Глубина дерева — максимальная длина пути от корня до листа. Предсказанием в листе является: для задачи классификации — класс большинства обучающих объектов, попавших в данный лист; для задачи регрессии — среднее значение целевой переменной по этим объектам.

Рассмотрим простой пример дерева. Предположим, банк принимает решение об одобрении кредита на основе двух признаков: ежемесячный доход клиента и длина кредитной истории. Дерево решений глубины 2 для этой задачи может выглядеть следующим образом (рис. 1). Корневой узел проверяет условие «Доход > 50 000 руб.». Если условие не выполняется — клиент сразу попадает в лист «Отказать». Если выполняется — переходим к внутреннему узлу, который проверяет «Кредитная история > 2 лет». В зависимости от результата клиент попадает в лист «Одобрить» или «Отказать». Когда приходит новый клиент, он последовательно проверяется по узлам дерева начиная с корневого: на каждом шаге выбирается ветвь в соответствии с его признаками, пока клиент не попадёт в один из листьев — и предсказание этого листа («Одобрить» или «Отказать») будет итоговым ответом дерева.

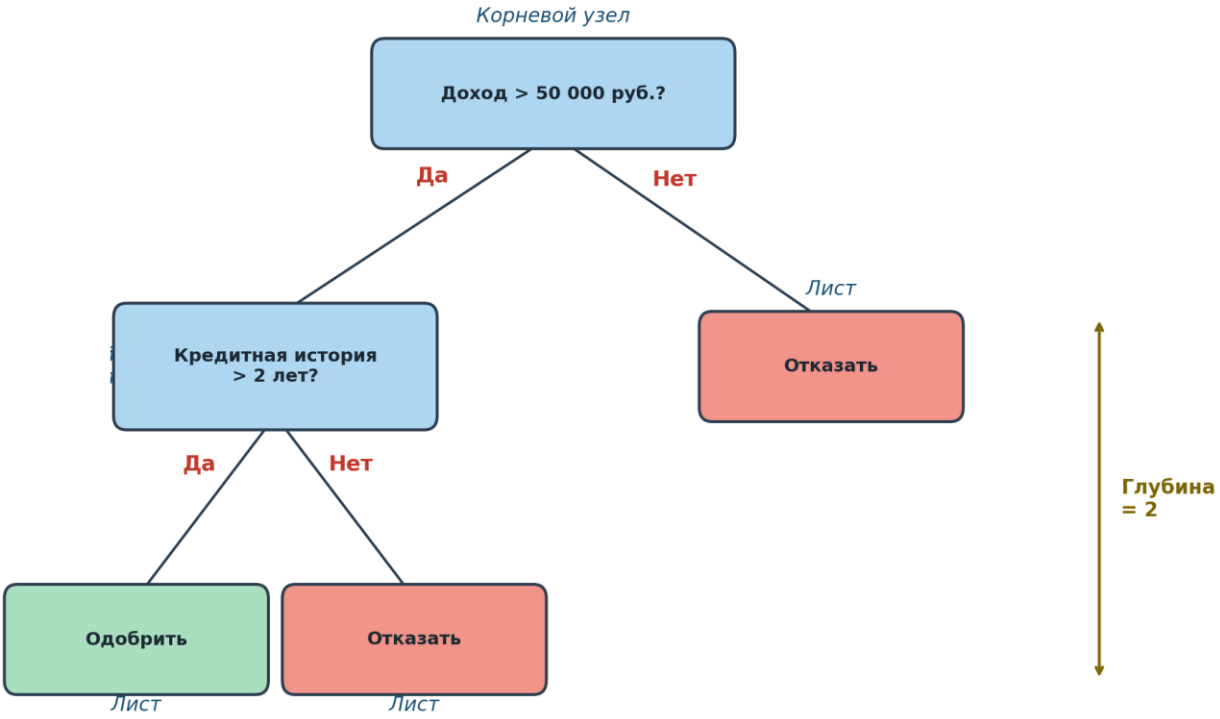

Рис. 1. Пример дерева решений для задачи одобрения кредита

Возникает вопрос: как дерево таких правил строится автоматически из обучающих данных? Для этого используется алгоритм CART (Classification And Regression Trees) [11, 12], который строит бинарное дерево рекурсивно. На каждом шаге для узла Q выполняются следующие этапы.

Этап 1. Для каждого признака j = 1, …, m и каждого порогового значения t формируются два дочерних подмножества:

$$Q_l(j,t) = \{x \in Q : x_j \le t\},\ \ Q_r(j,t) = \{x \in Q : x_j > t\}$$

где пороговые значения t перебираются по всем кандидатам, получаемым из обучающих данных узла Q: объекты сортируются по значению признака j и в качестве t рассматриваются середины между соседними различными значениями:

$$t = \frac{x_j^{(i)} + x_j^{(i+1)}}{2}, i = 1, \dots, n-1$$

где $x_j^{(1)} \le x_j^{(2)} \le \cdots \le x_j^{(n)}$ — упорядоченные значения признака j по объектам узла Q; n — число различных значений. Таким образом, для каждого признака j рассматривается не более n – 1 кандидата на порог.

Этап 2. Для каждой пары (j, t) вычисляется прирост информации:

$$\Delta H(j,t) = H(Q) - \frac{|Q_l(j,t)|}{|Q|} \cdot H(Q_l(j,t)) - \frac{|Q_r(j,t)|}{|Q|} \cdot H(Q_r(j,t))$$

где H(Q) — значение критерия информативности H для родительского узла Q до разбиения; $H(Q_l(j,t))$ и $H(Q_r(j,t))$ — значения того же критерия для левого и правого дочерних узлов; $|Q_l(j,t)|$, $|Q_r(j,t)|$, $|Q|$ — число объектов в соответствующих узлах. Конкретный вид H зависит от типа задачи.

Для задачи классификации используются два критерия информативности:

— Энтропия: $H(Q) = -\sum_k p_k \log_2 p_k$

где p_k — доля объектов k-го класса среди всех объектов узла Q; суммирование ведётся по всем K классам. При однородном узле H(Q) = 0; при равномерном распределении H(Q) = $\log_2 K$.

— Коэффициент Джини: $Gini(Q) = 1 - \sum_k p_k^2$

где p_k — доля объектов k-го класса в узле Q. При однородном узле Gini(Q) = 0; при равномерном распределении по K классам Gini(Q) = 1 − 1/K. Коэффициент Джини вычислительно проще энтропии (нет логарифма).

При использовании энтропии в качестве H критерий максимального ΔH принято называть информационным выигрышем (Information Gain), при использовании коэффициента Джини — выигрышем Джини (Gini Gain).

Для задачи регрессии в качестве H используется одна из следующих функций:

— Среднеквадратическая ошибка (MSE): $MSE(Q) = \frac{1}{|Q)}\sum_{i\in Q}(y_i - \bar{y})^2$

где y_i — истинное значение целевой переменной i-го объекта; $\bar{y} = \frac{1}{|Q)}\sum_{i\in Q} y_i$ — среднее значение по узлу, являющееся предсказанием в листе. MSE штрафует крупные ошибки сильнее, чем малые.

— Средняя абсолютная ошибка (MAE): $MAE(Q) = \frac{1}{|Q)}\sum_{i\in Q}|y_i - \bar{y})$

где обозначения те же, что и для MSE. MAE штрафует все ошибки одинаково и менее чувствителен к выбросам; предсказанием в листе является медиана значений целевой переменной.

Помимо MSE и MAE, применяются: критерий Фридмана — модификация MSE, учитывающая наклон регрессии в дочерних узлах; критерий Пуассона — основан на отклонении Пуассона и используется для неотрицательных целочисленных данных счёта.

Этап 3. Полным перебором всех пар (j, t) — по всем m признакам и всем кандидатам на порог для каждого признака — находится оптимальная пара (j*, t*), максимизирующая ΔH:

$$(j\ ,t\ ) = \underset{j=1,\dots,m;t=\frac{x_j^{(i)}+x_j^{(i+1)}}{2}}{argmax} \Delta H(j,t)$$

Поскольку H(Q) не зависит от (j, t), максимизация ΔH(j, t) эквивалентна минимизации взвешенной суммы H дочерних узлов:

$$(j\ ,t\ ) = \underset{j,t}{argmin}\left[\frac{|Q_l(j,t))}{|Q)}\cdot H(Q_l(j,t)) + \frac{|Q_r(j,t))}{|Q)}\cdot H(Q_r(j,t))\right]$$

Важное свойство алгоритма. На каждом этапе CART выбирает локально оптимальное разбиение — то, которое максимизирует ΔH в текущем узле, не учитывая последствий для будущих уровней дерева. Такой подход называется жадным (greedy): алгоритм не гарантирует глобально оптимальное дерево, однако обеспечивает вычислительную эффективность. Поиск глобально оптимального дерева является NP-полной задачей [10].

Этап 4. Узел Q разбивается на Q_l(j*, t*) и Q_r(j*, t*).

Этап 5. Этапы 1–4 алгоритма рекурсивно повторяются для каждого из дочерних узлов до достижения одного из критериев остановки.

Рекурсия в пункте 5 останавливается при выполнении одного из следующих условий:

— Достигнута максимальная глубина дерева: узел объявляется листом, если длина пути от корня до него равна заданному пределу глубины;

— Узел содержит слишком мало объектов для разбиения: разбиение не выполняется, если число объектов в узле меньше заданного минимума;

— **Дочерний лист окажется слишком маленьким:** разбиение не выполняется, если хотя бы один из дочерних узлов после разбиения будет содержать меньше заданного минимального числа объектов;

— **Узел однороден:** все объекты узла принадлежат одному классу (для классификации) или имеют одинаковое значение целевой переменной (для регрессии), то есть $\Delta H = 0$ для любого разбиения.

Нечувствительность к масштабу признаков. Поскольку алгоритм CART использует только операции сравнения ($x_j \le t$), результат разбиения не зависит от масштаба или единиц измерения признаков. Предварительная стандартизация или нормализация данных не требуется и не влияет на структуру построенного дерева — в отличие, например, от метода k ближайших соседей или линейных моделей.

Пример с пошаговым разбором алгоритма CART

Для закрепления теоретического материала рассмотрим пошаговое построение дерева решений по алгоритму CART без использования программных библиотек. Разберём задачу бинарной классификации на наборе данных, содержащем два числовых признака и десять объектов (табл. 1).

Таблица 1

Исходный набор данных для ручного разбора (2 признака, 10 объектов, 2 класса)

№	X_1	X_2	y (класс)
1	1.0	2.0	0
2	1.5	4.0	0
3	2.0	1.0	0
4	2.5	3.5	0
5	3.5	2.5	1
6	4.0	1.5	1
7	4.5	4.5	1
8	5.0	3.0	1
9	3.0	0.5	0
10	3.0	4.0	1

Целевая переменная принимает значения 0 (класс 0, 5 объектов: №1–4 и №9) и 1 (класс 1, 5 объектов: №5–8 и №10).

Этап 1. Формирование кандидатов на пороговые значения

Для каждого признака j объекты корневого узла Q (все 10 объектов) сортируются по значению этого признака, и в качестве кандидатов на пороги t берутся середины между соседними различными значениями.

Признак X_1. Отсортированные значения: 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0. Различных значений 9, между ними 8 кандидатов:

$$t \in \{1.25;\ 1.75;\ 2.25;\ 2.75;\ 3.25;\ 3.75;\ 4.25;\ 4.75\}$$

Признак X_2. Отсортированные значения: 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.0, 4.5. Различных значений 9, кандидаты: $t \in \{0.75; 1.25; 1.75; 2.25; 2.75; 3.25; 3.75; 4.25\}$.

Этап 2. Вычисление критерия информативности корневого узла

В данном примере используется коэффициент Джини. Корневой узел Q содержит 10 объектов: 5 объектов класса 0 и 5 объектов класса 1 ($p_0 = p_1 = 0.5$):

$$Gini(Q) = 1 - p_0^2 - p_1^2 = 1 - 0,5^2 - 0,5^2 = 1 - 0,25 - 0,25 = 0,5$$

Перебор всех пар (j, t) и вычисление прироста информации ΔH

Для каждого кандидата (j, t) объекты разбиваются на левое подмножество Q_l = {x ∈ Q : x_j ≤ t} и правое Q_r = {x ∈ Q : x_j > t}, после чего вычисляется:

$$\Delta H(j,t) = Gini(Q) - \frac{|Q_l)}{|Q)} \cdot Gini(Q_l) - \frac{|Q_r)}{|Q)} \cdot Gini(Q_r)$$

Результаты перебора по признаку X_1 сведены в табл. 2. Строка с максимальным ΔH выделена зелёным.

Таблица 2

Перебор кандидатов на порог для признака X_1 (корневой узел)

t	$\|Q_l\|/\|Q\|$	Gini(Q_l)	Gini(Q_r)	ΔH(X_1, t)
1.25	0.1	0.000	0.494	0.500 − 0.1·0.000 − 0.9·0.494 = 0.056
1.75	0.2	0.000	0.469	0.500 − 0.2·0.000 − 0.8·0.469 = 0.125
2.25	0.3	0.000	0.408	0.500 − 0.3·0.000 − 0.7·0.408 = 0.214
2.75	0.4	0.000	0.278	0.500 − 0.4·0.000 − 0.6·0.278 = 0.333 ★
3.25	0.6	0.278	0.000	0.500 − 0.6·0.278 − 0.4·0.000 = 0.333
3.75	0.7	0.408	0.000	0.500 − 0.7·0.408 − 0.3·0.000 = 0.214
4.25	0.8	0.469	0.000	0.500 − 0.8·0.469 − 0.2·0.000 = 0.125
4.75	0.9	0.494	0.000	0.500 − 0.9·0.494 − 0.1·0.000 = 0.056

Перебор по признаку X_2 показывает, что лучший результат достигается при t = 1.25 (табл. 3).

Таблица 3

Лучшие кандидаты на порог для признака X_2 (корневой узел, первые пять)

t	$\|Q_l\|/\|Q\|$	Gini(Q_l)	Gini(Q_r)	ΔH(X_2, t)
0.75	0.1	0.000	0.494	0.500 − 0.1·0.000 − 0.9·0.494 = 0.056
1.25	0.2	0.000	0.469	0.500 − 0.2·0.000 − 0.8·0.469 = 0.125
1.75	0.3	0.444	0.490	0.500 − 0.3·0.444 − 0.7·0.490 = 0.024
2.25	0.4	0.375	0.444	0.500 − 0.4·0.375 − 0.6·0.444 = 0.083
2.75	0.5	0.480	0.480	0.500 − 0.5·0.480 − 0.5·0.480 = 0.020

Сравнивая максимальные значения ΔH по обоим признакам, получаем: max ΔH(X_1) = 0.333 (при t = 2.75 или t = 3.25) против max ΔH(X_2) = 0.125 (при t = 1.25). Признак X_1 обеспечивает значительно больший прирост информации.

Этап 3. Выбор оптимальной пары (j*, t*)

Алгоритм выбирает пару с максимальным ΔH:

$$(j \quad , t \quad) = argmax\Delta H(j,t) \rightarrow j \quad = X_1, t \quad = 2{,}75$$

Условие разбиения корневого узла: X_1 ≤ 2.75. Среди двух кандидатов с одинаковым ΔH = 0.333 (t = 2.75 и t = 3.25) берётся первый встреченный при переборе — t = 2.75.

Этап 4. Разбиение корневого узла

Узел Q разбивается на два дочерних подмножества по условию X_1 ≤ 2.75:

Q_l = {№1, №2, №3, №4} → 4 объекта, классы: {0, 0, 0, 0}, Gini(Q_l) = 0.000

Q_r = {№5, №6, №7, №8, №9, №10} → 6 объектов, классы: {1, 1, 1, 1, 0, 1}, Gini(Q_r) = 10/36 ≈ 0.278

Левое подмножество Q_l однородно: все объекты принадлежат классу 0, Gini = 0. Выполнен критерий остановки «узел однороден» — Q_l объявляется листом с предсказанием класс 0.

Правое подмножество Q_r неоднородно (1 объект класса 0 среди 5 класса 1), поэтому рекурсия продолжается.

Этап 5. Рекурсия — разбор правого дочернего узла Q_r

Правый узел Q_r содержит 6 объектов: №5 (X_1=3.5, X_2=2.5, y=1), №6 (X_1=4.0, X_2=1.5, y=1), №7 (X_1=4.5, X_2=4.5, y=1), №8 (X_1=5.0, X_2=3.0, y=1), №9 (X_1=3.0, X_2=0.5, y=0), №10 (X_1=3.0, X_2=4.0, y=1). Повторяем этапы 1–4.

Кандидаты на порог по X_1: единственный кандидат между различными значениями — t = 3.25 (между 3.0 и 3.5), 3.75, 4.25, 4.75. При t = 3.25: Q_l = {№9, №10} → Gini = 0.5; Q_r = {№5,№6,№7,№8} → Gini = 0. $\Delta H(X_1, 3.25) = 0.278 - (2/6)\cdot 0.5 - (4/6)\cdot 0 = 0.111$.

Кандидаты на порог по X_2 (отсортированные X_2 правого узла: 0.5(№9), 1.5(№6), 2.5(№5), 3.0(№8), 4.0(№10), 4.5(№7)). Перебор показан в табл. 4.

Таблица 4

Перебор кандидатов на порог для признака X_2 (правый дочерний узел)

t	$\|Q_l\|/\|Q\|$	Gini(Q_l)	Gini(Q_r)	$\Delta H(X_2, t)$
1.00	1/6	0.000	0.000	0.278 − (1/6)·0 − (5/6)·0 = 0.278 ★
2.00	2/6	0.500	0.000	0.278 − (2/6)·0.500 − (4/6)·0 = 0.111
2.75	3/6	0.444	0.375	0.278 − (3/6)·0.444 − (3/6)·0.375 = −0.132
3.50	4/6	0.375	0.500	0.278 − (4/6)·0.375 − (2/6)·0.500 = −0.139
4.25	5/6	0.408	0.000	0.278 − (5/6)·0.408 − (1/6)·0 = −0.062

При t = 1.00 по признаку X_2: Q_l = {№9} (X_2 = 0.5 ≤ 1.0, класс 0) → Gini = 0; Q_r = {№5,№6,№7,№8,№10} → все класс 1 → Gini = 0. $\Delta H(X_2, 1.00) = 0.278 - 0 - 0 = 0.278$.

Сравниваем: max $\Delta H(X_1)$ = 0.111 < max $\Delta H(X_2)$ = 0.278. Оптимальное разбиение: j* = X_2, t* = 1.00. После разбиения:

Сравниваем: max $\Delta H(X_1)$ = 0.111 < max $\Delta H(X_2)$ = 0.278. Оптимальное разбиение: j* = X_2, t* = 1.00. После разбиения:

Q_{rl} = {№9} → 1 объект, класс 0, Gini = 0 → ЛИСТ: предсказание класс 0

Q_{rr} = {№5, №6, №7, №8, №10} → 5 объектов, все класс 1, Gini = 0 → ЛИСТ: предсказание класс 1

Оба дочерних узла однородны (Gini = 0), рекурсия завершается. Итоговое дерево имеет глубину 2 и классифицирует все 10 обучающих объектов без ошибок. Правила классификации, извлечённые из дерева:

ЕСЛИ $X_1 \le 2.75$ → Класс 0

ЕСЛИ $X_1 > 2.75$ И $X_2 \le 1.00$ → Класс 0 (объект с низким X_2)

ЕСЛИ $X_1 > 2.75$ И $X_2 > 1.00$ → Класс 1

Визуализация итогового графа дерева решений

Структура построенного дерева решений представлена на рис. 2. В каждом узле указаны: условие разбиения, значение коэффициента Джини, число объектов и их распределение по классам. Прирост информации ΔH отображён жёлтыми метками. Листья окрашены в соответствии с предсказываемым классом.

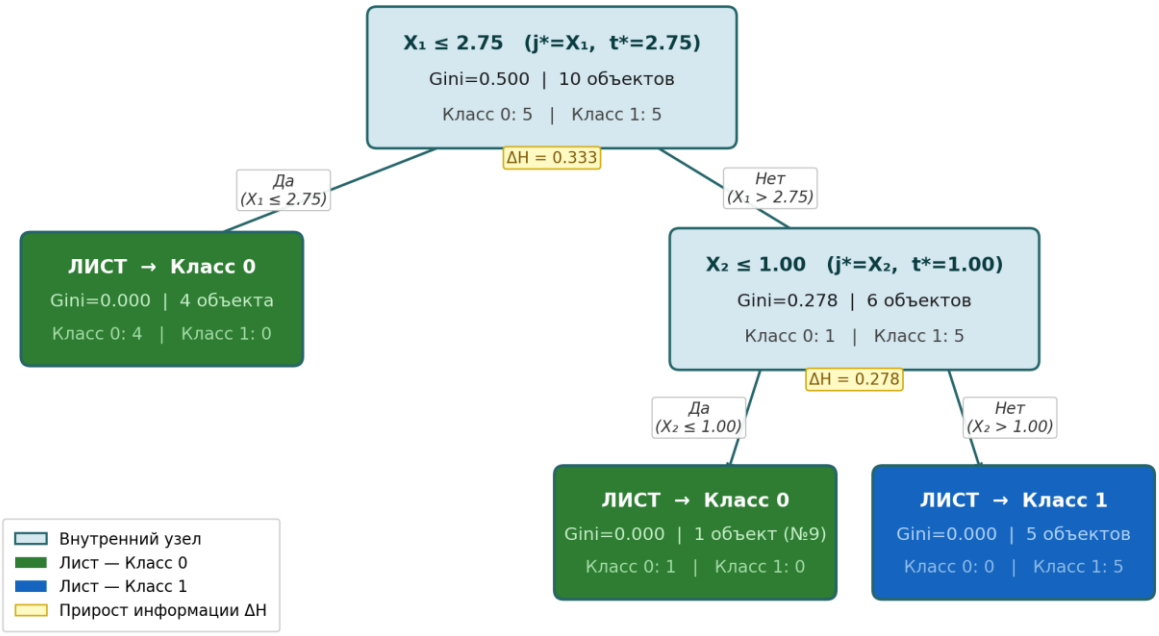

Рис. 2. Граф дерева решений CART, построенного вручную (глубина 2, коэффициент Джини)

Таким образом, алгоритм CART за два шага рекурсивного разбиения построил дерево, которое идеально классифицирует все 10 обучающих объектов. Ключевым инструментом выбора разбиений служил прирост по коэффициенту Джини ΔH: на каждом уровне из всех возможных пар (j, t) выбиралась та, которая максимально уменьшает неоднородность дочерних узлов.

Дерево решений для задачи классификации

Теперь рассмотрим задачу с более объёмными данными, где без написания программного кода уже не обойтись. Разберём задачу трёх-классовой классификации на наборе данных, содержащем два числовых признака (чтобы иметь возможность визуализации) и 150 объектов.

Для демонстрации такой задачи сгенерируем данные с тремя классами: 150 наблюдений, два признака X_0 и X_1, центры кластеров — (1.5, 5.5), (5.0, 5.0) и (3.5, 1.5), стандартное отклонение кластеров — 0.9. Первые пять строк полученного набора данных приведены в табл. 5.

Таблица 5

Фрагмент набора данных для задачи классификации

X_0	X_1	Класс
2.61	4.97	0
5.16	5.72	1
5.19	3.47	1
3.03	0.97	2
0.77	5.62	0

Разделим данные на обучающую (80%, 120 объектов) и тестовую (20%, 30 объектов) выборки. Диаграмма рассеяния сгенерированных данных представлена на рис. 3, где тестовые данные отмечены более крупными символами, а обучающие более мелкими.

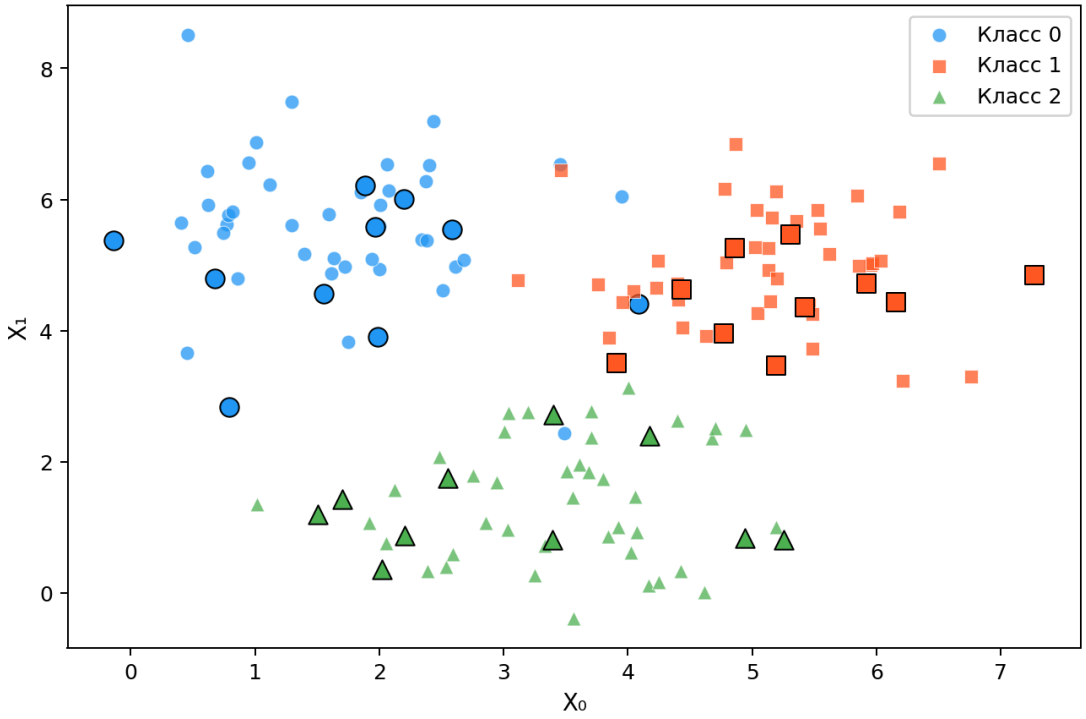

Рис. 3. Диаграмма рассеяния данных для задачи классификации

По диаграмме видно, что классы хорошо разделимы в пространстве признаков, однако границы между ними нелинейны.

Обучим готовую модель дерева решений для задачи классификации DecisionTreeClassifier из библиотеки sklearn [13] с критерием Энтропия и глубиной дерева 3. Граф построенного дерева решений изображён на рис. 4: дерево имеет глубину 3 и 6 листьев. Каждый внутренний узел содержит: условие ветвления (признак и порог), значение энтропии, число объектов и их распределение по классам. Листья окрашены в цвет предсказываемого класса.

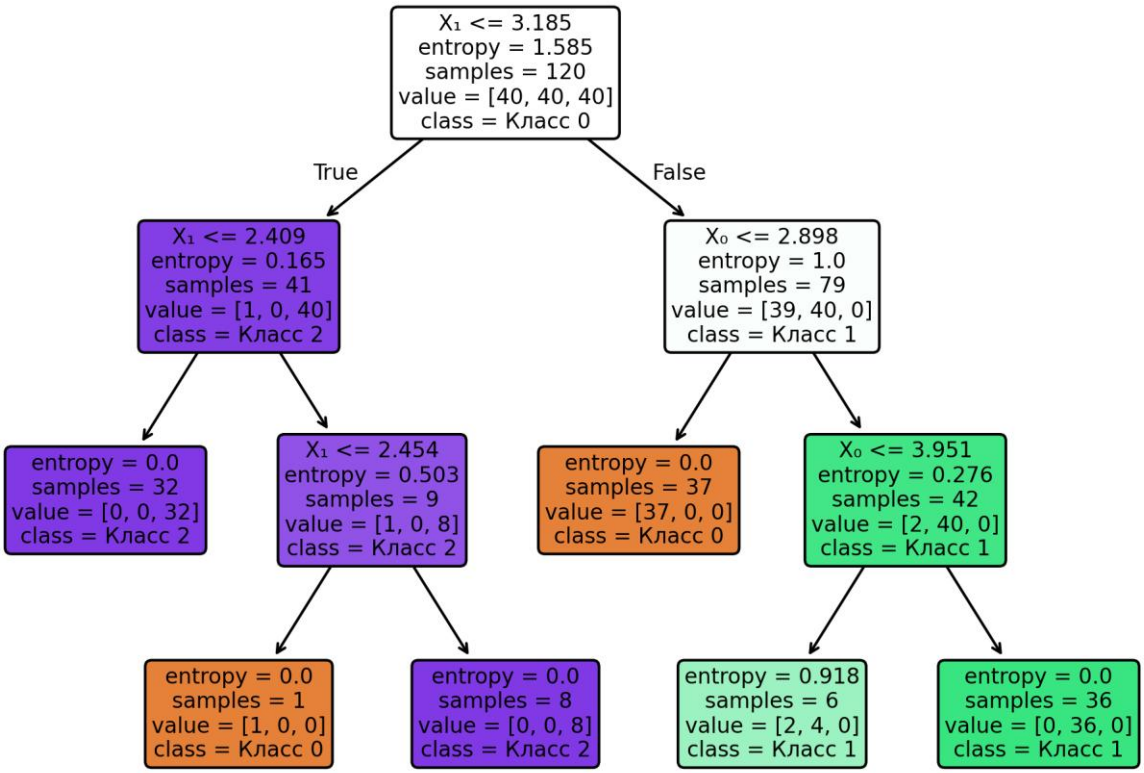

Рис. 4. Граф дерева решений (классификация, глубина 3)

Для оценки качества модели на тестовой выборке вычислим метрики Accuracy и F1-macro. Accuracy — доля верно классифицированных объектов:

$$Accuracy = \frac{TP_0 + TP_1 + TP_2}{N}$$

где TP_k — число верно классифицированных объектов k-го класса; N — общее число объектов.

F1-macro — среднее значение F1-меры по всем классам:

$$F_1 - macro = \frac{1}{K}\sum_k F_{1k}\,,\; F_{1k} = \frac{2 \cdot Precision_k \cdot Recall_k}{Precision_k + Recall_k}$$

где $Precision_k = TP_k/(TP_k + FP_k)$ — точность для k-го класса; $Recall_k = TP_k/(TP_k + FN_k)$ — полнота; TP_k — число истинно положительных, FP_k — ложноположительных, FN_k — ложноотрицательных объектов k-го класса; K — число классов. Метрика F1-macro предпочтительна при сбалансированных классах, так как учитывает как точность, так и полноту каждого класса.

Результаты вычисления метрик на тестовой выборке приведены в табл. 6.

Таблица 6.

Метрики качества модели классификации

Метрика	Test
Accuracy	0.933
F1-macro	0.931

Высокие значения метрик свидетельствуют о хорошем качестве модели (чем ближе значения обоих метрик к 1, тем лучше модель).

Для визуального анализа разделяющих поверхностей изобразим области, которые дерево относит к каждому классу, совместно с точками обучающей и тестовой выборок (рис. 5). Характерная черта дерева решений — прямоугольные границы разделения, параллельные осям признаков.

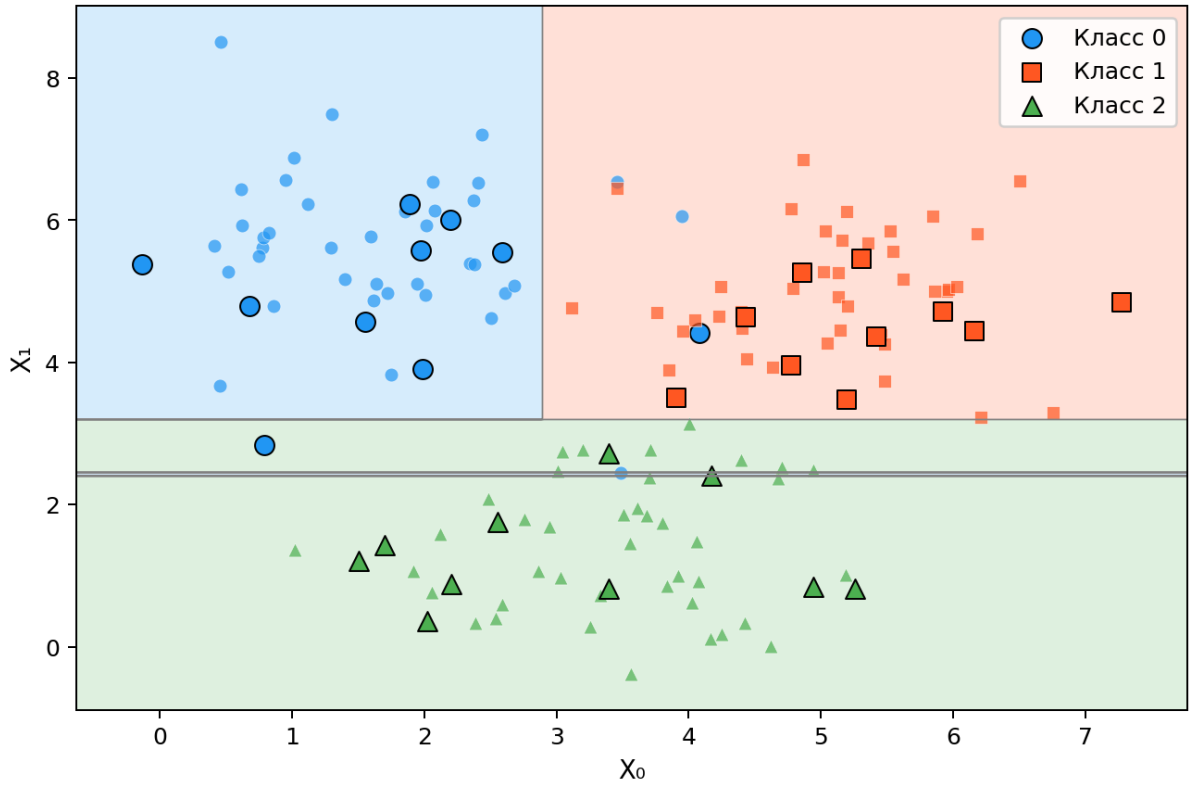

Рис. 5. Области разделения классов (глубина 3)

Дерево решений для задачи регрессии

Для задачи регрессии сгенерируем синтетические данные: X — 100 упорядоченных случайных чисел из отрезка [0, 1], целевая переменная:

$$y = e^{x^2} + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 0{,}1)$$

где y — значение целевой переменной; x — значение признака; $e^{(x^2)}$ — истинная нелинейная возрастающая зависимость; ε — случайный гауссовский шум с нулевым средним и стандартным отклонением 0.1. Первые пять строк набора данных приведены в табл. 8.

Таблица 8

Фрагмент набора данных для задачи регрессии

X	y
0.006	1.009
0.021	0.971
0.025	1.010
0.034	0.802
0.045	0.980

Диаграмма рассеяния данных и истинная кривая представлены на рис. 6.

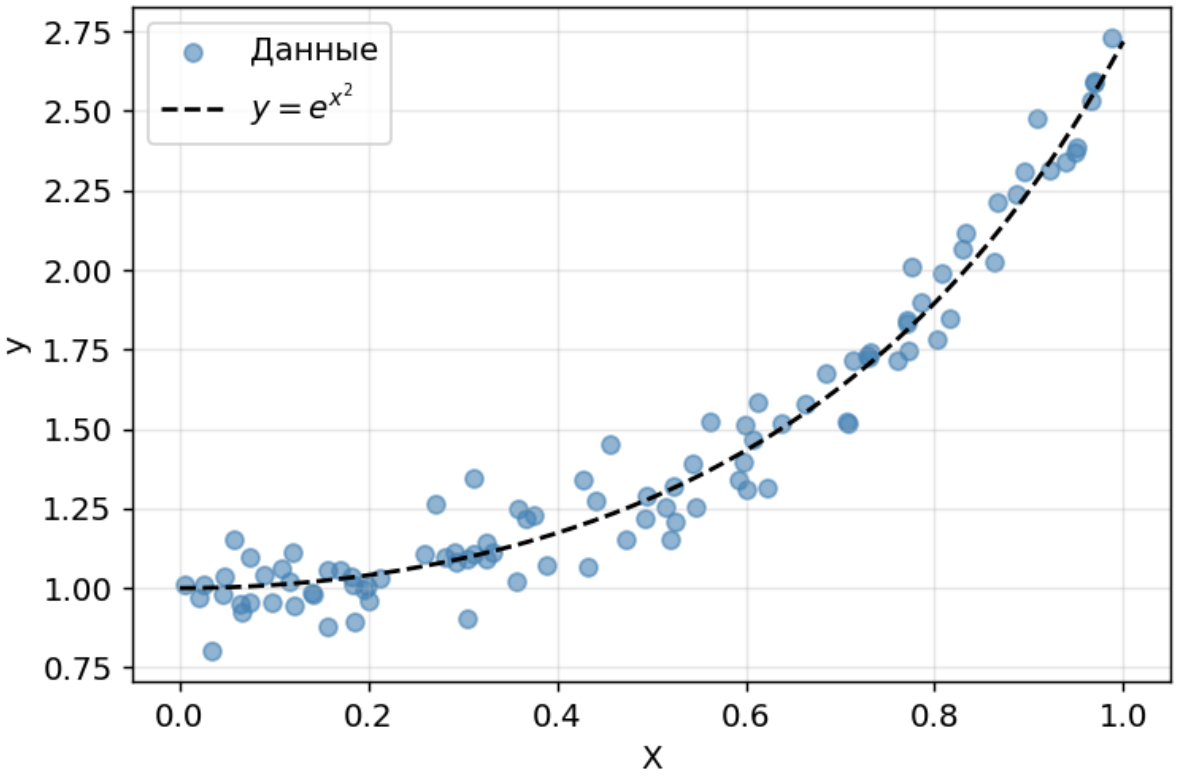

Рис. 6. Данные для задачи регрессии

Обучим готовую модель дерева решений для задачи регрессии DecisionTreeRegressor из библиотеки sklearn с сглубиной 2.

Граф дерева, в листьях которого хранятся средние значения ȳ обучающих объектов, представлен на рис. 7.

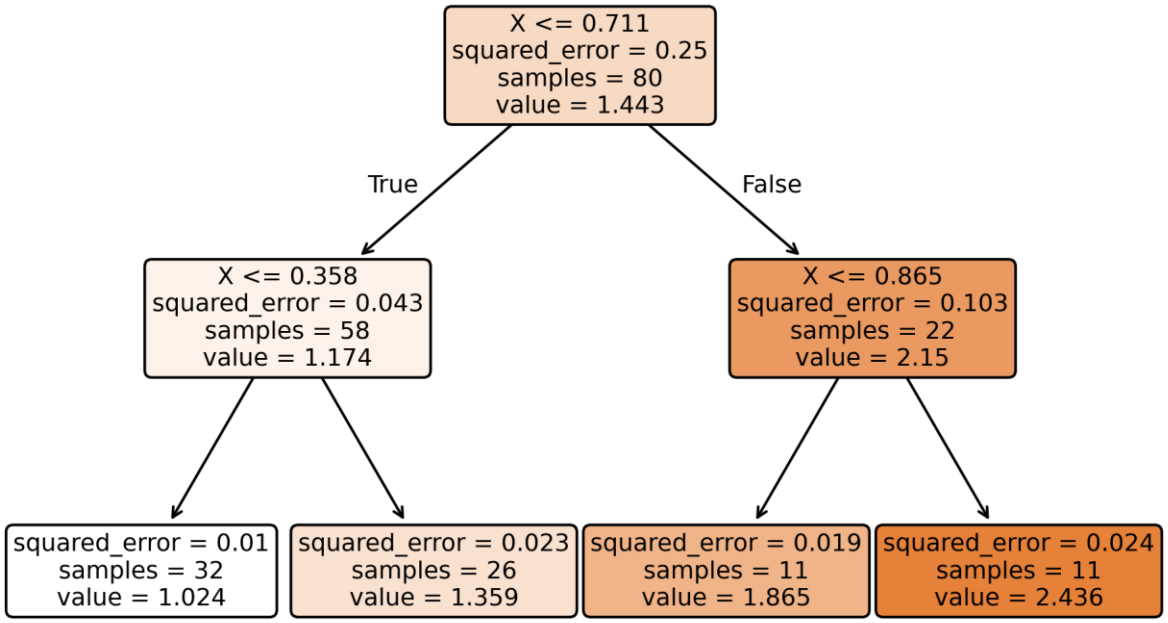

Рис. 7. Граф дерева решений (регрессия, глубина 2)

Для оценки качества вычислим коэффициент детерминации R^2 и среднеквадратическую ошибку MSE. Коэффициент детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

где y_i — истинное значение целевой переменной i-го объекта; $\hat{y}_i$ — предсказанное значение; $\bar{y} = (1/n)\Sigma y_i$ — среднее истинных значений по выборке; числитель — сумма квадратов остатков; знаменатель — полная дисперсия. $R^2 = 1$ соответствует идеальному предсказанию; $R^2 = 0$ — модель не лучше простого среднего; $R^2 < 0$ — модель хуже среднего.

MSE (среднеквадратическая ошибка) вычисляется по формуле:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

где n — число объектов в выборке; MSE принимает неотрицательные значения; чем ближе MSE к нулю, тем точнее предсказание.

Результаты вычисления метрик на тестовой выборке приведены в табл. 9.

Таблица 9.

Метрики качества модели регрессии

Метрика	Test
R^2	0.901
MSE	0.016

Высокое значение $R^2 = 0.928$ свидетельствует о хорошем качестве модели: дерево объясняет 90.1% дисперсии целевой переменной. MSE = 0.016 указывает на малую среднеквадратическую ошибку предсказания.

Дерево аппроксимирует зависимость кусочно-постоянной функцией: в каждой из 4 прямоугольных областей пространства признаков модель предсказывает одно постоянное значение — $\bar{y}$ листа. Линия регрессии представлена на рис. 8.

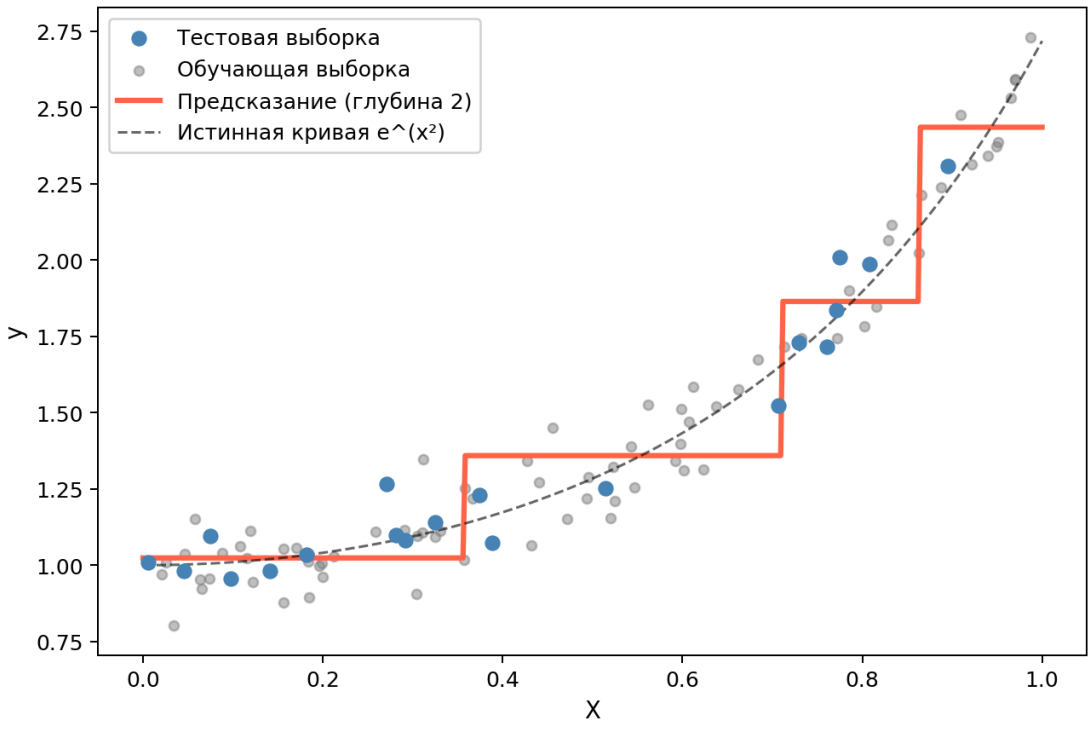

Рис. 8. Кусочно-постоянная линия регрессии (глубина 2)

Заключение

В данной работе представлен комплекс учебных материалов для лабораторной работы по теме «Дерево решений». Изложены теоретические основы алгоритма CART: рекурсивная процедура построения дерева, критерии информативности и условия остановки рекурсии. Отдельно обоснованы два практически важных свойства алгоритма: его жадный характер (локально оптимальный выбор разбиения на каждом уровне без учёта будущих шагов) и нечувствительность к масштабу признаков (предварительная нормализация данных не требуется). Для закрепления теории приведён пошаговый ручной разбор CART на наборе из 10 объектов и 2 признаков: сформированы кандидаты на пороги, вычислены коэффициент Джини и прирост ΔH для каждой пары (признак, порог), выбрано оптимальное разбиение и построено дерево глубины 2, безошибочно классифицирующее все обучающие объекты; итоговый граф визуализирован с помощью библиотеки matplotlib.

В задаче классификации дерево глубины 3 с критерием энтропии достигло высоких показателей метрик Accuracy = 0.933 и F1-macro = 0.931 на тестовой выборке.

В задаче регрессии на данных $y=e^{\wedge}((x^2))+\varepsilon$ (100 объектов) построено дерево глубины 2 (4 листа), аппроксимирующее нелинейную зависимость кусочно-постоянной функцией. На тестовой выборке достигнуты метрики $R^2 = 0.901$ и MSE = 0.016.

Следует отметить, что интерпретируемость дерева решений одинаково высока как в задаче классификации, так и регрессии: граф дерева позволяет проследить логику каждого предсказания. В задаче классификации это правила вида «если $X_0 \le t_1$ и $X_1 \le t_2$, то класс k», в задаче регрессии — кусочно-постоянная функция с явно указанными порогами и средними значениями в листьях.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. - Springer, 2006. - 738 с.
2. Рашка С., Мирджалили В. Python и машинное обучение. - М.: ДМК Пресс, 2019. - 848 с.
3. Сомов А. Е., Черкасова М. В. Методика преподавания машинного обучения в техническом вузе // Педагогическое образование в России. - 2021. - № 4. - С. 78–86.
4. Breiman L., Friedman J., Olshen R., Stone C. Classification and Regression Trees. - CRC Press, 1984. - 368 с.
5. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных. - М.: ДМК Пресс, 2015. - 400 с.
6. Одинцова В. А. Машинное обучение: методические указания к лабораторным работам. — М.: Финансовый университет, 2023.
7. Педрегоса Ф. и др. Scikit-learn: машинное обучение на Python // Journal of Machine Learning Research. - 2011. - Т. 12. - С. 2825–2830.
8. Müller A. C., Guido S. Introduction to Machine Learning with Python. - O’Reilly Media, 2016. - 392 с.
9. Воронцов К. В. Машинное обучение: курс лекций. - М.: МФТИ, 2020. - URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Воронцов_К.В.
10. Воронцов К. В. Машинное обучение: курс лекций…
11. Breiman L., Friedman J., Olshen R., Stone C. Classification and Regression Trees…
12. Scikit-learn developers. Decision Trees. - URL: https://scikit-learn.org/stable/modules/tree.html (дата обращения: 23.03.2025).
13. Педрегоса Ф. и др. Scikit-learn: машинное обучение на Python…

***Vera A. Odintsova*,**
PhD, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University; Associate Professor, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow

Methodological Aspects of Teaching the Topic “Decision Tree” in a Machine Learning Course

Abstract. Machine learning methods are being actively integrated into curricula of technical and economic higher education institutions; the development of instructional materials for practical classes on this topic

is of considerable pedagogical interest. The article presents material for a laboratory session on the topic “Decision Tree”. The theoretical foundations of the method are outlined (the CART algorithm, impurity criteria, stopping conditions), along with practical implementation of classification and regression tasks using scikit-learn, and a step-by-step manual walkthrough of the algorithm on a small dataset. All stages are accompanied by visualizations and quality metric computation.
Keywords: decision tree, CART algorithm, classification, regression, machine learning, scikit-learn.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «ЧИСЛОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ» ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

Аннотация

Язык программирования **Python** завоевал большую популярность во многих областях научной деятельности и в прикладных разработках. Он имеет особенность с точки зрения необходимости усвоения обучающимися важной темы, а именно работы с кодами чисел, — динамическую типизацию переменных. Рассматриваются несколько путей учёта этой особенности при обучении языку **Python**. Присвоение имен переменным с учетом их типов. Использование типа данных array, использование метода сравнения вещественных переменных на близость isclose(), суммирование с помощью функций sum() и fsum(), использование переменных модулей decimal и fractions.

Ключевые слова

Python, программирование, обучение программированию, динамическая типизация переменных, типы числовых переменных

АВТОРЫ

Птицын Владимир Анатольевич,
старший преподаватель
ФГАОУ ВО "Государственный университет просвещения", г. Москва
vl_pt@mail.ru

Птицына Инга Вячеславовна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО "Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана", г. Москва
inpt@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-129

Введение

Язык **Python** в последние годы завоевал большую популярность во многих областях научной деятельности и в прикладных разработках. Поэтому ему уделяют большое внимание при преподавании программирования как в ВУЗах, так и в школах. При обучении программированию **Python** может быть или единственным, или одним из изучаемых языков программирования в зависимости от специфики того или иного учебного заведения, факультета, от будущей профессии студентов.

Python имеет существенную особенность — динамическую типизацию переменных, при которой переменные получают свой тип по первому присвоению им конкретного значения, а не из описания переменных. Эта особенность вызывает существенные проблемы в нескольких ситуациях.

Проблема №1. В случаях, когда **Python** является единственным изучаемым языком программирования, при обучении программированию на языке **Python** обучаемые могут или не вполне, или совсем не усвоить принципиальное отличие этих переменных друг от друга: совершенно различное отношение целочисленных и вещественных переменных по отношению к вычислительным погрешностям.

Эта проблема будет особенно актуальной в ВУЗах, где с учетом будущей профессии обучаемых, **Python** будет единственным изучаемым языком программирования.

Проблема №2. При написании разработчиками программ с большим количеством операторов. В этом случае можно случайно утратить контроль над типами переменных, изменивших свой первоначальный тип в результате переприсвоений. При интерпретации кода компьютер не среагирует на ошибку. Таким образом, значительно усложняется поиск смысловых ошибок. Эта проблема особенно актуальна для студентов, являющихся будущими профессионалами в программировании. Но она также важна и для всех других студентов, изучающих только **Python**, и для школьников.

Методология и результаты исследования

Некоторые из путей смягчения этих проблем были рассмотрены в [1,2].

Основная идея всех путей: уделить большее внимание кодам числовых переменных: целочисленных и вещественных. Акцентировать внимание на следующем.

— Целочисленные переменные не имеют погрешностей: точно отображают целые числа из математики, т.е. не имеют вычислительных погрешностей.

— Вещественные переменные практически всегда отображают действительные числа с погрешностями. При этом величина погрешности зависит от модуля отображаемого числа. Вещественные переменные повышают вычислительную погрешность при каждой элементарной операции.

— Есть и другие способы кодирования чисел, которые могут оказаться оптимальными для определенных совокупностей решаемых задач.

При обучении программированию эту идею предлагается реализовывать следующими путями.

Путь первый. *При мягкой реализации этого пути* целесообразно требовать от обучаемых программированию неукоснительно следовать при назначении имен переменным традиции, сложившейся у программистов в 1960-х годах. Целочисленные переменные должны начинаться с букв: **i, k, i, m, n**. Вещественные переменные — со всех остальных букв.

Этот мягкий тип реализации представляется необходимым использовать при любом обучении программированию всем языкам программирования (а не только **Python**) всех студентов (не зависимо от их будущей профессии), поскольку все профессионалы в программировании следуют этому правилу. При этом переменные модулей **decimal** и **fractions** могут начинаться с **dec_** и **fra_** соответственно.

Жесткая реализация первого пути подразумевает следующее: все имена целочисленных переменных начинать с буквы i, а имена всех вещественных переменных начинать с буквы f (по первым буквам их названия). Жесткая реализация не потребуется для обучаемых, которым потребуются модули **decimal** и **fractions** (см. ниже).

Такой жесткий подход целесообразен при изучении только **Python** (и других языков с подобной типизацией переменных, например **R**) студентами, для которых этот язык является единственным, и школьниками. Для таких обучаемых жесткая реализация первого пути представляется необходимой, поскольку сколько бы не говорить обучающимся о различии целочисленных и вещественных переменных по отношению к вычислительным погрешностям, они этого не усвоят. Это различие должно усваиваться только при написании программного кода для решения конкретных задач.

Для студентов, изучающих несколько языков, жесткий путь не нужен, т.к. они усвоят принципиальное различие в кодировании целых и действительных чисел при изучении других языков программирования, в которых будет необходимо описывать

переменные специальными операторами, и трансляторы будут жестко отслеживать правильное их использование в коде.

Путь второй. В **Python** есть две основные массивоподобные структуры кортежи (**tuple**) и списки (**list**), имеющие важную особенность. В любом из кортежей или списков могут храниться данные разных типов.

Но далеко не все задачи по обработке массивов требуют хранения в них переменных разных типов. Более того, по традиции в задачниках для ВУЗов и школ массивы имеют переменные одного типа.

Обратим внимание, в **Python** есть гораздо более подходящий инструмент для работы с массивоподобными структурами, хранящими один тип переменных — это традиционные массивы (**array**). Эти структуры требуют описывать тип переменных, которые будут храниться в этом конкретном массиве [3]. А именно числовые (их 10 видов) и знаковые. Массивы (**array**) не меняют свой тип «на лету», для них предусмотрены те же стандартные методы обработки, что для **list**. Массивы (**array**) хранятся в библиотеке **array**, входящей в ядро **Python**.

Массивы (**array**), как известно, не очень одобряются некоторыми профессиональными программистами на **Python**, т. к. они «не в стиле **Python**». Но нам представляется эта позиция не обоснованной при обучении программированию на **Python**. Хотя бы потому, что **array** обрабатываются быстрее, чем **list** и **tuple**, поскольку в ячейках **array** хранятся непосредственно элементы массива. А в **list** и **tuple** хранятся только ссылки на элементы, которые соотнесены с соответствующими ячейками.

Использование массивов в коде, а не списков имеет ряд методологических преимуществ. Во-первых, используя массивы **Python** вместо кортежей и списков, у преподавателя возникает возможность показать на практике важность обоснованного выбора типа числовых переменных с точки зрения оптимизации кода на быстродействие с учётом требуемой точности получаемых выходных данных. Во-вторых, после работы с **array** обучающиеся неизбежно будут внимательнее относиться и к именам простых числовых переменных **Python**.

Путь третий. Для подчёркивания особенностей кодирования в компьютере целых и рациональных чисел целесообразно обратить внимание обучающихся, что в **Python** предусмотрены две стандартные функции для суммирования переменных: **sum()** — для суммирования целочисленных переменных, и **fsum()** — для суммирования вещественных переменных, поскольку **fsum()** повышает точность суммирования вещественных переменных за счёт оптимизации порядка их сложения.

Путь четвёртый. Представляется необходимым уделить внимание специальной функции **Python** для сравнения вещественных переменных на близость — **isclose()** [4].

Общее правило гласит, что вещественные переменные должны сравниваться на близость [5], т.е. модуль разности сравниваемых переменных не должен превышать заданный допуск, диктуемый постановкой прикладной задачи. Т.е. прописной истиной является следующее сравнение вещественных переменных (здесь и ниже мы даем имена переменным в соответствии с рекомендацией, изложенной выше):

abs(f_a — f_b) <= feps (1)

Вопрос остаётся за «малым»: как правильно задать величину **feps**, исходя из требуемой точности выходных данных задачи? Общеизвестно, что в общем случае:

feps = eps_компьютерные_составляющие_погрешности + eps_смысла_задачи

Даже для решения чисто учебных задач на программирование (где отсутствует **eps_смысла_задачи**) определение **eps** не является тривиальной задачей, поскольку погрешность кодирования действительных чисел зависит от величины модуля этих чисел. Для реальных прикладных задач определение **eps** является значительно более

сложной задачей, смыкающейся с теориями моделирования и численных методов вычисления.

Другое слагаемое **eps_компьютерные_составляющие_погрешности** — состоит из нескольких частей:

— погрешностей кодирования вещественных переменных при их вводе в компьютер (зависит от модуля кодируемых действительных чисел);

— вычислительных погрешностей элементарных операций;

— погрешностей алгоритмов, применяемых в программе.

Ориентируясь на эти составляющие, влияющие на целесообразное для конкретной решаемой задачи значение **feps**, разработчики программ могут самостоятельно разработать собственный алгоритм сравнения на близость кодов вещественных переменных для того или иного языка программирования.

Однако, **Python** уже содержит в своем ядре в модуле **math,** а также в пакетах **numpy и pytest** очень развитый инструмент для сравнения на близость кодов вещественных переменных — стандартную функцию **isclose(),** которая возвращает **True**, если сравниваемые переменные близки с учётом факторов, необходимых разработчику для решения конкретной задачи.

В [6] указан алгоритм, по которому работает функция:

abs(fa — fb) <= max(rel_tol * max(abs(fa), abs(fb)), abs_tol) (2)

Из (2) видно, что в **isclose()** решение о близости принимается при сравнении на максимум двух составляющих формулы: **rel_tol * max(abs(fa),abs(fb))** — компьютерной составляющей понятия «близость переменных» и **abs_tol —** абсолютного значения понятия «близость переменных». Т.е. абсолютное значение близости переменных, которое следует из «физического смысла» прикладной задачи, может привести к отсутствию необходимости учёта компьютерных составляющих погрешности. Это может иметь место на определенных этапах работы алгоритма по решению заданной прикладной задачи. Но в этой же задаче на других этапах работы алгоритма может возникнуть необходимость учёта компьютерных составляющих погрешности. Тогда значение **abs_tol** может быть или соизмеримым с компьютерными погрешностями, или совсем отсутствовать, т. к. параметр **abs_tol** не является обязательным. Очевидно, что в задачах чисто учебных на программирование параметр **abs_tol** будет отсутствовать.

Посмотрим повнимательнее на первую составляющую формулы (2): **rel_tol*max(abs(fa),abs(fb)).** Эта составляющая позволяет учитывать изменение погрешности представления вещественных переменных в компьютере в зависимости от абсолютного значения моделируемого в переменной числа. Известно, что чем больше это абсолютное значение, тем больше будет погрешность. Поэтому и выбирается максимальное из **abs(fa) и abs(fb)** для последующего сравнения в (2). Параметр **rel_tol** переводит найденный максимум на уровень погрешностей кодирования вещественных переменных. Параметр **rel_tol** имеет значение по умолчанию (1e-9). Но программист может задать и собственное значение параметру **rel_tol**, учитывая с диапазон вещественных переменных, в котором будет работать его программа. Но, в любом случае, **rel_tol** — это константа. Можно, конечно, помечтать, чтобы функция **isclose()** сама подбирала бы оптимальное значение **rel_tol** в зависимости от диапазонов fa и fb, с которыми она вызвана. Но даже и в этой реализации функция **isclose()** является самым тонким инструментом сравнения вещественных переменных, которые можно обнаружить в других языках программирования.

Аналог функции **isclose()** можно найти в языке программирования **R** — **near()**. Но эта функция имеет только один параметр, задающий порог сравнения или по

умолчанию, или по желанию пользователей. Т.е. этот параметр функции **near()** аналогичен по функционалу параметру **rel_tol в isclose().** Но в функцию **near()** нет возможности внести физический смысл задачи, поскольку в ней отсутствует аналог параметра **abs_tol в isclose().**

Таким образом, мы видим, что в функции **isclose()** предусмотрены все факторы, которые целесообразно учитывать при сравнении вещественных переменных с учётом постановки конкретной задачи. Следовательно, этой функции целесообразно уделить особое внимание при подготовке студентов к инженерной и научной деятельностей, показывая тесную взаимосвязь в цепочке: постановка реальной задачи — математическая модель — использованные численные методы — код программы.

Очевидно, что об этой функции не следует забывать при обучении программированию на **Python** на любом уровне, акцентируя внимание обучаемых и на необходимости учёта реальной задачи при программировании, и на особенностях представления в компьютере целочисленных и вещественных переменных.

Рассмотренные выше пути не требуют дополнительных временных затрат на обучение, поэтому их представляется необходимым использовать при любом учебном графике. Далее мы упомянем пути, которые позволяют акцентировать внимание обучаемых на необходимости внимательного отношения к выбору способа кодирования числовых переменных Эти пути требуют значительных временных затрат на обучение, но при определённых требуемых уровнях подготовки обучаемых эти пути тоже могут стать обязательными.

Путь пятый. В **Python** есть модуль **decimal** стандартной библиотеки **Python** [7], предоставляющий возможность работать с действительными числами, представленными десятичными дробями с фиксированным количеством знаков после запятой. Очевидно, что при решении прикладных задач такая необходимость возникает очень часто. Все числа в модуле кодируются как экземпляры класса **Decimal** модуля **decimal.** Это еще один тип представления числовых переменных в **Python**. Соответственно, учитывая рассмотренный выше путь 1, имена переменных (экземпляров класса **Decimal**) представляется необходимым начинать с буквы **d**. Оговоримся, что, строго говоря в **Python** все переменные являются экземплярами соответствующих классов, но мы используем традиционную терминологию и для преемственности, и для краткости текста. В кодах рациональных чисел в классе **Decimal** происходит округление десятичных дробей и вверх, и вниз, обеспечивая заданное разработчиком программы количество цифр после запятой.

Путь шестой. В стандартной библиотеке **Python** есть модуль, позволяющий проводить арифметические операции над действительными числами, представленными обыкновенными дробями. Это модуль **fractions** [8]. В переменных этого модуля обыкновенные дроби представляются оптимально (происходит автоматическая минимизация знаменателей), поддерживаются все арифметические операции. Возможности этого модуля будут тоже полезными во многих задачах, требующих высокой точности вычислений.

Однако надо отметить, что использование переменных модулей **decimal** и **fractions** может потребовать от программиста при решении конкретных задач значительных дополнительных временных затрат на программирование, поскольку стандартные функции числовых методов ориентируются по традиции на целочисленные и вещественные переменные.

Заключение

В статье мы рассмотрели несколько путей, позволяющих акцентировать внимание обучаемых на необходимости внимательного отношения к выбору и описанию числовых переменных в зависимости от особенностей решаемых задач. В зависимости

от требуемого итогового уровня подготовки будущих специалистов и от располагаемого времени на обучение некоторые из рассмотренных нами путей представляются нам обязательными, а некоторые — желательными.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Птицын, В. А. Алгоритмизация и программирование на Python: базовые навыки, оптимизация кода, методика преподавания. Часть 1 / В. А. Птицын; Министерство образования Московской области, Московский государственный областной университет, Физико-математический факультет. - Москва: МГОУ, 2021. - 121 с.: ил., табл., цв. ил. - ISBN 978-5-7017-3305-1.
2. Птицын В. А., Птицына Е. В. Возможные пути смягчения недостатка языка Python как базового при изучении основ алгоритмизации и программирования в школах // Современные информационные технологии в образовании (СИТО-2025): материалы IX Всероссийской научно-методической конференции (Москва, 18—21 ноября 2025 г.). - М.: ГУП, 2025. - С. 103-108.
3. Хеллман Д. С. Стандартная библиотека Python 3: справочник с примерами / пер. с англ. - СПб.: Диалектика, 2018. - 1376 с.
4. Хеллман Д. С. Стандартная библиотека Python 3: справочник с примерами…
5. Макконнелл С. Совершенный код. Мастер-класс / пер. с англ. - М.: Русская Редакция; СПб.: Питер, 2007. - 896 с.
6. Хеллман Д. С. Стандартная библиотека Python 3: справочник с примерами…
7. Хеллман Д. С. Стандартная библиотека Python 3: справочник с примерами…
8. Хеллман Д. С. Стандартная библиотека Python 3: справочник с примерами…

***Vladimir A. Ptitsyn*,**
Senior lecturer, State University of Education, Moscow
vl_pt@mail.ru
***Inga V. Ptitsyna*,**
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
inpt@mail.ru

Peculiarities of teaching the topic "numerical variables" when teaching the Python programming language

Annotation. The **Python** programming language has gained great popularity in many fields of scientific activity and in applied developments. It has a special feature in terms of the need for students to master an important topic, namely working with number codes, dynamic variable typing. Several ways to take this feature into account when learning **Python** are being considered. Naming variables based on their types. Using the array data type, using the isclose() proximity comparison method for real variables, summation using the sum() and fsum() functions, using the decimal and fractions module variables.

Keywords: Python, programming, learning programming, dynamic typing of variables, types of numeric variables.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И РОЛЬ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОСВОЕНИИ ТЕМЫ

Аннотация

В статье рассматривается одна из задач математического анализа нахождение площади фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат. В данной статье рассматривается геометрический смысл определенного интеграла, как фундаментального понятия математического анализа, необходимого студентами технических и естественнонаучных специальностей. Рассмотрение данного вопроса представляется целесообразным, так как нахождение определенного интеграла имеет множество межпредметных связей. Целью статьи является разбор решения одного задания на нахождения площади фигуры, ограниченной линиями в полярной системе координат. Приведено классическое решение задания и решение с использование искусственного интеллекта, описаны достоинства и недостатки использования искусственного интеллекта. Статья может быть полезна преподавателям технических университетов и студентам.

Ключевые слова

определенный интеграл, геометрический смысл, математический анализ, визуализация, ИИ-интструменты

АВТОРЫ

Скосарева Екатерина Петровна,
старший преподаватель ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
старший преподаватель АНО ВО «Московский университет «Синергия», г. Москва.
ekaterina-skosareva@rambler.ru

Федоров Матвей Максимович,
студент АНО ВО «Московский университет «Синергия», г. Москва
nono.r20@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-135

Введение

Для студентов технических специальностей младших курсов, как показывает практика, огромную сложность вызывают задачи на нахождение геометрического смысла определенного интеграла: нахождение площадей криволинейных трапеций, длин дуг кривой, объем тела вращения, площадь поверхности вращений и т.д. Физика является наиболее тесно связанной с вычислением определенного интеграла дисциплиной. Нахождение определенного интеграла имеет физический смысл, можно находить: пройденный путь, работа переменной силы, масса стержня переменной плотности, давление на дно сосуда, работу электрического тока, статистические моменты и центр тяжести плоской фигуры, количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за заданный промежуток времени. А также экономические задачи на нахождение объема произведенной продукции, анализ социально-экономических показателей. А также в биологии (распространение эпидемий), химия (скорости химических реакций), география и геофизика (расчет

масс горных пород, средних значений климатических показателей), информатика (анализ сложности алгоритмов).

Таким образом, умение находить определенный интеграл неразрывно связано с пониманием того, что оно представляет собой площадь, геометрический смысл является ключевым для его применения в различных областях науки и техники.

С развитием повсеместного использования ИИ инструменты для автоматического вычисления интегралов стали доступнее как никогда. ИИ способен с высокой скоростью и точностью считать определенные интегралы, превосходя человеческие возможности и в скорости, и в предотвращения вычислительных ошибок. Внедрение искусственного интеллекта в образовательную сферу открывает перед преподавателями, ученикам и администрацией образовательного учреждения новые горизонты, способствуя повышению качества и эффективности обучения, [1, с.131].

Методология и результаты исследования

На практических занятиях по математическому анализу МГТУ им. Баумана рассматриваются различные задания по математическому анализу, где необходимо вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями в полярной и декартовой системе координат.

Рассмотрим следующую задачу, представленную в задачнике Ефимова А. В., Демидовича Б. П. [2, с.156]:

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho = 2(1 + \cos\phi)$ и $\rho = 1$ и расположенной внутри каждой из них.

Построим графики линий в полярной системе координат.

$\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ - кардиоида. Для построения данной линии, воспользуемся таблицей значений, в которой представлены: ρ — полярное расстояние (радиус-вектор) от начала координат до точки кривой; φ — полярный угол (угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором).

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	4	3,732	3,414	3	2	1	0,586	0,268	0	0,268	0,586	1	2	3	3,414	3,732	4

$\rho = 1$- окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Строим линии в одной полярной системе координат, см. рис.1.

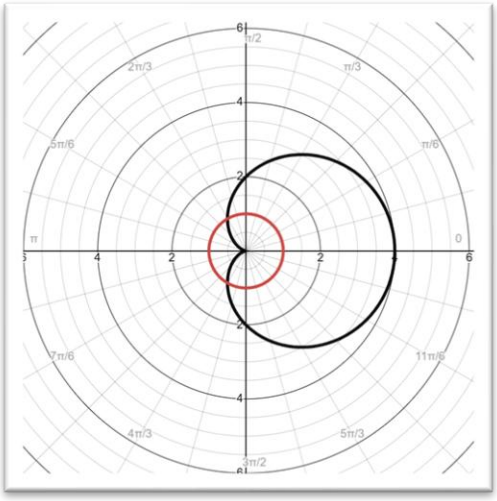

Рис. 1. Графики кардиоиды и окружности в полярной системе координат

Найдем, при каких значениях угла φ линии будут пересекаться, для этого решим тригонометрическое уравнение:

$2(1+\cos\varphi)=1;$

$1+\cos\varphi=\frac{1}{2};$

$\cos\varphi=-\frac{1}{2};$

$$\begin{cases}\varphi_1=\frac{2\pi}{3}+2\pi n\\ \varphi_2=\frac{4\pi}{3}+2\pi n\end{cases},\ n\epsilon Z$$

S_1

Покажем на рисунке углы $\varphi_1=\frac{2\pi}{3}$ и $\varphi_2=\frac{4\pi}{3}$, заштрихуем данную область, см. рис.2.

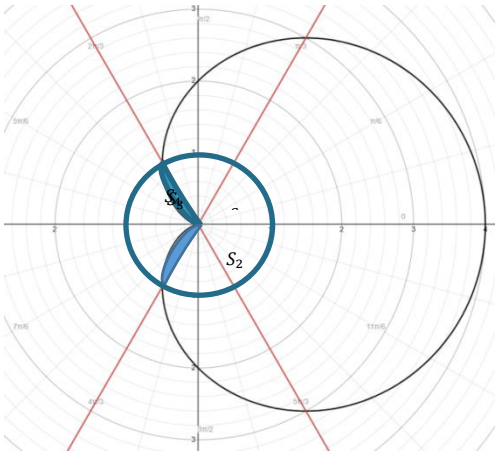

Рис. 2. Искомая область

Для нахождения площади искомой области воспользуемся формулой из учебника Пискунова Н.С. [3, с.308]:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

$S_1+S_2=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}1d\varphi=\varphi\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}$. Пояснение: это сектор круга радиуса 1 с углом $\frac{2\pi}{3}$

$$S_3+S_4=2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}4(1+\cos\varphi)^2d\varphi=4\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=4\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos\varphi^2)d\varphi$$

$$=4\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=4\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\cos2\varphi\right)d\varphi=(6\varphi+8\sin\varphi+\sin2\varphi)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=6\pi-6\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$-8\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}=2\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8\sqrt{3}}{2}=2\pi-\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=2\pi-\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ед^2.

Далее в статье рассмотрим решение данной задачи с использованием *ИИ*-инструментов. Искусственный интеллект (ИИ) может решать определённые

интегралы в полярной системе координат, используя алгоритмы, обученные на больших объёмах данных математических задач и их решений. Такие системы анализируют структуру уравнений, применяют подходящие методы интеграции и предоставляют результаты. Рассмотрим на примере китайской нейросети DeepSeek.

В начале 2025 года китайская компания DeepSeek выпустила нейросеть, которая за пару дней стала одной из самых популярных в мире. Ученые Popenici S.A., Kerr S. Указывают, что компания разработала свою модель искусственного интеллекта с затратами около 6 млн долларов США при использовании всего 2048 чипов NVIDIA. Это намного меньше, чем у западных аналогов, — GPT-4 от OpenAI, где затраты превышают 100 млн долларов. [4, с.16].

Главным минусом при анализе решения данной задачи нейросетью DeepSeek является отсутствие графической иллюстрации, без визуализации невозможно представить область для которой необходимо найти площадь. Нейросеть пока плохо справляются с задачами, требующими пространственного мышления и визуализации. [5, с.639].

Решение задачи разбито по шагам: 1. Определение кривых; 2. Определение границ по ϕ; 3. Площадь в полярных координатах; 4. Полная площадь. Ответ. Аналитическое решение, представленное ИИ верно, см.рис.3.

Проанализировав решение не только данной задачи, а также и других заданий по теме геометрический смысл вычисления определенного интеграла можно сделать вывод, что нейросеть решает задачи с точностью 90%, ошибки есть в нестандартных или очень сложных случаях алгоритмы могут давать неправильные решения из-за особенностей их программирования. Иногда нейросеть неясно понимает контекст задачи, что может привести к ошибкам. ИИ опирается на заранее обученные данные, а значит, может ошибаться, если столкнётся с новой или уникальной задачей. Результаты необходимо проверять вручную или консультироваться с профессионалами.

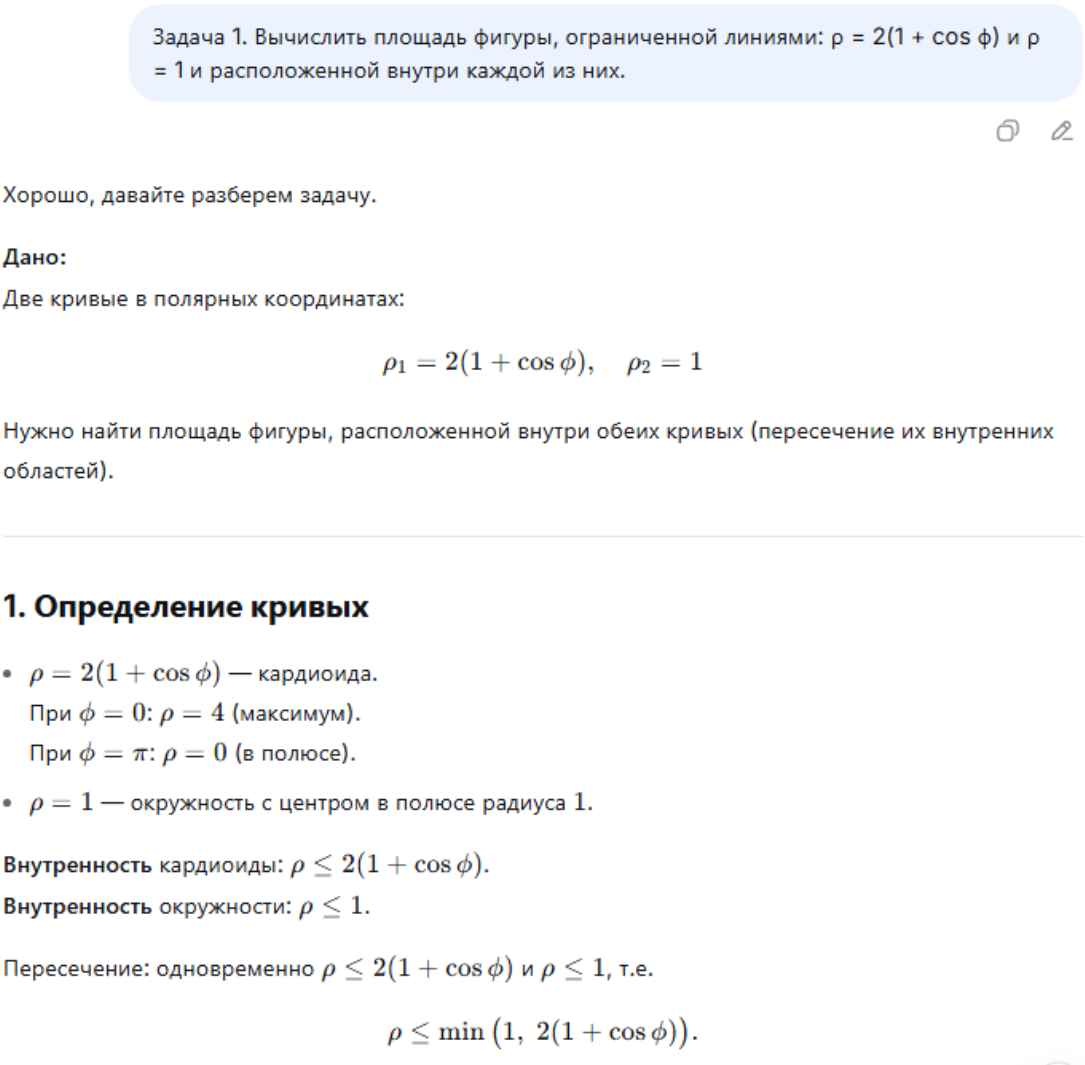

Рис.3. Решение в DeepSeek

Таким образом, ИИ может быть эффективным инструментом для решения интегралов в полярных координатах, но его точность и возможности зависят от сложности задачи и качества обучения модели.

Заключение

В современном мире, где искусственный интеллект стремительно развивается, вопрос о самостоятельном нахождении определенного интеграла становится все более актуальным Нахождение определённого интеграла – это не только математические вычисления и операции. Междисциплинарные связи демонстрируют важность для современного научного и инженерного образования. Понимание различных применений интеграла помогает студентам глубже увидеть красоту математического анализа. Инструменты ИИ значительно облегчает задачу вычисления определенного интеграл, но отменяет необходимости фундаментальных знаний по математическому анализу. Слепое доверие результатам задачи, решенной с помощью ИИ опасно, пользователь должен уметь ставить под сомнение полученный ИИ результат. Умение считать интегралы вручную – это просто механический навык, использованию конкретных формул, а ключ понимания процессов, происходящих в жизни, эффективному использованию инструментов и развитию математических способностей, логического мышления, интуиции. Эти качества не заменяются ИИ, а

лишь дополняются. Для студентов и учащихся, освоение знаний математического анализа - фундамент, на котором строится освоение других дисциплин. Использование ИИ на этом этапе может быть вредным и бесполезным.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Королев М.А. Применение технологий искусственного интеллекта в высшем образовании: перспективы и вызовы// Высшее образование в России. – 2020. –Т.29, №2. – С.131-139. - URL: https://www.elibrary.ru/item.aps (дата обращения 15.05.2006).
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для студ. вузов /Б.П. Демидович, В.А.Маряровский, Е.З. Положитьман. –10-е изд., стер. – М.: АСТ; Астрель,2003.–623с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов: в2т.–13-е изд., перераб.–М.:Интеграл-Пресс,2004. – Т.1. – 416 с.
4. Popenici S.A., Kerr S. Exploring the impact of artificial intelligence on teaching and learning in higher education// Research and Practice in Technology Enhanced Learning. –2017.– Vol.12, no.1. –P.22. DOL:10.1186/s41039-017-0062-8.
5. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. 8th Edition. Cengage Learning, 2015. –1336 p.

***Ekaterina P. Skosareva*,**
Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University; Senior Lecturer, Moscow University "Synergy", Moscow.
ekaterina-skosareva@rambler.ru
***Matvey M. Fedorov*,**
Student, Moscow University "Synergy", Moscow.
nono.r20@mail.ru

Geometric sense of a definite integral and the role of artificial intelligence in mastering the topic.

Abstract. The article discusses one of the problems of mathematical analysis, finding the area of a figure bounded by lines in a polar coordinate system. This article examines the geometric sense of a definite integral as a fundamental concept of mathematical analysis, which is necessary for students of technical and natural science specialties. It is considered appropriate to address this issue, as finding a definite integral has many interdisciplinary connections. The purpose of this article is to analyze the solution of a task on finding the area of a figure bounded by lines in a polar coordinate system. The article provides a classical solution to the problem and a solution using artificial intelligence, and describes the advantages and disadvantages of using artificial intelligence. The article may be useful for teachers of technical universities and students.

Keywords: definite integral, geometric meaning, mathematical analysis, visualization, AI tools.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ НА ТЕМУ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

Аннотация

Умение вычислять неопределенные интегралы является одной из важных компетенций студентов инженерных специальностей вузов. Цель данной работы – помочь в формирование у студентов навыков интегрирования некоторых иррациональных функций. Для этого в работе рассмотрены различные методы интегрирования, приведены многочисленные примеры, даны ценные указания. Материалы статьи могут быть полезными преподавателям при подготовке к проведению практических занятий по данному разделу математического анализа.

Ключевые слова

методические особенности преподавания отдельных вопросов высшей математики, неопределенный интеграл, иррациональные функции

АВТОРЫ

Хасанов Наиль Алфатович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
nail_khasanov@mail.ru

Вергазова Ольга Бухтияровна,
кандидат философских наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва
vergazova@bmstu.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-141

Введение

Одним из важных навыков для студента, приобретаемого в процессе изучения математического анализа, является навык нахождения неопределенных интегралов. Понятие неопределенного интеграла является одним из основных математических понятий, поскольку имеет различные геометрические приложения, применяется для решений дифференциальных уравнений, задач механики, а также многих физических задач.

Интегрирование функций, содержащих радикалы, является важной частью темы нахождение неопределенных интегралов, поскольку изучение дальнейших разделов математического анализа и других предметов высшей математики подразумевает наличие у студентов умения интегрировать некоторые виды иррациональных функций. Такие знания пригодятся, например, при решении многих геометрических и физических прикладных задач, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Поэтому для преподавателя возникает методическая задача грамотно выстроить семинарское занятие на эту тему. Достаточно подробное изложение этой теории можно найти в учебниках В.А. Зорича [1] и Н.С. Пискунова [2],

а примеры задач, в том числе с решениями, – в учебниках Б.П. Демидовича [3] и И.А. Виноградовой [4].

Целью данной работы является обсуждение методики проведения семинара по теме «интегрирование некоторых иррациональных функций». В работе рассматриваются основные типы функций, содержащих радикалы, которые имеют элементарные первообразные, а также эффективные и рациональные способы нахождения этих первообразных. Приводятся многочисленные примеры, подробно разбираются основные типы заданий.

Работа будет полезна преподавателям вузов для подготовки к семинарам по этому разделу математического анализа, а также студентам, желающим самостоятельно разобраться в способах решения задач по рассматриваемой теме.

Методология и результаты исследования

Многие функции иррациональных аргументов не имеют элементарных первообразных, например, $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$ или $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$. Поэтому следует выделять классы интегрируемых иррациональных функций.

1. Интегралы вида $\int R(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_n})dx$, где $R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - рациональная функция своих аргументов, $m_1, \ldots, m_n$ - рациональные числа, вычисляются с помощью подстановки $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^{\kappa}$, где κ - общий знаменатель рациональных чисел $m_1, \ldots, m_n$, при помощи которой приводятся к интегралам от рациональной дроби, которые всегда имеют элементарные первообразные. Интегрирование рациональных дробей подробно описано в работе Иванкова П.Л. [5].

Пример 1. Вычислим $\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x+2}+1)\sqrt{x+2}}\,dx$.

Имеем:

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x+2}+1)\sqrt{x+2}}\,dx = \left|\begin{matrix} x+2=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{matrix}\right| = \int \frac{6t^5dt}{(t^2+1)t^3} = 6\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 6\int (1-\frac{1}{t^2+1})dt =$$

$$6t - 6\,arctg\ t + C = 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ arctg\ \sqrt[6]{x+2} + C.$$

Пример 2. Вычислим $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$.

Производим подстановку $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=t^3$, тогда $x-1=\frac{2}{t^3-1}$, $dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$. Откуда получаем:

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3} = -6\int t\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^3 \frac{t^2}{(t^3-1)^2}dt = -\frac{3}{4}\int (t^6-t^3)dt = -\frac{3}{28}t^7 + \frac{3}{16}t^4 + C =$$

$$= \frac{3}{16}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{28}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{7}{3}} + C$$

2. Для нахождения интегралов вида $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, где $R(x, y)$ - рациональная функция своих аргументов, можно использовать тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$, тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$. Вследствие чего получаем интеграл $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx = a\int R(a\sin t, a\cos t)\cos t dt$, который имеет первообразную, поскольку является интегралом от рациональной функции тригонометрических аргументов. Интегрирование тригонометрических функций подробно описано в работе Хасанова Н.А. [6].

Пример 3. Вычислим $\int\sqrt{(4-x^2)^3}dx$.

Имеем:

$$\int\sqrt{(4-x^2)^3}dx = \left|\begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \end{matrix}\right| = 2\int(2\cos t)^3\cos t dt = 16\int\cos^4 t dt = 4\int(1+\cos 2t)^2 dt = .$$

$$= 4\int(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}(1+\cos 4t))dt = 6t+4\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 4t+C = 6\arcsin\frac{x}{2}+4\sin(2\arcsin\frac{x}{2})+$$

$$+\frac{1}{2}\sin(4\arcsin\frac{x}{2})+C = 6\arcsin\frac{x}{2}+2x\sqrt{4-x^2}+\frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2}+C .$$

3. Для нахождения интегралов вида $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$, где $R(x, y)$ - рациональная функция своих аргументов, можно использовать тригонометрическую подстановку $x = a\ tgt$, тогда $\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}$, $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$. Вследствие чего получаем интеграл $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx = a\int R(a\ tgt, \frac{a}{\cos t})\frac{1}{\cos^2 t}dt$, который имеет первообразную, поскольку является интегралом от рациональной функции тригонометрических аргументов.

Пример 4. Вычислим $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

Имеем:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}} = |x = tgt| = \int tg^2t\ \cos^5 t\ \frac{dt}{\cos^2 t} = \int\sin^2 t\cos t\ dt = \int\sin^2 t\ d\sin t = \frac{1}{3}\sin^3 t+C =$$

.

$$= \frac{1}{3}\sin^3(arctg\ t)+C = \frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+C$$

4. Для нахождения интегралов вида $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$, где $R(x, y)$ - рациональная функция своих аргументов, можно использовать тригонометрическую подстановку $x = \frac{a}{\sin t}$, тогда $\sqrt{x^2-a^2} = a\ ctgt$, $dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$. Вследствие чего получаем интеграл $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx = -a\int R(\frac{a}{\cos t}, a\ ctgt)\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$, который имеет

первообразную, поскольку является интегралом от рациональной функции тригонометрических аргументов.

Пример 5. Вычислим $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

Имеем:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx = \left|x = \frac{1}{\sin t}\right| = -\int ctg\ t\ \sin^2 t\ \frac{\cos t}{\sin^2 t}\ dt = -\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = \int (\sin t - \frac{1}{\sin t})dt = -\cos t -$$

$$-\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C = -\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \ln\left|tg(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x}) + C\right|.$$

5. Для нахождения интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где $R(x, y)$ - рациональная функция своих аргументов, можно выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой $u = x + \frac{b}{2a}$ привести исходный интеграл к одному из трех ранее изученных видов $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$ или $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$.

Пример 6. Вычислим $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}dx$.

Имеем:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}dx = \left|\begin{matrix}u = x+2\\ dx = du\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{(u^2+3)^3}}du = \left|\begin{matrix}u = \sqrt{3}tgt\\ du = \frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t}\end{matrix}\right| = \sqrt{3}\int (\frac{\cos t}{\sqrt{3}})^3 \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}} + C = \frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} + C.$$

Можно также воспользоваться одной из подстановок Эйлера.

5.1. Если $a > 0$, то для нахождения интеграла $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ применяют подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$. Из последнего соотношения получаем выражение $x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$, $dx = \frac{2t(b-2\sqrt{a}\,t)+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}dt$. Интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}, \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t} + t)\frac{2t(b-2\sqrt{a}\,t)+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}dt$$

становится интегралом от рациональной дроби.

Пример 7. Вычислим $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Используем подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+x+1} = x + t$, $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$, $dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$.

Имеем $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}dx = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt$ - интеграл от рациональной дроби, который решается разложением дроби на простейшие.

$$2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right| - \frac{3}{4}\frac{1}{t-\frac{1}{2}} + C.$$

После обратной замены $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$ окончательно получаем:

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}dx = 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}\right| - \frac{3}{4(\sqrt{x^2+x+1}-x)-2} + C$$

5.2. Если $c>0$, то для нахождения интеграла $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можно применить подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$. Из последнего соотношения получаем выражение $x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$.

5.3. Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то для нахождения интеграла $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можно применить подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t$. Из последнего соотношения получаем выражение $x = \frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}$.

6. Для нахождения интегралов вида $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ нет необходимости производить тригонометрическую подстановку или подстановку Эйлера, поскольку он вычисляется непосредственным представлением в виде суммы табличных интегралов

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + (q-\frac{pb}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+bx+c}}.$$

Пример8. Вычислим $\int \frac{x-4}{\sqrt{1+4x-x^2}}dx$.

Имеем:

$$\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{1+4x-x^2}} = -\int \frac{(-x+2)dx}{\sqrt{1+4x-x^2}} - \int \frac{2dx}{\sqrt{1+4x-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+4x-x^2)}{\sqrt{1+4x-x^2}} - 2\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{5-(x-2)^2}} =$$

$$= -\sqrt{1+4x-x^2} - 2\arcsin(\frac{x-2}{\sqrt{5}}) + C.$$

В общем случае интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, представимы в виде:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Где коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования этого тождества.

Пример9. Вычислим $\int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

Имеем:

$$\int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Продифференцировав последнее равенство, получаем:

$$\frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Умножая обе части равенства на $\sqrt{x^2+4}$, получаем равенство многочленов:

$$x^4+3x^2 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+4) + Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем решение:

$A=\frac{1}{4}$, $B=0$, $C=\frac{3}{2}$, $D=0$, $\lambda=-6$. В итоге:

$$\int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x)\sqrt{x^2+4} - 6\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C.$$

7. Интегралы вида $\int \frac{1}{(px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ заменой $t=\frac{1}{px+q}$ сводится к интегралам вида $\int \frac{P_{n-1}(t)}{\sqrt{At^2+Bt+C}}dx$.

Пример10. Вычислим $\int \frac{1}{(x+2)^2\sqrt{5+x^2}}dx$.

Имеем:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{5+x^2}} = \left|\begin{matrix}\frac{1}{x+2}=t\\ x=\frac{1}{t}-2\end{matrix}\right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{5+(\frac{1}{t}-2)^2}} = -\int \frac{tdt}{t\sqrt{9-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{3}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9}}} =$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{d(t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9})}{\sqrt{t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9}}} - \frac{2}{27}\int \frac{d(t-\frac{2}{9})}{\sqrt{(t-\frac{2}{9})^2+\frac{5}{81}}} = -\frac{1}{3}\sqrt{t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9}} - \frac{2}{27}\ln\left|t-\frac{2}{9}+\sqrt{t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{5+x^2} - \frac{2}{27}\ln\left|\frac{1}{x+2}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\sqrt{5+x^2}\right| + C$$

8. Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n и p - рациональные числа, согласно условиям Чебышева имеют элементарные первообразные только в трех случаях:

8.1. Если p - целое число, здесь применяется подстановка $x=t^s$, где s - общий знаменатель чисел m и n;

8.2. Если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, здесь применяется подстановка $a+bx^n=t^k$, где k - знаменатель дроби p;

8.3. Если $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число, здесь применяется подстановка $ax^{-n}+b=t^k$.

Пример11. Вычислим $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Имеем:

$m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}=2$, следовательно, имеет место случай 8.2, используем подстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3dt$. Получаем:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int \frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}dt=12\int (t^6-t^3)dt=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+C.$$

Заключение

В работе подробно рассмотрены решения основных типов заданий, связанных с поиском неопределенных интегралов от функций, содержащих радикалы. Приведены примеры нахождения интегралов различной сложности, что позволяет преподавателю спланировать семинар по данной теме. Акцент также сделан на разнообразии рассмотренных задач, использовании различных подстановок и методов решения.

Изучение данной темы поможет учащимся лучше разобраться не только в этих задачах, но в остальных разделах математического анализа и других математических дисциплин.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. - М.: Изд-во МЦНМО, 2025, - 565 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб. пособие для втузов. Том 2. - М.: Интеграл-Пресс, 2001, - 544 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - М.: Изд-во Лань, 2025. - 624 с.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. Ч. 2. - М.: Изд-во МЦНМО, 2025, - 335 с.
5. Иванков П.Л., Обухов В.П. Интегрирование рациональных дробей и некоторые связанные с этим методические проблемы// Modern European Researches, 2022. - Т. 1, № 1. - P. 89-95.
6. Хасанов Н.А., Бирюков О.Н. Методические аспекты проведения занятий на тему «интегрирование тригонометрических функций»// Modern European Researches, 2024. - Т. 1, № 1. - P. 154-159.

Nail A. Khasanov.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
nail_khasanov@mail.ru
Olga B. Vergazova,
Candidate of Philosophical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, Moscow
vergazova@bmstu.ru

Methodological aspects of conducting classes on the topic "integration of some irrational functions"

Abstract. The ability to calculate indefinite integrals is one of the important competencies of university engineering students. The purpose of this work is to help develop students' skills in integrating some irrational functions. For this purpose, the work examines various methods of integration, provides numerous

examples, and gives valuable instructions. The materials in the article may be useful for teachers in preparing for practical classes in this area of mathematical analysis.
Keyword: methodological features of teaching certain issues of higher mathematics, indefinite integral, irrational functions.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аннотация

В статье обсуждается методика преподавания кратных, криволинейных и поверхностных интегралов студентам технических университетов. Рассмотрение данного вопроса представляется важным и актуальным, так как данный раздел математики является обязательным для изучения всеми студентами инженерных специальностей. Целью статьи является обсуждение определения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Представлена схема введения данных понятий. Статья может быть полезна преподавателям технических университетов и студентам.

Ключевые слова

двойной интеграл, тройной интеграл, криволинейный интеграл, поверхностный интеграл

АВТОРЫ

Хорькова Нина Григорьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
ninakhorkova@bmstu.ru

Власов Павел Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», г. Москва
pvlx@mail.ru

DOI: 10.24412/2311-8806-2026-1-1-149

Введение

Образовательные программы по различным направлениям подготовки студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана предполагают изучение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов всеми студентами второго курса инженерных специальностей. Количество часов, выделяемых программами на изучение данного раздела математики, зависит от того, на каком факультете и по какой специальности обучается студент. Так, например, для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», читается отдельный семестровый курс, тогда как студенты факультетов «Специальное машиностроение», «Информатика и управление» и многих других изучают данную дисциплину в рамках одного модуля объёмом до 34 аудиторных часов, который включается в дисциплины, носящие разные названия. Например, студенты факультета «Специальное машиностроение», изучают дисциплину «Кратные интегралы, теория поля, ряды», а студенты кафедры ИУ3 факультета «Информатика и управление» – «Кратные интегралы, ряды, теория функций комплексной переменной».

В данной работе будут обсуждаться сокращенные варианты курса для студентов факультетов «Специальное машиностроение» и «Информатика и управление».

Базовым учебником для студентов нашего университета является учебник Гаврилова В.Р., Ивановой Е.Е. и Морозовой В.Д. [1], изданный в серии «Математика в техническом университете». Этот учебник позволяет изучать кратные, криволинейные и поверхностные интегралы как студентам, обучающимся на математических кафедрах факультета ФН, так и студентам инженерных специальностей. Календарные планы по данным дисциплинам предлагают студентам познакомиться и с другими классическими учебниками, например, с учебниками Пискунова Н.С. [2], Бугрова Я.С. и Никольского С.М. [3], Кудрявцева Л.Д. [4], Ильина В.А. и Позняка Э.Г. [5], Фихтенгольца Г.М. [6], Зорича В.А. [7]. Для проведения семинаров используются классический задачник Б.П. Демидовича [8] и задачник под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. [9].

Методология и результаты исследования

На изучение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов программами выделяется от 16 до 34 аудиторных часов (суммарно лекционных и семинарских занятий). Главная проблема всех рассматриваемых дисциплин – малое число учебных часов. Поэтому на некоторых специальностях факультета ИУ отказываются от изучения поверхностных интегралов. Ранее на факультете СМ при изучении темы криволинейных и поверхностных интегралов не рассматривали подробно интегралы первого рода. Но программа курса физики и других технических дисциплин для многих специальностей требует наличия подобных знаний у студентов. С методической точки зрения при преподавании математической дисциплины требуется системный подход. Поэтому предполагается логичным вводить понятия всех интегралов, которые понадобятся студентам при изучении других дисциплин. Это двойные и тройные интегралы, криволинейные интегралы первого и второго рода, поверхностные интегралы первого и второго рода. На определение шести видов интегралов требуется много лекционного времени. В данной статье предлагается единый шаблон для определения перечисленных интегралов, который позволяет студентам систематизировать знания, а лектору сократить время, затрачиваемое на введение этих понятий. Для студентов, активно участвующих в учебном процессе, обычно бывает достаточно рассмотреть подробно по данному шаблону определение двойного интеграла. Далее такие студенты готовы «подсказывать» лектору определения, связанные с интегралами других видов. Отметим также, что такой подход демонстрирует общность идеи, лежащей в основе понятий различных интегралов.

Прежде всего, при введении понятия любого интеграла надо определиться с «областью интегрирования» (область на плоскости или в пространстве, кривая, поверхность)– «по чему берется интеграл», и с объектом интегрирования – «от чего берется интеграл» (функция, векторное поле). С объектом интегрирования проблем не возникает, так как функции многих переменных и векторные поля представляют собой понятия, уже знакомые студентам. Что касается «области интегрирования», то приходится вводить дополнительные понятия, так как рассматриваемые интегралы существуют не для всех «областей интегрирования». Для двойных и тройных интегралов необходимо определить понятие измеримой (квадрируемой, кубируемой) области на плоскости или в пространстве, ввести понятие площади области на плоскости и объема области в пространстве (см., например, учебник Гаврилова В.Р., Ивановой Е.Е. Морозовой В.Д. [10]. При определении криволинейных и поверхностных интегралов требуется ввести специальный класс кривых и поверхностей в пространстве. Обычно рассматривают кусочно-гладкие кривые и поверхности. Представляется полезным предварительно познакомить студентов с общим понятием параметризованных кривых и поверхностей в пространстве, а также

с понятиями гладких кривых и поверхностей в пространстве. Эти понятия рассматриваются в учебных пособиях Хорьковой Н.Г [11] и [12]. Необходимо также ввести понятия длины кривой и площади поверхности. Основные понятия, связанные с «областью интегрирования», рассматриваются в начале изучения каждого вида интеграла.

Далее изучение каждого вида интеграла предлагается проводится по следующей схеме.

1. Разбор физических задач, приводящих к понятию интеграла.
2. Определение интеграла.
3. Свойства интеграла, включая теорему существования.
4. Методы вычисления интеграла.
5. Геометрические и физические приложения интеграла.

Все пункты данной программы за небольшим исключением излагаются без доказательства ввиду ограниченности часов, выделяемых на изучаемую дисциплину. Выбор теорем, подлежащих доказательству, остается за лектором и учитывает требования к подготовке студентов, обучающихся по конкретной специальности.

В данной статье будет подробно рассмотрен п.2. До формулировки определения интеграла необходимо ввести несколько понятий. Это понятия разбиения, диаметра множества, диаметра разбиения, набора точек, согласованного с разбиением, интегральной суммы. Рассмотрим эти понятия на примере двойного интеграла и укажем на особенности этих определений в случае других интегралов.

Пусть D – замкнутая ограниченная измеримая область на плоскости, функция двух переменных $f(x,y)$ определена и ограничена в области D.

Определение 1. *Разбиением* $\tau = \{D_1, \dots, D_n\}$ замкнутой ограниченной измеримой области D называется конечное число замкнутых ограниченных измеримых областей $D_1, \dots, D_n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. области $D_1, \dots, D_n$ не имеют общих внутренних точек;
2. $D_1 \cup \dots \cup D_n = D$.

Определение 2. *Диаметром множества* D называется число

$$d(D) = \sup\{d(A,B) \mid A, B \in D\}.$$

Определение 3. *Диаметром разбиения* называется число

$$d(\tau) = \max_i d(D_i).$$

Определение 4. Пусть $\tau = \{D_1, \dots, D_n\}$ – разбиение области D. Набор точек

$$\xi_\tau = \{(x_i, y_i) \mid (x_i, y_i) \in D_i, i = 1, \dots, n\}$$

называется набором точек, *согласованным с разбиением* τ.

Определение 5. Пусть $\tau = \{D_1, \dots, D_n\}$ – разбиение области D, ξ_τ – набор точек, согласованный с разбиением τ. Число

$$S_{\tau,\xi_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ S(D_i),$$

где $S(D)$ – площадь области D, называется *интегральной суммой функции* $f(x,y)$, соответствующей разбиению τ и набору точек ξ_τ .

Отметим, что данная последовательность предварительных определений принята во многих современных учебниках для технических вузов. Однако, в более старых пособиях, например, в задачнике Демидовича [13], автор при введении понятий двойного и тройного интегралов обходится без обсуждения измеримых областей и рассмотренных определений.

Далее определение двойного интеграла во многих учебных пособиях формулируется следующим образом: если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что диаметр разбиения стремится к нулю и этот предел не зависит от выбора последовательностей разбиений и наборов точек, то функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области D, а конечный предел – двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. Подобное определение будем называть «физическим». Какая проблема здесь обычно возникает? Дело в том, что большинство студентов технических вузов изучают только два вида пределов: предел числовой последовательности и предел функции (одной или нескольких переменных). Какой предел имеется ввиду выше? Конечно, мы понимаем, что это во многих случаях предел по базе. Но такой предел не изучается в большинстве курсов высшей математики для инженеров (и определение предела по базе отсутствует в ряде рекомендованных учебников). Выбор такого нестрогого определения двойного интеграла можно объяснить тем, что оно повторяет идею рассуждения при решении физической задачи, мотивирующей введение интеграла, и должно быть понятно студентам, обучающимся по инженерным специальностям. Но, по мнению авторов, в математических курсах определения основных понятий должны быть строгими. Предлагаем следующий выход из данной ситуации. В курсах математического анализа первого семестра изучаются два вида предела функции: по Коши и по Гейне, причем с доказательством их равносильности. Предлагается рассмотреть аналоги этих определений для кратных интегралов (без доказательства их равносильности). Недостаток такого подхода – довольно громоздкое первое определение, которое отличается от приводимых в рекомендованных учебниках. Но отметим, что, используя такой подход, во-первых, лектор формулирует корректное определение в рамках изучаемого курса, во-вторых, определение представляет собой шаблон, который можно использовать для определения остальных интегралов, в-третьих, кратко обсуждая данный вопрос, лектор стимулирует студентов задуматься о том, что пишут в учебниках. Например, в учебнике Гаврилова В.Р., Ивановой Е.Е. и Морозовой В.Д. [14] «физические» определения двойного и тройного интеграла объединяется с приводимым ниже определением II. Аналогичным образом, Иванков П.Л., Обухов В.П. в статье [15] после формулировки определения криволинейного интеграла первого рода уточняют понятие предела, использованного для введения этого интеграла. Авторы также полагают, что «включение этого определения в лекционный курс для студентов технического вуза не является обязательным, т. к. оно используется лишь в доказательствах, которые обычно не рассматриваются. При этом, однако, молчаливо предполагается, что обычные свойства предела (единственность предела, правила выполнения арифметических операций над пределами и т. п.) выполняются также и для этого нового вида предела» (цитируется по Иванков П.Л., Обухов В.П. [16], с.87). Подчеркнем еще раз нашу точку зрения: в математических курсах определения основных понятий должны быть строгими.

Приведем два варианта определения двойного интеграла. Первый вариант – аналог определения предела по Гейне – повторяет «физическое» определение интеграла с заменой предела по базе на предел числовой последовательности интегральных сумм. Отметим, что оба определения представляют собой шаблон, в котором надо лишь изменить название интеграла и его обозначение (также предварительно надо уточнить понятия разбиения, диаметра разбиения и вид интегральной суммы).

Определение I. Если для любой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$, удовлетворяющей условию $d(\tau_k) \to \infty$ при $k \to \infty$ и любых наборов точек ξ_{τ_k}, согласованных с разбиениями τ_k, существует конечный предел последовательности интегральных сумм

$$I = \lim_{k\to\infty} S_{\tau_k,\xi_{\tau_k}}(f)$$

и этот предел не зависит от выбора последовательностей разбиений и наборов точек, то функция $f(x,y)$ называется *интегрируемой в области* D, а число I – *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy\,.$$

Еще раз подчеркнем, что приведенное определение корректно в рамках курса математики, в котором не изучается предел по базе, так как используется понятие предела числовой последовательности интегральных сумм.

Определение II. Число I называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D, если для любого положительного числа ε найдется такое δ= δ(ε)>0, что для любого разбиения τ и любого набора точек ξ_τ выполняется неравенство

$$\left| I - S_{\tau,\xi_\tau}(f) \right| < \varepsilon.$$

При введении понятия тройного интеграла определения разбиения, диаметра множества, диаметра разбиения, набора точек, согласованного с разбиением, интегральной суммы повторяют аналогичные определения для двойного интеграла. Можно показать студентам и обсудить на лекции слайды, на которых производится сравнение этих понятий для двойного и тройного интеграла. Затем выдать студентам раздаточный материал по этой теме (а также и по свойствам тройного интеграла) с обязательным конспектированием студентами данных тем дома. Это позволит сократить время, затрачиваемое на лекции на изложение данной темы, без потери качества обучения.

При введении понятий криволинейных интегралов первого и второго рода потребуется уточнить определения разбиения и его диаметра (напомнив, что в сколь угодно малый круг можно поместить сколь угодно длинную кривую). Также, как правило приходится напоминать определение длины кривой (или формулу для ее вычисления), так как не во всех курсах математического анализа рассматриваются кривые в пространстве. При введении понятия криволинейного интеграла второго рода надо также отметить изменение объекта интегрирования: в данном случае интеграл берется от векторного поля. Далее определения формулируются по шаблонам с заменой площади на длину кривой и корректировкой обозначений в интегральной сумме и интеграле.

При введении понятий поверхностных интегралов первого и второго рода необходимо достаточное время выделить на изложение понятия гладкой поверхности и ее площади, кусочно-гладкой поверхности. Эти понятия необходимы для определения интеграла и в других курсах не рассматриваются. Затем также определяем разбиение поверхности и его диаметра (рассмотрев кратко, если позволит время, пример). Далее определения поверхностных интегралов

формулируются по шаблонам. Отметим также, что возможно также сведение определения поверхностного интеграла второго рода к первому.

Заключение

В работе представлена методика единого подхода к введению понятий двойных, тройных интегралов, криволинейных интегралов первого и второго рода, поверхностных интегралов первого и второго рода в рамках курса высшей математики для студентов инженерных специальностей технических университетов с учетом объёма часов, выделяемых на изучение дисциплины. При изучении данной темы от студентов требуются знания, которые относятся к разнообразным разделам математики. Различные виды множеств на плоскости и в пространстве (открытые, замкнутые, односвязные) изучаются в курсе функций нескольких переменных (на самом деле это начала топологии). Также студенты должны быть знакомы с дифференциальным исчислением скалярных и векторных функций нескольких переменных. Теория гладких кривых и поверхностей в пространстве относится к дифференциальной геометрии, элементы которой студенты инженерных специальностей изучают в курсе математического анализа. Учитывая важность данного раздела математики для других фундаментальных дисциплин, изучаемых студентами инженерных специальностей в соответствии с учебной программой, необходимо при возможности увеличить число часов на изучение данной темы.

ССЫЛКИ НА ИСТОЧНИКИ

1. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов – 3-е изд. – М.: Изд-во МГТУ, 2008. – 496 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. - Т. 2. - М.: «Наука», 1985. - 560 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа,1981. – 584с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: Ч.2.: Учеб. для вузов – 5-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.– 464 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. –М.: ГИФМЛ, 1960. – 656 с
7. Зорич В.А. Математический анализ. – т.2 – М.: АСТ, 2024 – 675 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: АСТ,2008. – 485 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа // Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 386 с.
10. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е. и Морозова В.Д. Указ. соч.
11. Хорькова Н.Г. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Кривые в пространстве. – М.: Изд-во МГТУ, 2017. – 68 с.
12. Хорькова Н.Г. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Поверхности в пространстве. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ, 2018. – 97 с.
13. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов Б.П. Демидович…
14. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е. и Морозова В.Д. Указ. соч.
15. Иванков П.Л., Обухов В.П. Методика преподавания темы «Криволинейные интегралы» // Modern European Researches. Salzburg, 2025. – Т.1, №2. - P. 83-91.
16. Иванков П.Л., Обухов В.П. Методика преподавания темы «Криволинейные интегралы»…

***Nina G. Khorkova*,**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow
ninakhorkova@bmstu.ru
***Pavel A. Vlasov*,**
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow

pvlx@mail.ru

Methodological aspects of teaching the topic "Multiple integrals" at the technical university

Abstract. The article discusses the methodology of teaching multiples, curvilinear and surface integrals to students of technical universities. Consideration of this issue is important, since this section of mathematics is mandatory for all engineering students to study. The purpose of the article is to discuss the definition of multiples, curvilinear and surface integrals. A scheme for introducing these concepts is presented. The article may be useful for teachers of technical universities and students.

Keywords: double integral, triple integral, line integral, surface integral.

MODERN EUROPEAN RESEARCHES: ISSUE 1 (T.1), 2026
ISSN 2311-8806

FOUNDER AND PUBLISHER
Autonomous Non-Profit Organization of Additional Professional Education
"Interregional Center for Innovative Technologies in Education", Kirov

EDITORIAL ADDRESS
610047. OF.1003, SVERDLOV STR. 32A, KIROV, RUSSIAN FEDERATION
publisher@doaj.net

PRINTING HOUSE
Autonomous non-profit organization of supplementary professional education
“Inter-regional center of innovative techniques in education”

Sent for printing 31-05-2026
Circulation 1000
Order 013120/127

© All Rights Reserved, 2026